Ülesanne. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε-δ-definitsioonist, tõestage, et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-5}=\infty.$$

Lahendus 1. Piirväärtuse all asuva funktsiooni määramispiirkond on

$$X=\mathbb{R}\setminus\{5\}.$$

Tarvis on veenduda, et kehtib lause

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \quad \forall x\in X \quad x>M \Rightarrow \frac{x^2}{x-5}>N. \tag{1}$$

Fikseerime $N>0$. Meie eesmärk on leida reaalarv $M>0$ omadusega, et

$$\forall x\in X \quad x>M \Rightarrow \frac{x^2}{x-5}>N. \tag{2}$$

Analüüsime implikatsiooniga tingimust olukorras, kus $x\in X$. Kui $M\geqslant 5$, siis saame, et

$$x>M \quad \Rightarrow \quad x>5. \tag{3}$$

Seega juhul $M\geqslant 5$ kehtib implikatsioon

$$\frac{x^2}{x-5}>N \quad \Leftarrow \quad \frac{x^2}{x}>N \quad \Leftarrow \quad x>N.$$

Olgu $M=\max\{5,N\}$. Siis $M\geqslant 5$ ja $M\geqslant N$. Tõestame, et kehtib (2). Fikseerime $x\in X$. Saame, et

$$x>M \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x>5, \\ x>N \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x-5}>N.$$

Oleme näidanud, et kehtib (2). Niisiis on lause (1) tõestatud.

Lahendus 2. Piirväärtuse all asuva funktsiooni määramispiirkond on

$$X=\mathbb{R}\setminus\{5\}.$$

Tarvis on veenduda, et kehtib lause

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \quad \forall x\in X \quad x>M \Rightarrow \frac{x^2}{x-5}>N. \tag{4}$$

Fikseerime $N>0$. Meie eesmärk on leida reaalarv $M>0$ omadusega, et

$$\forall x\in X \quad x>M \Rightarrow \frac{x^2}{x-5}>N. \tag{5}$$

Analüüsime implikatsiooniga tingimust olukorras, kus $x \in X$. Saame, et

$$\frac{x^2}{x-5} > N \quad \Leftarrow \quad \frac{x^2-25+25}{x-5} > N \quad \Leftarrow \quad x+5+\frac{25}{x-5} > N. \tag{6}$$

Kui $M \geqslant 5$, siis saame, et

$$x > M \quad \Rightarrow \quad x > 5. \tag{7}$$

Seega juhul $M \geqslant 5$ kehtib implikatsioon

$$x+5+\frac{25}{x-5} > N \quad \Leftarrow \quad x > N.$$

Olgu $M = \max\{5, N\}$. Siis $M \geqslant 5$ ja $M \geqslant N$. Tõestame, et kehtib (5). Fikseerime $x \in X$. Saame, et

$$x > M \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 5, \\ x > N \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x+5+\frac{25}{x-5} > N \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x-5} > N.$$

Oleme näidanud, et kehtib (5). Niisiis on lause (4) tõestatud.

Märkus 1. Arvu $\max\{5, N\}$ asemel võime M rolli valida ka näiteks $N+5$ või $100\max\{5, N\}$ või millise tahes muu arvu, mille korral üheaegselt kehtivad võrratused $M \geqslant 5$ ja $M \geqslant N$.

Märkus 2. Lahendus 1 võimaldab sama mõttekäiguga tõestada ka koondumisi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{x-5} = \infty$, kus $k > 1$ on suvaline reaalarv. Lahendus 2 piirdub ainult juhtudega, kus $k \in \{2, 3, \ldots\}$, vastavalt tuleb kasutada $x^k - 5^k$ sobivaid tegurdusi.