I peatükk.
Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

§ 1. Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

1.1. m-mõõtmelise eukleidilise ruumi mõiste

Olgu $m \in \mathbb{N}$. Tähistame

$$\mathbb{R}^m := \big\{(x_1, \dots, x_m)\colon\ x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\big\}$$

(hulga $\mathbb{R}^m$ elemendid on niisiis kõikvõimalikud reaalarvuliste komponentidega m-komponendilised järjendid). Hulga $\mathbb{R}^m$ elemente hakkame nimetama *punktideks.* Me kasutame tähistust $(x_i)_{i=1}^n := (x_1, \dots, x_n)$. Arvusid $x_1, \dots, x_m$ nimetame selle punkti *koordinaatideks.*

Kõneldes edaspidi *tasandist* või lihtsalt *ruumist,* mõistame me selle all vastavalt ruumi $\mathbb{R}^2$ või $\mathbb{R}^3$: tasandi (ja ruumi) igale punktile vastavad (fikseeritud ristkoordinaadistiku puhul) tema üheselt määratud koordinaadid; teiselt poolt, iga tasandi (ja ruumi) punkt on üheselt määratud oma koordinaatidega.

Punktide $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $Q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ vaheline *kaugus* $d(P, Q)$ defineeritakse võrdusega

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i|^2}. \tag{1.1}$$

Hulka $\mathbb{R}^m$ koos temas valemiga (1.1) defineeritud kaugusega nimetatakse *m-mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks* $\mathbb{R}^m$.

Valemi (1.1) poolt antud kaugus ruumides $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ langeb kokku nn. loomuliku kaugusega nendes ruumides: nendes ruumides tuleb punktide P ja Q vaheline valemist (1.1) rehkendatav kaugus $d(P, Q)$ sama, mis lõigu PQ pikkus (rehkendatuna välja elementaargeomeetrilistele argumentidele tuginedes).

Tõepoolest, juhul $m = 1$, tähistades $P = (x) = x$ ja $Q = (y) =: y$,

$$d(P,Q) = |y - x|.$$

juhul $m = 2$, tähistades $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$,

$$d(P,Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

(selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu PQ pikkus); juhul $m = 3$, tähistades $P = (x_1, y_1, z_1)$ ja $Q = (x_2, y_2, z_2)$,

$$d(P,Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}$$

(ka selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu PQ pikkus).

Loetleme kauguse olulisemad omadused: mis tahes $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ korral

1° $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$;

2° $d(P,Q) = d(Q,P)$;

3° $d(P,Q) \leqslant d(P,R) + d(R,Q)$.

Omadusi 1°–3° nimetatakse *kauguse aksioomideks.* Aksioom 3° väidab sisuliselt, et kolmnurga kahe külje pikkuste summa ei ületa kolmanda külje pikkust. Seepärast nimetatakse aksioomi 3° *kolmnurga võrratuseks.* Aksioomid 1° ja 2° järelduvad vahetult kauguse definitsioonist.

Kolmnurga võrratuse 3° tõestus. Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m)$, $Q = (y_1, \ldots, y_m)$, $R = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$. Kolmnurga võrratuse tõestuseks peame näitama, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2},$$

milleks, arvestades, et $\sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \big(|y_i - z_i| + |z_i - x_i|\big)^2}$, piisab näidata, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \big(|y_i - z_i| + |z_i - x_i|\big)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2}$$

ehk, tähistades $a_i = |y_i - z_i|$ ja $b_i = |z_i - x_i|$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

ehk (tõstes selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} + \sum_{i=1}^m b_i^2$$

ehk, arvestades, et $\sum\limits_{i=1}^m (a_i+b_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^m a_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^m a_i\,b_i + \sum\limits_{i=1}^m b_i^2$,

$$\sum_{i=1}^m a_i\,b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \tag{1.2}$$

ehk (tõstes jällegi selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\Big(\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^m b_i^2\Big). \tag{1.3}$$

Kuna

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\Big)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^m a_j\,b_j\Big) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j \\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j = \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^m b_i^2\Big) &= \Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^m b_j^2\Big) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i^2\,b_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i^2\,b_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^m a_i^2\,b_j^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i^2\,b_j^2 + a_j^2\,b_i^2),\end{aligned}$$

siis võrratus (1.3) on samaväärne võrratusega

$$2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j \leqslant \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i^2\,b_j^2 + a_j^2\,b_i^2),$$

mis kehtib, sest

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i^2\,b_j^2 + a_j^2\,b_i^2) - 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i^2\,b_j^2 - 2\,a_i\,b_j\,a_j\,b_i + a_j^2\,b_i^2) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i\,b_j - a_j\,b_i)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

□

Märkus 1.1. Võrratust (1.2) (mis kehtib mis tahes $a_1, b_1, \ldots, b_1, b_m \geqslant 0$ korral), nimetatakse *Cauchy võrratuseks.*

Ülesanne 1.1. Tõestada *tagurpidi kolmnurga võrratus:* mis tahes $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ korral

$$d(P,Q) \geqslant \big|d(P,R) - d(Q,R)\big|.$$

Tagurpidi kolmnurga võrratus väidab sisuliselt, et kolmnurga kahe külje pikkuste vahe ei ületa kolmanda külje pikkust.

NÄPUNÄIDE. Kasutada kauguse aksioome 2° ja 3°.

1.2. Kerad ja risttahukad. Punkti ümbrused

Definitsioon 1.1. Olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $r > 0$.

Hulka

$$B(P_0, r) := \big\{P \in \mathbb{R}^m\colon\ d(P, P_0) < r\big\}$$

(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide hulka, mille kaugus punktist P_0 on väiksem kui r) nimetatakse *lahtiseks keraks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Hulka

$$\overline{B}(P_0, r) := \big\{P \in \mathbb{R}^m\colon\ d(P, P_0) \leqslant r\big\}$$

(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide hulka, mille kaugus punktist P_0 ei ületa arvu r) nimetatakse *kinniseks keraks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Hulka

$$S(P_0, r) := \big\{P \in \mathbb{R}^m\colon\ d(P, P_0) = r\big\}$$

(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide hulka, mis asuvad punktist P_0 kaugusel r) nimetatakse *sfääriks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Juhul $m = 1$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, on lahtine kera ja kinnine kera vastavalt vahemik ja lõik: tähistades $P_0 = (x_0) =: x_0$,

$$B(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r),$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x - x_0| \leqslant r\} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Juhul $m = 2$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^2$, on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine ring, kinnine ring ja ringjoon: tähistades $P_0 = (x_0, y_0)$,

$$B(P_0, r) = \big\{(x,y)\colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < r^2\big\},$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \big\{(x,y)\colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leqslant r^2\big\}$$
$$S(P_0, r) = \big\{(x,y)\colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = r^2\big\}.$$

Juhul $m = 3$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^3$, on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine kera, kinnine kera ja kerapind (ehk sfäär) selles tähenduses, nagu me neid tunneme analüütilisest geomeetriast: tähistades $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$B(P_0, r) = \big\{(x,y,z)\colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 < r^2\big\},$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \big\{(x,y,z)\colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 \leqslant r^2\big\},$$
$$S(P_0, r) = \big\{(x,y,z)\colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 = r^2\big\}.$$

Definitsioon 1.2. Lahtist kera $B(P_0, \varepsilon)$ ruumis $\mathbb{R}^m$ nimetatakse punkti P_0 *ε-ümbruseks* ja tähistatakse ka sümboliga $U_\varepsilon(P_0)$.

Mis tahes hulka ruumis $\mathbb{R}^m$, mis sisaldab punkti P_0 mingi ε-ümbruse, nimetatakse punkti P_0 *ümbruseks.*

Definitsioon 1.3. Olgu $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Hulka

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m) &= \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ x_i \in (a_i, b_i),\ i = 1, \ldots, m\big\} \\ &= \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, m\big\}\end{aligned} \tag{1.4}$$

nimetatakse *lahtiseks koordinaatristtahukaks.* Hulka

$$\begin{aligned}[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] &= \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ x_i \in [a_i, b_i],\ i = 1, \ldots, m\big\} \\ &= \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, m\big\}\end{aligned} \tag{1.5}$$

nimetatakse *kinniseks koordinaatristtahukaks.*

Vahemikke $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ ja lõike $[a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m]$ nimetatakse vastavalt risttahukate (1.4) ja (1.5) *servadeks.* Risttahukat, mille kõik servad on võrdse pikkusega, nimetatakse *kuubiks.*

Risttahukaid ja kuupe ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse vastavalt *ristkülikuteks* ja *ruutudeks.* Ristkülikute (sealhulgas ruutude) puhul kõneldakse servade asemel *külgedest.*

Definitsioon 1.4. Olgu $d_1, \ldots, d_m > 0$.

Lahtist koordinaatristtahukat

$$\begin{aligned}&(x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \cdots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m) \\ &\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ x_i^0 + d_i < x_i < x_i^0 + d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\} \\ &\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ |x_i - x_i^0| < d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\}\end{aligned}$$

nimetatakse *lahtiseks (koordinaat)risttahukaks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) *keskpunktiga* P_0.

Kinnist koordinaatristtahukat

$$\begin{aligned}&[x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1] \times \cdots \times [x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m] \\ &\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ x_i^0 + d_i \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\} \\ &\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m)\colon\ |x_i - x_i^0| \leqslant d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\}\end{aligned}$$

nimetatakse *kinniseks (koordinaat)risttahukaks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) *keskpunktiga* P_0.

Lause 1.1. (a) *Iga kera B korral ruumis $\mathbb{R}^m$ leiduvad sama keskpunktiga (koordinaattelgedega paralleelsete servadega) kuubid C_1 ja C_2 nii, et*

$$C_1 \subset B \subset C_2.$$

(b) *Iga koordinaatristtahuka C korral ruumis $\mathbb{R}^m$ leiduvad sama keskpunktiga kerad B_1 ja B_2 nii, et*

$$B_1 \subset C \subset B_2.$$

Muuhulgas järeldub lausest 1.1, (b), et *(koordinaat)risttahukas keskpunktiga P_0 on punkti P_0 ümbrus.* Lahtiseid ja kinniseid koordinaatristtahukaid keskpunktiga P_0 nimetatakse vastavalt punkti P_0 *lahtisteks* ja *kinnisteks risttahukakujulisteks ümbrusteks.*

Lause 1.1 tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada üks lemma (mida on mugav kasutada ka järgnevas näiteks lausete 4.6 ja 2.1 tõestustes).

Lemma 1.2. *Olgu* $P = (x_1, \ldots, x_m)$, $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. *Siis mis tahes* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *korral*

$$|x_j - x_j^0| \leqslant d(P, P_0) \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|. \tag{1.6}$$

Tõestus. Mis tahes $j \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$\begin{aligned} |x_j - x_j^0| &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i - x_i^0|^2} \leqslant \sqrt{m \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|^2} = \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sqrt{|x_i - x_i^0|^2} \\ &= \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|. \end{aligned}$$

Võrratused (1.6) sisalduvad eelnevas võrratusteahelas, sest $d(P, P_0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m |x_i - x_i^0|^2}$.

$\square$

Lause 1.1 tõestus. Lause väited piisab tõestada ainult lahtiste kerade B ja lahtiste koordinaatristtahukate C jaoks (sest iga kinnine kera sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist kera ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises keras; samuti, iga kinnine koordinaatristtahukas sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist koordinaatristtahukat ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises koordinaatristtahukas).

Olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

(a). Olgu $r > 0$. Vaatleme lahtist kera $B := B(P_0, r)$. Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m)$.

Kui mingi $\delta > 0$ korral

$$|x_i - x_i^0| < \delta \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral},$$

siis valemi (1.6) põhjal

$$d(P, P_0) < \delta\sqrt{m};$$

niisiis, kui

$$|x_i - x_i^0| < \frac{r}{\sqrt{m}} \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral},$$

siis

$$d(P, P_0) < \frac{r}{\sqrt{m}}\sqrt{m} = r.$$

Siit järeldub, et, tähistades $C_1 := \left(x_1^0 - \frac{r}{\sqrt{m}}, x_1^0 + \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \times \cdots \times \left(x_m^0 - \frac{r}{\sqrt{m}}, x_m^0 + \frac{r}{\sqrt{m}}\right)$, kehtib $C_1 \subset B(P_0, r)$.

Teiselt poolt, kui $P \in B(P_0, r)$, s.t. $d(P, P_0) < r$, siis valemi (1.6) põhjal iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral $|x_i - x_i^0| < r$, aga see tähendab, et $P \in (x_1^0 - r, x_1^0 + r) \times \cdots \times (x_m^0 - r, x_m^0 + r) =: C_2$; niisiis $B(P_0, r) \subset C_2$.

(b). Olgu $d_1, \ldots, d_m > 0$. Tähistame

$$C := (x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \cdots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m).$$

Olgu $P = (x_1, \dots, x_m)$.

Kui mingi $\delta > 0$ korral $d(P, P_0) < \delta$, siis valemi (1.6) põhjal ka

$$|x_i - x_i^0| < \delta \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral;}$$

niisiis, kui võtta $\delta := \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i$, siis tingimusest $d(P, P_0) < \delta$ järeldub, et

$$|x_i - x_i^0| < \delta \leqslant d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral;}$$

seega $B_1 := B(P_0, \delta) \subset C$.

Teiselt poolt, tähistades $d := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i$, näeme valemi (1.6) teisest võrratusest, et kui $P \in C$, siis $d(P, P_0) < \sqrt{m}\, d$ ehk, teisisõnu $P \in B(P_0, \sqrt{m}\, d)$. Siit järeldub, et $C \subset B(P_0, \sqrt{m}\, d) =: B_2$. □

1.3. Lahtised ja kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.5. Punkti $P \in \mathbb{R}^m$ nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *kuhjumispunktiks,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral $\big(\mathcal{U}_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D}\big) \setminus \{P\} \neq \emptyset$ (s.t. punkti P iga ümbrus sisaldab temast erinevaid hulga D punkte).

Märkus 1.2. Rõhutame, et ruumis $\mathbb{R}^m$ üldjuhul

- hulgal võib kuhjumispunkte leiduda, aga võib ka mitte leiduda;
- hulga kuhjumispunkt võib kuuluda sellesse hulka, aga võib ka mitte kuuluda.

Ülesanne 1.2. Tõestada, et

(a) ruumi $\mathbb{R}^m$ lõplikul alamhulgal ei ole kuhjumispunkte;

(b) kui $r > 0$, $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, $P_1 := (x_1^0 + r, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, siis P_1 on nii lahtise kera $B(P_0, r)$ kui ka kinnise kera $\overline{B}(P_0, r)$ kuhjumispunkt, kusjuures $P_1 \in \overline{B}(P_0, r)$, kuid $P_1 \notin B(P_0, r)$.

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et punkt $P \in \mathbb{R}^m$ on hulga $\mathcal{D}$

- *sisepunkt,* kui leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset \mathcal{D}$ (s.t. punktil P leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas D);
- *rajapunkt,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral

$$U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$$

(s.t. punkti P iga ümbrus sisaldab nii hulga $\mathcal{D}$ punkte kui ka hulka $\mathcal{D}$ mittekuuluvaid punkte).

Definitsioon 1.7. Hulga $\mathcal{D}$ kõigi sisepunktide hulka nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *sisemuseks* ja tähistatakse sümboliga $\mathcal{D}^\circ$.

Hulga $\mathcal{D}$ kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *rajaks* ja tähistatakse sümboliga $\partial\mathcal{D}$.

Hulga $\mathcal{D}$ ja tema raja ühendit nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *sulundiks* ja tähistatakse sümboliga $\overline{\mathcal{D}}$:

$$\overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}.$$

Järgnev lause, mis toob välja sisemuse, raja ja sulundi lihtsamad omadused, järeldub vahetult vastavatest definitsioonidest.

Lause 1.3. (a) $\mathcal{D}^\circ \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$;

(b) $\mathcal{D}^\circ \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$;

(c) *hulga $\mathcal{D}$ iga punkt on kas hulga $\mathcal{D}$ sisepunkt või selle hulga rajapunkt, s.t. iga $x \in \mathcal{D}$ korral realiseerub täpselt üks järgmistest teineteist välistavatest võimalustest:*

$$x \in \mathcal{D}^\circ \qquad \text{või} \qquad x \in \partial\mathcal{D};$$

(d) $\partial\mathcal{D} = \partial(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})$;

(e) *iga $x \in \mathbb{R}^m$ korral realiseerub täpselt üks järgmistest üksteist välistavatest võimalustest:*

$$x \in \mathcal{D}^\circ, \qquad x \in \partial\mathcal{D} \qquad \text{või} \qquad x \in (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})^\circ.$$

Definitsioon 1.8. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D}$ on

- *lahtine,* kui $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ$ (s.t. kõik hulga $\mathcal{D}$ punktid on tema sisepunktid);
- *kinnine,* kui $\mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D}$ (s.t. hulk $\mathcal{D}$ sisaldab oma raja).

Vahetult definitsioonist järeldub, et *hulk $\mathcal{D}$ on kinnine parajasti siis, kui $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$.* Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \text{ on kinnine} \quad &\iff \quad \mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D} \quad \iff \quad \mathcal{D} \supset \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \quad \iff \quad \mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \\ &\iff \quad \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Lause 1.4. (a) *Lahtine kera ruumis $\mathbb{R}^m$ on lahtine hulk.*

(b) *Kinnine kera ruumis $\mathbb{R}^m$ on kinnine hulk.*

Väite (b) tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnev lihtne lemma.

Lause 1.5. *Hulk $\mathcal{D}$ on lahtine parajasti siis, kui tema täiend $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ on kinnine.*

Tõestus:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \text{ on lahtine} \quad &\iff \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ \quad \iff \quad \mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset \quad \iff \quad \partial\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \\ &\iff \quad \partial(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \quad \iff \quad \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \text{ on kinnine.}\end{aligned}$$

□

Lause 1.4 tõestus. Olgu $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $r > 0$.

(a). Olgu $P \in B(P_0, r)$. Veendumaks kera $B(P_0, r)$ lahtisuses, piisab näidata, et P on selle kera sisepunkt, s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $\varepsilon > 0$ ja $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral (kolmnurga võrratuse põhjal)

$$d(Q, P_0) \leqslant d(Q, P) + d(P, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0);$$

niisiis, kui võtta $\varepsilon := r - d(P, P_0) > 0$, siis mis tahes $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral

$$d(Q, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0) = r - d(P, P_0) + d(P, P_0) = r,$$

s.t. $Q \in B(P_0, r)$ ning seega $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$.

(b). Veendumaks kera $\overline{B}(P_0, r)$ kinnisuses, piisab lause 1.5 põhjal näidata, et täiend $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ on lahtine, milleks, fikseerides vabalt $P \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$, piisab näidata, et P on hulga $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ sisepunkt, s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $\varepsilon > 0$ ja $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral (tagurpidi kolmnurga võrratuse põhjal, vt. ülesannet 1.1)

$$d(Q, P_0) \geqslant d(P, P_0) - d(P, Q) > d(P, P_0) - \varepsilon;$$

niisiis, kui võtta $\varepsilon := d(P, P_0) - r > 0$, siis mis tahes $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral

$$d(Q, P_0) > d(P, P_0) - \varepsilon = d(P, P_0) - \big(d(P, P_0) - r\big) = r,$$

s.t. $Q \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ ning seega $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$. □

Märkus 1.3. Teine võimalus lause 1.4 tõestamiseks on tõestada kõigepealt

Lause 1.6. *Mis tahes $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ning $r > 0$ korral*

$$\partial B(P_0, r) = S(P_0, r) \quad \text{ja} \quad \partial\overline{B}(P_0, r) = S(P_0, r).$$

Teisisõnu, kera raja on sama keskpunkti ja raadiusega sfäär.

Kinnise kera kinnisus järeldub lausest 1.6 vahetult kinnisuse definitsiooni põhjal. Veendumaks lahtise kera lahtisuses, piisab lause 1.5 põhjal näidata, et tema täiend on kinnine, mis, arvestades, et hulga ja tema täiendi rajad on võrdsed, järeldub jällegi lausest 1.6 vahetult hulga kinnisuse definitsiooni põhjal.

Lause 1.6 tõestus.

Ülesanne 1.3. Tõestada lause 1.6.

□

Märkus 1.4. Ruumi $\mathbb{R}^m$ hulkade korral võivad esineda kõik järgnevad (üksteist välistavad) olukorrad:

(1) hulk on lahtine, kuid mitte kinnine;

(2) hulk on kinnine, kuid mitte lahtine;

(3) hulk pole ei kinnine ega lahtine;

(4) hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine.

Seejuures hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine (s.t. realiseerub olukord (4)) parajasti siis, kui tema raja on tühi hulk. Ainsad niisuguse omadusega hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$ on tühi hulk $\emptyset$ ja kogu hulk $\mathbb{R}^m$ ise.

§ 2. Jadad ruumis $\mathbb{R}^m$

2.1. Jada koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 2.1. Kui igale naturaalarvule $n \in \mathbb{N}$ on vastavalt mingile eeskirjale seatud vastavusse mingi (üheselt määratud) punkt $P_n \in \mathbb{R}^m$, siis öeldakse, et on antud *jada*

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \tag{2.1}$$

Jada (2.1) tähistatakse ka sümboliga $(P_n)_{n=1}^\infty$ või lihtsalt (P_n). Kõneldes ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide jadast, ütleme me edaspidi lihtsalt *jada ruumis* $\mathbb{R}^m$.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ *koondub* punktiks $P \in \mathbb{R}^m$, kui

$$d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P) < \varepsilon.$$

Punkti P nimetatakse seejuures jada (P_n) *piirväärtuseks* ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{või} \quad P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P.$$

Ülesanne 2.1. Olgu jadad (P_n) ja (Q_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ ning punktid $P, Q \in \mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ ja $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q$. Tõestada, et

(a) $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(P, Q)$;

(b) $d(P_n, Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(P, Q)$.

Näpunäide. Kasutada tagurpidi kolmnurga võrratust (vt. ülesannet 1.1).

Järgnev lause kirjeldab koonduvust ruumis $\mathbb{R}^m$.

Lause 2.1. *Olgu $P_n = (x_1^n, \dots, x_m^n), P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$;

(ii) $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ *iga* $i \in \{1, \dots, m\}$ *korral.*

Teisisõnu, lause 2.1 ütleb, et *jada $(P_n)_{n=1}^\infty$ ruumis $\mathbb{R}^m$ koondub punktiks $P \in \mathbb{R}^m$ parajasti siis, kui selle jada vastavate koordinaatide jadad koonduvad punkti P vastavateks koordinaatideks* (niisugusel juhul öeldakse, et jada $(P_n)_{n=1}^\infty$ *koondub koordinaaditi* punktiks P). Niisiis, *koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$ on samaväärne koordinaaditi koonduvusega.*

LAUSE 2.1 TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Lause 1.2 põhjal iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$0 \leqslant |x_i^n - x_i| \leqslant d(P_n, P) \qquad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{2.2}$$

Kui kehtib väide (i), siis $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, seega järeldub võrratustest (2.2) jada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal, et iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $|x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ehk, teisisõnu, $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$; niisiis väide (ii) kehtib.

(ii)$\Rightarrow$(i). Lause 1.2 põhjal

$$0 \leqslant d(P_n, P) \leqslant \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \qquad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{2.3}$$

Kui kehtib väide (ii), siis iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $|x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, järelikult ka $\max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ning seega ka $\sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; niisiis järeldub võrratustest (2.3) jada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal, et $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, s.t. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$, s.t. väide (i) kehtib. □

Lause 2.2. *Punkt $P_0 \in \mathbb{R}^m$ on hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt parajasti siis, kui leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$ (s.t. leidub punktist P_0 erinevate hulga $\mathcal{D}$ punktide jada, mis koondub punktiks P_0).*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu punkt P_0 hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in \big(U_{\frac{1}{n}}(P_0) \cap \mathcal{D}\big) \setminus \{P_0\}$. Punktid P_n rahuldavad tingimusi

$$0 < d(P_n, P_0) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

seega jada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal ka $d(P_n, P_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, s.t. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$.

Piisavus. Leidugu punktid $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, ning olgu $\varepsilon > 0$. Tõestamaks, et P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt, peame leidma punkti $P \in U_\varepsilon(P_0) \cap \mathcal{D}$, $P \neq P_0$. Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis saame valida indeksi $n \in \mathbb{N}$, mille korral $d(P_n, P_0) < \varepsilon$, s.t. $P_n \in U_\varepsilon(P_0)$. Eelduse põhjal $P_n \in \mathcal{D}$, kusjuures $P_n \neq P_0$, seega võime võtta $P := P_n$. □

§ 3. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

3.1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste

Definitsioon 3.1. Kujutusi

$$f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{kus } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m, \tag{3.1}$$

nimetatakse m *muutuja funktsioonideks.*

Kõikvõimalikke m muutuja funktsioone, kus $m \geqslant 2$, nimetatakse *mitme muutuja funktsioonideks.*

Funktsiooni (3.1) määramispiirkonna $\mathcal{D}$ iga punkt $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}$ on üheselt määratud oma koordinaatidega $x_1, \ldots, x_m$; teiselt poolt, punktiga $P \in \mathcal{D}$ on üheselt määratud tema koordinaadid $x_1, \ldots, x_m$. Termin "m muutuja funktsioon" on niisiis põhjendatud asjaoluga, et sellise funktsiooni väärtused on määratud määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide koordinaate tähistavate m muutuja $x_1, \ldots, x_m$ väärtustega. Neid muutujaid (nagu ka määramispiirkonna punkte tähistavat muutujat P) nimetatakse funktsiooni (3.1) *argumentideks* ning, kui selle funktsiooni väärtuste märkimiseks kasutada muutujat u, siis selle funktsiooni märkimiseks kasutatakse ka tähistust

$$u = f(x_1, \ldots, x_m) \quad \text{või} \quad u = u(x_1, \ldots, x_m).$$

3.2. Mitme muutja funktsiooni piirväärtus

Olgu funktsioon $u = f(P)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et funktsiooni f *piirväärtus* punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on arv c (või funktsioon f *koondub* arvuks c protsessis $P \to P_0$ (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile P_0)) ja kirjutatakse

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} c,$$

või

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, \ldots, x_m) = c \quad \text{või} \quad f(x_1, \ldots, x_m) \xrightarrow[\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots \\ x_m \to x_m^0}]{} c,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c)| < \varepsilon.$$

Ruumis $\mathbb{R}^m$ kasutame piirprotsessi $(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ märkimisel ka tähistust $x_1, \ldots, x_m \longrightarrow x_1^0, \ldots, x_m^0$; näiteks tähistame funktsiooni $u = f(x, y)$ piirväärtust punktis (x_0, y_0) sümboliga $\lim\limits_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y)$.

Definitsioon 3.3. Kui $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} 0$, siis öeldakse, et funktsioon f on punktis P_0 *lõpmata väike* (või protsessis $P \to P_0$ lõpmata väike või ka, et funktsioon f *hääbub* protsessis $P \to P_0$).

Definitsioon 3.4. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on ∞ (loetakse: lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub realarv $\delta > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(P) > E.$$

Definitsioon 3.5. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on $-\infty$ (loetakse: miinus lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} -\infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub realarv $\delta > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(P) < -E.$$

Definitsioon 3.6. Kui $|f(P)| \xrightarrow[P\to P_0]{} \infty$, siis öeldakse, et funktsioon f on punktis P_0 *lõpmata suur* (või protsessis $P \to P_0$ lõpmata suur).

Teoreem 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteerium)**.** *Olgu P_0 funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt ning olgu $c \in \mathbb{R}$ või $c = \pm\infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} c$*;*

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\},\ n \in \mathbb{N},\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c.$

Teisisõnu, funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 on c parajasti siis, kui iga punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ korral on vastava funktsiooni väärtuste jada $\big(f(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ piirväärtus c.

Tõestus. Tõestame teoreemi ainult juhu $c \in \mathbb{R}$ jaoks. Juhtudel $c = \infty$ ja $c = -\infty$ on tõestus analoogiline.

(i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i) ning olgu punktid $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$. Fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab meil implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(ii) tõestuseks leida indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

Kuna $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} c$, siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c)| < \varepsilon.$$

Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P_0) < \delta.$$

Kui nüüd $n \geqslant N$, siis $P_n \in \mathcal{D}$ ja $0 < d(P_n, P_0) < \delta$ ning järelikult

$$|f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et (i) ei kehti. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, mille korral

$$d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad |f(P_n) - c| \geqslant \varepsilon.$$

Aga nüüd $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, kuid mitte $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, mis on vastuolus eeldusega (ii). □

Järeldus 3.2. *Mitme muutuja funktsioonil saab antud punktis eksisteerida ülimalt üks piirväärtus.*

Tõestus. Olgu P_0 funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt ning olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ sellised, et

$$f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \beta.$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et $\alpha = \beta$. Selleks valime mingi punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ (niisugune jada eksisteerib lause 2.2 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt); siis funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi (teoreemi 3.1) põhjal

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$$

ning järelikult jada piirväärtuse ühesuse tõttu $\alpha = \beta$, nagu soovitud. □

3.3. Funktsiooni piirväärtuse omadusi

Teoreem 3.3. *Eksisteerigu funktsioonidel f ja g lõplik piirväärtus oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis P_0. Siis ka nende funktsioonide summal $f + g$, vahel $f - g$, korrutisel fg ning, kui $\lim_{P\to P_0} g(P) \neq 0$, siis ka jagatisel f/g eksisteerib punktis P_0 lõplik piirväärtus, kusjuures*

$$\lim_{P\to P_0}\big(f(P) + g(P)\big) = \lim_{P\to P_0} f(P) + \lim_{P\to P_0} g(P),$$
$$\lim_{P\to P_0}\big(f(P) - g(P)\big) = \lim_{P\to P_0} f(P) - \lim_{P\to P_0} g(P),$$
$$\lim_{P\to P_0}\big(f(P)\, g(P)\big) = \lim_{P\to P_0} f(P)\, \lim_{P\to P_0} g(P),$$
$$\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0} g(P)}.$$

TÕESTUS. Tähistame

$$\lim_{P\to P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P\to P_0} g(P) =: \beta.$$

Olgu punktid $P_n \in \mathcal{D}\setminus\{P_0\}$, $n\in\mathbb{N}$, sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$. Teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$f(P_n)\pm g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\pm\beta, \quad f(P_n)\,g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\,\beta \quad \text{ja} \quad \frac{f(P_n)}{g(P_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha}{\beta}$$

(siin viimane koonduvus peab aset leidma eeldusel, et $\beta \neq 0$), mis kehtib jada piirväärtuse vastavate omaduste põhjal, sest (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \text{ja} \quad g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta.$$

□

Lause 3.4 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse monotoonsus)**.** *Leidugu funktsioonide f ja g määramispiirkonna $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^m$ kuhjumispunktil P_0 ümbrus $\mathcal{U}$, mille korral*

$$f(P) \leqslant g(P) \quad \textit{iga } P\in(\mathcal{U}\cap\mathcal{D})\setminus\{P_0\} \textit{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$, siis

$$\lim_{P\to P_0} f(P) \leqslant \lim_{P\to P_0} g(P),$$

TÕESTUS. Eksisteerigu piirväärtused

$$\lim_{P\to P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P\to P_0} g(P) =: \beta.$$

Lause tõestuseks peame näitama, et $\alpha \leqslant \beta$. Selleks valime mingi punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate hulga $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ (niisugune jada eksisteerib lause 2.2 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N\in\mathbb{N}$ nii, et

$$n\geqslant N \quad\Longrightarrow\quad P_n\in\mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes $n\geqslant N$ korral $P_n\in\mathcal{U}\cap\mathcal{D}$, seega

$$f(P_n)\leqslant g(P_n).$$

Kuna teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g(P_n) = \beta,$$

siis jada piirväärtuse monotoonsuse tõttu $\alpha\leqslant\beta$, nagu soovitud. □

Lause 3.5 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse sändvitšteoreem)**.** *Leidugu funktsioonide f, g ja h määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktil P_0 ümbrus $\mathcal{U}$, mille korral*

$$f(P) \leqslant g(P) \leqslant h(P) \quad \text{iga } P \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\} \text{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$, kusjuures need piirväärtused on võrdsed:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} h(P) =: c, \tag{3.2}$$

siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{P \to P_0} g(P)$, kusjuures

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = c.$$

TÕESTUS. Eksisteerigu piirväärtused $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$ ning kehtigu võrdus (3.2). Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks P_0 koonduv punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada. Veendumaks, et $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) = c$, piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$\lim_{n \to \infty} g(P_n) = c. \tag{3.3}$$

Kuna $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes $n \geqslant N$ korral $P_n \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, seega

$$f(P_n) \leqslant g(P_n) \leqslant h(P_n).$$

Kuna (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} h(P_n) =: c$$

siis jada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal kehtib (3.3). □

Lause 3.6. *Olgu P_0 funktsioonide f ja g määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt, kusjuures*

(1) $f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} 0$*;*

(2) *funktsioon g on punkti P_0 mingis ümbruses tõkestatud, s.t leiduvad punkti P_0 ümbrus $\mathcal{U}$ ja arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|g(P)| \leqslant M \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \text{ korral.}$$

Siis ka

$$f(P)\, g(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} 0.$$

Teisisõnu, lause 3.6 ütleb, et *hääbuva funktsiooni ja tõkestatud funktsiooni korrutis on hääbuv.*

LAUSE 3.6 TÕESTUS. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks P_0 koonduv punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada. Veendumaks, et $f(P)\,g(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} 0$, piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$f(P_n)\,g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.4}$$

Selleks märgime, et

- $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (see järeldub eeldusest (1) teoreemi 3.1 põhjal);
- jada $\big(g(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et
$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U},$$
seega
$$|g(P_n)| \leqslant M \quad \text{iga } n \geqslant N \text{ korral,}$$
järelikult
$$|g(P_n)| \leqslant \max\big\{|g(P_1)|, \dots, |g(P_N)|, M\big\} \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral).}$$

Kuna hääbuva jada ja tõkestatud jada korrutis on hääbuv jada, siis (3.4) kehtib. □

3.4. Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt.

Definitsioon 3.7. Öeldakse, et funktsioon f on *pidev* punktis P_0, kui

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0),$$

s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$, nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ ning olgu $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$ sellised, et $P := (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{D}$. Vahet

$$\Delta u := \Delta u(P) := f(P) - f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)$$

nimetatakse funktsiooni f (täis)muuduks punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

Kuna

$$P \to P_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta x_i \to 0,\ i = 1, \dots, m,$$

siis funktsiooni f pidevuse tingimuse võime kirja panna ka järgnevalt: *funktsioon $u = f(P)$ on pidev punktis P_0 parajasti siis, kui*

$$\Delta u \xrightarrow[\Delta x_i \to 0,\, i=1,\ldots,m]{} 0.$$

Vahetult teoreemist 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumist) järeldub

Teoreem 3.7 (mitme muutuja funktsiooni pidevuse Heine kriteerium)**.** *Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu punkt $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on pidev punktis P_0;*

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D},\, n \in \mathbb{N},\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0).$

Teisisõnu, funktsioon f on pidev punktis P_0 parajasti siis, kui iga punktiks P_0 koonduva määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^\infty$ korral koondub vastav funktsiooni väärtuste jada $\big(f(P_n)\big)_{n=1}^\infty$ funktsiooni väärtuseks $f(P_0)$ punktis P_0.

Definitsioon 3.8. Öeldakse, et funktsioon f on *pidev,* kui ta on pidev oma määramispiirkonna $\mathcal{D}$ igas kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$.

Me ütleme, et funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, kui tema ahend $f|_{\mathcal{D}_0}$ on pidev funktsioon.

3.5. Piirväärtus mööda pidevat joont

Definitsioon 3.9. Olgu $T \subset \mathbb{R}$ mingi intervall ning olgu

$$x_1 = \phi_1(t),\ \ldots,\ x_m = \phi_m(t), \quad t \in T, \tag{3.5}$$

pidevad funktsioonid. Siis hulka

$$L := \big\{\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) \colon\ t \in T\big\} \subset \mathbb{R}^m$$

nimetatakse *Jordani jooneks* ehk *pidevaks jooneks* (ruumis $\mathbb{R}^m$). Seejuures öeldakse, et joon L on antud *parameetriliste võrranditega* (3.5).

Kõneldes edaspidi lihtsalt *joonest,* mõistame me selle all pidevat joont.

Pidevat joont ruumis $\mathbb{R}^m$ on kõige lihtsam ette kujutada eeskirja (3.5) järgi ruumis liikuva punkti jäljena: ajahetkel $t \in [\alpha, \beta]$ on punkti koordinaadid $x_1 = \phi_1(t)$, $\ldots$, $x_m = \phi_m(t)$.

Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, olgu P_0 määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt ning olgu L pidev joon ruumis $\mathbb{R}^m$, mis sisaldab punkti P_0 ning mis sisaldub määramispiirkonnas $\mathcal{D}$, välja arvatud võib-olla punkt P_0, millelt me ei eelda kuulumist määramispiirkonda $\mathcal{D}$. Olgu joon L antud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_m = \phi_m(t), \quad t \in T, \tag{3.6}$$

kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall, ning olgu $t_0 \in T$ selline, et

$$P_0 = \big(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_m(t_0)\big).$$

Definitsioon 3.10. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{t\to t_0} f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big),$$

siis seda piirväärtust nimetame funktsiooni f piirväärtuseks punktis P_0 (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile P_0) *mööda joont* L.

Lause 3.8. *Kui funktisoonil f eksisteerib oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis P_0 (lõplik või lõpmatu) piirväärtus*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) =: c, \tag{3.7}$$

siis c on ka funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 mööda mis tahes pidevat joont (mis sisaldab punkti P_0 ning mis sisaldub määramispiirkonnas $\mathcal{D}$, välja arvatud võib-olla punkt P_0).

TÕESTUS. Eksisteerigu funktisoonil f punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) piirväärtus (3.7), olgu punkti P_0 sisaldav ning määramispiirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduv (välja arvatud võib-olla punkt P_0) pidev joon antud parameetriliste võrranditega (3.6), kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall, ning olgu $t_0 \in T$ selline, et

$$P_0 = \big(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_m(t_0)\big).$$

Peame näitama, et

$$\lim_{t\to t_0} f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) = c. \tag{3.8}$$

Olgu $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ mingi punktist t_0 erinevate intervalli T punktide jada, mille korral $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab võrduseks (3.8) näidata, et

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\phi_1(t_n), \ldots, \phi_m(t_n)\big) = c.$$

ehk, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$P_n := \big(\phi_1(t_n), \ldots, \phi_m(t_n)\big),$$

piisab näidata, et

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = c. \tag{3.9}$$

Funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevuse tõttu funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \phi_1(t_n) = \phi_1(t_0), \quad \ldots\ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_m(t_n) = \phi_m(t_0);$$

s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub punktiks P_0 koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ ning järelikult lause 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal kehtib (3.9) (sest $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = c$). $\square$

Näide 3.1. Veendume, et kahe muutuja funktsiooni $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ piirväärtus punktis $(0,0)$

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{3.10}$$

ei eksisteeri. Vaadeldava kahe muutuja funktsiooni piirväärtus punktis $(0,0)$ mööda joont $y = x$ on

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2};$$

piirväärtus punktis $(0,0)$ mööda joont $y = 2x$ on

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ y=2x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 2x}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5};$$

need piirväärtused on erinevad; järelikult lause 3.8 põhjal piirväärtus (3.10) ei eksisteeri.

3.6. Piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$

Definitsioon 3.11. Olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Arvu

$$\|P\| := d\big(P_0, (0,\dots,0)\big)$$

(s.t. punkti P kaugust punktist $(0,\dots,0)$) nimetatakse punkti P *normiks.*

Definitsioon 3.12. Olgu funktsiooni f määramispiirkond $\mathcal{D}$ tõkestamata.
Me ütleme, et funktsiooni f piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$ on

- arv $c \in \mathbb{R}$, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et
$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c| < \varepsilon;$$
- ∞ (loetakse: lõpmatus), kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et
$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad f(P) > E;$$
- $-\infty$ (loetakse: miinus lõpmatus), kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et
$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad f(P) < -E.$$

Kui funktsiooni f piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$ on c ($c \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$), siis me kirjutame

$$\lim_{\|P\|\to\infty} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[\|P\|\to\infty]{} c.$$

Kehtib teoreemi 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) järgnev analoog.

Teoreem 3.9. *Olgu funktsiooni f määramispiirkond ülalt tõkestamata ning olgu $c \in \mathbb{R}$ või $c = \pm\infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f(P) \xrightarrow[\|P\|\to\infty]{} c;$

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N},\ \|P_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c.$

3.7. Korduvad piirväärtused

Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x,y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, välja arvatud võib-olla punktis (x_0, y_0) endas. Eksisteerigu iga punkti x korral koordinaadi x_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti x_0 enda korral) lõplik piirväärtus

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) =: g(x).$$

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to x_0} g(x) =: \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y), \tag{3.11}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *korduvaks piirväärtuseks.*

Analoogiliselt defineeritakse korduv piirväärtus

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \tag{3.12}$$

(ning samuti ka korduvad piirväärtused rohkem kui kahe muutuja funktsioonide jaoks).

Üldiselt ei järeldu korduvate piirväärtuste (3.11) ja (3.12) olemasolust piirväärtuse

$$\lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x,y). \tag{3.13}$$

olemasolu.

Näide 3.2. Piirväärtus

$$\lim_{x,y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

ei eksisteeri (vt. näidet 3.1); samas vastavad korduvad piirväärtused eksisteerivad: mis tahes $x \neq 0$ korral

$$\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

ning seega $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$. Analoogiliselt saame, et ka $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$.

Samuti ei järeldu piirväärtuse (3.13) olemasolust korduvate piirväärtuste (3.11) ja (3.12) olemasolu.

Näide 3.3. Piirväärtus

$$\lim_{x,y\to 0} y\sin\frac{1}{x}$$

on olemas, kuid üks vastavatest korduvatest piirväärtustest ei eksisteeri. Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, on piirprotsess $x, y \to 0$ samaväärne protsessiga $r \to 0$; seega

$$\lim_{x,y\to 0} y\sin\frac{1}{x} = \lim_{r\to 0} r\,\sin\phi\,\sin\frac{1}{r\cos\phi} = 0,$$

sest hääbuva ja tõkestatud funktsiooni korrutis on hääbuv (märgime, et funktsioon $(\phi, r) \mapsto \sin\phi\,\sin\frac{1}{r\cos\phi}$ on tõkestatud). Samuti mis tahes $x \neq 0$ korral $\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x} = 0$, seega

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Samas mitte ühegi $y \neq 0$ korral piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ ei eksisteeri, seega ei eksisteeri ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$.

Lause 3.10. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, välja arvatud võib-olla punktis (x_0, y_0) endas, kusjuures eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus*

$$\lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x, y) =: c.$$

(a) *Kui iga punkti x korral punkti x_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti x_0 enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y) =: g(x), \tag{3.14}$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, kusjuures

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x, y).$$

(b) *Kui iga punkti y korral punkti y_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti y_0 enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y),$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, kusjuures

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x, y).$$

Tõestus. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse sümmeetriliselt.)

Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et iga (punktist x_0 erineva) punkti $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus (3.14), ning olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks x_0 koonduv punktist x_0 erinevate vahemiku $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktide jada. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab väite (a) tõestuseks näidata, et $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral, arvestades, et $f(x_n, y) \xrightarrow[y\to y_0]{} g(x_n)$, saame valida punkti y_n nii, et

$$|y_n - y_0| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad \bigl|f(x_n, y_n) - g(x_n)\bigr| < \frac{1}{n}.$$

Nüüd $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0)$ ruumis $\mathbb{R}^2$, sest

$$\begin{aligned} d\bigl((x_n, y_n), (x_0, y_0)\bigr) &\leqslant d\bigl((x_n, y_n), (x_n, y_0)\bigr) + d\bigl((x_n, y_0), (x_0, y_0)\bigr) \\ &= |y_n - y_0| + |x_n - x_0| < \frac{1}{n} + |x_n - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

seega funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ ning järelikult

$$g(x_n) = \bigl(g(x_n) - f(x_n, y_n)\bigr) + f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c,$$

nagu soovitud (märgime, et siin $g(x_n) - f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, sest $|g(x_n) - f(x_n, y_n)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$). □

§ 4. Pidevate mitme muutuja funktsioonide põhiomadused

4.1. Pideva funktsiooni märgi säilivus

Teoreem 4.1. *Olgu hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ määratud funktsioon f pidev määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$. Kui $f(P_0) \neq 0$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$\textit{iga } P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D} \textit{ korral } f(P) \neq 0 \textit{ ja } \operatorname{sgn} f(P) = \operatorname{sgn} f(P_0)$$

(s.t. leidub punkti P_0 ümbrus, milles selle funktsiooni väärtusted erinevad nullist ning on sama märgiga, mis $f(P_0)$).

TÕESTUS. Tähsitame $\alpha := f(P_0) \neq 0$. Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis P_0 leidub $\delta > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\, d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \frac{|\alpha|}{2},$$

s.t. iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} < f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2}.$$

Niisiis, kui $f(P_0) > 0$, siis iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P) > f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) - \frac{f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} > 0;$$

kui aga $f(P_0) < 0$, siis iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) + \frac{-f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} < 0.$$

□

4.2. Aritmeetilised tehted pidevate funktsioonidega

Vahetult funktsiooni pidevuse definitsioonist ja teoreemist 3.3 järeldub

Teoreem 4.2. *Olgu funktsioonid f ja g pidevad oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$. Siis ka nende funktsioonide summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning, kui $g(P_0) \neq 0$, siis ka jagatis f/g on pidevad punktis P_0.*

Märkus 4.1. Eeldus $g(P_0) \neq 0$ teoreemis 4.2 koos teoreemiga 4.1 garanteerib, et punkt P_0 on jagatise f/g määramispiirkonna kuhjumispunkt.

Järeldus 4.3. *Olgu f ja g pidevad funktsioonid, millel on ühine määramispiirkond. Siis ka nende funktsioonide summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning, kui funktsioon g pole üheski määramispiirkonna punktis 0, siis ka jagatis f/g on pidevad funktsioonid.*

4.3. Pidevate funktsioonide liitfunktsiooni pidevus

Olgu $l \in \mathbb{N}$ ning olgu hulgas $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^l$ määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) \ = \phi_1(t_1, \ldots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) \ = \phi_2(t_1, \ldots, t_l), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \phi_m(Q) = \phi_m(t_1, \ldots, t_l). \end{aligned}$$

Olgu hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ selline, et

$$\mathcal{D} \supset \Big\{ \big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big) \colon \ Q \in \mathcal{D}_0 \Big\},$$

ning olgu hulgas $\mathcal{D}$ määratud funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m).$$

Siis on hulgas $\mathcal{D}_0$ määratud funktsioon

$$u = f\big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big). \tag{4.1}$$

Ülaltoodud moel saadud (täpsemalt, kahe või enama funktsiooni järjest rakendamise teel saadud) funktsioone nimetatakse *liitfunktsioonideks.*

Teoreem 4.4. *Olgu funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevad hulga $\mathcal{D}_0$ kuhjumispunktis $Q_0 \in \mathcal{D}_0$ ning olgu funktsioon f pidev punktis*

$$P_0 = \big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big).$$

Siis ka liitfunktsioon (4.1) *on pidev punktis Q_0.*

TÕESTUS. Olgu $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ selline hulga $\mathcal{D}_0$ punktide jada, et $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_0$. Teoreemi 3.7 (pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab liitfunktsiooni (4.1) pidevuseks punktis Q_0 näidata, et

$$f\big(\phi_1(Q_n), \ldots, \phi_m(Q_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big)$$

ehk, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$P_n := \big(\phi_1(Q_n), \ldots, \phi_m(Q_n)\big),$$

piisab näidata, et

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0). \tag{4.1}$$

Funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevuse tõttu punktis Q_0 teoreemi 3.7 põhjal

$$\phi_1(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_1(Q_0), \quad \ldots\ldots, \quad \phi_m(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_m(Q_0);$$

s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub punktiks P_0 koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$ ning järelikult (jällegi teoreemi 3.7 põhjal) funktsiooni f pidevuse tõttu punktis P_0 kehtib (4.1). □

4.4. Mitme muutuja elementaarfunktsioonid

Definitsioon 4.1. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Funktsioone $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, mis on saadud (hulga $\mathcal{D}$ punktide koordinaate tähistavatest) m sõltumatust muutujast lõpliku arvu aritmeetiliste tehete, ühe muutuja elementaarfunktsioonide ja liifunktsiooni moodustamise operatsioonide rakendamise teel, nimetatakse *m muutuja elementaarfunktsioonideks.*

Kui $m \geqslant 2$, siis m muutuja elementaarfunktsioone nimetatakse *mitme muutuja elementaarfunktsioonideks.*

Järgneva teoreemi võtame käesolevas kursuses teadmiseks ilma seda tõestamata.

Teoreem 4.5. *Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad.*

4.5. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni tõkestatus ja rajad

Definitsioon 4.2. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *tõkestatud,* kui leidub reaalarv $R > 0$ nii, et

$$\mathcal{D} \subset B\big(\underbrace{(0,\dots,0)}_{m\ \text{arvu}\ 0}, r\big)$$

(s.t. $\mathcal{D}$ sisaldub mingis keras keskpunktiga $(0,\dots,0)$).

Arvestades, et lause 1.1 põhjal sisaldub iga kera ruumis $\mathbb{R}^m$ mingis sama keskpunktiga (koordinaattelgedega paralleelsete servadega) kuubis ning, vastupidi, iga (koordinaattelgedega paralleelsete servadega) kuup ruumis $\mathbb{R}^m$ sisaldub mingis sama keskpunktiga keras, järeldub vahetult definitsioonist

Lause 4.6. *Hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$\mathcal{D} \subset \underbrace{[-M,M] \times \cdots \times [-M,M]}_{m\ \textit{tegurit}}.$$

Teisisõnu, hulk $\mathcal{D}$ on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis (koordinaattelgedega paralleelsete servadega) kuubis keskpunktiga $(0,\dots,0)$.

Lause 4.6 võime ümber sõnastada ka järgmiselt: *hulk ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui tema punktide kõikvõimalike koordinaatide hulk on tõkestatud, s.t. leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|x_i| \leqslant M \quad \textit{iga } P = (x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{D} \textit{ ja iga } i \in \{1,\dots,m\} \textit{ korral.}$$

Järgnevad teoreemid võtame käesolevas kursuses teadmiseks ilma neid tõestamata.

Teoreem 4.7 (Weierstrassi esimene teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on tõkestatud selles hulgas.*

Teoreem 4.8 (Weierstrassi teine teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon saavutab selles hulgas oma rajad. Teisisõnu, kui funktsiooon f on pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, siis leiduvad punktid $P_0, Q_0 \in \mathcal{D}$ nii, et*

$$f(P_0) = \sup_{P \in \mathcal{D}} f(P) \quad ja \quad f(Q_0) = \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P).$$

II peatükk.
Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutus

§ 1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus

1.1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Definitsioon 1.1. Olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0,\, x_i^0 + \Delta x_i,\, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_i},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) osatuletiseks argumendi x_i järgi* punktis P_0 ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0), \quad f'_{x_i}(P_0), \quad u'_{x_i}(P_0), \quad f_{x_i}(P_0), \quad u_{x_i}(P_0) \tag{1.1}$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik osatuletis $f'_{x_i}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(esimest järku) osatuletisfunktsioon (argumendi x_i järgi)*

$$f'_{x_i} \colon \mathcal{D} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) osatuletiseks argumendi x_i järgi.* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}, \quad u'_{x_i}, \quad f_{x_i}, \quad u_{x_i}. \tag{1.2}$$

Tähistused (1.1) on tähistustega (1.2) hästi kooskõlas: (lõplik) osatuletis antud punktis on osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Märkus 1.1. Vahetult osatuletise definitsioonist näeme, et ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ osatuletis muutuja x järgi on sama, mis selle funktsiooni tuletis: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{dx}$ (ehk, alternatiivsetes tähistustes, $f'_x = f'$).

Märkus 1.2. Vahetult osatuletise definitsioonist järeldub, et m muutuja funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletis punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ muutuja x_i järgi on ühe muutuja funktsiooni

$$g(x) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$$

tuletis punktis x_i^0:

$$f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0).$$

See tähelepanek on kasulik mitme muutuja funktsiooni osatuletiste arvutamisel: leides funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletist muutuja x_i järgi, loeme ülejäänud muutujad $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ fikseeritud konstantideks ning leiame osatuletise u'_{x_i} nagu ühe muutuja x_i funktsiooni tuletise.

Märkus 1.3. Ühe muutuja funktsiooni puhul järeldub lõpliku tuletise olemasolust mingis punktis selle funktsiooni pidevus selles punktis. Mitme muutuja funktsiooni puhul analoogiline väide ei kehti: *m muutuja funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ puhul ei järeldu kõigi esimest järku osatuletiste $f'_{x_1}(P_0), \ldots, f'_{x_m}(P_0)$ olemasolust ja lõplikkusest punktis P_0 funktsiooni f pidevus punktis P_0.*

Näide 1.1. Näites 3.1 veendusime, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ei eksisteeri; seega funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

ei ole pidev punktis $(0,0)$. Samas leiduvad sellel funktsiooni punktis $(0,0)$ lõplikud osatuletised:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\,0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

1.2. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses $\mathcal{U}$. Kõneldes funktsiooni f argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutudest $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ punktis P_0, eeldame edaspidi alati, et

$$P := (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{U}.$$

Tähistame

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0);$$

siis,

$$\rho \to 0 \quad \iff \quad \Delta x_i \to 0,\ i = 1, ..., m, \quad \iff \quad d(P, P_0) \to 0 \quad \iff \quad P \to P_0$$

ja

$$\rho = 0 \quad \iff \quad \Delta x_i = 0,\ i = 1, ..., m, \quad \iff \quad d(P, P_0) = 0 \quad \iff \quad P = P_0.$$

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on *diferentseeruv* punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, kui leiduvad arvud $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et selle funktsiooni muut punktis P_0

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$

mis vastab argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$, rahuldab tingimust

$$\Delta u - (A_1\, \Delta x_1 + \cdots + A_m\, \Delta x_m) = o(\rho) \qquad \text{protsessis } \rho \to 0,$$

s.t.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u - (A_1\, \Delta x_1 + \cdots + A_m\, \Delta x_m)}{\rho} = 0$$

ehk, tähistades $\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = \Delta u - (A_1\, \Delta x_1 + \cdots + A_m\, \Delta x_m)$,

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_m \Delta x_m + \alpha, \tag{1.3}$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$.

Funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ pidevuse tingimuse punktis P_0 võib kirja panna kujul

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0.$$

Esitusest (1.3) järeldub seega (arvestades, et kui $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$, siis ammugi $\alpha \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$)

Lause 1.1. *Antud punktis diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.*

Järgnev teoreem ütleb, et *funktsiooni diferentseeruvusest antud punktis järeldub selle funktsiooni kõikvõimalike osatuletiste olemasolu ja lõplikkus selles punktis.*

Teoreem 1.2. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 lõplikud osatuletised kõikide argumentide järgi.*

TÕESTUS. Fikseerime vabalt $j \in \{1, \dots, m\}$. Teoreemi tõestuseks peame näitama, et eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) := \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j},$$

kus

$$\Delta_{x_j} u = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + \Delta x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0).$$

Funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0 leiduvad arvud $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ nii, et funktsiooni f muut Δu punktis P_0 (mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots \Delta x_m$) esitub kujul

$$\Delta u = A_1 \, \Delta x_1 + \dots + A_m \, \Delta x_m + \alpha,$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust

$$\frac{\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}} = \frac{\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)}{\rho} \xrightarrow[\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0]{} 0. \tag{1.4}$$

Seega (arvestades, et muudu $\Delta_{x_j} u$ arvutamisel $\Delta x_i = 0$, kui $i \neq j$)

$$\Delta_{x_j} u = A_j \, \Delta x_j + \alpha(0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0)$$

ning järelikult tingimuse (1.4) põhjal

$$\frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j + \frac{\alpha(0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0)}{\Delta x_j} \xrightarrow[\Delta x_j \to 0]{} A_j;$$

niisiis $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = A_j$. □

Definitsiooni 1.2 uurides paneme tähele, et esitusse (1.3) (mida me kasutasime teoreemi 1.2 tõestamisel) ja mujale sinna definitsiooni sobivad täpselt ühed ja samad arvud $A_1, \dots, A_m$. Seega järeldub eelneva teoreemi tõestusest

Järeldus 1.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsioonil f eksisteerivad selles punktis P_0 lõplikud osatuletised kõikide argumentide järgi. Seejuures definitsioonis 1.2 (ja sealhulgas selle funktsiooni f muudu esitustes* (1.3)*)*

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(P_0), \quad \dots\dots, \quad A_m = \frac{\partial u}{\partial x_m}(P_0).$$

Vahetult eelnevast järeldusest ja definitsioonist 1.2 järeldub

Järeldus 1.4. *Funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on diferentseeruv punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$ parajasti siis, kui sellel funktsioonil eksisteerivad selles punktis kõik lõplikud esimest järku osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, kusjuures selle funktsiooni muut Δu punktis P_0 (mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots \Delta x_m$) rahuldab tingimust*

$$\Delta u - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \, \Delta x_m \right) = o(\rho) \quad \textit{protsessis } \rho \to 0.$$

Märkus 1.4. Kursuses "Matemaatiline analüüs I" defineerisime ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ diferentseeruvuse punktis x_0 kui lõpliku tuletise $f'(x_0)$ olemasolu selles punktis. See definitsioon on kooskõlas mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga.

Tõepoolest, kui eksisteerib lõplik tuletis

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

siis, defineerides $\alpha = \alpha(\Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\,\Delta x$, kehtib $\alpha = o(\Delta x) = o(\rho)$ protsessis $\rho = \Delta x \to 0$ kusjuures funktsiooni f muut punktis x_0 esitub kujul

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha;$$

niisiis funktsioon f on (m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsiooni 1.2 järgi diferentseeruv.

Teiselt poolt, kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv (m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsiooni 1.2 mõttes, siis teoreemi 1.2 põhjal eksisteerib tal punktis x_0 lõplik (osa)tuletis (muutuja x järgi), s.t. see funktsioon on diferentseeruv kursuses "Matemaatiline analüüs I" antud definitsiooni mõttes.

Näide 1.2. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Funktsiooni f diferentseeruvuseks piisab definitsiooni 1.2 põhjal (ja järelduse 1.4 põhjal on ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x + 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$), s.t.

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0.$$

Veendume selles:

$$\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho} = \frac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho} = \rho\,\sin\frac{1}{\rho^2} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Näide 1.3. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

ei ole diferentseeruv punktis $(0,0)$. Sellel funktsioonil eksisteerivad punktis $(0,0)$ lõplikud osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\,0}{h^2}}{h} = 0$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\,h}{h^2}}{h} = 0;$$

seega järelduse 1.4 põhjal on funktsiooni diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ tarvilik, et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x + 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$), s.t.

$$f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0. \tag{1.5}$$

Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x = \rho\cos\phi$, $\Delta y = \rho\sin\phi$, saame

$$\frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = \frac{\frac{\rho^3\cos^2\phi\sin\phi}{\rho^2}}{\rho} = \cos^2\phi\sin\phi.$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{f(\Delta x, \Delta y)}{\rho}$ ei eksisteeri (sest ta sõltub lähenemisteest); seega (1.5) ei kehti ning järelikult funktsioon f pole diferentseeruv punktis $(0,0)$.

1.3. Piisav tingimus mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvuseks

Teoreem 1.5. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses lõplikud (esimest järku) osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures vastavad osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis P_0. Siis funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.*

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 1.5. Mitme muutuja funktsiooni f diferentseeruvusest punktis P_0 ei järeldu üldjuhul tema osatuletiste (s.t. osatuletisfunktsioonide) pidevus punktis P_0.

Näide 1.4. Näites 1.2 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Näitame, et kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ eksisteerivad lõplikud osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, kuid osatuletisfunktsioonid $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $(0,0)$.

Näites 1.2 veendusime, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Kõikjal hulgas $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x = 2x\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= 2x\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\,\cos\frac{1}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ on punkti $(0,0)$ igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Tõepoolest, valides iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n > 0$ nii, et $\dfrac{1}{r_n^2} = 2n\pi$ (s.t. $r_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$) ning tähistades $P_n := (r_n, 0)$ ja $Q_n := (-r_n, 0)$, saame, arvestades, et $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \quad \text{ja} \quad Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0).$$

Samal ajal

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_n) = 2r_n \sin\frac{1}{r_n^2} - \frac{2r_n}{r_n^2}\cos\frac{1}{r_n^2} = 2r_n \sin 2n\pi - \frac{2}{r_n}\cos 2n\pi = -\frac{2}{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

ning, analoogiliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ on punkti $(0,0)$ igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

1.4. Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse geomeetriline tõlgendus

Selles punktis me näitame, et *pideva kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis on geomeetriliselt tõlgendatav selle funktsiooni graafiku puutujatasandi olemasoluna vastavas graafiku punktis.* Toomaks sisse pinna puutujatasandi mõistet, peame me kõigepealt täpsustama, mida me mõistame termini "(ruumiline) pind" all: loomulikult, kõneldes pinnast, mõistame me selle all teatavat punktihulka ruumis (täpsemalt, ruumis $\mathbb{R}^3$); samas mitte kõik ruumi punktihulgad ei mahu meie eelmatemaatilise kujutelma alla pinnast – niisiis peame me välja eraldama selliste ruumi punktihulkade klassi, mida meie eelmatemaatiline kujutelm lubab pindadeks nimetada. Selleks me vajame kõigepealt *piirkonna* mõistet.

1.4.1. Piirkonnad ruumis $\mathbb{R}^m$

Meenutame kõigepealt *joone* mõistet.

Definitsioon 1.3. Olgu $T \subset \mathbb{R}$ mingi intervall ning olgu

$$x_1 = \phi_1(t), \qquad \ldots\ldots, \qquad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in T, \tag{1.6}$$

pidevad funktsioonid. Siis hulka

$$L := \big\{\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) \colon\ t \in T\big\} \subset \mathbb{R}^m$$

nimetatakse *Jordani jooneks* ehk *pidevaks jooneks* (ruumis $\mathbb{R}^m$). Seejuures öeldakse, et joon L on antud *parameetriliste võrranditega* (1.6).

Kõneldes lihtsalt *joonest,* mõistame me selle all pidevat joont.

Pidevat joont ruumis $\mathbb{R}^m$ on kõige lihtsam ette kujutada eeskirja (1.6) järgi ruumis liikuva punkti jäljena: ajahetkel $t \in [\alpha, \beta]$ on punkti koordinaadid $x_1 = \phi_1(t)$, $\ldots$, $x_m = \phi_m(t)$.

Definitsioon 1.4. Pideva joone osa, mis paikneb selle joone kahe punkti vahel, nimetatakse selle joone *kaareks:* kui joon on antud parameetriliste võrranditega (1.6) ning A ja B on selle joone punktid, kusjuures mingite $\alpha, \beta \in T$, $\alpha < \beta$, korral

$$A = \big(\phi_1(\alpha), \ldots, \phi_m(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(\phi_1(\beta), \ldots, \phi_m(\beta)\big),$$

siis joont

$$x_1 = \phi_1(t), \qquad \ldots\ldots, \qquad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

nimetatakse *punkte A ja B ühendavaks (pidevaks) kaareks.* Punkte A ja B nimetatakse selle kaare *otspunktideks.*

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *sidus,* kui tema mis tahes kahe punkti korral leidub neid punkte ühendav pidev kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas $\mathcal{D}$.

Definitsioon 1.6. Mittetühja lahtist sidusat hulka nimetatakse *lahtiseks piirkonnaks.*

Lahtise piirkonna ja tema raja mis tahes alamhulga ühendit nimetatakse *piirkonnaks.*

Lahtise piirkonna ja tema raja ühendit (s.t. lahtise piirkonna sulundit) nimetatakse *kinniseks piirkonnaks.*

Näide 1.5. Piirkonnad ruumis $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ on parajasti intervallid.

Näide 1.6. Lahtine ring $B(P_0, r)$ tasandil on lahtine piirkond (ta on mittetühi lahtine sidus hulk). Kinnine ring $\overline{B}(P_0, r)$ tasandil on kinnine piirkond (ta on lahtise piirkonna $B(P_0, r)$ ja tema raja $S(P_0, r)$ ühend). Ringjoon $S(P_0, r)$ ei ole piirkond (kui ta oleks piirkond, s.t. ta oleks lahtise piirkonna ja selle raja mingi alamhulga ühend, siis peaks tal olema sisepunkte, mida tal aga pole). Kahe mittelõikuva lahtise ringi ühend ei ole piirkond – see ühend pole sidus.

1.4.2. Pinna mõiste. Pinna puutujatasand

Definitsioon 1.7. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ piirkond ning olgu

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \mathcal{D}, \tag{1.7}$$

pidevad funktsioonid. Punktihulka

$$\Sigma := \Big\{\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) :\ (u, v) \in \mathcal{D}\Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

nimetatakse *pinnaks* (ruumis $\mathbb{R}^3$). Seejuures öeldakse, et pind Σ on antud *parameetriliste võrranditega* (1.7).

Meie jaoks kõige olulisemad näited pindadest on (piirkonnas määratud) pidevate kahe muutuja funktsioonide graafikud.

Näide 1.7. Olgu $z = f(x, y)$ piirkonnas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ määratud pidev funktsioon. Siis selle funktsiooni graafik

$$\Big\{\big(x, y, f(x, y)\big) \colon \ (x, y) \in \mathcal{D}\Big\}$$

on pind: see graafik on esitatav parameetriliste võrranditega

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \qquad (u, v) \in \mathcal{D}$$

(s.t. parameetrite u ja v rollis on sisuliselt muutujad x ja y ise).

Definitsioon 1.8. Tasandit π nimetatakse pinna Σ *puutujatasandiks* selle pinna punktis M_0, kui $M_0 \in \pi$ ning pinna Σ punkti M lähenemisel punktile M_0 mööda seda pinda neid punkte M ja M_0 ühendava sirge ja tasandi π vaheline nurk läheneb nullile.

Täpsustame pisut puutujatasandi definitsiooni: kui pind Σ on antud parameetriliste võrranditega (1.7), siis selle pinna punkti $M = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ lähenemise all punktile $M_0 = \big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)\big)$ mõistetakse piirprotsessi $(u, v) \to (u_0, v_0)$; märgime, et funktsioonide (1.7) pidevuse tõttu $d(M, M_0) \xrightarrow[(u,v)\to(u_0,v_0)]{} 0$.

1.4.3. Kahe muutuja funktsiooni graafiku puutujatasand

Järgnev teoreem ütleb, et pideva kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab geomeetriliselt selle funktsiooni graafiku puutujatasandi olemasolu vastavas graafiku punktis.

Teoreem 1.6. *Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ pidev punkti $P_0 := (x_0, y_0)$ mingis ümbruses. Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0, siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis $M_0 := \big(x_0, y_0, f(P_0)\big)$. Selle puutujatasandi võrrand on*

$$z - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,(y - y_0). \tag{1.8}$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni f graafikul eksisteerib punktis M_0 puutujatasand, kusjuures see puutujatasand pole paralleelne z-teljega, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.

Tõestus. Tõestame ainult, et funktsiooni f diferentseeruvusest punktis P_0 järeldub graafiku puutujatasandi olemasolu punktis M_0, kusjuures selleks puutujatasandiks on (1.8). (Puutujatasandi olemasolust diferentseeruvuse järeldamine on oluliselt keerukam.)

Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ diferentseeruv punktis P_0. Veendumaks, et tasand (1.8) on tema graafiku puutujatasand punktis M_0, piisab (arvestades, et punkt M_0 asub sellel tasandil) näidata, et graafiku punkti $M := \big(x, y, f(x, y)\big)$ lähenemisel punktile M_0 mööda graafikut neid punkte läbiva sirge ja selle tasandi vaheline nurk läheneb nullile ehk, teisisõnu, tähistades $P := (x, y)$, vektori

$$\overrightarrow{M_0M} = \big(x - x_0, y - y_0, f(P) - f(P_0)\big)$$

ja tasandi (1.8) normaalvektori $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), -1\right)$ vaheline nurk $\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big)$ läheneb täisnurgale $\frac{\pi}{2}$. Tähistades $\rho := d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ning arvestades, et lähenemine $M \to M_0$ mööda graafikut tähendab, et $(x, y) \to (x_0, y_0)$, s.t. $\rho \to 0$, ja

$$\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \to \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \to 0,$$

jääb meil näidata, et $\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Selleks märgime, et

$$\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) = \frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|\,|\vec{n}|}$$

(sümbolid $\big|\overrightarrow{M_0M}\big|$, $|\vec{n}|$ ning $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}$ tähistavad vastavalt vektorite $\overrightarrow{M_0M}$ ja $\vec{n}$ pikkust ning nende skalaarkorrutist). Kuna funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,(y-y_0) - \big(f(P) - f(P_0)\big) = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0,$$

siis

$$\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) = \frac{1}{|\vec{n}|}\,\frac{o(\rho)}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|} = \frac{1}{|\vec{n}|}\,\frac{\rho}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}\,\frac{o(\rho)}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

(sest

$$\big|\overrightarrow{M_0M}\big| = \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 + \big|f(P) - f(P_0)\big|^2} = \sqrt{\rho^2 + \big|f(P) - f(P_0)\big|^2} \geqslant \rho$$

ning seega $0 \leqslant \frac{\rho}{|\overrightarrow{M_0M}|} \leqslant 1$), nagu soovitud. □

1.5. Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.9. Avaldist

$$du(P_0) := df(P_0) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(P_0)\,\Delta x_m$$

nimetatakse funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) täisdiferentsiaaliks* punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on diferentseeruv hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P, siis, fikseerides argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutude väärtused $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ (s.t. lugedes need muudud fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \ldots, x_m$) funktsioonina $du = du(P)$ (ehk, teisiti tähistades, $df = df(P)$):

$$du = du(P) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(P)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(P)\,\Delta x_m$$

ehk (jättes eelnevas esituses argumendi P kirjutamata)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\,\Delta x_m.$$

Iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral nimetame *argumendi* x_i *diferentsiaaliks* dx_i tema muutu Δx_i, s.t.

$$dx_i = \Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

See tähistus on motiveeritud järgneva aruteluga: kui tõlgendada argumendi x_i diferentsiaali dx_i (m muutuja) funktsiooni $v = x_i$ diferentsiaalina, siis

$$\begin{aligned} dx_i = dv &= v'_{x_1}\,\Delta x_1 + \cdots + v'_{x_{i-1}}\,\Delta x_{i-1} + v'_{x_i}\,\Delta x_i + v'_{x_{i+1}}\,\Delta x_{i+1} + \cdots + v'_{x_m}\,\Delta x_m \\ &= 0\,\Delta x_1 + \cdots + 0\,\Delta x_{i-1} + 1\,\Delta x_i + 0\,\Delta x_{i+1} + \cdots + 0\,\Delta x_m \\ &= \Delta x_i. \end{aligned}$$

Vastavalt sellele tähistusele

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\,dx_m.$$

Märkus 1.6. Vahetult on kontrollitav, et kui funktsioonid $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ ja $v = g(P) = g(x_1, \ldots, x_m)$ on diferentseeruvad punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$, siis mis tahes arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral ka funktsioon $\alpha\, f + \beta\, g$ on diferentseeruv selles punktis, kusjuures

$$d(\alpha\, f + \beta\, g)(P_0) = \alpha\, df(P) + \beta\, dg(P_0).$$

1.6. Mitme muutuja liitfunktsioonide diferentseerimine

Olgu funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu hulgas $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^l$ määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) \ = \phi_1(t_1, \ldots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) \ = \phi_2(t_1, \ldots, t_l), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \phi_m(Q) = \phi_m(t_1, \ldots, t_l), \end{aligned}$$

sellised, et

$$\mathcal{D} \supset \big\{(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)) :\ Q \in \mathcal{D}_0\big\}.$$

Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$u = g(Q) = f\big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big). \tag{1.9}$$

Teoreem 1.7. *Olgu funktsioonid $\phi_1, \dots, \phi_m$ diferentseeruvad punktis*

$$Q_0 = (t_1^0, \dots, t_l^0) \in \mathcal{D}_0,$$

ning olgu funktsioon f diferentseeruv punktis

$$P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) = \big(\phi_1(Q_0), \dots, \phi_m(Q_0)\big) \in \mathcal{D}.$$

Siis ka liitfunktsioon (1.9) *on diferentseeruv punktis Q_0. Seejuures iga $j \in \{1, \dots, l\}$ korral*

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}(Q_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\,\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0).$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Konkreetsuse mõttes sõnastame teoreemi 1.8 eraldi juhu jaoks, kus $m = 3$ ja $l = 2$.

Olgu funktsioon

$$w = f(P) = f(x, y, z)$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ning olgu hulgas $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$ määratud funktsioonid

$$x = x(Q) = x(u, v), \quad y = y(Q) = y(u, v), \quad z = z(Q) = z(u, v) \tag{1.10}$$

sellised, et

$$\mathcal{D} \supset \Big\{\big(x(Q), y(Q), z(Q)\big) \colon\ Q \in \mathcal{D}_0\Big\}.$$

Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$w = g(Q) = g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) = f\big(x(Q), y(Q), z(Q)\big). \tag{1.11}$$

Teoreem 1.8. *Olgu funktsioonid* (1.10) *diferentseeruvad punktis $Q_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{D}_0$ ning olgu funktsioon f diferentseeruv punktis*

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(x(Q_0), y(Q_0), z(Q_0)\big) \in \mathcal{D}.$$

Siis ka liitfunktsioon (1.11) *on diferentseeruv punktis Q_0. Seejuures*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(Q_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\frac{\partial x}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\frac{\partial y}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,\frac{\partial z}{\partial u}(Q_0),\\
\frac{\partial g}{\partial v}(Q_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\frac{\partial x}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\frac{\partial y}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,\frac{\partial z}{\partial v}(Q_0).
\end{aligned}$$

Ka seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Järeldus 1.9 (Lagrange'i keskväärtusteoreem mitme muutuja funktsioonide jaoks)**.** *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ pidev punktides $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$, kus $P \neq P_0$, ja diferentseeruv neid punkte ühendava* *sirglõigu igas punktis, välja arvatud võib-olla punktides P_0 ja P endis. Siis leidub reaalarv $\theta \in (0,1)$ nii, et*

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)\,\Delta x_i$$

ehk, teisissõnu, punkte P_0 ja P ühendaval sirglõigul leidub punkt Q nii, et

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q)\,\Delta x_i.$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni

$$\Phi(t) = f(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m) = f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big), \quad t \in [0,1],$$

kus $\phi_i(t) = x_i^0 + t\,\Delta x_i$, $i = 1, \dots, m$; siis $f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0)$. Funktsioon Φ rahuldab lõigus $[0,1]$ kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi – ta on selles lõigus pidev ning, vastavalt teoreemile 2.1, vahemikus $(0,1)$ diferentseeruv, sest mis tahes $t \in (0,1)$ korral funktsioon f on diferentseeruv punktis

$$Q_t = \big((\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big) = (x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)$$

ning funktsioonid $\phi_1, \dots, \phi_m$ on diferentseeruvad punktis t; seejuures

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q_t)\,\phi_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(Q_t)\,\phi_m'(t)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)\,\Delta x_i.\end{aligned}$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub arv $\theta \in (0,1)$ nii, et $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)$ ning järelikult, tähistades $Q = (x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)$,

$$\begin{aligned}f(P) - f(P_0) &= \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)\,\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q)\,\Delta x_i.\end{aligned}$$

□

1.7. Tuletis etteantud suunas. Gradient

1.7.1. Kolme muutuja funktsiooni juht

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y, z)$ määratud punkti $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mingis ümbruses ning läbigu punkti P_0 suunatud telg l, mille suund on määratud vektoriga $\vec{s} = (a, b, c)$. Märgime, et

$$a = |\vec{s}|\,\cos\alpha, \quad b = |\vec{s}|\,\cos\beta, \quad c = |\vec{s}|\,\cos\gamma,$$

kus $|\vec{s}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ on vektori $\vec{s}$ pikkus ning α, β ja γ on nurgad telje l ja vastavalt x-, y- ja z-telje vahel.

Tõepoolest, tähistades sümbolitega $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ vastavalt x-, y- ja z-telje suunalise ühikvektori, s.t. $\vec{x} := (1,0,0)$, $\vec{y} := (0,1,0)$ ja $\vec{z} := (0,0,1)$, saame, ühelt poolt,

$$\vec{s}\cdot\vec{x} = a\,1 + b\,0 + c\,0 = a,$$

teiselt poolt aga

$$\vec{s}\cdot\vec{x} = |\vec{s}|\,|\vec{x}|\,\cos\alpha = |\vec{s}|\,\cos\alpha;$$

niisiis $a = |\vec{s}|\,\cos\alpha$. Võrdused $b = |\vec{s}|\,\cos\beta$ ja $c = |\vec{s}|\,\cos\gamma$ tõestatakse analoogiliselt.

Definitsioon 1.10. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}\\
&\qquad = \lim_{\tau\to 0}\frac{f(x_0+\tau|\vec{s}|\cos\alpha, y_0+\tau|\vec{s}|\cos\beta, z_0+\tau|\vec{s}|\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{\tau|\vec{s}|}\\
&\qquad = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ta, y_0+tb, z_0+tc)-f(x_0,y_0,z_0)}{t|\vec{s}|},
\end{aligned}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks punktis* P_0 *telje* l *suunas* (või *vektori* $\vec{s}$ *suunas*) ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(x_0,y_0,z_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0,z_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0,z_0).$$

Märkus 1.7. Vahetult definitsioonist järeldub, et funktsiooni $y = f(x,y,z)$ osatuletis punktis P_0 vastavalt muutuja x, y ja z järgi on funktsiooni f tuletis punktis P_0 vastavalt x-, y- ja z-telje suunas.

Definitsioon 1.11. Vektorit

$$\mathrm{grad} f(P_0) := \nabla f(P_0) := \big(f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0)\big)$$

nimetatakse funktsiooni f *gradiendiks* punktis P_0.

Sümbolit ∇ loetakse: "nabla" või "atled". Nimetus "nabla" tuleb heebreakeelsest sõnast vanaaegse harfi-laadse muusikariista kohta – elava fantaasiaga lugeja suudab kindlasti leida teatava sarnasuse selle sümboli ja harfi vahel; "atled" on "delta" loetuna tagant ettepoole – sümbol ∇ on tagurpidi sümbol Δ!

Teoreem 1.10. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x,y,z)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$. Siis funktsioonil f eksisteerib punktis P_0 tuletis mis tahes vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunas, kusjuures see tuletis on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ ja vektori $\vec{s}$ suunalise ühikvektori skalaarkorrutisega:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\frac{1}{|\vec{s}|}\vec{s} = \frac{\nabla f(P_0)\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|}. \tag{1.12}$$

Tõestus. Olgu $\vec{s}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunaline ühkvektor, s.t. $\vec{s}_1 = \dfrac{1}{|\vec{s}|}\vec{s}$. Defineerides funktsiooni

$$g(t) = f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1, z_0 + tc_1)$$

(kuna funktsioon f on määratud punkti (x_0, y_0, z_0) mingis ümbruses, siis funktsioon g on määratud punkti $t = 0$ teatavas ümbruses), paneme tähele, et tuletis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1, z_0 + tc_1) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

eksisteerib eeldusel, et tuletis $g'(0)$ eksisteerib. Funktsioon g on tõlgendatav liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)\big),$$

kus

$$\phi_1(t) = x_0 + ta_1, \quad \phi_2(t) = x_0 + tb_1, \quad \phi_3(t) = x_0 + tc_1.$$

Kuna

- funktsioonid ϕ_1, ϕ_2 ja ϕ_3 on diferentseeruvad punktis 0, kusjuures $\phi_1'(0) = a_1$, $\phi_2'(0) = b_1$ ja $\phi_3'(0) = c_1$;
- funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(\phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0)\big)$,

siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi 1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$\begin{aligned} g'(0) &= f_x'(P_0)\,\phi_1'(0) + f_y'(P_0)\,\phi_2'(0) + f_z'(P_0)\,\phi_3'(0) \\ &= f_x'(P_0)\,a_1 + f_y'(P_0)\,b_1 + f_z'(P_0)\,c_1 = \nabla f(P_0) \cdot \vec{s}_1 = \nabla f(P_0) \cdot \frac{1}{|\vec{s}|}\vec{s}; \end{aligned}$$

niisiis $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = g'(0) = \nabla f(P_0) \cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$, nagu soovitud. □

Märkus 1.8. Kui teoreemis 1.10 loobuda eeldusest funktsiooni f diferentseeruvuse kohta punktis P_0, siis valem (1.12) üldjuhul ei kehti.

Näide 1.8. Vaatleme funktsiooni

$$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}.$$

Sellel funktsioonil on punktis $(0, 0, 0)$ olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui $\vec{s} = (a, b, c)$ on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb, 0 + tc) - f(0, 0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{ta\,tb\,tc}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt[3]{abc}}{t} = \sqrt[3]{abc}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0, 0, 0)$ lõplikud osatuletised muutujate x, y ja z järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt x-, y- ja z-telje suunas), kusjuures

$$f_x'(0, 0, 0) = f_y'(0, 0, 0) = f_z'(0, 0, 0) = 0;$$

niisiis $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Seega mis tahes ühikvektori $\vec{s} = (a, b, c)$ korral

$$\nabla f(0, 0, 0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b + 0c = 0,$$

kuid $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0, 0) = \sqrt[3]{abc} \neq 0$, kui $a, b, c \neq 0$.

Teoreem 1.11. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y, z)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Siis funktsiooni f tuletis punktis P_0 mis tahes suunas ei ületa tema tuletist selles punktis gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas (ehk, teisisõnu, tuletis gradiendi suunas on kõikvõimalikes suundades võetud tuletiste maksimaalne väärtus). Funktsiooni f tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkusega.*

Tõestus. Teoreemi 1.10 põhjal funktsiooni f tuletis punktis P_0 vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunas on, tähistades sümboliga θ nurga selle vektori ja gradiendi $\nabla f(P_0)$ vahel,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\big|\nabla f(P_0)\big|\,|\vec{s}|\,\cos\theta}{|\vec{s}|} = \big|\nabla f(P_0)\big|\,\cos\theta$$

(siin sümbol $\big|\nabla f(P_0)\big|$ tähistab gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkust). Näeme, et sellel tuletisel on suurim võimalik väärtus juhul, kui $\cos\theta = 1$, s.t. $\theta = 0$ ehk, teisisõnu vektori $\vec{s}$ ja gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunad ühtivad. Eelnevast võrdusteahelast näeme ka, et tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f(P_0)}(P_0) = \big|\nabla f(P_0)\big|\cos 0 = \big|\nabla f(P_0)\big|.$$

□

1.7.2. Kahe muutuja funktsiooni juht

Kahe muutuja funktsiooni tuletis antud suunas ja gradient defineeritakse analoogiliselt kolme muutuja funktsiooni juhuga. Seejuures kehtivad teoreemide 1.10 ja 1.11 analoogid, kusjuures ka nende analoogide tõestused jäävad peaaegu sõna-sõnalt samaks.

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ määratud punkti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, ning läbigu punkti P_0 suunatud telg l, mille suund on määratud vektoriga $\vec{s} = (a, b)$. Märgime, et

$$a = |\vec{s}|\,\cos\alpha, \quad b = |\vec{s}|\,\cos\beta,$$

kus $|\vec{s}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ on vektori $\vec{s}$ pikkus ning α ja β on nurgad telje l ja vastavalt x- ja y-telje vahel.

Tõepoolest, tähistades sümbolitega $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vastavalt x- ja y-telje suunalise ühikvektori, s.t. $\vec{x} := (1, 0)$ ja $\vec{y} := (0, 1)$, saame, ühelt poolt,

$$\vec{s} \cdot \vec{x} = a\,1 + b\,0 = a,$$

teiselt poolt aga

$$\vec{s} \cdot \vec{x} = |\vec{s}|\,|\vec{x}|\,\cos\alpha = |\vec{s}|\,\cos\alpha;$$

niisiis $a = |\vec{s}|\,\cos\alpha$. Võrdus $b = |\vec{s}|\,\cos\beta$ tõestatakse analoogiliselt.

Definitsioon 1.12. Kui eksisteerib piirväärtus

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} & \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x_0 + \tau|\vec{s}|\cos\alpha, y_0 + \tau|\vec{s}|\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\tau|\vec{s}|} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t|\vec{s}|},
\end{aligned}
$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks punktis* P_0 *telje* l *suunas* (või *vektori* $\vec{s}$ *suunas*) ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0).$$

Märkus 1.9. Vahetult definitsioonist järeldub, et funktsiooni $y = f(x, y)$ osatuletis punktis P_0 vastavalt muutuja x ja y järgi on funktsiooni f tuletis punktis P_0 vastavalt x- ja y-telje suunas.

Definitsioon 1.13. Vektorit

$$\mathrm{grad} f(P_0) := \nabla f(P_0) := \big(f'_x(P_0), f'_y(P_0)\big)$$

nimetatakse funktsiooni f *gradiendiks* punktis P_0.

Teoreem 1.12. *Olgu funktsioon* $u = f(P) = f(x, y)$ *diferentseeruv punktis* $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Siis funktsioonil* f *eksisteerib punktis* P_0 *tuletis mis tahes vektori* $\vec{s} \neq \vec{0}$ *suunas, kusjuures see tuletis on võrdne gradiendi* $\nabla f(P_0)$ *ja vektori* $\vec{s}$ *suunalise ühikvektori skalaarkorrutisega:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{1}{|\vec{s}|}\vec{s} = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}. \tag{1.13}$$

Tõestus. Olgu $\vec{s}_1 = (a_1, b_1)$ vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunaline ühkvektor, s.t. $\vec{s}_1 = \dfrac{1}{|\vec{s}|}\vec{s}$. Defineerides funktsiooni

$$g(t) = f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1)$$

(kuna funktsioon f on määratud punkti (x_0, y_0) mingis ümbruses, siis funktsioon g on määratud punkti $t = 0$ teatavas ümbruses), paneme tähele, et tuletis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

eksisteerib eeldusel, et tuletis $g'(0)$ eksisteerib. Funktsioon g on tõlgendatav liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi(t), \psi(t)\big),$$

kus

$$\phi(t) = x_0 + ta_1, \quad \psi(t) = x_0 + tb_1.$$

Kuna

- funktsioonid ϕ ja ψ on diferentseeruvad punktis 0, kusjuures $\phi'(0) = a_1$ ja $\psi'(0) = b_1$;
- funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0) = \big(\phi(0), \psi(0)\big)$,

siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi 1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'_x(P_0)\,\phi'(0) + f'_y(P_0)\,\psi'(0) \\ &= f'_x(P_0)\,a_1 + f'_y(P_0)\,b_1 = \nabla f(P_0)\cdot \vec{s}_1 = \nabla f(P_0)\cdot \frac{1}{|\vec{s}|}\vec{s}; \end{aligned}$$

niisiis $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = g'(0) = \nabla f(P_0)\cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$, nagu soovitud. □

Märkus 1.10. Kui teoreemis 1.12 loobuda eeldusest funktsiooni f diferentseeruvuse kohta punktis P_0, siis valem (1.13) üldjuhul ei kehti.

Näide 1.9. Vaatleme funktsiooni

$$z = f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

Sellel funktsioonil on punktis $(0,0)$ olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui $\vec{s} = (a,b)$ on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2a^2\,tb}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sqrt[3]{a^2b}}{t} = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0,0)$ lõplikud esimest järku osatuletised muutujate x ja y järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt vektorite $(1,0)$ ja $(0,1)$ suunas), kusjuures

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0;$$

niisiis $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Seega mis tahes ühikvektori $\vec{s} = (a,b)$ korral

$$\nabla f(0,0)\cdot \vec{s} = 0a + 0b = 0,$$

kuid $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = \sqrt[3]{a^2b} \neq 0$, kui $a, b \neq 0$.

Teoreem 1.13. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Siis funktsiooni f tuletis punktis P_0 mis tahes suunas ei ületa tema tuletist selles punktis gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas (ehk, teisisõnu, tuletis gradiendi suunas on kõikvõimalikes suundades võetud tuletiste maksimaalne väärtus). Funktsiooni f tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkusega.*

Teoreemi 1.13 tõestus kordab sõna-sõnalt teoreemi 1.11 tõestust. □

§ 2. Kõrgemat järku osatuletised ja diferentsiaalid

2.1. Kõrgemat järku osatuletised

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kui funktsioonil f eksisteerib igas punktis P punkti P_0 mingist ümbrusest $\mathcal{U}$ lõplik osatuletis $f'_{x_i}(P)$, siis selles ümbruses on määratud osatuletisfunktsioon

$$f'_{x_i}\colon \mathcal{U} \ni P \mapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 2.1. Olgu $j \in \{1, \ldots, m\}$. Kui osatuletisfunktsioonil f'_{x_i} eksisteerib punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) osatuletis muutuja x_j järgi $(f'_{x_i})'_{x_j}(P_0)$, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *osatuletiseks punktis* P_0 *(muutujate* x_i *ja* x_j *järgi)* ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}(P_0), \quad f''_{x_ix_j}(P_0), \quad u''_{x_ix_j}(P_0), \quad f_{x_ix_j}(P_0), \quad u_{x_ix_j}(P_0) \tag{2.1}$$

või

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f''_{x_ix_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$u''_{x_ix_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f_{x_ix_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_ix_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Seejuures, kui $j \neq i$, siis seda teist järku osatuletist nimetame *segaosatuletiseks.*

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik teist järku osatuletis $f''_{x_ix_j}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(teist järku) osatuletisfunktsioon (argumentide* x_i *ja* x_j *järgi)*

$$f''_{x_ix_j}\colon \mathcal{D} \ni P \longmapsto f''_{x_ix_j}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni f) *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *osatuletiseks (argumentide* x_i *ja* x_j *järgi).* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}, \quad f''_{x_ix_j}, \quad u''_{x_ix_j}, \quad f_{x_ix_j}, \quad u_{x_ix_j}. \tag{2.2}$$

Tähistused (2.1) on tähistustega (2.2) hästi kooskõlas: (lõplik) teist järku osatuletis antud punktis on vastava osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Üldiselt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big)}{\partial x_j}, \quad f''_{x_ix_j} = (f'_{x_i})'_{x_j}, \quad u''_{x_ix_j} = (u'_{x_i})'_{x_j},$$
$$f_{x_ix_j} = (f_{x_i})_{x_j}, \quad u_{x_ix_j} = (u_{x_i})_{x_j}.$$

Me kasutame tähistusi (juhu $j = i$ jaoks)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_i} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_i} =: \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad f''_{x_ix_i} =: f''_{x_i^2}, \quad u''_{x_ix_i} =: u''_{x_i^2},$$

$$f_{x_ix_i} =: f_{x_i^2}, \quad u_{x_ix_i} =: u_{x_i^2}.$$

Näide 2.1. Leiame funktsiooni

$$u = f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

teist järku osatuletised. Kui $(x,y) \neq (0,0)$, saame vahetult diferentseerides

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

millest sümmeetria põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2};$$

seega, jällegi vahetult diferentseerides,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)'_x = \frac{-4x^3y^3 + 12xy^5}{(x^2+y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3},$$

millest sümmeetria põhjal vastavalt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y = \frac{-12x^5y + 4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)'_x = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Leiame funktsiooni f esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Nüüd saame leida funktsiooni f teist järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^5}{h^5} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0+h) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^5} = 1.$$

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et funktsioon f on n *korda diferentseeruv* punktis P_0, kui funktsioonil f eksisteerivad punkti P_0 mingis ümbruses kõikvõimalikud $n-1$ järku osatuletised, kusjuures need osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) on punktis P_0 diferentseeruvad.

2.2. Piisavaid tingimusi segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast

Eelneva punkti näite 2.1 funktsiooni $u = f(x, y)$ puhul kehtis väljaspool punkti $(0, 0)$ võrdus $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, s.t. samade muutujate järgi võetud segaosatuletis ei sõltunud diferentseerimise järjekorrast. Samas pole see mitte alati nii: selles samas näites $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Selles punktis anname mõned piisavad tingimused segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast. Kõik selle punkti tulemused esitame ilma tõestuseta.

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ kaks korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Siis*

$$f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0).$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. $\square$

Järeldus 2.2. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ n korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsiooni f n järku osatuletised punktis P_0 ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.*

Seda järeldust me käesolevas kursuses ei tõesta. $\square$

Teroeemi 2.1 väide jääb kehtima ka veidi teistsuguste eelduste korral. Kehtib

Teoreem 2.3. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x, y)$ punkti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses osatuletised f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, kusjuures segaosatuletised (s.t. segaosatuletisfunktsioonid) f''_{xy} ja f''_{yx} on pidevad punktis P_0. Siis*

$$f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0).$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. $\square$

2.3. Kõrgemat järku diferentsiaalid

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ diferentseeruv hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P. Fikseerides argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalide väärtused $dx_1, \ldots, dx_m$ (s.t. lugedes need diferentsiaalid fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \ldots, x_m$) funktsioonina $du = du(P)$:

$$du = du(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P)\, dx_m.$$

Eeldame nüüd, et funktsioon f on fikseeritud punktis $P \in \mathcal{D}$ kaks korda diferentseeruv (s.t. osatuletisfunktsioonid $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ on diferentseeruvad punktis P). Siis (vt. märkust 1.6) ka selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal du (tõlgendatuna eespool kirjeldatud viisil m muutuja funktsioonina) on diferentseeruv punktis P, kusjuures tema täisdiferentsiaal selles punktis avaldub kujul

$$d(du)(P) = d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)(P)\,dx_1 + \cdots + d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Big)(P)\,dx_m = \sum_{i=1}^{m} d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(P)\,dx_i.$$

Tähistades selles võrduses osatuletisfunktsioonide $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ täisdiferentsiaalide avaldistes argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalid (selguse huvides) sümbolitega $\delta x_1, \ldots, \delta x_m$ (eristamaks neid fikseeritud väärtustest $dx_1, \ldots, dx_m$), s.t.

$$d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_i}(P)\,\delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m\,\partial x_i}(P)\,\delta x_m, \quad i = 1, \ldots, m,$$

saame

$$d(du)(P) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(P)\,\delta x_j\Big)dx_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(P)\,\delta x_j\,dx_i.$$

Selle diferentsiaali väärtust (s.t. funktsiooni f esimest järeku täisdiferentsiaali du täisdiferentsiaali $d(du)$ väärtust punktis P), kui $\delta x_i = dx_i$, $i = 1, \ldots, m$, nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *täisdiferentsiaaliks* punktis P ja tähistatakse sümboliga $d^2u(P)$ või $d^2f(P)$:

$$d^2u(P) := d^2f(P) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(P)\,dx_i\,dx_j. \tag{2.3}$$

Analoogiliselt esimest järku täisdiferentsiaali juhuga, kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis kaks korda diferentseeruv, võime argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ fikseeritud väärtuste korral funktsiooni f teist järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \ldots, x_m$) funktsioonina $d^2u = d^2u(P)$; esitusest (2.3) (jättes seal argumendi P kirjutamata)

$$d^2u = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j.$$

Juhime tähelepanu, et funktsiooni f kaks korda diferentseeruvuse tõttu hulgas $\mathcal{D}$ (järelduse 2.2 põhjal)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad \text{kõikide } i, j \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral.}$$

Nii näiteks kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$dz = df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2,$$

kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$\begin{aligned}du = df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,dz^2 \\ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\,dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\,dx\,dz\end{aligned}$$

jne.

Funktsiooni kolmandat ja kõrgemat järku täisdiferentsiaalid defineeritakse analoogiliselt. Üldiselt, n korda diferentseeruva funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *n-ndat järku täisdiferentsiaal* $d^n u$ defineeritakse rekurrentselt võrdusega $d^n u = d(d^{n-1}u)$, kus $n-1$ järku täisdiferentsiaali $d^{n-1}u$ avaldises argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalid $dx_1, \ldots, dx_m$ loetakse fikseeritud konstantideks ja seda täisdiferentsiaali tõlgendatakse (esimest ja teist järku täisdiferentsiaalide juhuga analoogilisel viisil) m muutuja $x_1, \ldots, x_m$ funktsioonina ning selle funktsiooni täisdiferentsiaalis $d(d^{n-1}u)$ võetakse argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalid $\delta x_1, \ldots, \delta x_m$ võrdseks vastavalt diferentsiaalidega $dx_1, \ldots, dx_m$.

Nii näiteks funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ kolmandat järku täisdiferentsiaal on

$$\begin{aligned}d^3u &= d(d^2u)\big|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m} = d\Bigg(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\Bigg)\Bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Bigg(d\Bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\Bigg)\Bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m}\Bigg)\,dx_i\,dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Bigg(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,\delta x_k\Bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m}\Bigg)\,dx_i\,dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\,dx_k\end{aligned}$$

ning, analoogiliselt, neljandat järku täisdiferentsiaal on

$$d^4u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^4 f}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\,dx_k\,dx_l$$

jne. Arvestades, et n korda diferentseeruva funktsiooni n järku segaosatuletised ei sõltu diferentseerimise järjekorrast, saame siit näiteks valemid kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ kõrgemat järku täisdiferentsiaalide jaoks:

$$\begin{aligned}d^3z &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,dy^3, \\ d^4z &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\,dx^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial y\,\partial x^3}\,dx^3\,dy + 6\frac{\partial^4 f}{\partial y^2\,\partial x^2}\,dx^2\,dy^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial y^3\,\partial x}\,dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\,dy^4\end{aligned}$$

jne. Sarnasuse tõttu binoomvalemiga esitatakse üldine valem kahe funktsiooni $z = f(x, y)$ n-ndat järku täisdiferentsiaali jaoks kujul

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy \right)^n f.$$

2.4. Taylori valem mitme muutuja funktsiooni jaoks

Teoreem 2.4 (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul)**.** *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

n korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Siis iga punkti $P = (x_1, \ldots, x_m)$ jaoks punkti P_0 teatavast ümbrusest $\mathcal{U}$ kehtib valem

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f(P_0) + \alpha_n \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \alpha_n, \end{aligned}$$

kus diferentsialide $df(P_0), \ldots, d^n f(P_0)$ avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

ning, tähistades

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0),$$

funktsioon $\alpha_n = \alpha_n(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha_n = o(\rho^n)$ protsessis $\rho \to 0$.

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Teoreem 2.5 (Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

$n + 1$ korda diferentseeruv punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ mingis ε-ümbruses $\mathcal{U}$. Siis iga punkti $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$ jaoks kehtib valem

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(Q)}{(n+1)!} \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(Q)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

kus diferentsiaalide $df(P_0), \ldots, d^n f(P_0)$ ja $d^{n+1} f(Q)$ avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

ja

$$Q = (x_1^0 + \theta \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \theta \Delta x_m)$$

mingi $\theta \in (0, 1)$ korral (mis sõltub punktist P).

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

III peatükk.
Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid

§ 1. Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

1.1. Lokaalse ekstreemumi mõiste. Tarvilik tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0

- *lokaalne maksimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et
$$f(P) \leqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral;}$$
- *lokaalne miinimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et
$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Seejuures punkti P_0 nimetatakse vastavalt funktsiooni f *lokaalseks maksimumpunktiks* ja *lokaalseks miinimumpunktiks.*

Teisisõnu, funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne maksimum (või, vastavalt, lokaalne miinimum), kui sellel punktil leidub ümbrus, milles funktsiooni väärtus $f(P_0)$ on selle funktsiooni suurim väärtus (või, vastavalt, vähim väärtus) selles ümbruses.

Lokaalset maksimumi ja lokaalset miinimumi nimetatakse *lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0

- *range lokaalne maksimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et
$$f(P) < f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\} \text{ korral;}$$

- *range lokaalne miinimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) > f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\} \text{ korral.}$$

Ranget lokaalset maksimumi ja ranget lokaalset miinimumi nimetatakse *rangeteks lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Teoreem 1.1. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ lõplikud osatuletised kõikide argumentide järgi. Kui funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne ekstreemum, siis*

$$f'_{x_i}(P_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Tõestus. Konkreetsuse mõttes eeldame, et funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne miinimum (juhtu, kus funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne maksimum, käsitletakse analoogiliselt), s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et

$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in U_\varepsilon(P_0) \text{ korral.}$$

Olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Vaatleme funktsiooni

$$g(t) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0).$$

Paneme tähele, et

(1) funktsioon g on määratud vahemikus $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$;

(2) funktsioonil g on punktis $t = x_i^0$ lokaalne miinimum;

(3) funktsioon g on diferentseeruv punktis $t = x_i^0$, kusjuures $g'(x_i^0) = f'_{x_i}(P_0)$.

Tõepoolest, tähistame iga $t \in \mathbb{R}$ korral $Q_t := (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$; siis iga $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ korral $d(Q_t, P_0) = |t - x_i^0| < \varepsilon$, s.t. $Q_t \in U_\varepsilon(P_0)$, seega Q_t kuulub funktsiooni f määramispiirkonda ehk, teisisõnu, funktsioon g on määratud punktis t. Seejuures iga $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ korral

$$g(t) = f(Q_t) \geqslant f(P_0) = g(x_i^0);$$

niisiis, funktsioonil g on punktis x_i^0 lokaalne miinimum.

Väidetest (3) ja (2) järeldub Fermat' teoreemi põhjal, et $f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0) = 0$, nagu soovitud. □

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et punkt P_0 on funktsiooni f

- *statsionaarne punkt,* kui sellel funktsioonil eksisteerivad selles punktis osatuletised kõikide muutujate järgi, kusjuures kõik need osatuletised on võrdsed nulliga;

- *kriitiline punkt,* kui see punkt on kas funktsiooni f statsionaarne punkt või selle funktsiooni mingi osatuletis selles punktis kas ei eksisteeri või on lõpmatu.

Teoreemist 1.1 järeldub niisiis, et

- *mis tahes funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni kriitilises punktis;*
- *diferentseeruval funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni statsionaarses punktis.*

Märkus 1.1. Punkti statsionaarsus ei ole piisav tingimus funktsiooni lokaalse ekstreemumi olemasoluks selles punktis (isegi juhul, kui funktsioon on diferentseeruv selles statsionaarses punktis).

Näide 1.1. Veendume, et funktsioonil $z = f(x,y) := xy$ ei ole lokaalset ekstreemumit tema statsionaarses punktis $(0,0)$.

Kõigepealt märgime, et punkt $(0,0)$ on tõepoolest funktsiooni f statsionaarne punkt, sest selle funktsiooni osatuletised on

$$f'_x(x,y) = (xy)'_x = y \quad \text{ja} \quad f'_y(x,y) = (xy)'_y = x$$

ning seega $f'_x(0,0) = 0$ ja $f'_y(0,0) = 0$. Lisaks, funktsioon f on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, sest tema osatuletised on pidevad kogu tasandil.

Veendumaks, et funktsioonil f ei ole punktis $(0,0)$ lokaalset ekstreemumit, märgime, et punkti $(0,0)$ mis tahes ümbrus sisaldab punkte (x,y), kus x ja y on nullist erinevad ja samamärgilised ning seega $f(x,y) = xy > 0 = f(0,0)$, samuti punkte (x,y), kus x ja y on nullist erinevad ja erimärgilised ning seega $f(x,y) = xy < 0 = f(0,0)$.

1.2. Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Definitsioon 1.4. Olgu $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,\ldots,m$. Summat

$$\Phi(x_1,\ldots,x_m) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j \tag{3.1}$$

nimetatakse *ruutvormiks* muutujatest $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}$.

Maatriksit

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

nimetatakse *ruutvormi* (3.1) *maatriksiks.*

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et ruutvorm (3.1) on

- *positiivselt määratud,* kui

$$\Phi(x_1,\ldots,x_m) > 0 \quad \text{kõikide } x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R},\ x_1^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0, \text{ korral;}$$

- *negatiivselt määratud,* kui

$$\Phi(x_1,\ldots,x_m) < 0 \quad \text{kõikide } x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R},\ x_1^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0, \text{ korral.}$$

Positiivselt määratud ja negatiivselt määratud ruutvorme nimetatakse *määratud ruutvormideks.*

Ruutvormi (3.1) nimetatakse *määramata ruutvormiks,* kui tal esineb nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

Definitsioon 1.6. Determinante

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

nimetatakse ruutvormi (3.1) *peamiinoriteks.*

Algebra kursuses tõestatakse

Teoreem 1.2 (Sylvesteri tunnus). (a) *Ruutvorm* (3.1) *on positiivselt määratud parajasti siis, kui kõik tema peamiinorid on positiivsed, s.t.*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots\dots, \quad A_m > 0.$$

(b) *Ruutvorm* (3.1) *on negatiivselt määratud parajasti siis, kui tema peamiinorite märgid vahelduvad, kusjuures $A_1 < 0$, s.t.*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \dots.$$

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on kaks korda diferentseeruv punktis P_0, siis tema teist täisdiferentsiaali

$$d^2u(P_0) = \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(P_0)\, dx_i dx_j$$

võib tõlgendada kui ruutvormi muutujatest $dx_1, \dots, dx_m$. Seda ruutvormi nimetatakse funktsiooni f *hessiaaniks*[1] punktis P_0.

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks statsionaarses punktis.

Teoreem 1.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$.*

(a) *Kui hessiaan $d^2u(P_0)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.*

(b) *Kui hessiaan $d^2u(P_0)$ on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.*

(c) *Kui hessiaan $d^2u(P_0)$ on määramata ruutvorm, siis funktsioonil f ei ole lokaalset ekstreemumit punktis P_0.*

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

[1] Ludwig Otto Hesse (1811–1874) — saksa matemaatik.

1.3. Kahe muutuja funktsiooni juht

Teoreem 1.4. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis $P_0 = (x_0, y_0)$. Tähistame*

$$a_{11} = f''_{x^2}(P_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(P_0), \quad a_{12} = a_{21} = f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$

ning

$$A_1 = a_{11} \quad \textit{ja} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2.$$

(a) *Kui*

$$A_1 > 0 \quad \textit{ja} \quad A_2 > 0,$$

siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.

(b) *Kui*

$$A_1 < 0 \quad \textit{ja} \quad A_2 > 0,$$

siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.

(c) *Kui*

$$A_2 < 0,$$

siis funktsioonil f ei ole punktis P_0 lokaalset ekstreemumit.

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Näide 1.2. Leiame funktsiooni $z = x^4 + x^3 - 3x - 2x^2y + y^2$ lokaalsed ekstreemumid.

Teoreemi 1.1 põhjal saab funktsioonil lokaalne ekstreemum esineda ainult tema kriitilistes punktides. Leiame funktsiooni z osatuletised:

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2y + y^2)'_x = 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy, \\ z'_y &= (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2y + y^2)'_y = -2x^2 + 2y; \end{aligned}$$

seega funktsiooni z statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy = 0, \\ -2x^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi teisest võrrandist $y = x^2$ esimesse võrrandisse, saame, et $3x^2 = 3$ ehk $x^2 = 1$, millest $x = -1$ või $x = 1$. Selle süsteemi lahendid ja seega funktsiooni z statsionaarsed punktid (ning funktsiooni z diferentseeruvuse tõttu ka ainsad selle funktsiooni kriitilised punktid) on $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$.

Leiame funktsiooni z teist järku osatuletised:

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_x = 12x^2 + 6x - 4y, \\ z''_{xy} = z''_{yx} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_y = -4x, \\ z''_{y^2} &= (-2x^2 + 2y)'_y = 2 \end{aligned}$$

ja tähistame

$$A_1 := z''_{x^2} = 12x^2 + 6x - 4y, \qquad A_2 := \begin{vmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 6x - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{vmatrix}.$$

Statsionaarses punktis $(-1,1)$

$$A_1 = 2 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

seega (teoreemi 1.4, (c), põhjal) funktsioonil z ei ole punktis $(-1,1)$ lokaalset ekstreemumit.
Statsionaarses punktis $(1,1)$

$$A_1 = 14 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

seega (teoreemi 1.4, (a), põhjal) funktsioonil z on punktis $(1,1)$ range lokaalne miinimum; seejuures $z(1,1) = -2$.

§ 2. Mitme muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 2.1. Funktsiooni f

- suurimat väärtust hulgas $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f *globaalseks maksimumiks* (hulgas $\mathcal{D}$);
- vähimat väärtust hulgas $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f *globaalseks miinimumiks* (hulgas $\mathcal{D}$).

Globaalset maksimumi ja globaalset miinimumi nimetatakse ühise nimetusega *globaalsed ekstreemumid.*

Pole raske tuua näiteid (isegi pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta), kus funktsioonil puuduvad tema määramispiirkonna mingis alamhulgas globaalsed ekstreemumid. Teiselt poolt, Weierstrassi teisest teoreemist I.4.8 järeldub, et *tõkestatud kinnises hulgas pideval funktsioonil eksisteerivad selles hulgas globaalsed ekstreemumid.*

Kui funktsioonil $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ eksisteerib tema määramispiirkonna alamhulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ mingi globaalne ekstreemum, siis see globaalne ekstreemum võib olla hulga $\mathcal{D}$ sisepunktis või hulga $\mathcal{D}$ rajapunktis; seejuures, kui see globaalne ekstreemum saavutatakse hulga $\mathcal{D}$ sisepunktis, siis selles punktis on funktsioonil f ka vastav lokaalne ekstreemum, järelikult see punkt on funktsiooni f kriitiline punkt. Seega, kui me teame, et funktsioonil f eksisteerivad tema määramispiirkonna alamhulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid, siis nende globaalsete ekstreemumite leidmiseks võime kasutada järgmist eeskirja:

(1) leiame funktsiooni f väärtused tema kriitilistes punktides (hulga $\mathcal{D}$ sisemuses);

(2) leiame funktsiooni f väärtused tema võimalikes ekstreemumpunktides hulga $\mathcal{D}$ rajal;

(3) neist leitud väärtustest suurim on funktsiooni f globaalne maksimum $\max\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ hulgas $\mathcal{D}$ ning vähim on funktsiooni f globaalne miinimum $\min\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ hulgas $\mathcal{D}$.

Näide 2.1. Leiame funktsiooni $z = x^3 + y^3 - 3xy$ suurima ja vähima väärtuse ristkülikus

$$\mathcal{D} := [0,2] \times [-1,2] := \big\{(x,y)\colon\ x \in [0,2],\ y \in [-1,2]\big\}.$$

Kõigepealt märgime, et kuna funktsioon z on pidev, siis Weierstrassi teise teoreemi I.4.8 põhjal tal eksisteerivad tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid.

Leiame funktsiooni z kriitilised punktid hulga $\mathcal{D}$ sisemuses $\mathcal{D}^\circ$. Kuna funktsioon z on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, siis tema ainsad kriitilised punktid on statsionaarsed punktid. Leiame funktsiooni z osatuletised:

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x;$$

seega funktsiooni z statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \qquad \text{ehk} \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi esimesest võrrandist $y = x^2$ teise võrrandisse, saame, et $x^4 - x = 0$ ehk $x(x^3 - 1) = 0$, millest $x = 0$ või $x = 1$. Selle süsteemi lahendid on seega $(0,0)$ ja $(1,1)$; kuna $(0,0) \notin \mathcal{D}^\circ$, siis funktsiooni z ainus statsionaarne (ning seega ka ainus kriitiline) punkt hulga $\mathcal{D}$ sisemuses $\mathcal{D}^\circ$ on $(1,1)$; seejuures

$$z(1,1) = -1.$$

Hulga $\mathcal{D}$ rajajoon $\partial\mathcal{D}$ esitub ühendina

$$\partial\mathcal{D} = \big\{(0,-1),(2,-1),(2,2),(0,2)\big\} \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

kus

$$L_1 := \big\{(x,y)\colon\ x \in (0,2),\ y = -1\big\}, \qquad L_2 := \big\{(x,y)\colon\ x = 2,\ y \in (-1,2)\big\},$$
$$L_3 := \big\{(x,y)\colon\ x \in (0,2),\ y = 2\big\}, \qquad L_4 := \big\{(x,y)\colon\ x = 0,\ y \in (-1,2)\big\}.$$

Rajajoone osal L_1 omandab funktsioon z kuju

$$z = x^3 - 1 + 3x =\colon f_1(x), \quad x \in (0,2).$$

Kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_1 punktis (x,y), siis funktsioonil f_1 oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_1 diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni f_1 statsionaarne punkt, s.t. $f_1'(x) = 0$. Leiame funktsiooni f_1 tuletise:

$$f_1'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Näeme, et tuletisel f_1' nullkohti pole, seega rajajoone osal L_1 funktsiooni z globaalseid ekstreemumeid ei ole.

Rajajoone osal L_3 omandab funktsioon z kuju

$$z = x^3 + 8 - 6x =\colon f_3(x), \quad x \in (0,2).$$

Leiame funktsiooni f_3 tuletise:

$$f_3'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise f_3' nullkohad on $x = -\sqrt{2}$ ja $x = \sqrt{2}$, kusjuures $-\sqrt{2} \notin (0,2)$; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal L_3 on $(\sqrt{2},2)$; seejuures

$$z(\sqrt{2},2) = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_3 punktis (x,y), siis funktsioonil f_3 oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_3 diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni f_3 statsionaarne punkt, s.t. $f_3'(y) = 0$.)

Rajajoone osal L_2 omandab funktsioon z kuju

$$z = 8 + y^3 - 6y =\colon f_2(y), \quad y \in (-1,2).$$

Leiame funktsiooni f_2 tuletise:

$$f_2'(y) = 3y^2 - 6 = 3(y^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise f_2' nullkohad on $y = -\sqrt{2}$ ja $y = \sqrt{2}$, kusjuures $-\sqrt{2} \notin (-1,2)$; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal L_2 on $(2,\sqrt{2})$; seejuures

$$z(2,\sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_2 punktis (x,y), siis funktsioonil f_2 oleks punktis y lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_2 diferentseeruvuse tõttu peaks y olema funktsiooni f_2 statsionaarne punkt, s.t. $f_2'(y) = 0$.)

Rajajoone osal L_4 omandab funktsioon z kuju

$$z = y^3 =: f_4(y), \quad y \in (-1,2).$$

Funktsioon f_4 on kasvav vahemikus $(-1,2)$, seega rajajoone osal L_4 võimalikke ekstreemumpunkte ei ole. (Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_4 punktis (x,y), siis funktsioonil f_4 oleks punktis $y \in (-1,2)$ lokaalne ekstreemum; kuna aga funktsioon f_4 on kasvav vahemikus $(-1,2)$, siis tal selleks vahemikus lokaalseid ekstreemumeid ei ole, seega rajajoone osal L_4 funktsiooni z globaalseid ekstreemumeid ei ole..)

Leiame funktsiooni z väärtused rajajoone $\partial\mathcal{D}$ ülejäänud võimalikes ekstreemumpunktides:

$$z(0,-1) = -1, \quad z(2,-1) = 8-1+6 = 13, \quad z(2,2) = 8+8-12 = 4, \quad z(0,2) = 8.$$

Valides eelnevas leitud võimalikest ekstreemumitest suurima ja vähima, saame

$$\max_{P\in\mathcal{D}} z(P) = z(2,-1) = 13 \quad \text{ja} \quad \min_{P\in\mathcal{D}} z(P) = z(1,1) = z(0,-1) = -1.$$

Mõnikord võib globaalsete ekstreemumite leidmisel olla abi alljärgnevast teoreemist 2.1, mille tarvis toome eelnevalt sisse *kumera hulga* mõiste.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *kumer,* kui tema mis tahes kaht punkti ühendav sirglõik sisaldub selles hulgas, s.t. mis tahes $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0), P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}$ korral neid punkte P_0 ja P ühendav sirglõik

$$P_0P := \big\{(x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m)\colon\ t \in [0,1]\big\} \subset \mathcal{D},$$

kus $\Delta x_i := x_i - x_i^0$, $i = 1, \dots, m$.

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv lahtise kumera hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis ning olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ funktsiooni f statsionaarne punkt, s.t.*

$$f'_{x_1}(P_0) = \dots = f'_{x_m}(P_0) = 0. \tag{2.1}$$

(a) *Kui iga $Q \in \mathcal{D}$ korral hessiaan $d^2f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum (s.t. $f(P) > f(P_0)$ iga $P \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ korral).*

(b) *Kui iga $Q \in \mathcal{D}$ korral hessiaan $d^2f(Q)$ on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne maksimum (s.t. $f(P) < f(P_0)$ iga $P \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ korral).*

Märkus 2.1. Teoreem II.2.5 (mitme muutuja funktsiooni Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul) jääb kehtima, kui temas vaadelda punkti P_0 ε-ümbruste asemel selle punkti mis tahes kumeraid lahtisi ümbrusi. Teoreem 2.1 on vahetu järeldus teoreemist II.2.5 (täpsemalt, selle teoreemi mainitud viisil tugevdatud variandist). Tõepoolest, kehtigu teoreemi 2.1 eeldused ning olgu iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ suhtes). Teoreemi II.2.5 (kumerate ümbruste versiooni) põhjal mis tahes punkti $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ korral

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{d^2 f(Q)}{2},$$

kus diferentsiaalide $df(P_0)$ ja $d^2 f(Q)$ avaldistes $dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, m$, ning Q on mingi punkt punkte P_0 ja P ühendavalt sirglõigult. Kuna P_0 on funktsiooni f statsionaarne punkt, siis

$$df(P_0) = f'_{x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\,\Delta x_m = 0\,\Delta x_1 + \cdots + 0\,\Delta x_m = 0;$$

kuna tehtud eelduse põhjal on $d^2 f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm, siis $d^2 f(Q) > 0$; seega $f(P) - f(P_0) = d^2 f(Q) > 0$, järelikult $f(P) > f(P_0)$; niisiis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum. Teoreemi 2.1 väide (a) on tõestatud.

Väide (b) (hessiaani $d^2 f$ negatiivse määratuse juht) tõestatakse analoogiliselt.

Kuna me käesolevas kursuses teoreemi II.2.5 ei tõestanud, siis esitame järgnevas teoreemile 2.1 ühe tõestuse, mis on ülaltoodust küll mõnevõrra pikem, kuid ei kasuta mitme muutuja funktsiooni Taylori valemit.

Teoreemi 2.1 tõestus, mis ei kasuta Taylori valemit. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.)

Eeldame, et iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ suhtes). Fikseerime vabalt $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$. Veendumaks, et funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum, piisab näidata, et $f(P) > f(P_0)$. Selleks tähistame $\Delta x_1 := x_1 - x_1^0, \ldots, \Delta x_m := x_m - x_m^0$ ja defineerime funktsiooni

$$g(t) := f(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m).$$

Kuna hulk $\mathcal{D}$ on kumer ning (hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu) punktid P_0 ja P on funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D}$ sisepunktid (ning järelikult funktsioon f on määratud punktide P_0 ja P teatavas ümbruses), siis mingi $\varepsilon > 0$ korral funktsioon g on määratud vahemikus $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Tõepoolest, tähistades iga $t \in \mathbb{R}$ korral $P_t := (x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)$, peame leidma $\varepsilon > 0$ nii, et iga $t \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ korral $P_t \in \mathcal{D}$ (sest sel juhul on funktsioon f määratud punktis P_t ehk, teisisõnu, funktsioon g on määratud punktis t). Kõigepealt, hulga $\mathcal{D}$ kumeruse tõttu mis tahes $t \in [0, 1]$ korral $P_t \in \mathcal{D}$.

Olgu nüüd $\varepsilon > 0$ suvaline. Kui $t \in (-\varepsilon, 0)$, siis

$$d(P_t, P_0) = \sqrt{(t\,\Delta x_1)^2 + \cdots + (t\,\Delta x_m)^2} = |t|\sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\, d(P, P_0),$$

kui aga $t \in (1, 1 + \varepsilon)$, siis (arvestades, et $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$)

$$d(P_t, P) = \sqrt{\big((t-1)\,\Delta x_1\big)^2 + \cdots + \big((t-1)\,\Delta x_m\big)^2} = |t - 1|\sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\, d(P, P_0).$$

Kuna hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu on P_0 ja P hulga $\mathcal{D}$ sisepunktid, siis leiduvad $r_0, r > 0$ nii, et $B(P_0, r_0) \subset \mathcal{D}$ ja $B(P, r) \subset \mathcal{D}$, s.t.

$$d(Q, P_0) < r_0 \implies Q \in \mathcal{D} \qquad \text{ja} \qquad d(Q, P) < r \implies Q \in \mathcal{D}.$$

Niisiis, valides $\varepsilon > 0$ nii, et $\varepsilon\, d(P, P_0) < \min\{r_0, r\}$, kehtib iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral $P_t \in \mathcal{D}$.

Kuna $g(0) = f(P_0)$ ja $g(1) = f(P)$, siis jääb näidata, et $g(1) > g(0)$. Selleks piisab näidata, et

(1) funktsioon g on diferentseeruv vahemikus $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$;

(2) $g'(t) > 0$ iga $t \in (0,1)$ korral,

sest tingimuse (1) kehtides Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub punkt $\xi \in (0,1)$ nii, et $g(1) - g(0) = g'(\xi)\,(1-0) = g'(\xi)$; tingimuse (2) kehtides $g'(\xi) > 0$, seega $g(1) - g(0) > 0$, s.t. $g(1) > g(0)$, nagu soovitud.

Funktsiooni g diferentseeruvuseks märgime, et g esitub liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big),$$

kus nii f kui ka $\phi_i(t) := x_i^0 + t\,\Delta x_i$, $i = 1, \ldots, m$, on diferentseeruvad funktsioonid; seega liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv, kusjuures tema tuletis esitub valemiga

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'_{x_1}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\phi'_1(t) + \cdots + f'_{x_1}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\phi'_m(t) \\ &= f'_{x_1}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_1}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\Delta x_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\Delta x_i \qquad (2.2) \\ &= \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)\,\Delta x_i. \end{aligned}$$

Siit näeme, et võrduste (2.1) tõttu

$$g'(0) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(P_0)\,\Delta x_i = 0.$$

Niisiis piisab väite (2) tõestuseks näidata, et tuletisfunktsioon g' on rangelt kasvav, milleks omakorda piisab veenduda, et funktsioon g on kaks korda diferentseeruv, kusjuures $g''(t) > 0$ iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral. Funktsiooni g kaks korda diferentseeruvus järeldub liitfunktsiooni diferentseeruvuse reegli (teoreemi II.1.8) põhjal võrdusest (2.2) (funktsiooni f kaks korda diferentseeruvuse ning funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ diferentseeruvuse tõttu); seejuures mis tahes $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\Delta x_i\,\phi'_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)\,\Delta x_i\,\Delta x_j \\ &= d^2 f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big). \end{aligned}$$

Kuna teist järku täisdiferentsiaal $d^2f\big(\phi_1(t),\ldots,\phi_m(t)\big)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis järeldub eelnevast võrdusteahelast, et $g''(t)>0$, nagu soovitud. $\square$

Märkus 2.2. Teoreemi 2.1 võib tõestada ka toetudes ühe muutuja funktsiooni Taylori valemile jääkliikmega Lagrange'i kujul, millega lugeja tutvus (või vähemalt oleks pidanud tutvuma) kursuses "Matemaatiline analüüs I" (nimetatud kursuses esitati see valem ilma tõestuseta).

Teoreem 2.2 ((ühe muutuja funktsiooni) Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** *Eksisteerigu (ühe muutuja) funktsioonil f punkti a mingis ümbruses $\mathcal{U}$ lõplik $(n+1)$-järku tuletis $(n\in\mathbb{N})$. Siis iga $x\in\mathcal{U}$ korral kehtib Taylori valem*

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\;+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

kus punkt ξ paikneb punktide a ja x vahel.

Tõepoolest, kehtigu teoreemi 2.1 eeldused ning olgu iga $Q\in\mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1,\ldots,dx_m$ suhtes). Fikseerides vabalt punkti $P=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathcal{D}\setminus\{P_0\}$ ja defineerides funktsiooni g (nagu ülaltoodud tõestuseski), piisab (jälle nagu ülaltoodud tõestuseski) väite (a) tõestuseks näidata, et $g(1)>g(0)$. Selleks märgime (jälle nagu ülaltoodud tõestuseski), et funktsioon g on kaks korda diferentseeruv vahemikus $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$, kusjuures $g'(0)=0$ ning $g''(t)>0$ iga $t\in(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ korral. Seega saame Taylori valemist (s.t. teoreemist 2.2, võttes seal $a=0$ ja $n=1$) mingi $\xi\in(0,1)$ korral

$$g(1)-g(0)=g'(0)\,(1-0)+\frac{g''(\xi)}{2}\,(1-0)^2=\frac{g''(\xi)}{2}>0,$$

nagu soovitud. Väite (b) saab tõestada analoogiliselt.

IV peatükk.
Ilmutamata funktsioonide teooria

§ 1. Jacobi maatriksid ja determinandid

Olgu funktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \dots, x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases} \tag{1.1}$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Siis süsteem (1.1) määrab kujutuse $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(P) = \big(u_1(P), \dots, u_n(P)\big) \in \mathbb{R}^n, \quad P \in \mathcal{D}. \tag{1.2}$$

Teiselt poolt, mis tahes kujutus $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ määrab ühesel viisil funktsioonid (1.1), mis rahuldavad tingimust (1.2): sellise omadusega funktsioonid (1.1) on defineeritud võrdustega

$$u_j(P) = u_j, \quad P \in \mathcal{D}, \quad j = 1, \dots, n, \qquad \text{kus } \Phi(P) = (u_1, \dots, u_n).$$

Niisiis, *hulgas* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *määratud funktsioonide süsteemid* (1.1) *ja kujutused* $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ *on üksüheses vastavuses.*

Eeldame nüüd, et funktsioonid (1.1) on diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.1. Maatriksit

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

nimetatakse süsteemi (1.1) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$) *Jacobi*[1] *maatriksiks.*

[1]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) — saksa matemaatik.

Rõhutame, et Jacobi maatriks pole arvmaatriks – tema elemendid on funktsioonid. Jacobi maatriksi (1.3) väärtus konkreetses punktis $P \in \mathcal{D}$ on arvmaatriks (mille elemendid on Jacobi maatriksi (1.3) elementide väärtused punktis $P \in \mathcal{D}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m}(P) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $n = m$, s.t. süsteem (1.1) omandab kuju

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = u_m(P) = u_m(x_1, \ldots, x_m). \end{cases} \tag{1.4}$$

Definitsioon 1.2. Süsteemi (1.4) Jacobi maatriksi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

determinanti

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

nimetatakse süsteemi (1.4) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$) *Jacobi determinandiks* ehk *jakobiaaniks.*

Rõhutame jällegi, et Jacobi determinant pole mitte arv, vaid funktsioon (Jacobi determinandi väärtus konkreetses punktis on arv).

§ 2. Ühe võrrandiga antud ilmutamata funktsioonid

2.1. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni mõiste

Sisaldagu kahe muutuja funktsiooni $u = F(x, y)$ määramispiirkond ristkülikut

$$I_1 \times I_2 = \{(x, y)\colon\ x \in I_1,\ y \in I_2\},$$

kus $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y) = 0. \tag{2.1}$$

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et võrrand (2.1) määrab ristkülikus $I_1 \times I_2$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x), \tag{2.2}$$

kui mis tahes fikseeritud $x \in I_1$ korral võrrandil (2.1) eksisteerib parajasti üks lahend $y \in I_2$.

Kõnealune funktsioon (2.2)

$$I_1 \ni x \mapsto y(x) \in I_2$$

on määratud võrdusega

$$F\big(x, y(x)\big) = 0\colon$$

see funktsioon seab punktile $x \in I_1$ vastavusse võrrandi (2.1) ainsa lahendi $y \in I_2$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.2) on antud võrrandiga (2.1) *ilmutamata kujul.*

Näide 2.1. Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2.3}$$

Märgime, et

- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[-1, 1] \times [0, 1]$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina $y = y(x)$, sest iga fikseeritud väärtuse $x \in [-1, 1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend y lõigust $[0, 1]$ (see lahend on $y = \sqrt{1 - x^2}$; niisiis $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[-1, 1] \times [0, 1]$ muutujat x muutuja y (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $y \in [0, 1)$ korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit lõigust $[-1, 1]$ (need lahendid on $x = \sqrt{1 - y^2}$ ja $x = -\sqrt{1 - y^2}$);
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[-1, 1] \times [-1, 0]$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina $y = y(x)$, sest iga fikseeritud väärtuse $x \in [-1, 1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend y lõigust $[-1, 0]$ (see lahend esitub kujul $y = -\sqrt{1 - x^2}$; niisiis $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[-1, 1] \times [-1, 1]$ muutujat y muutuja x (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (-1, 1)$ korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit y lõigust $[-1, 1]$ (need lahendid on $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{1 - x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $(-1, 1) \times [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ muutujat y muutuja x funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ puudub võrrandil (2.3) lahend y lõigus $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$;
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[1, 2] \times (-\infty, \infty)$ muutujat y muutuja x funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (1, 2]$ korral võrrandil (2.3) puudub lahend;
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[0, 1] \times [-1, 1]$ muutuja x muutuja y (ühese) funktsioonina $x = x(y)$, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $y \in [-1, 1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend x lõigust $[0, 1]$ (see lahend on $x = \sqrt{1 - y^2}$; niisiis $x(y) = \sqrt{1 - y^2}$).

2.2. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja diferentseeruvus

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasoluks ja diferentseeruvuseks.

Teoreem 2.1. *Eeldame, et*

(1) *funktsioonil* $u = F(x, y)$ *eksisteerivad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses pidevad osatuletised* F'_x *ja* F'_y*;*

(2) $F(x_0, y_0) = 0$*;*

(3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$

Siis

(a) *punkti* (x_0, y_0) *teatavas ristkülikukujulises ümbruses määrab võrrand* $F(x, y) = 0$ *muutuja* y *muutuja* x *(ühese) funktsioonina* $y = y(x)$*;*

(b) $y(x_0) = y_0$*;*

(c) *funktsioon* $y = y(x)$ *on punkti* x_0 *teatavas ümbruses pidev.*

(d) *funktsioonil* $y = y(x)$ *eksisteerib punkti* x_0 *teatavas ümbruses pidev tuletis, kusjuures selles ümbruses*

$$y'(x) = -\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}; \tag{2.4}$$

niisiis

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x\big(x_0, y(x_0)\big)}{F'_y\big(x_0, y(x_0)\big)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Näide 2.2. Leiame võrrandiga

$$x^3 - 6x^2y + y^3 = 31 \tag{2.5}$$

punkti $(2, -1)$ ümbruses määratud funktsiooni $y = y(x)$ esimest ja teist järku tuletised punktis $x = 2$.

Selleks märgime, et võrrand (2.5) on samaväärne võrrandiga $F(x, y) = 0$, kus

$$F(x, y) = x^3 - 6x^2y + y^3 - 31.$$

Leiam funktsiooni F osatuletised:

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 12xy, \quad F'_y(x, y) = -6x^2 + 3y^2.$$

Näeme, et funktsiooni F osatuletised on kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ pidevad, kusjuures

$$F'_y(2, -1) = -21 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et $F(2,-1) = 0$) teoreemi 2.1 põhjal punkti $(2,-1)$ teatavas ümbruses võrrand (2.5) määrab muutuja y muutuja x diferentseeruva funktsioonina $y = y(x)$; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes $y := y(x)$, valemi (2.4) põhjal

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{3x^2 - 12xy}{6x^2 - 3y^2} = \frac{x^2 - 4xy}{2x^2 - y^2}, \tag{2.6}$$

millest, arvestades, et $y(2) = -1$, saame

$$y'(2) = \frac{4+8}{8-1} = \frac{12}{7}.$$

Kuna punkti $x = 2$ teatavas ümbruses kehtiva samasuse (2.6) parem pool on diferentseeruv (sest funktsioon $y = y(x)$ on selles ümbruses diferentseeruv), siis selle samasuse mõlemat poolt diferentseerides saame

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^2 - 4xy}{2x^2 - y^2}\right)' = \frac{(x^2-4xy)'(2x^2-y^2) - (x^2-4xy)(2x^2-y^2)'}{(2x^2-y^2)^2} \\ &= \frac{(2x - 4y - 4xy')(2x^2-y^2) - (x^2-4xy)(4x-2yy')}{(2x^2-y^2)^2}, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $y(2) = -1$ ja $y'(2) = \frac{12}{7}$,

$$y''(2) = \frac{\left(4+4-\frac{96}{7}\right)7 - 12\left(8 - \frac{24}{7}\right)}{49} = \frac{56 - 96 - 96 - \frac{288}{7}}{49} = \frac{1240}{343}.$$

2.3. Mitme muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja diferentseeruvus

Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid defineeritakse analoogiliselt ühe muutuja ilmutamata funktsioonide juhuga.

Sisaldagu $m+1$ muutuja funktsiooni $u = F(x_1, \dots, x_m, y)$ määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \cdots \times I_m \times I = \big\{(x_1, \dots, x_m, y)\colon\ x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m,\ y \in I\big\},$$

kus $I_1, \dots, I_m, I \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0. \tag{2.7}$$

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et võrrand (2.7) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutuja y muutujate $x_1, \dots, x_m$ (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x_1, \dots, x_m), \tag{2.8}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m$ korral võrrandil (2.7) eksisteerib parajasti üks lahend $y \in I$.

Kõnealune funktsioon (2.8)

$$I_1 \times \cdots \times I_m \ni (x_1, \dots, x_m) \longmapsto y(x_1, \dots, x_m) \in I$$

on määratud võrdusega

$$F\big(x_1, \dots, x_m, y(x_1, \dots, x_m)\big) = 0:$$

see funktsioon seab punktile $(x_1, \dots, x_m) \in I_1 \times \dots \times I_m$ vastavusse võrrandi (2.7) ainsa lahendi $y \in I$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.8) on antud võrrandiga (2.7) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 2.2. *Eeldame, et*

(1) *($m+1$ muutuja) funktsioonil $u = F(x_1, \dots, x_m, y)$ eksisteerivad punkti $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_0)$ mingis ümbruses pidevad osatuletised $F'_{x_1}, \dots, F'_{x_m}$ ja F'_y;*

(2) *$F(P_0) = 0$;*

(3) *$F'_y P_0) \neq 0$.*

Siis

(a) *punkti P_0 teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab võrrand*

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$$

muutuja y muutujate $x_1, \dots, x_m$ (ühese) funktsioonina $y = y(x_1, \dots, x_m)$;

(b) *$y(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_0$;*

(c) *funktsioon $y = y(x_1, \dots, x_m)$ on punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidev;*

(d) *funktsioonil $y = y(x_1, \dots, x_m)$ eksisteerivad punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised $y'_{x_1}, \dots, y'_{x_m}$, kusjuures selles ümbruses*

$$y'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) = -\frac{F'_x\big(x_1, \dots, x_m, y(x_1, \dots, x_m)\big)}{F'_y\big(x_1, \dots, x_m, y(x_1, \dots, x_m)\big)}; \tag{2.9}$$

niisiis

$$y'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 2.1. Kui lisaks teoreemi 2.2 eelduste täidetusele funktsioon F on kaks korda diferentseeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon $y = y(x_1, \dots, x_m)$ on kaks korda diferentseeruv punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses; seejuures tema teist järku osatuletised saab leida võttes osatuletised (punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses kehtivate) samasuste (2.9) mõlemast poolest.

Näide 2.3. Leiame võrrandiga

$$x^3z^2 - yz^3 - x = 2 \tag{2.10}$$

punkti $(1, 2, -1)$ ümbruses määratud funktsiooni $z = z(x, y)$ esimest ja teist järku osatuletised punktis $(x, y) = (1, 2)$.

Selleks märgime, et võrrand (2.10) on samaväärne võrrandiga $F(x, y, z) = 0$, kus

$$F(x, y.z) = x^3z^2 - yz^3 - x - 2.$$

Leiame funktsiooni F osatuletised:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2z^2 - 1, \quad F'_y(x, y, z) = -z^3, \quad F'_z(x, y, z) = 2x^3z - 3yz^2.$$

Näeme, et funktsiooni F osatuletised on kogu ruumis $\mathbb{R}^2$ pidevad, kusjuures

$$F'_z(1, 2, -1) = -8 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et $F(1, 2, -1) = 0$) teoreemi 2.2 põhjal punkti $(1, 2, -1)$ teatavas ümbruses võrrand (2.10) määrab muutuja z muutujate x ja y diferentseeruva funktsioonina $z = z(x, y)$; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes $z := z(x, y)$, valemi (2.9) põhjal

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{z^3}{2x^3z - 3yz^2} = \frac{z^2}{2x^3 - 3yz}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

millest, arvestades, et $z(1, 2) = -1$, saame

$$z'_x(1, 2) = \frac{-3 + 1}{-2 - 6} = \frac{1}{4}, \quad z'_y(1, 2) = \frac{1}{2 + 6} = \frac{1}{8}.$$

Kuna punkti $(x, y) = (1, 2)$ teatavas ümbruses kehtivate samasuste (2.11) paremad pooled on diferentseeruvad (sest funktsioon $z = z(x, y)$ on selles ümbruses diferentseeruv), siis neid samasusi diferentseerides saame

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= \left(\frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2}\right)'_x = \frac{(-3x^2z^2 + 1)'_x(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(2x^3z - 3yz^2)'_x}{(2x^3z - 3yz^2)^2} \\ &= \frac{(-6xz^2 - 6x^2zz'_x)(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(6x^2z + 2x^3z'_x - 6yzz'_x)}{(2x^3z - 3yz^2)^2}, \\ z''_{xy} &= \left(\frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2}\right)'_y = \frac{(-3x^2z^2 + 1)'_y(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(2x^3z - 3yz^2)'_y}{(2x^3z - 3yz^2)^2} \\ &= \frac{(-6x^2zz'_y)(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(2x^3z'_y - 3z^2 - 6yzz'_y)}{(2x^3z - 3yz^2)^2}, \\ z''_{yx} &= \left(\frac{z^2}{2x^3 - 3yz}\right)'_x = \frac{(z^2)'_x(2x^3 - 3yz) - z^2(2x^3 - 3yz)'_x}{(2x^3 - 3yz)^2} \\ &= \frac{2zz'_x(2x^3 - 3yz) - z^2(6x^2 - 3yz'_x)}{(2x^3 - 3yz)^2}, \\ z''_{y^2} &= \left(\frac{z^2}{2x^3 - 3yz}\right)'_y = \frac{(z^2)'_y(2x^3 - 3yz) - z^2(2x^3 - 3yz)'_y}{(2x^3 - 3yz)^2} \\ &= \frac{2zz'_y(2x^3 - 3yz) - z^2(-3z - 3yz'_y)}{(2x^3 - 3yz)^2}, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $z(1,2) = -1$, $z'_x(1,2) = \frac{1}{4}$, $z'_y(1,2) = \frac{1}{8}$,

$$z''_{x^2}(1,2) = \frac{(-6+\frac{6}{4})(-8) - (-3+1)(-6+\frac{2}{4}+\frac{12}{4})}{(-2-6)^2} = \frac{31}{64},$$
$$z''_{xy}(1,2) = \frac{\frac{6}{8}(-8) - (-3+1)(\frac{2}{8}-3+\frac{12}{8})}{(-2-6)^2} = -\frac{17}{128},$$
$$z''_{yx}(1,2) = \frac{-\frac{2}{4}(2+6) - (6-\frac{6}{4})}{(2+6)^2} = -\frac{17}{128},$$
$$z''_{y^2}(1,2) = \frac{-\frac{2}{8}(2+6) - (3-\frac{6}{8})}{(2+6)^2} = -\frac{17}{256}.$$

Eelnevas võinuksime ühe osatuletistest z''_{xy} ja z''_{xy} rehkendamata jätta – samasustest (2.11) näeme, et funktsiooni z osatuletised on punkti $(x,y) = (1,2)$ teatavas ümbruses diferentseeruvad, s.t. funktsioon z on kaks korda diferentseeruv selles ümbruses ning järelikult on funktsiooni z teist järku segaosatuletised ei sõltu selles ümbruses diferentseerimise järjekorrast.

2.4. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Sisaldagu $m+n$ muutuja funktsioonide

$$u_j = F_j(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n), \quad j = 1,\dots,n, \tag{2.12}$$

määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \dots \times I_m \times J_1 \times \dots \times J_n,$$

kus $I_1,\dots,I_m,J_1,\dots,J_n \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) = 0, \\ F_2(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Definitsioon 2.3. Öeldakse, et süsteem (2.13) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutujad $y_1,\dots,y_n$ muutujate $x_1,\dots,x_m$ (üheste) funktsioonidena:

$$y_1 = y_1(x_1,\dots,x_m), \quad \dots\dots, \quad y_n = y_n(x_1,\dots,x_m), \tag{2.14}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in I_1,\dots,x_m \in I_m$ korral süsteemil (2.13) eksisteerib parajasti üks lahend $(y_1,\dots,y_m) \in J_1 \times \dots \times J_n$.

Kõnealused funktsioonid (2.14)

$$I_1 \times \dots \times I_m \ni (x_1,\dots,x_m) \longmapsto y_j(x_1,\dots,x_m) \in J_j, \quad j = 1,\dots,n,$$

on määratud võrdustega

$$F\big(x_1,\dots,x_m,y_1(x_1,\dots,x_m),\dots,y_n(x_1,\dots,x_m)\big) = 0, \quad j = 1,\dots,n,$$

s.t. iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral funktsioon $y_j = y_j(x_1, \dots, x_m)$ seab punktile $(x_1, \dots, x_m) \in I_1 \times \dots \times I_m$ vastavusse muutuja y_j väärtuse süsteemi (2.13) ainsast lahendist $(y_1, \dots, y_m) \in J_1 \times \dots \times J_m$.

Seejuures öeldakse, et funktsioonid (2.14) on antud süsteemiga (2.13) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 2.3. *Eeldame, et*

(1) *($m+n$ muutuja) funktsioonidel* (2.12) *eksisteerivad punkti* $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *mingis ümbruses pidevad osatuletised* $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j, k = 1, \dots, n$*;*

(2) $F_j(P_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$*;*

(3) $$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}(P_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Siis

(a) *punkti P_0 teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab süsteem* (2.13) *muutujad $y_1, \dots, y_n$ muutujate $x_1, \dots, x_m$ (üheste) funktsioonidena* (2.14)*;*

(b) $y_j(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_j^0$, $j = 1, \dots, n$*;*

(c) *funktsioonid* (2.14) *on punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad;*

(d) *funktsioonidel* (2.14) *eksisteerivad punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide $j = 1, \dots, n$ ja $i = 1, \dots, m$ korral*

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = -\frac{\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1} \dots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}} \tag{2.15}$$

(siin võrdusmärgist paremal olevates determinantides arvutatakse osatuletised $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_l}$ *punktis* $\big(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big)$*).*

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

§ 3. Ilmutamata funktsioonide teooria geomeetrilisi rakendusi

3.1. Võrrandiga $F(x, y, z) = 0$ antud pinna puutujatasand

Teoreem 3.1. *Eksisteerigu funktsioonil $u = F(P) = F(x, y, z)$ punkti $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mingis ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures*

$$F'_x(P_0)^2 + F'_y(P_0)^2 + F'_z(P_0)^2 \neq 0.$$

Siis võrrand

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3.1}$$

määrab punkti P_0 teatavas ümbruses pinna, millel eksisteerib igas punktis puutujatasand. Puutujatasandi normaalvektor punktis P_0 on

$$\vec{n} := \big(F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\big);$$

selle puutujatasandi võrrand on niisiis

$$F'_x(P_0)\,(x - x_0) + F'_y(P_0)\,(y - y_0) + F'_z(P_0)\,(z - z_0) = 0.$$

Tõestus. Oletame konkreetsuse mõttes, et $F'_z(P_0) \neq 0$. (Juhtu, kus $F'_x(P_0) \neq 0$ või $F'_y(P_0) \neq 0$, käsitletakse analoogiliselt.) Siis teoreemi 2.2 põhjal punkti P_0 teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab võrrand (3.1) muutuja z muutujate x ja y (ühese) diferentseeruva funktsioonina $z = z(x, y)$ (mis on määratud punkti (x_0, y_0) vastavas ristkülikukujulises ümbruses); seejuures $z(x_0, y_0) = z_0$ ja

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_z(P_0)}, \quad z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(P_0)}{F'_z(P_0)}.$$

Niisiis, võrrand (3.1) määrab punkti P_0 nimetatud ümbruses teatava pinna – funktsiooni $z = z(x, y)$ graafiku. Teoreemi II.1.6 põhjal eksisteerib funktsiooni $z = z(x, y)$ graafikul punktis P_0 puutujatasand, kusjuures selle puutujatasandi normaalvektor on

$$\big(z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1\big) = \left(-\frac{F'_x(P_0)}{F'_z(P_0)}, -\frac{F'_y(P_0)}{F'_z(P_0)}, -1\right).$$

Näeme, et vektor $\vec{n}$ on saadud selle normaalvektori korrutamisel nullist erineva arvuga $-F'_z(P_0)$; niisiis ka $\vec{n}$ on selle puutujatasandi normaalvektor. □

Näide 3.1. Leiame sfääri

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = r^2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ r > 0) \tag{3.2}$$

puutuja selle sfääri punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Sfäär (3.2) on esitatav võrrandiga $F(x, y, z) = 0$, kus

$$F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 - r^2.$$

Leiame funktisooni F osatuletised:

$$F'_x(x,y,z) = 2(x-a), \quad F'_y(x,y,z) = 2(y-b), \quad F'_z(x,y,z) = 2(z-c).$$

Osatuletised F'_x, F'_y, F'_z on pidevad kogu ruumis $\mathbb{R}^3$, seega funktsioon F on diferentseeruv ruumi $\mathbb{R}^3$ igas punktis. Seejuures punktis P_0 osatuletised F'_x, F'_y, F'_z ei ole kõik korraga nullid (ainus punkt, kus kõik need osatuletised on nullid, on sfääri keskpunkt (a,b,c)). Teoreemi 3.1 põhjal eksisteerib sfääril (3.2) punktis P_0 puutujatasand, mille normaalvektor on $\bigl(F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\bigr) = \bigl(2(x_0 - a), 2(y_0-b), 2(z_0-c)\bigr)$; niisiis, puutujatasandi normaalvektoriks on ka (x_0-a, y_0-b, z_0-c), seega selle puutujatasandi võrrand on

$$(x_0-a)(x-x_0) + (y_0-b)(y-y_0) + (z_0-c)(z-z_0) = 0.$$

Märkus 3.1. Saadud tulemus, et punktis P_0 võetud puutujatasandi normaalvektor on (x_0-a, y_0-b, z_0-c), on igati ootuspärane: on ootuspärane, et sfääri keskpunkti (a,b,c) ja punkti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ läbiv sirge on selle puutujatasandiga risti ehk, teisisõnu, see sirge on selle puutujatasandi normaal; selle sirge sihivektor (ehk, teisisõnu, puutujatasandi normaalvektor) on aga (x_0-a, y_0-b, z_0-c).

V peatükk.
Kordsed integraalid

§ 1. Kahekordse integraali mõiste

1.1. Darboux' summad. Darboux' integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ tõkestatud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Jagame lõigud $[a, b]$ ja $[c, d]$ omakorda mingiteks m ja n osalõiguks

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{m-1}, x_m] \qquad \text{ja} \qquad [y_0, y_1], \ldots, [y_{n-1}, y_n] \tag{1.1}$$

punktidega

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \cdots < y_n := d. \tag{1.2}$$

Siis ristkülik $\mathcal{D}$ jaotub mn ristkülikuks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.3}$$

Ristküliku $\mathcal{D}$ *jaotusviisi* ristkülikuteks (1.3) tähistame tähega T. Punktidele (1.2) viitame järgnevas kui *jaotusviisi T määravatele punktidele* ning lõikudele (1.1) kui *jaotusviisi T määravatele lõikudele.*

Tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}, \qquad M_{ij} := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P).$$

Definitsioon 1.1. Summasid

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j \qquad \text{ja} \qquad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j.$$

nimetatakse funktsiooni f *Darboux' ülemsummaks* ja *Darboux' alamsummaks,* mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T.

Kõneldes järgnevas Darboux' ülem- ja alamsummadest, mõistame me selle all funktsiooni f Darboux' summasid, mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele.

Edasises kasutame me korduvalt järgnevat tähelepanekut: kuna mis tahes $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \bigl(-f(P)\bigr) = -\inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = -m_{ij} \quad \text{ja} \quad \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \bigl(-f(P)\bigr) = -\sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = -M_{ij},$$

siis

$$S_{(-f)}(T) = -s_f(T) \quad \text{ja} \quad s_{(-f)}(T) = -S_f(T). \tag{1.4}$$

Tõestame mõned lihtsad Darboux' summade omadused.

Lause 1.1. (a) *Kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T' on saadud lõikude* (1.1) *edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks, siis*

$$S(T') \leqslant S(T) \qquad \text{ja} \qquad s(T') \geqslant s(T),$$

s.t. jaotusviisi peenendamisel Darboux' ülemsummad ei kasva ning Darboux' alamsummad ei kahane.

(b) *Ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviiside T ja T' korral*

$$S(T) \geqslant s(T'),$$

s.t. ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem mitte ühestki Darboux' alamsummast.

(c) *Funktsiooni f kõikvõimalike Darboux' ülemsummade hulk on alt tõkestatud ning Darboux' alamsummade hulk on ülalt tõkestatud.*

TÕESTUS. (a). Väite tõestuseks üldisel juhul piisab tõestada väide juhu jaoks, kus jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.2) ühe uue punkti $\widehat{x} \in [a,b]$ või $\widehat{y} \in [c,d]$ lisamise teel. Oletame konkreetsuse mõttes, et jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.2) uue punkti $\widehat{x} \in [a,b]$ lisamisel, kusjuures see uus punkt kuulub lõigu $[a,b]$ i_0-ndasse osalõiku: $\widehat{x} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, kus $i_0 \in \{1,\dots,m\}$, s.t. jaotusviis T' on saadud jaotusviisist T ristkülikute

$$\mathcal{D}_{i_0 1} = [x_{i_0-1}, x_{i_0}] \times [y_0, y_1], \qquad \dots\dots, \qquad \mathcal{D}_{i_0 n} = [x_{i_0-1}, x_{i_0}] \times [y_{n-1}, y_n]$$

asendamisel uute ristkülikutega

$$\begin{gathered}\mathcal{D}'_{i_0 1} = [x_{i_0-1}, \widehat{x}] \times [y_0, y_1],\ \mathcal{D}''_{i_0 1} = [\widehat{x}, x_{i_0}] \times [y_0, y_1], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathcal{D}'_{i_0 n} = [x_{i_0-1}, \widehat{x}] \times [y_{n-1}, y_n],\ \mathcal{D}''_{i_0 n} = [\widehat{x}, x_{i_0}] \times [y_{n-1}, y_n].\end{gathered}$$

Jaotusviisile T' vastav Darboux' ülemsumma on

$$S(T') = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \bigl(M'_{i_0 j}\,\Delta x'_{i_0}\,\Delta y_j + M''_{i_0 j}\,\Delta x''_{i_0}\,\Delta y_j\bigr),$$

kus

$$\Delta x'_{i_0} := \widehat{x} - x_{i_0-1} \quad \text{ja} \quad \Delta x''_{i_0} := x_{i_0} - \widehat{x}$$

ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$M'_{i_0j} = \sup_{P \in \mathcal{D}'_{i_0j}} f(P) \quad \text{ja} \quad M''_{i_0j} = \sup_{P \in \mathcal{D}''_{i_0j}} f(P).$$

Seega

$$\begin{aligned} S(T) - S(T') &= \sum_{j=1}^{n} M_{i_0j}\, \Delta x_{i_0}\, \Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} \bigl(M'_{i_0j}\, \Delta x'_{i_0}\, \Delta y_j + M''_{i_0j}\, \Delta x''_{i_0}\, \Delta y_j\bigr) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \bigl(M_{i_0j}\, \Delta x_{i_0} - M'_{i_0j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0j}\, \Delta x''_{i_0}\bigr)\, \Delta y_j. \end{aligned}$$

Kuna

$$\Delta x_{i_0} = \Delta x'_{i_0} + \Delta x''_{i_0}$$

ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral, arvestades, et $\mathcal{D}_{i_0j} \supset \mathcal{D}'_{i_0j}$ ja $\mathcal{D}_{i_0j} \supset \mathcal{D}'_{i_0j}$,

$$M_{i_0j} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{i_0j}} f(P) \geqslant \sup_{P \in \mathcal{D}'_{i_0j}} f(P) = M'_{i_0j}$$

ja

$$M_{i_0j} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{i_0j}} f(P) \geqslant \sup_{P \in \mathcal{D}''_{i_0j}} f(P) = M''_{i_0j},$$

siis

$$\begin{aligned} &M_{i_0j}\, \Delta x_{i_0} - M'_{i_0j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0j}\, \Delta x''_{i_0} \\ &\qquad = M_{i_0j}\, \Delta x'_{i_0} + M_{i_0j}\, \Delta x''_{i_0} - M'_{i_0j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0j}\, \Delta x''_{i_0} \\ &\qquad\qquad = (M_{i_0j} - M'_{i_0j})\, \Delta x'_{i_0} + (M_{i_0j} - M''_{i_0j})\, \Delta x''_{i_0} \geqslant 0; \end{aligned}$$

seega $S(T) - S(T') \geqslant 0$ ehk $S(T) \geqslant S(T')$, nagu soovitud.

Võrdustest (1.4) järeldub nüüd, et

$$s(T') = -S_{(-f)}(T') \geqslant -S_{(-f)}(T) = s(T).$$

(b). Tähistame sümboliga T'' ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi T määravate osalõikude (1.1) edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi T' määravate punktidega; siis väite (a) põhjal

$$S(T) \geqslant S(T'').$$

Jaotusviis T'' on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi T' määravate osalõikude edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi T määravate punktidega (1.2); järelikult väite (a) põhjal

$$s(T'') \geqslant s(T').$$

Seega

$$S(T) \geqslant S(T'') \geqslant s(T'') \geqslant s(T'),$$

nagu soovitud.

(c). Väite (b) põhjal

- funktsiooni f mis tahes Darboux' alamsumma on selle funktsiooni Darboux' ülemsummade hulga alumine tõke;
- funktsiooni f mis tahes Darboux' ülemsumma on selle funktsiooni Darboux' alamsummade hulga alumine tõke.

□

Definitsioon 1.2. Funktsiooni f (ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' ülemsummade alumist raja nimetatakse funktsiooni f *Darboux' ülemiseks integraaliks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja tähistatakse sümboliga $\overline{I}_{\mathcal{D}}f$:

$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f := \inf\bigl\{S(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\bigr\}.$$

Funktsiooni f (ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' alamsummade ülemist raja nimetatakse funktsiooni f *Darboux' alumiseks integraaliks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja tähistatakse sümboliga $\underline{I}_{\mathcal{D}}f$:

$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f := \sup\bigl\{s(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\bigr\}.$$

Darboux' integraalide olemasolu järeldub lausest 1.1, (c), pidevuse aksioomi põhjal; seejuures lausest 1.1, (b), järeldub, et

$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f \geqslant \underline{I}_{\mathcal{D}}f.$$

Vahetult võrdustest (1.4) järeldub, et

$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f = \inf_T S_f(T) = \inf_T\bigl(-s_{(-f)}(T)\bigr) = -\sup_T s_{(-f)}(T) = -\underline{I}_{\mathcal{D}}(-f) \tag{1.5}$$

ja

$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f = \sup_T s_f(T) = \sup_T\bigl(-S_{(-f)}(T)\bigr) = -\inf_T S_{(-f)}(T) = -\overline{I}_{\mathcal{D}}(-f),$$

kus kõik infiimumid ja supreemumid võetakse üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T.

Definitsioon 1.3. Kui funktsiooni f Darboux' ülemine ja alumine integraal ristkülikus $\mathcal{D}$ on võrdsed, siis öeldakse, et funktsioon f on ristkülikus $\mathcal{D}$ *Darboux' mõttes integreeruv* ehk lihtsalt *integreeruv*. Funktsiooni f Darboux' ülemise ja alumise integraali ühist väärtust nimetatakse sel juhul funktsiooni f *Darboux' integraaliks* või lihtsalt *(kahekordseks) integraaliks* funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$. ja tähistatakse sümboliga

$$I_{\mathcal{D}}f \quad \text{või} \quad \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

s.t.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy := I_{\mathcal{D}}f = \overline{I}_{\mathcal{D}}f = \underline{I}_{\mathcal{D}}f.$$

1.2. Darboux' summade piirväärtus. Darboux' lemma

Eeldame endiselt, et kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ on tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$.

Ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T puhul osaristkülikuteks, mis on määratud punktidega

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \cdots < y_n := d, \tag{1.6}$$

tähistame

$$\Delta(T) := \max\bigl\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_{m-1}, y_1 - y_0, \dots, y_n - y_{n-1}\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Definitsioon 1.4. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f

- *Darboux' ülemsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

  $$I = \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim S(T),$$

  kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

  $$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|S(T) - I\bigr| < \varepsilon$$

  (s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust I vähem kui ε);

- *Darboux' alamsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

  $$I = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim s(T),$$

  kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

  $$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|s(T) - I\bigr| < \varepsilon$$

  (s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust I vähem kui ε).

Järgnevast teoreemist järeldub, et Darboux' summadel eksisteerib alati piirväärtus.

Teoreem 1.2 (Darboux' lemma). (a) *Funktsiooni f Darboux' ülemine integraal ristkülikus $\mathcal{D}$ on funktsiooni f Darboux' ülemsummade piirväärtus (ristkülikus $\mathcal{D}$):*

$$\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T).$$

(b) *Funktsiooni f Darboux' alumine integraal ristkülikus $\mathcal{D}$ on funktsiooni f Darboux' alamsummade piirväärtus (ristkülikus $\mathcal{D}$):*

$$\underline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T).$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

1.3. Tarvilikke ja piisavaid tingimusi funktsiooni integreeruvuseks

Darboux' lemma võimaldab anda mitu kasulikku tarvilikku ja piisavat tingimust funktsiooni integreeruvuseks antud ristkülikus.

Teoreem 1.3. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D} := [a,b]\times[c,d]$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(ii) *funktsiooni f Darboux' ülemsummade piirväärtus ja Darboux' alamsummade piirväärtus ristkülikus $\mathcal{D}$ on võrdsed, s.t*

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T);$$

(iii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad S(T) - s(T) < \varepsilon \tag{1.7}$$

(s.t. et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mis rahuldab tingimust $\Delta(T) < \delta$, erinevad sellele jaotusviisile vastavad Darboux' summad teineteisest vähem kui ε); teisisõnu,

$$\lim_{\Delta(T)\to 0}\Big(S(T) - s(T)\Big) = 0;$$

(iv) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral*

$$S(T) - s(T) < \varepsilon; \tag{1.8}$$

teisisõnu,

$$\inf\Big\{S(T) - s(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\Big\} = 0.$$

Seejuures

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = I_{\mathcal{D}}f = \overline{I}_{\mathcal{D}}f = \underline{I}_{\mathcal{D}}f = \lim_{\Delta(T)\to 0} S_f(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s_f(T). \tag{1.9}$$

Märkus 1.1. Kuna (punkti 1.1 tähistusi kasutades)

$$\begin{aligned} S(T) - s(T) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j, \end{aligned}$$

kus kõikide $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\omega_{ij} := M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{ij}} \bigl(f(P) - f(Q)\bigr)$$

(arvu ω_{ij} nimetatakse funktsiooni f *võnkumiseks* osaristkülikus $\mathcal{D}_{ij}$), siis võib teoreemi 1.3 väited (iii) ja (iv) formuleerida ka järgmisel (sagedasti kasutataval) kujul:

(iii') $\displaystyle\lim_{\Delta(T)\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = 0;$

(iv') $\displaystyle\inf\Bigl\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \colon\ T \textit{ on ristküliku } \mathcal{D} \textit{ jaotusviis}\Bigr\} = 0.$

Teoreemi 1.3 tõestus. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Vastavalt definitsioonile tähendab funktsiooni integreeruvus ristkülikus $\mathcal{D}$ tema Darboux' integraalide võrdust selles ristkülikus; seega järeldub tõestatav samaväärsus vahetult Darboux' lemmast.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (ii) ning olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame

$$I := \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T). \tag{1.10}$$

Ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral

$$S(T) - s(T) = S(T) - I + I - s(T) = \bigl|S(T) - I\bigr| + \bigl|I - s(T)\bigr|;$$

seega valides reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad \bigl|S(T) - I\bigr| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\Delta(T) < \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \bigl|s(T) - I\bigr| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(niisugused δ_1 ja δ_2 eksisteerivad võrduste (1.10) tõttu), ja tähistades $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, kehtib (1.7).

(iii)$\Rightarrow$(iv) on ilmne.

(iv)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iv) ning olgu $\varepsilon > 0$. Eelduse (iv) põhjal leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mis rahuldab tingimust (1.8). Arvestades, et

$$s(T) \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant S(T),$$

järeldub tingimusest (1.8), et

$$\bigl|\overline{I}_{\mathcal{D}} f - \underline{I}_{\mathcal{D}} f\bigr| < S(T) - s(T) < \varepsilon,$$

millest arvu $\varepsilon > 0$ suvalisuse tõttu järeldub, et $\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f$, s.t. funktsioon f on integreeruv.

Võrdused (1.9) järelduvad vahetult integraali definitsioonist ja Darboux' lemmast. $\square$

Järeldus 1.4. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$ ning olgu $I \in \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = I; \tag{1.11}$$

(ii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad I - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I + \varepsilon; \tag{1.12}$$

(iii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral*

$$I - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I + \varepsilon.$$

TÕESTUS. (i)⇒(ii). Kehtigu (i) ning olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi 1.3 (samaväärsuse (i)⇒(iii)) põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad S(T) - s(T) < \varepsilon$$

millest, arvestades, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral

$$s(T) \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}} f = I = \overline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant S(T),$$

järeldub (1.12).

(ii)⇒(iii) on ilmne.

(iii)⇒(i). Kehtigu (iii). Siis

$$I \leqslant \sup_T s(T) = \underline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}} f = \inf_T S(T) \leqslant I$$

(siin supreemum ja infiimum võetakse üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T); seega $\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f = I$, s.t. funktsioon f on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures kehtib (1.11). □

1.4. Riemanni integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x,y)$ määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d].$$

Järgides punkti 1.1 tähistusi, tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}, \tag{1.13}$$

kus

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \cdots < y_n := d. \tag{1.14}$$

Kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}$$

ning

$$\Delta(T) := \max\bigl\{x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_{m-1}, y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_{n-1}\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11},\ \ldots,\ P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n},\ \ldots\ldots,\ P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1},\ \ldots,\ P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \tag{1.15}$$

(s.t. kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral valime mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$).

Definitsioon 1.5. Summat

$$\begin{aligned} \sigma :&= \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \ldots, P_{1n}, \ldots, P_{m1}, \ldots, P_{mn}) \\ :&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j \end{aligned}$$

nimetatakse funktsiooni f *integraalsummaks* ehk *Riemanni summaks,* mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T ja punktide valikule (1.15).

Vahetult vastavatest definitsioonidest järeldub

Lause 1.5. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$. Siis ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T vastavad funktsiooni f Darboux' ülemsumma $S(T)$ ja alamsumma $s(T)$ on sellele jaotusviisile vastavate funktsiooni f integraalsummade ülemine ja alumine raja:*

$$S(T) = \sup \sigma \qquad \textit{ja} \qquad s(T) = \sup \sigma$$

(siin supreemum ja infiimum võetakse üle kõikvõimalike jaotusviisile T vastavate integraalsummade σ, s.t. üle kõikvõimalike punktide valikute (1.15)*).*

Definitsioon 1.6. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f *integraalsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma = I \quad \text{või lihtsalt} \quad \lim \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim \sigma = I,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|\sigma - I\bigr| < \varepsilon,$$

s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni f intgraalsummad arvust I vähem kui ε (sõltumata punktide valikust (1.15) selle jaotusviisi osaristkülikutest).

Definitsioon 1.7. Kui funktsiooni f integraalsummadel on olemas piirväärtus ristkülikus $\mathcal{D}$, siis öeldakse, et funktsioon f on *Riemanni mõttes integreeruv* ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures tema integraalsummade piirväärtust

$$R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy := \lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma$$

nimetatakse *Riemanni integraaliks* funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$.

Osutub, et *funktsiooni f Riemanni mõttes integreeruvus on sama, mis tema integreeruvus (s.t. Darboux' mõttes integreeruvus), kusjuures tema Riemanni integraal ja integraal (s.t. Darboux' integraal) langevad kokku* (vt. teoreemi 1.7 allpool). Veendumaks selles, tõestame kõigepealt, et *Riemanni mõttes integreeruv funktsioon on tõkestatud.*

Teoreem 1.6. *Ristkülikus $\mathcal{D}$ tõkestamata funktsioon ei ole Riemanni mõttes integreeruv selles ristkülikus.*

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Teoreem 1.7. *Olgu funktsioon f määratud ristkülikus $\mathcal{D}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(ii) *funktsioon f on integreeruv (s.t. Darboux' mõttes integreeruv) ristkülikus $\mathcal{D}$.*

Seejuures funktsiooni f Riemanni integraal ja integraal (s.t. Darboux' integraal) langevad kokku:

$$R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = I_{\mathcal{D}} f. \tag{1.16}$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

1.5. Integraal üle mis tahes tõkestatud hulga

Olgu $A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tõkestatud hulk. Tähistame

$$a := \inf_{(x,y)\in A} x, \quad b := \sup_{(x,y)\in A} x, \quad c := \inf_{(x,y)\in A} y, \quad d := \sup_{(x,y)\in A} y$$

(need infiimumid ja supreemumid on lõplikud hulga A tõkestatuse tõttu, vt. lauset I.4.6); siis

$$A \subset [a,b]\times[c,d] =: \mathcal{D}_A =: \mathcal{D}.$$

Definitsioon 1.8. Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x,y)$ tõkestatud hulgas A.

Öeldakse, et funktsioon f on *integreeruv hulgas A,* kui funktsioon $z = \widehat{f}(P) = \widehat{f}(x,y)$,

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P\in A,\\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_A\setminus A, \end{cases}$$

on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_A$. Seejuures integraali

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_{\mathcal{D}_A} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy$$

nimetatakse *integraaliks funktsioonist f üle hulga A.*

Definitsioon 1.9. Funktsiooni $\chi_A\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\chi_A(P) = \begin{cases} 1, & \text{kui } P\in A, \\ 0, & \text{kui } P\notin A, \end{cases} \qquad P\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

nimetatakse hulga A *karakteristlikuks funktsiooniks* või ka (eriti tõenäosusteoorias) hulga A *indikaatorfunktsiooniks.*

Definitsioon 1.10. Kui hulga A karakteristlik funktsioon χ_A on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_A$, siis öeldakse, et hulk A on *mõõtuv;* seejuures integraali

$$S_A := \iint_{\mathcal{D}_A} \chi_A(x,y)\,dx\,dy$$

nimetatakse hulga A *pindalaks.*

§ 2. Kahekordse integraali omadusi

Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Järgides eelmise paragrahvi tähistusi, tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \, j \in \{1, \ldots, n\},$$

kus

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \cdots < y_n := d.$$

Kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}$$

s.t. Δx_i ja Δy_j on osaristküliku $\mathcal{D}_{ij}$ külgede pikkused, ning

$$\Delta(T) := \max\bigl\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11}, \, \ldots, \, P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n}, \, \ldots\ldots, \, P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1}, \, \ldots, \, P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \tag{2.1}$$

(s.t. kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral valime mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$).
Me tähistame

$$\sigma := \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \ldots, P_{1n}, \ldots, P_{m1}, \ldots, P_{mn}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}) \, \Delta x_i \, \Delta y_j,$$

s.t. $\sigma = \sigma_f$ on funktsiooni f integraalsumma (ehk Riemanni summa), mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T ja punktide valikule (2.1).

Tõkestatud hulga $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ korral tähistame

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \mathcal{D} := [a, b] \times [c, d],$$

kus

$$a := \inf_{(x,y) \in \mathcal{A}} x, \quad b := \sup_{(x,y) \in \mathcal{A}} x, \quad c := \inf_{(x,y) \in \mathcal{A}} y, \quad d := \sup_{(x,y) \in \mathcal{A}} y$$

(need infiimumid ja supreemumid on lõplikud hulga $\mathcal{A}$ tõkestatuse tõttu, vt. lauset I.4.6). Ilmselt $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

Hulgas $\mathcal{A}$ määratud kahe muutuja funktsiooni $z = f(P) = f(x, y)$ korral defineerime funktsiooni $\widehat{f} \colon \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$

2.1. Eelnevast paragrahvist välja ununenud kasulikke teadmisi

Lause 2.1. *Ristkülikus $\mathcal{D}$ määratud konstantne kahe muutuja funktsioon $f(x, y) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) on integreeruv selles ristkülikus, kusjuures*

$$\int_{\mathcal{D}} \alpha \, dx \, dy = \alpha \, (b - a) \, (d - c) = \alpha \, S_{\mathcal{D}} \tag{2.2}$$

(sümbol $S_{\mathcal{D}}$ tähistab ristküliku $\mathcal{D}$ pindala).

TÕESTUS. Konstantse funktsiooni $f(x, y) = \alpha$ mis tahes integraalsumma

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}) \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \alpha \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \, (d - c) = \alpha \, (d - c) \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \alpha \, (d - c) \, (b - a) = \alpha \, S_{\mathcal{D}},\end{aligned}$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on $\alpha \, S_{\mathcal{D}}$, s.t. kehtib (2.2). □

Teoreem 2.2. *Kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ pidev kahe muutuja funktsioon on integreeruv selles hulgas.*

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA, sest tõestus toetub Cantori teoreemile mitme muutuja funktsioonide jaoks, mis käesolevasse kursusesse ei mahtunud. □

Lause 2.3. *Hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ integreeruv kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on tõkestatud selles hulgas.*

TÕESTUS. Funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. Funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvusest ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ järeldub teoreemi 1.6 põhjal tema tõkestatus selles ristkülikus, millest omakorda järeldub funktsiooni f tõkestatus hulgas $\mathcal{A}$. □

2.2. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud aritmeetiliste tehetega

Teoreem 2.4. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = f(P) = f(x, y)$ ja $v = g(P) = g(x, y)$ integreeruvad hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ning olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siis*

(a) *korrutis αf on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x, y) \, dx \, dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy;$$

(b) *funktsioonide f ja g summa $f + g$ ja vahe $f - g$ on integreeruvad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \big(f(x, y) \pm g(x, y)\big) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) \, dx \, dy;$$

(c) *funktsioon $\alpha f + \beta f$ on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy;$$

(d) *funktsioonide f ja g korrutis fg on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$.*

Omadustele (a), (b) (summa kohta) ja (c) teoreemist 2.8 viidatakse vastavalt kui kahekordse integraali *homogeensusele, aditiivsusele* ja *lineaarsusele.*

Enne teoreemi 2.4 tõestamist toome ära ühe olulise järelduse tema väitest (a).

Järeldus 2.5. *Mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ määratud konstantne kahe muutuja funktsioon $f(x,y) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) on integreeruv selles hulgas, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha\,dx\,dy = \alpha\,S_{\mathcal{A}}$$

(sümbol $S_{\mathcal{A}}$ tähistab hulga $\mathcal{A}$ pindala).

Tõestus. Antud juhul $\widehat{f} = \alpha\,\chi_{\mathcal{A}}$ ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. Hulga $\mathcal{A}$ mõõtuvuse tõttu tema karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, seega teoreemi 2.4 väite (a) põhjal ka funktsioon $\alpha\,\chi_{\mathcal{A}} = \widehat{f}$ on integreeruv selles ristkülikus, s.t. funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \alpha\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} \alpha\,\chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = \alpha\,S_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

□

Teoreemi 2.4 tõestus. Tähistame

$$I := I_f := \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{ja} \qquad I_g := \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

(a). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\big| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned}\big|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\big| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \alpha I\right| = \alpha\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I\right| \\ &= \alpha\big|\sigma_f - I\big|.\end{aligned}$$

Eeldades üldisust kitsendamata, et $\alpha \neq 0$, leidub funktsiooni f integreeruvuse tõttu reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma_f - I\big| < \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

aga nüüd võrratuse $\Delta(T) < \delta$ kehtides $\big|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\big| < \alpha\,\dfrac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$, nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul (arvestades, et funktsiooni f integreeruvus (hulgas $\mathcal{A}$) tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust (hulgas $\mathcal{D}$)) ülaltõestatu põhjal funktsioon $\alpha\widehat{f} = \widehat{\alpha f}$ on integreeruv, seega ka funktsioon αf on integreeruv; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{D}} \alpha\widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy\\ &= \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud.

(b). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\big| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned}\big|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\big| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(f(P_{ij}) \pm g(P_{ij})\big)\,\Delta x_i\,\Delta y_j - (I_f \pm I_g)\right|\\ &= \left|\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_f\right) \pm \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_g\right)\right|\\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_f\right| + \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_g\right|\\ &= \big|\sigma_f - I_f\big| + \big|\sigma_g - I_g\big|.\end{aligned}$$

Funktsioonide f ja g integreeruvuse tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma_f - I_f\big| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad \Delta(T) < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma_g - I_g\big| < \frac{\varepsilon}{2};$$

niisiis võrratuse $\Delta(T) < \max\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ kehtides $\big|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul (arvestades, et funktsiooni f integreeruvus (hulgas $\mathcal{A}$) tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust (hulgas $\mathcal{D}$)) ülaltõestatu põhjal funktsioon $\widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f + g}$ on integreeruv, seega funktsioon $f+g$ on integreeruv; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{D}} \big(\widehat{f}(x,y) \pm \widehat{g}(x,y)\big)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_{\mathcal{D}} \widehat{g}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud.

(c). Väite (a) põhjal on funktsioonid αf ja βg integreeruvad hulgas $\mathcal{A}$, seega väite (b) põhjal on ka summa $\alpha f+\beta g$ integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{A}} \beta g(x,y)\,dx\,dy \\ &= \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

(d). Seda väidet me käesolevas kursuses ei tõesta. □

2.3. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud järjestusega

Teoreem 2.6. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = f(P) = f(x,y)$ ja $v = g(P) = g(x,y)$ integreeruvad hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

(a) *Kui*

$$f(P) \geqslant 0 \quad \textit{iga } P \in \mathcal{A} \textit{ korral,} \tag{2.3}$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0.$$

(b) *Kui*

$$f(P) \geqslant g(P) \quad \textit{iga } P \in \mathcal{A} \textit{ korral,} \tag{2.4}$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy. \tag{2.5}$$

(c) *Funktsiooni f absoluutväärtus $|f|$ (s.t. funktsioon $w = |f(P)| = |f(x,y)|$) on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\left|\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy. \tag{2.6}$$

Enne teoreemi 2.6 tõestamist toome ära ühe olulise järelduse temast.

Järeldus 2.7. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ integreeruv mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mille pindala $S_{\mathcal{A}} = 0$. Siis*

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Teisisõnu, kahekordne integraal üle nullpindalalga hulga on null.

Tõestus. Tähistame $M := \sup\limits_{P \in \mathcal{A}} f(P)$ ja $m := \inf\limits_{P \in \mathcal{A}} f(P)$. Järelduse 2.5 ja väite (b) põhjal

$$m\, S_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{A}} m\, dx\, dy \leqslant \int_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \int_{\mathcal{A}} M\, dx\, dy = M\, S_{\mathcal{A}},$$

millest näeme, et kui $S_{\mathcal{A}} = 0$, siis ka $\int_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = 0$, nagu soovitud. □

Teoreemi 2.6 tõestus. (a). Kehtigu (2.3). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Eelduse (2.3) tõttu funktsiooni f kõik Darboux' summad on mittenegatiivsed, järelikult

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \inf_{T} S(T) \geqslant 0,$$

kus infiimum on võetud üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T osaristkülikuteks ja $S(T)$ tähistab jaotusviisile T vastavat funktsiooni f Darboux' ülemsummat.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul $\widehat{f}(P) \geqslant 0$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral, seega ülaltõestatu põhjal

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x, y)\, dx\, dy \geqslant 0.$$

(b). Kui kehtib (2.4), siis

$$f(P) - g(P) \geqslant 0 \quad \text{iga } P \in \mathcal{A} \text{ korral},$$

seega teoreemi 2.4, (b), ja väite (a) põhjal

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy - \iint_{\mathcal{A}} g(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{A}} \big(f(x, y) - g(x, y)\big)\, dx\, dy \geqslant 0,$$

millest järeldub (2.5), nagu soovitud.

(c). Seda väidet me käesolevas kursuses ei tõesta. □

2.4. Kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi

Teoreem 2.8. *Olgu kahe muutuja funktsioon* $u = f(P) = f(x, y)$ *integreeruv mõõtuvas hulgas* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Siis*

(a) *funktsioon* f *on integreeruv igas mõõtuvas hulgas* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$*;*

(b) *kui* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ *on mõõtuvad hulgad mille ühisosa pindala* $S(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 0$ *ja mille ühend* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$*, siis*

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{A}_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{\mathcal{A}_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Omadusele (b) teoreemist 2.8 viidatakse kui kahekordse integraali *aditiivsusele piirkonna järgi.*

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

§ 3. Kahekordse integraali arvutamine

Kõikjal selles paragrahvis kasutame eelmiste paragrahvidega sarnaseid tähistusi. Muuhulgas, punktide

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \tag{3.1}$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \tag{3.2}$$

korral tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

3.1. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku

Teoreem 3.1. *Olgu kahe muuruja funktsioon $z = f(x, y)$ integreeruv ristkülikus*

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) *Eksisteerigu iga $x \in [a, b]$ korral integraal*

$$g(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) *Eksisteerigu iga $y \in [c, d]$ korral integraal*

$$h(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dx = \int_c^d h(y)\, dy.$$

Tõestus. Tõestame ainult väite (a). Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.

Tähistame

$$I := \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.3}$$

ja fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et kui punktid (3.1) rahuldavad tingimust

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Delta x_i < \delta, \tag{3.4}$$

siis mis tahes punktide $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, korral

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Selleks paneme tähele, et mis tahes punktide (3.1) ja (3.2) ning $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, ja $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\begin{aligned}
&\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| \\
&\qquad \leqslant \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| + \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| \Delta x_i.
\end{aligned}$$

Funktsiooni f integreeruvuse tõttu ristkülikus $\mathcal{D}$ leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rahuldagu nüüd punktid (3.1) tingimust (3.4) ning olgu punktid $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, suvalised. Kuna funktsioonid $h_i(y) := f(\xi_i, y)$, $i = 1, \ldots, m$, on integreeruvad lõigus $[c, d]$, siis iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral leidub reaalarv $\delta_i > 0$ nii, et kui punktid (3.2) rahuldavad tingimust $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta y_j < \delta_i$, siis mis tahes $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Niisiis, kui valida punktid (3.2) nii, et $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} (y_j - y_{j-1}) < \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta\}$, ning valida vabalt $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, m$, siis

$$\begin{aligned}
\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \Delta x_i \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3.2. Kahekordse integraali arvutamine üle kõvertrapetsi

Teoreem 3.2. (a) *Olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x) \quad \textit{ja} \quad \beta = \beta(x), \qquad x \in [a, b],$$

pidevad lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\alpha(x) \leqslant \beta(x) \quad \textit{iga } x \in [a, b] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{A} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\},$$

kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy, \tag{3.5}$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) *Olgu funktsioonid*

$$\gamma = \gamma(y) \quad \textit{ja} \quad \delta = \delta(y), \qquad y \in [c,d],$$

pidevad lõigus $[c,d]$, kusjuures

$$\gamma(y) \leqslant \delta(y) \quad \textit{iga } y \in [c,d] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{B} := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ c \leqslant y \leqslant d,\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\bigr\},$$

kusjuures iga $y \in [c,d]$ korral eksisteerib integraal

$$h(x) := \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx,$$

siis

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d h(y)\,dy.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) tõestatakse analoogiliselt).

Olgu funktsioon f integreeruv kõvertrapetsis $\mathcal{A}$, kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal (3.5). Siis funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{A}} := [a,b] \times [c,d],$$

kus

$$c := \inf_{x \in [a,b]} \alpha(x) \quad \text{ja} \quad d := \sup_{x \in [a,b]} \beta(x);$$

seejuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

Seega teoreemi 3.2 väite (a) põhjal

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

nagu soovitud. $\square$

3.3. Muutuja vahetus kahekordses integraalis

3.3.1. Regulaarsed teisendused ruumis $\mathbb{R}^m$

Kujutusi $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ nimetatame *teisendusteks*[1] ruumis $\mathbb{R}^m$.

Paragrahvis IV.1 veendusime, et teisendused $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, ja hulgas $\mathcal{U}$ määratud funktsioonide süsteemid

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(u_1, \ldots, u_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(u_1, \ldots, u_m), \end{cases} \tag{3.6}$$

on üksüheses vastvavuses: süsteem (3.6) määrab kujutuse $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus

$$\Phi(Q) = \big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \in \mathbb{R}^m, \quad Q \in \mathcal{U}; \tag{3.7}$$

teiselt poolt, mis tahes kujutus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ määrab ühesel viisil funktsioonid (3.6), mis rahuldavad tingimust (3.7): sellise omadusega funktsioonid (3.6) on defineeritud võrdustega

$$x_i(Q) = x_i, \quad Q \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{kus } \Phi(Q) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Edasises, viidates võrrandite süsteemile (3.6) kui teisendusele (3.6), mõistame me selle teisenduse all selle süsteemiga määratud teisendust $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 3.1. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk. Öeldakse, et süsteemiga (3.6) määratud teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ on *regulaarne,* kui

(1) teisendus Φ on pööratav;

(2) teisendust Φ määravatel funktsioonidel (3.6) eksisteerivad hulgas $\mathcal{U}$ pidevad esimest järku osatuletised;

(3) selle teisenduse jakobiaan

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{hulgas } \mathcal{U}.$$

Seejuures öeldakse ka, et teisendus (3.6) teisendab hulga $\mathcal{U}$ regulaarselt hulgaks $\mathcal{V}$.

Märgime ilma tõestuseta, et regulaarse teisenduse $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ pöördteisendus $\Phi^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ on samuti regulaarne.

[1] Tavaliselt mõistetakse mingi hulga teisenduste all kujutusi sellest hulgast sellesse samasse hulka. Meie nimetame teisendusteks ruumis $\mathbb{R}^m$ kujutusi ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulkadest ruumi $\mathbb{R}^m$.

3.3.2. Üldine muutuja vahetuse valem kahekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^2$, mis on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{3.8}$$

Tähistame

$$J(u,v) := \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix},$$

s.t. $J(u,v)$ on selle süsteemi jakobiaan punktis (u,v).

Teoreem 3.3. *Kui*

(1) *kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on pidev xy-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{D}$;*

(2) *võrrandid* (3.8) *määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab uv-tasandi kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{D}$,*

siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv. \tag{3.9}$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 3.1. Valem (3.9) jääb kehtima, kui teisendus (3.8) rahuldab regulaarsuse tingimusi mitte kogu hulgas Δ, vaid väljaspool hulga Δ mingit nullpindalaga alamhulka, mille see teisendus kujutab hulga $\mathcal{D}$ nullpindalaga alamhulgaks.

3.3.3. Üleminek polaarkoordinaatidele kahekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^2$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi. \end{cases} \tag{3.10}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\phi$-tasandi punktile (r,ϕ), kus $r \geqslant 0$ ja $\phi \in [0, 2\pi)$, vastavusse xy-tasandi punkti, mille polaarraadius on r ja polaarnurk on ϕ, s.t. punkti, mille polaarkoordinaadid on r ja ϕ. Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} x'_r &= \cos\phi, \qquad & x'_\phi &= -r\sin\phi, \\ y'_r &= \sin\phi, \qquad & y'_\phi &= r\cos\phi; \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$J(r,\phi) := \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r.$$

Näeme, et teisendus (3.10) teisendab $r\phi$-tasandi hulga

$$\big\{(r,\phi)\colon\ r \geqslant 0,\ \phi \in [0,2\pi]\big\} \tag{3.11}$$

sisemuse

$$\big\{(r,\phi)\colon\ r > 0,\ \phi \in (0,2\pi)\big\}$$

regulaarselt xy-tasandiks, millest on välja lõigatud x-telje positiivne osa (koos punktiga $(0,0)$; hulga (3.11) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r=0$ või $\phi \in \{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus x-telje positiivseks osaks (koos punktiga $(0,0)$. Seega järeldub teoreemist 3.3 ja märkusest 3.1

Teoreem 3.4. *Kui*

(1) *kahe muutuja funktsioon* $z = f(x,y)$ *on pidev* xy*-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas* $\mathcal{D}$*;*

(2) *teisendus* (3.10) *kujutab hulgas* (3.11) *sisalduva kinnise mõõtuva piirkonna* Δ *piirkonnaks* $\mathcal{D}$*,*

siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f\big(r\cos\phi, r\sin\phi\big)\,r\,dr\,d\phi.$$

§ 4. Kahekordse integraali rakendusi

4.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Paragrahvis 1 defineerisime tasandilise hulga (ehk, suupärasemalt, tasandilise kujundi) mõõtuvuse ja pindala vastavalt kui selle hulga karakteristliku funktsiooni integreeruvuse ja integraali sellest karakteristlikust funktsioonist. Sellel definitsioonil – erinevalt traditsioonilisest pindala definitsioonist (mis käesoleva kursuse raamesse ei mahu) – on üks oluline puudus: tema seos meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast on väga raskesti tajutav. Rõhutame vaid, et traditsiooniline mõõtuvuse ja pindala definitsioon on käesolevas kursuses toodud definitsiooniga samaväärne: need definitsioonid määravad ühed ja samad mõõtuvad hulgad (s.t. niisugused hulgad, millel on olemas pindala – märgime, et mitte igal tasandi alamhulgal pole pindala); seejuures mis tahes mõõtuva hulga pindala nende erinevate definitsioonide järgi on üks ja sama.

Teoreem 4.1. *Olgu $\mathcal{D}$ mõõtuv kujund xy-tasandil. Siis tema pindala $S_{\mathcal{D}}$ avaldub valemiga*

$$S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} dx\, dy.$$

4.2. Kõversilindri ruumala arvutamine

Selles punktis anname arvutusvalemi kõversilinderi ruumala arvutamiseks. Keha[2] ruumala mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri; rõhutame vaid, et ruumala matemaatiliselt range definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga ruumalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale. Keha, millel on olemas ruumala (mitte igal ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulgal pole ruumala!) nimetatakse *mõõtuvaks.*

Teoreem 4.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv kinnine piirkond ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x, y) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x, y), \qquad (x, y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\alpha(x, y) \leqslant \beta(x, y) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Siis kõversilinder

$$\mathcal{C} := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x, y) \in \mathcal{A},\ \alpha(x, y) \leqslant z \leqslant \beta(x, y)\big\},$$

on mõõtuv, kusjuures tema ruumala $V_{\mathcal{C}}$ avaldub valemiga

$$V_{\mathcal{C}} = \iint_{\mathcal{A}} \big(\beta(x, y) - \alpha(x, y)\big)\, dx\, dy.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

[2]Keha ehk ruumilise kujundi all mõistame me ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulki.

4.3. Ruumilise pinnatüki pindala arvutamine

Selles punktis anname mõned arvutusvalemid ruumilise pinnatüki pindala arvutamiseks. Ruumilise pinnatüki pindalal mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri – see matemaatiselt range definitsioon on üsna keeruline – rõhutame vaid, et see definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale.

Teoreem 4.3. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

pidevad osatuletised uv-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas Δ, *kusjuures*

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad \textit{piirkonnas } \Delta,$$

kus

$$A := \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \qquad C := \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix},$$

Siis pinnatüki

$$\Sigma := \Big\{ \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \colon \ (u,v) \in \Delta \Big\}$$

pindala S_Σ *avaldub valemiga*

$$S_\Sigma = \iint_\Delta \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Järeldus 4.4. *Eksisteerigu funktsioonil* $z = f(x,y)$ *pidevad osatuletised kinnises mõõtuvas hulgas* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. *Siis selle funktsiooni graafiku osa*

$$\Sigma := \Big\{ \big(x, y, f(x,y)\big) \colon \ (x,y) \in \mathcal{D} \Big\}$$

pindala S_Σ *avaldub valemiga*

$$S_\Sigma := \iint_\Sigma \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \iint_\Sigma \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\ dx\, dy.$$

Tõestus. Graafiku osa (pinnatükk) Σ esitub parameetriliselt võrranditega

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v), \qquad (u,v) \in \mathcal{D}. \tag{4.1}$$

Seda pinnatükki esitavatel funktsioonidel (4.1) eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}$ pidevad osatuletised, kusjuures

$$\begin{aligned} x'_u &= 1, & x'_v &= 0, \\ y'_u &= 0, & y'_v &= 1, \\ z'_u &= f'_x, & z'_v &= f'_y, \end{aligned}$$

seega teoreemi 4.3 tähistusi kasutades

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

järelikult teoreemi 4.3 põhjal

$$S_\Sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{f'_x(u,v)^2 + f'_y(u,v)^2 + 1}\, du\, dv,$$

nagu soovitud. $\square$

§ 5. Kolmekordne integraal

5.1. Kolmekordse integraali mõiste

Kolmekordne integraal

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

kolme muutuja funktsioonist $u = f(x,y,z)$ üle hulga $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraaliga (kahe muutuja funktsioonist). Kui kahekordse integraali defineerimisel lähtututi ristküliku jaotusviisist osaristkülikuteks, siis kolmekordse integraali puhul lähtutakse risttahuka jaotusviisist osaristtahukateks; kõik teooriaarenduseks vajalikud mõisted – Darboux' summad, Darboux' integraalid, integreeruvus, Darboux' summade piirväärtus, Riemanni summad, Riemanni integraal – defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraali juhuga; seejuures kolmekordse integraali olemasoluks tarvilikud ja piisavad tingimused ning kolmekordse integraali omadused on kahekordse integraali vastavate tingimuste ja omaduste ilmsed analoogid. Seepärast piirdume käesolevas konspektis kolmekordse integraali osas vaid olulisemate arvutusvalemite äratoomisega.

5.2. Kolmekordse integraali arvutamine

Teoreem 5.1. *Olgu kolme muutuja funktsioon $u = f(x,y,z)$ integreeruv risttahukas $\mathcal{E} := [a,b] \times [c,d] \times [e,l]$. Tähistame $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$.*

(a) *Kui iga $(x,y) \in \mathcal{D}$ korral eksisteerib integraal*

$$g(x,y) := \int_e^l f(x,y,z)\,dz,$$

siis

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_e^l f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

(b) *Kui iga $z \in [e,l]$ korral eksisteerib integraal*

$$h(z) := \iint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy,$$

siis

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^l \left(\iint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz = \int_e^l h(z)\,dz.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. $\square$

Teoreem 5.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv kinnine piirkond ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x,y) \quad ja \quad \beta = \beta(x,y), \qquad (x,y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\alpha(x,y) \leqslant \beta(x,y) \quad iga\ (x,y) \in \mathcal{A}\ korral.$$

Kui kolme muutuja funktsioon $u = f(x,y,z)$ on integreeruv kõversilindris

$$\mathcal{C} := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x,y) \in \mathcal{A},\ \alpha(x,y) \leqslant z \leqslant \beta(x,y)\big\},$$

kusjuures iga $(x,y) \in \mathcal{A}$ korral eksisteerib integraal

$$g(x,y) := \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y)\,dz,$$

siis

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{A}} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Teoreem 5.3. *Olgu kolme muutuja funktsioon $u = f(x,y,z)$ integreeruv hulgas*

$$\mathcal{C} := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z \in [e,l],\ (x,y) \in \mathcal{A}(z)\big\},$$

kus iga $z \in [e,l]$ korral $\mathcal{A}(z)$ on mõõtuv kinnine piirkond xy-tasandil. Kui iga $z \in [e,l]$ korral eksisteerib integraal

$$h(z) := \iint_{\mathcal{A}(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy,$$

siis

$$\iint_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^l \left(\iint_{\mathcal{A}(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right) dz = \int_e^l h(z)\,dz.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

5.3. Muutuja vahetus kolmekordses integraalis

5.3.1. Üldine muutuja vahetuse valem kolmekordse integraali jaoks

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w). \end{cases} \tag{5.1}$$

Tähistame

$$J(u,v,w) := \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{vmatrix},$$

s.t. $J(u,v,w)$ on selle süsteemi jakobiaan punktis (u,v,w).

Teoreem 5.4. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x,y,z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{E}$;*

(2) *võrrandid* (5.1) *määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab uvw-ruumi kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &\quad = \iiint_{\Delta} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\,\big|J(u,v,w)\big|\,du\,dv\,dw. \end{aligned} \tag{5.2}$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 5.1. Valem (5.2) jääb kehtima, kui teisendus (5.1) rahuldab regulaarsuse tingimusi mitte kogu hulgas Δ, vaid väljaspool hulga Δ mingit nullruumalaga alamhulka, mille see teisendus kujutab hulga $\mathcal{E}$ nullruumalaga alamhulgaks.

5.3.2. Üleminek silindrilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \\ z = h. \end{cases} \tag{5.3}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\phi h$-ruumi punktile (r,ϕ,h), kus $r \geqslant 0$ ja $\phi \in [0,2\pi)$, vastavusse xyz-ruumi punkti, mille silindrilised koordinaadid on r, ϕ ja h. Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} x'_r &= \cos\phi, & x'_\phi &= -r\sin\phi, & x'_h &= 0, \\ y'_r &= \sin\phi, & y'_\phi &= r\cos\phi, & y'_h &= 0, \\ z'_r &= 0, & z'_\phi &= 0, & z'_h &= 1, \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r,\phi,h) : = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\phi,h)} &= \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (5.3) teisendab $r\phi h$-ruumi hulga

$$\big\{(r,\phi,h)\colon\ r\geqslant 0,\ \phi\in[0,2\pi],\ h\in\mathbb{R}\big\} \tag{5.4}$$

sisemuse

$$\big\{(r,\phi,h)\colon\ r> 0,\ \phi\in(0,2\pi),\ h\in\mathbb{R}\big\}$$

regulaarselt xyz-ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand

$$\big\{(x,y,z)\colon\ y=0,\ x\geqslant 0\big\} \tag{5.5}$$

(s.t. zx-tasandi osa, kus $x\geqslant 0$); hulga (5.4) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r=0$ või $\phi\in\{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus pooltasandiks (5.5). Seega järeldub teoreemist 5.4 ja märkusest 5.1

Teoreem 5.5. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t=f(x,y,z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{E}$;*

(2) *teisendus (5.3) kujutab hulgas (5.4) sisalduva kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\Delta} f\big(r\cos\phi,r\sin\phi,h\big)\,r\,dr\,d\phi\,dh.$$

5.3.3. Üleminek sfäärilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi,\\ y=r\sin\theta\sin\phi,\\ z=r\cos\theta. \end{cases} \tag{5.6}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\theta\phi$-ruumi punktile (r,θ,ϕ), kus $r\geqslant 0$, $\theta\in[0,\pi]$ ja $\phi\in[0,2\pi)$, vastavusse xyz-ruumi punkti, mille sfäärilised koordinaadid on r, θ ja ϕ. Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} x'_r&=\sin\theta\cos\phi, & x'_\theta&=r\cos\theta\cos\phi, & x'_\phi&=-r\sin\theta\sin\phi,\\ y'_r&=\sin\theta\sin\phi, & y'_\theta&=r\cos\theta\sin\phi, & y'_\phi&=r\sin\theta\cos\phi,\\ z'_r&=\cos\theta, & z'_\theta&=-r\sin\theta, & z'_\phi&=0, \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r,\theta,\phi) := \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi \\ &\qquad r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi) + r^2\sin^3\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi) \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (5.6) teisendab $r\theta\phi$-ruumi hulga

$$\big\{(r,\phi,\theta)\colon\ r \geqslant 0,\ \theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi]\big\} \tag{5.7}$$

sisemuse

$$\big\{(r,\phi,\theta)\colon\ r > 0,\ \theta\in(0,\pi),\ \phi\in(0,2\pi)\big\}$$

regulaarselt xyz-ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand (5.5) (s.t. zx-tasandi osa, kus $x \geqslant 0$); hulga (5.7) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r=0$ või $\theta\in\{0,\pi\}$ või $\phi\in\{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus pooltasandiks (5.5). Seega järeldub teoreemist 5.4 ja märkusest 5.1

Teoreem 5.6. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t=f(x,y,z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{E}$;*

(2) *teisendus (5.6) kujutab hulgas (5.7) sisalduva kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &\qquad = \iiint_{\Delta} f\big(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta\big)\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi. \end{aligned}$$

5.4. Kolmekordse integraali rakendusi

5.4.1. Keha ruumala arvutamine

Teoreem 5.7. *Mõõtuva hulga $\mathcal{E}\subset\mathbb{R}^3$ ruumala $V_{\mathcal{E}}$ avaldub valemiga*

$$V_{\mathcal{E}} = \iiint_{\mathcal{E}} dx\,dy\,dz.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

VI peatükk.
Joonintegraalid

§ 1. Joone kaare pikkus

1.1. Tasandilise joone mõiste

Meenutame, et *tasandiliseks jooneks* nimetatakse punktihulka

$$\Big\{\big(x(t), y(t)\big) \colon\ t \in T\Big\} \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall ja

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in T, \tag{1.2}$$

on pidevad funktsioonid. Seejuures öeldakse, et joon (1.1) on esitatud *parameetriliste võrranditega* (1.2). Muutujat t nimetatakse *parameetriks.*

Tasandilist joont (1.1) on kõige lihtsam ette kujutada eeskirja (1.2) järgi tasandil liikuva punkti jäljena: ajahetkel $t \in T$ on punkti koordinaadid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$.

Tasandilise joone mõiste hõlmab hulgaliselt punktihulki, mida meie eelmatemaatiline arusaam tõrgub jooneks nimetamast. Näiteks tasandi $\mathbb{R}^2$ punktihulk $[0,1]\times[0,1] := \big\{(x,y)\colon\ x, y \in [0,1]\big\}$ – ruut – on esitatav kujul (1.1), kus funktsioonid (1.2) on pidevad. Niisuguseid "ebajoonelikke" jooni ühendab üks ühine omadus – *kordsete punktide* olemasolu. *Kordse punkti* all mõistetakse joone (1.1) punkti, mis vastab parameetri t erinevatele väärtustele, ehk, tõlgendades joont (1.1) tasandil eeskirja (1.2) järgi liikuva punkti jäljena, läbib see liikuv punkt joone kordse punkti rohkem kui üks kord. Seepärast on mõistlik sisse tuua selliste joonte klass, millel kordsed punktid puuduvad.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et tasandiline joon L on *lihtne,* kui ta on esitatav parameetriliste võrranditega (1.2), kus parameetri t erinevatele väärtustele vastavad selle joone erinevad punktid:

$$t, t' \in T,\ t \neq t' \quad \Longrightarrow \quad \big(x(t), y(t)\big) \neq \big(x(t'), y(t')\big) \tag{1.3}$$

(teisisõnu, joonel L ei ole selle parametriseeringu suhtes kordseid punkte).

Edaspidi, kirjutades, et lihtne joon L on antud parameetriliste võrranditega (1.2), eeldame me alati, et funktsioonid (1.2) rahuldavad tingimust (1.3).

Definitsioon 1.2. Joont L, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{1.4}$$

nimetatakse (tasandiliseks) *kaareks.* (Teisisõnu, kaar on joon (1.1), kus intervall T on lõik.) Seejuures, kui $[\alpha, \beta] \subset T$, siis kaarele L viidatakse kui joone (1.1) kaarele.

Kui kaar L on lihtne, siis, tähistades

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big), \tag{1.5}$$

viidatakse sellele kaarele kui punkte A ja B ühendavale kaarele. Punkte A ja B nimetatakse seejuures selle kaare *otspunktideks.*

Lihtsa kaare esituse puhul võrranditega (1.4) on määratud *kaare läbimise suund* – selle kaare punktide vahel on määratud järjestus: on loomulik lugeda punkt A_1 eelnevaks punktile A_2, kui

$$A_1 = \big(x(t_1), y(t_1)\big),\ A_2 = \big(x(t_2), y(t_2)\big), \quad \text{kus } t_1, t_2 \in [\alpha, \beta],\ t_1 < t_2.$$

Kaare otspunkte (1.5) on seejuures loomulik nimetada vastavalt selle kaare *alguspunktiks* ja *lõpp-punktiks.*

Rõhutame, et kaare algus- ja lõpp-punkti valik (ning ühtlasi ka kaare läbimise suund) sõltub kaare esitusest parameetriliste võrranditega (1.4) – alati on võimalik valida kaart esitavad parameetrilised võrrandid nii, et kaare läbimise suund muutub vastupidiseks (s.t. kaare algupunkt on B ja lõpp-punkt A).

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et (tasandiline) kaar L on *lihtne kinnine kaar,* kui ta on esitatav parameetriliste võrranditega (1.4), mis rahuldavad tingimusi

$$\big(x(\alpha), y(\alpha)\big) = \big(x(\beta), y(\beta)\big)$$

(s.t. tema otspunktid langevad kokku) ja

$$t, t' \in (\alpha, \beta),\ t \neq t' \quad \Longrightarrow \quad \big(x(t), y(t)\big) \neq \big(x(t'), y(t')\big)$$

(s.t. peale otspunktide tal rohkem kordseid punkte pole).

1.2. Tasandilise kaare pikkuse mõiste

Olgu lihtne kaar L antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{1.6}$$

Valime kaarel L järjestikkused punktid

$$\begin{aligned} A := A_0 = (x_0, y_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big), \quad A_1 = (x_1, y_1) = \big(x(t_1), y(t_1)\big), \\ \ldots\ldots, \quad A_n = (x_n, y_n) = \big(x(t_n), y(t_n) =: B \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{1.7}$$

kus

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n =: \beta, \tag{1.8}$$

ning moodustame kaare L *kõõlmurdjoone*

$$A_0 A_1 \dots A_n. \tag{1.9}$$

Definitsioon 1.4. Kui kaare L kõikvõimalike kõõlmurdjoonte (1.9) pikkuste hulk on ülalt tõkestatud, siis öeldakse, et kaar L on *sirgestuv*, kusjuures nende kõõlmurdjoonte pikkuste hulga ülemist raja nimetatakse kaare L *pikkuseks*.

Arvestades, et iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral kõõlu $A_{j-1}A_j$ pikkus on

$$\sqrt{\big(x_j(t) - x_{j-1}(t)\big)^2 + \big(y_j(t) - y_{j-1}(t)\big)^2}$$

ning seega kõõlmurdjoone (1.9) pikkus on

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big)^2 + \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big)^2},$$

siis, juhul, kui kaar L on sirgestuv, selle kaare pikkus s_L on

$$s_L := \sup_{\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n =: \beta} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big)^2 + \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big)^2}.$$

Märkus 1.1. Kaare sirgestuvus ja pikkus ei sõltu tema alguspunkti (ja lõpp-punkti) valikust, sest kaare L kõõlmurdjoonte hulk jääb samaks, kui vaadelda selle kaare alguspunktina punkti A asemel punkti B (muutub ainult nende kõõlmurdjoonte läbimise suund).

Järgnev lause esitab paar lihtsat kaare pikkuse omadust.

Lause 1.1. *Olgu AB lihtne tasandiline kaar.*

(a) *Olgu kaare AB kõõlmurdjoon l' saadud selle kaare kõõlmurdjoont l määravatele järjestikkustele punktidele $A = A_0, A_1, \dots, A_n := B$ uute punktide juurdelisamise teel. Siis kõõlmurdjoone l' pikkus $s_{l'}$ ei ole väiksem kõõlmurdjoone l pikkusest s_l:*

$$s_{l'} \geqslant s_l. \tag{1.10}$$

(b) *Olgu C kaare AB punkt. Siis kaar AB on sirgestuv parajasti siis, kui osakaared AC ja CA on sirgestuvad; seejuures kaare AB pikkus on s_{AB} osakaarte AC ja CB pikkuste s_{AC} ja s_{CB} summa:*

$$s_{AB} = s_{AC} + s_{CB}.$$

Tõestus. Olgu kaar AB esitatud parameetriliste võrranditega (1.6), kus

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big).$$

Valime kaarel AB järjestikkused punktid (1.7), kus $\alpha =: t_0 < t_1 < \ldots < t_n := \beta$.

(a). Väite tõestuseks piisab tõestada võrratus (1.10) juhul, kui kõõlmurdjoon l' on saadud punktidele (1.7) ühe uue punkti juurdelisamise teel. Olgu $k \in \{1, \ldots, n\}$ selline, et see uus punkt C asub punktide A_{k-1} ja A_k vahel. Kõõlmurdjooned l ja l' koosnevad ühtedest ja samadest sirglõikudest ainsa erinevusega, et murdjoone l' koosseisu kuuluvad sirglõigu $A_{k-1}A_k$ asemel sirglõigud $A_{k-1}C$ ja CA_k. Kuna

$$|A_{k-1}C| + |CA_k| \geqslant |A_{k-1}A_k|$$

(sest kolmnurga $A_{k-1}CA_k$ kahe külje $A_{k-1}C$ ja CA_k pikkuste $|A_{k-1}C|$ ja $|CA_k|$ summa ei ole väiksem kolmanda külje pikkusest $|A_{k-1}A_k|$ pikkusest – äärmisel juhul, kui punkt C asub sirglõigul $A_{k-1}A_k$, siis $|A_{k-1}C|+|CA_k| = |A_{k-1}A_k|$), kehtib (1.10).

(b). Eeldame kõigepealt, et kaar AB on sirgestuv. Kui

$$A =: A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_k := C \quad \text{ja} \quad C =: B_0,\ B_1, \ldots,\ B_m := B \qquad (k, m \in \mathbb{N})$$

on järjestikkused punktid vastavalt kaartelt AC ja CA, siis tähistades kõõlmurdjooned $AA_1 \ldots A_{k-1}C$, $CB_1 \ldots B_{m-1}B$ ja $AA_1 \ldots A_{k-1}CB_1 \ldots B_{m-1}B$ vastavalt sümbolitega l_1, l_2 ja l, ning nende kõõlmurdjoonte pikkused vastvalt sümbolitega s_{l_1}, s_{l_2} ja s_l,

$$s_{l_1} + s_{l_1} = s_l \leqslant s_{AB}$$

(siin viimane võrratus järeldub asjaolust, et l on kaare AB kõõlmurdjoon); seega,

$$\sup s_{l_1} + \sup s_{l_1} \leqslant s_{AB},$$

kus võrratuse vasakul pool olevates liidetavates on supreemum võetud vastavalt üle kaare AC kõikvõimalike kõõlmurdjoonte l_1 ja üle kaare CB kõikvõimalike kõõlmurdjoonte l_2; järelikult kaared AC ja CB on sirgestuvad, kusjuures

$$s_{AC} + s_{CB} \leqslant s_{AB}.$$

Teiselt poolt, eeldame, et kaared AC ja CB on sirgestuvad. Olgu

$$A =: A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n := B \quad (n \in \mathbb{N})$$

kaare AB järjestikkused punktid. Tähistame kõõlmurdjoone $AA_1 \ldots A_{n-1}B$ sümboliga l. On kaks teineteist välistavat võimalust:

(1) mingi $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral $C = A_k$;

(2) mingi $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral C asub punktide A_{k-1} ja A_k vahel (ja erineb neist punktidest).

Juhul (1) tähistame sümboliga l_1 kaare AC kõõlmurdjoone $AA_1 \dots A_{k-1}C$ ja sümboliga l_2 kaare CB kõõlmurdjoone $CA_{k+1} \dots A_{n-1}B$; siis

$$s_l = s_{l_1} + s_{l_2} \leqslant s_{AC} + s_{CB}.$$

Juhul (2) tähistame sümboliga l_1 kaare AC kõõlmurdjoone $AA_1 \dots A_{k-1}C$, sümboliga l_2 kaare CB kõõlmurdjoone $CA_k \dots A_{n-1}B$ ja sümboliga l' kaare AB kõõlmurdjoone $AA_1 \dots A_{k-1}CA_k \dots A_{n-1}B$; siis, arvestades, et kõõlmurdjoon l' on saadud kõõlmurdjoont l määravatele punktidele uue punkti C juurdelisamise teel, väite (a) põhjal

$$s_l \leqslant s_{l'} = s_{l_1} + s_{l_2} \leqslant s_{AC} + s_{CB}.$$

Niisiis igal juhul $s_l \leqslant s_{AC} + s_{CB}$; seega

$$\sup s_l \leqslant s_{AC} + s_{CB},$$

kus võrratuse vasakul pool on supreemum võetud üle kaare AB kõikvõimalike kõõlmurdjoonte l; järelikult kaar AB on sirgestuv, kusjuures

$$s_{AB} \leqslant s_{AC} + s_{CB}.$$

□

Märkus 1.2. Kaare sirgestuvuse ja pikkuse mõiste üldistuvad loomulikul viisil juhule, kui sellel kaarel on lõplik arv kordseid punkte (muuhulgas näiteks lihtsa kinnise kaare juhule). Niisugusel juhul saame kaare jagada lõpliku arvuks järjestikkusteks lihtsateks osakaarteks, kus eelneva kaare lõpp-punkt on järgneva kaare alguspunkt. Kaare loeme sirgestuvaks, kui ta on sellisel viisil jaotatav sirgestuvateks osakaarteks, kusjuures tema pikkuseks loeme sel juhul nende osakaarte pikkuste summa. Lihtne on veenduda, et sellisel moel defineeritud kaare pikkus ei sõltu kaare jaotusviisist lihtsateks osakaarteks.

1.3. Kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtus

Olgu lihtne kaar L esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.11}$$

Valime kaarel L järjestikkused punktid (1.7), kus $\alpha =: t_0 < t_1 < \ldots < t_n := \beta$, ning tähistame murdjoone $A_0A_1 \dots A_n$ tähega l, selle murdjoone pikkuse sümboliga s_l ning

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definitsioon 1.5. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse kaare L kõõlmurdjoonte piirväärtuseks, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s_l - I| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Märkus 1.3. Toetudes Cantori teoreemile, saab näidata, et kaare kõõlmurdjoonte piirväärtuse mõiste jääb samaks, kui definitsiooni 1.5 implikatsioonis (1.12) asendada tingimus

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$$

tingimusega

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta$$

või tingimusega

$$\max\bigl\{|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta y_n|\bigr\} < \delta,$$

kus $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$ ja $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$. Siit järeldub, et kaare kõõlmurdjoonte piirväärtuse olemasolu ja väärtus ei sõltu kaart L esitavatest parameetrilistest võrranditest (1.11).

Teoreem 1.2. *Kaar on sirgestuv parajasti, siis, kui tema kõõlmurdjoonte pikkustel on olemas piirväärtus; seejuures selle kaare pikkus on võrdne tema kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtusega.*

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

1.4. Tükiti sileda (tasandilise) kaare pikkuse arvutamine

Selles alapunktis toome sisse ühe praktikas sagedasti esinevate sirgestuvate kaarte – *tükiti siledate kaarte* – klassi ja tuletame valemi selliste kaarte pikkuse arvutamiseks.

Definitsioon 1.6. Me ütleme, et tasandiline kaar L on *sile,* kui ta on esitatav parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{1.13}$$

kus funktsioonidel (1.13) eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis.

Märkus 1.4. Pideva tuletise olemasolu all lõigus $[\alpha, \beta]$ mõistame me siinkohal, et funktsioonidel (1.13) eksisteerib pidev tuletis vahemikus (α, β), kusjuures sellel tuletisel eksisteerib punktis α lõplik parempoolne piirväärtus ning punktis β lõplik vasakpoolne piirväärtus. Märgime, et siit järeldub nendel funktsioonidel punktides α ja β vastavalt lõpliku parempoolse ja lõpliku vasakpoolse tuletise olemasolu, kusjuures

$$x'_+(\alpha) = \lim_{t\to\alpha+} x'(t), \quad x'_-(\beta) = \lim_{t\to\beta-} x'(t), \quad y'_+(\alpha) = \lim_{t\to\alpha+} y'(t), \quad y'_+(\beta) = \lim_{t\to\beta-} y'(t).$$

Me ütleme, et tasandiline kaar L on *tükiti sile,* kui ta on oma järjestikkuste punktidega jaotatav lõplikuks arvuks siledateks osakaarteks, s.t. kaar L on esitatav parameetriliste võrranditega (1.13), kusjuures leiduvad punktid $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n =: \beta$ nii, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

esitatud osakaar on sile.

Edaspidi, kirjutades, et sile kaar või tükiti sile kaar on antud parameetriliste võrranditega (1.13), eeldame me alati, et funktsioonid (1.13) rahuldavad definitsiooni 1.6 vastavaid tingimusi.

Teoreem 1.3. *Tükiti sile lihtne kaar on sirgestuv. Seejuures, kui tükiti sile kaar L on antud parameetriliste võrranditega* (1.13), *siis tema pikkus s_L avaldub valemiga*

$$s_L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \tag{1.14}$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 1.5. Teoreem 1.3 jääb kehtima, kui kaar L pole lihtne, kuid tal on lõplik arv kordseid punkte.

Järgnev järeldus teoreemist 1.3 annab valemid tükiti sileda kaare pikkuse arvutamiseks juhul, kui see kaar on antud võrrandiga $y = y(x)$, $x = x(y)$ või polaarkoordinaatides.

Järeldus 1.4. (a) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \tag{1.15}$$

kus funktsioonil (1.15) *eksisteerib lõigus $[a, b]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaare L pikkus s_L avaldub valemiga*

$$s_L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

(b) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \tag{1.16}$$

kus funktsioonil (1.16) *eksisteerib lõigus $[c, d]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil x' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaare L pikkus s_L avaldub valemiga*

$$s_L = \int_c^d \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy.$$

(c) *Olgu kaar L esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga*

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{1.17}$$

kus funktsioonil (1.17) *eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil r' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaare L pikkus s_L avaldub valemiga*

$$s_L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2}\, d\phi. \tag{1.18}$$

TÕESTUS. (a). Võrrandiga (1.15) esitatud kaar L on esitatav parameetriliste võrranditega (võttes sisuliselt parameetri t rolli muutuja x)

$$x = t, \quad y = y(t), \qquad t \in [a, b].$$

Tuletisfunktsioonid

$$x' = (t)'_t = 1, \quad \text{ja} \quad y' = y'(t)$$

rahuldavad teoreemi 1.3 eeldusi, seega valemi (1.14) põhjal

$$s_L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$$

nagu soovitud.

(b). Väite tõestus on analoogiline väite (a) tõestusega, aga siin tuleb kaare L esitamisel parameetriliste võrranditega võtta parameetri t rolli (sisuliselt) muutuja y.

(c). Võrrandiga (1.17) esitatud kaar L on esitatav parameetriliste võrranditega (võttes parameetriks muutuja ϕ)

$$x = r(\phi)\, \cos\phi, \quad y = r(\phi)\, \sin\phi, \qquad \phi \in [\alpha, \beta].$$

Tuletisfunktsioonid

$$\begin{aligned} x' &= \big(r(\phi)\, \cos\phi\big)'_\phi = r'(\phi)\, \cos\phi - r(\phi)\, \sin\phi, \\ y' &= \big(r(\phi)\, \sin\phi\big)'_\phi = r'(\phi)\, \sin\phi + r(\phi)\, \cos\phi \end{aligned}$$

rahuldavad teoreemi 1.3 eeldusi, seega valemist (1.14) saame valemi (1.18), sest

$$\begin{aligned} x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 &= \big(r'(\phi)\, \cos\phi - r(\phi)\, \sin\phi\big)^2 + \big(r'(\phi)\, \sin\phi + r(\phi)\, \cos\phi\big)^2 \\ &= r'(\phi)^2\, \cos^2\phi - 2r'(\phi)\, r(\phi)\, \sin\phi\, \cos\phi + r(\phi)^2\, \sin^2\phi \\ &\quad\ r'(\phi)^2\, \sin^2\phi + 2r'(\phi)\, r(\phi)\, \sin\phi\, \cos\phi + r(\phi)^2\, \cos^2\phi \\ &= r'(\phi)^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + r(\phi)^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= r'(\phi)^2 + r(\phi)^2. \end{aligned}$$

□

§ 2. Esimest liiki tasandiline joonintegraal

2.1. Esimest liiki joonintegraali mõiste ja lihtsamad omadused

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ määratud sirgestuval lihtsal (tasandilisel) kaarel L, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{2.1}$$

Jagame kaare L osakaarteks selle kaare järjestikkuste punktidega

$$\begin{aligned} A := A_0 = (x_0, y_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big), \quad A_1 = (x_1, y_1) = \big(x(t_1), y(t_1)\big), \\ \ldots\ldots, \quad A_n = (x_n, y_n) = \big(x(t_n), y(t_n) =: B \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

kus $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n =: \beta$. Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkuse sümboliga s_j ning valime sellel osakaarel punkti B_j, s.t.

$$B_j := \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big), \quad \text{kus } \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]. \tag{2.3}$$

Moodustame integraalsumma

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j. \tag{2.4}$$

Definitsioon 2.1. Kui integraalsummadel (2.4) eksisteerib piirväärtus $I \in \mathbb{R}$, s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| < \varepsilon, \tag{2.5}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *esimest liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist f üle kaare L* ja tähistatakse sümboliga

$$\int_L f(x, y)\, ds := \lim \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j := I. \tag{2.6}$$

Märkus 2.1. Toetudes Cantori teoreemile, saab näidata, et integraalsummade (2.4) piirväärtuse mõiste jääb samaks, kui definitsiooni 2.1 implikatsioonis (2.5) asendada tingimus

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$$

tingimusega

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta$$

või tingimusega

$$\max\big\{|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta y_n|\big\} < \delta,$$

kus $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$ ja $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$. Siit järeldub, et esimest liiki joonintegraali (2.6) olemasolu ja väärtus ei sõltu kaart L esitavatest parameetrilistest võrranditest (1.4) (ning sealhulgas kaare läbimise suunast).

Järgnev lause võtab kokku esimest liiki joonintegrali olulisemad lihtsamat sorti omadused.

Lause 2.1. *Olgu AB sirgestuv kaar xy-tasandil, olgu sellel kaarel määratud kahe muutuja funktsioonid $u = f(x,y)$ ja $v = g(x,y)$ ning olgu $a, b \in \mathbb{R}$.*

(a) *Olgu funktsioon f konstantne kaarel AB, s.t. mingi $c \in \mathbb{R}$ korral $f(x,y) = c$ kaarel AB. Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal $\int_{AB} f(x,y)\,ds$, kusjuures*

$$\int_{AB} c\,ds = c\,s_{AB} \tag{2.7}$$

(sümbol s_{AB} tähistab kaare AB pikkust).

(b) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds =: I. \tag{2.8}$$

Siis funktsioon f on tõkestatud kaarel AB.

(c) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal* (2.8). *Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal $\int_{AB} af(x,y)\,ds$, kusjuures*

$$\int_{AB} af(x,y)\,ds = a\int_{AB} f(x,y)\,ds.$$

(d) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds =: I_1 \quad ja \quad \int_{AB} g(x,y)\,ds =: I_2. \tag{2.9}$$

Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal $\int_{AB}\big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,ds$, kusjuures

$$\int_{AB}\big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,ds = \int_{AB} f(x,y)\,ds \pm \int_{AB} f(x,y)\,ds.$$

(e) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid* (2.9). *Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal $\int_{AB}\big(a\,f(x,y) + b\,g(x,y)\big)\,ds$, kusjuures*

$$\int_{AB}\big(a\,f(x,y) + b\,g(x,y)\big)\,ds = a\int_{AB} f(x,y)\,ds + b\int_{AB} f(x,y)\,ds.$$

(f) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal* (2.8) *ning olgu $f(x,y) \geqslant 0$ iga $(x,y) \in AB$ korral. Siis*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds \geqslant 0.$$

(g) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid* (2.9) *ning olgu* $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ *iga* $(x,y) \in AB$ *korral. Siis*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds \geqslant \int_{AB} g(x,y)\,ds. \tag{2.10}$$

(h) *Olgu* C *kaare* AB *punkt. Siis esimest liiki joonintegraal* (2.8) *eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerivad esimest liiki joonintegraalid*

$$\int_{AC} f(x,y)\,ds =: J_1 \quad \textit{ja} \quad \int_{CB} f(x,y)\,ds =: J_2. \tag{2.11}$$

Seejuures

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{AC} f(x,y)\,ds + \int_{AC} f(x,y)\,ds. \tag{2.12}$$

Tõestus. Olgu kaar AB esitatud parameetriliste võrranditega (2.1), kus

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big).$$

Jagame kaare AB osakaarteks selle kaare järjestikkuste punktidega (2.2), kus $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n =: \beta$. Iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral tähistame osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkuse sümboliga s_j ning valime sellel osakaarel punkti (2.3).

(a). Konstantse funktsiooni $f(x,y) = c$ mis tahes integraalsumma

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j = \sum_{j=1}^{n} c\,s_j = c\sum_{j=1}^{n} s_j = c\,s_{AB},$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on $c\,s_{AB}$, s.t. kehtib (2.7).

(b). Seda väidet me käesolevas kursuses ei tõesta. (Väite tõestus sarnaneb Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni tõkestatuse tõestusega.)

(c). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} af(B_j)\,s_j - aI\right| = |a|\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j - I\right| < \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a \neq 0$. Integraali (2.8) olemasolu tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j - I\right| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n} af(B_j)\,s_j - aI\right| < |a|\,\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

(d). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n}\bigl(f(B_j) \pm g(B_j)\bigr)\, s_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\bigl(f(B_j) \pm g(B_j)\bigr)\, s_j - (I_1 \pm I_2)\right| &= \left|\left(\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I_1\right) \pm \left(\sum_{j=1}^{n} g(B_j)\, s_j - I_2\right)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I_1\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} g(B_j)\, s_j - I_2\right|.\end{aligned}$$

Integraalide (2.9) olemasolu tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.13}$$

ja

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} g(B_j)\, s_j - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\bigl(f(B_j) \pm g(B_j)\bigr)\, s_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e). Väite (c) põhjal eksisteerivad joonintegraalid $\int_{AB} a\, f(x,y)\, ds$ ja $\int_{AB} b\, g(x,y)\, ds$, seega väite (d) põhjal eksisteerib ka joonintegraal $\int_{AB}\bigl(a\, f(x,y) + b\, g(x,y)\bigr)\, ds$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{AB}\bigl(a\, f(x,y) + b\, g(x,y)\bigr)\, ds &= \int_{AB} a\, f(x,y)\, ds + \int_{AB} b\, g(x,y)\, ds \\ &= a\int_{AB} f(x,y)\, ds + b\int_{AB} g(x,y)\, ds.\end{aligned}$$

(f). Fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks näidata, et

$$I > -\varepsilon. \tag{2.15}$$

Integraali (2.8) olemasolu tõttu leidub integraalsumma $\sum\limits_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j$, mis rahuldab tingimust $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| < \varepsilon$; niisiis

$$I + \varepsilon > \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j \geqslant 0$$

(siin viimane võrratus kehtib, sest $f(P) \geqslant 0$ kaarel AB), millest järeldub (2.15).

(g). Kui $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ kaarel AB, siis $f(x,y) - g(x,y) \geqslant 0$ sellel kaarel; seega väidete (d) ja (f) põhjal

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds - \int_{AB} g(x,y)\,ds = \int_{AB} \bigl(f(x,y) - g(x,y)\bigr)\,ds \geqslant 0,$$

millest järeldub (2.10), nagu soovitud.

(h). Seda väidet me käesolevas kursuses ei tõesta. □

2.2. Esimest liiki joonintegraali arvutamine

Teoreem 2.2. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ pidev tükiti siledal lihtsal kaarel L, mis on antud parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{2.16}$$

Siis eksisteerivab esimest liiki joonintegraal funktsioonist f üle kaare L, kusjuures

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt. \tag{2.17}$$

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kaar AB on sile, s.t. funktsioonidel (2.16) eksisteerib pidev tuletis kogu lõigus $[\alpha, \beta]$. Tähistame

$$I := \int_\alpha^\beta f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab valemi (2.17) tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et, jagades lõigu $[\alpha, \beta]$ osalõikudeks punktidega $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$ ning valides iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral punkti $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ja tähistades

$$B_j := \bigl(x(\tau_j), y(\tau_j)\bigr), \quad \Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad s_j := \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

(märgime, et s_j on kaare L osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkus, kus $A_{j-1} = \bigl(x(t_{j-1}), y(t_{j-1})\bigr)$ ja $A_j = \bigl(x(t_j), y(t_j)\bigr)$), kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\,s_j - I\right| < \varepsilon.$$

Hindame:

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j - I\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\Big| \\
&= \Big|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(\tau_j),y(\tau_j)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\Big| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\big|f\big(x(\tau_j),y(\tau_j)\big)-f\big(x(t),y(t)\big)\big|\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\big|\Phi(\tau_j)-\Phi(t)\big|\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt,
\end{aligned}$$

kus

$$\Phi(t) := f\big(x(t),y(t)\big), \quad t\in[\alpha,\beta].$$

Kuna funktsioon $t\mapsto\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ on pidev lõigus $[\alpha,\beta]$, siis Weierstrassi esimese teoreemi põhjal on ta ka tõkestatud selles lõigus, s.t. leidub reaalarv $M>0$ nii, et

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\leqslant M \quad \text{iga } t\in[\alpha,\beta] \text{ korral.}$$

Seega, tähistades

$$M_j := \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]}\Phi(t), \quad m_j := \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]}\Phi(t), \qquad j=1,\dots,n$$

(need supreemumid ja infiimumid eksisteerivad, sest lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon Φ on Weierstrassi esimese teoreemi põhjal tõkestatud selles lõigus), kehtib

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j - I\Big| &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(M_j-m_j)\,M\,dt = M\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt \\
&= M\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\,\Delta t_j.
\end{aligned}$$

Kuna lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon Φ on integreeruv selles lõigus, siis leidub reaalarv $\delta>0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Delta t_j<\delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\,\Delta t_j<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| < M\,\frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon.$$

□

Märkus 2.2. Esitatud tõestus ei ole teoreemi 2.2 kõige loomulikum tõestus: tõestus lihtsustuks pisut, kui temas kasutada absoluutväärtuste $\bigl|\Phi(\tau_j) - \Phi(t)\bigr|$ hindamiseks Cantori teoreemi (ühe muutuja funktsioonide jaoks), mida paraku enamik käesoleva kursuse kuulajatest veel ei tunne.

Märkus 2.3. Teoreem 2.2 jääb kehtima, kui kaar L pole lihtne, kuid tal on lõplik arv kordseid punkte.

Järgnev järeldus teoreemist 2.2 annab valemid esimest liiki (tasandilise) joonintegraali arvutamiseks üle tükiti sileda kaare juhul, kui see kaar on antud võrrandiga $y = y(x)$, $x = x(y)$ või polaarkoordinaatides.

Järeldus 2.3. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ pidev tükiti siledal lihtsal tasandilisel kaarel L.*

(a) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \tag{2.18}$$

kus funktsioonil (2.18) *eksisteerib lõigus $[a, b]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_a^b f\bigl(x, y(x)\bigr)\, \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

(b) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \tag{2.19}$$

kus funktsioonil (2.19) *eksisteerib lõigus $[c, d]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil x' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_c^d f\bigl(x(y), y\bigr)\, \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy.$$

(c) *Olgu kaar L esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga*

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{2.20}$$

kus funktsioonil (2.20) *eksisteerib lõigus* $[\alpha, \beta]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil* r' *eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f\big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big)\,\sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2}\,d\phi.$$

TÕESTUS. Järelduse tõestus on sarnane järelduse 1.4 tõestusele (seejuures toetutakse teoreemi 1.3 asemel teoreemile 2.2). Seepärast jätame tõestamise lugejale. □

2.3. Esimest liiki joonintegraali rakendusi

Teoreem 2.4. *Olgu* L *sirgestuv kaar* xy*-tasandil ning olgu kahe muutuja funktsioon* $u = f(x,y)$ *pidev kaarel* L*. Siis silindrilise pinna*

$$\Sigma := \Big\{(x,y,z)\colon\ (x,y) \in L,\ z \in \big[0, f(x,y)\big]\Big\}$$

pindala S_Σ *avaldub valemiga*

$$S_\Sigma = \int_L f(x,y)\,ds.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

§ 3. Teist liiki tasandiline joonintegraal

3.1. Teist liiki joonintegraali mõiste ja lihtsamad omadused

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ määratud sirgestuval lihtsal tasandilisel kaarel AB, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{3.1}$$

kus

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big).$$

Jagame kaare AB osakaarteks selle kaare järjestikkuste punktidega

$$\begin{aligned} A := A_0 = (x_0, y_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big), \quad A_1 = (x_1, y_1) = \big(x(t_1), y(t_1)\big), \\ \ldots\ldots, \quad A_n = (x_n, y_n) = \big(x(t_n), y(t_n) =: B \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

kus $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$. Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral valime osakaarel $A_{j-1}A_j$ punkti B_j, s.t.

$$B_j := \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big), \quad \text{kus } \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]. \tag{3.3}$$

ning tähistame

$$\Delta x_j := x_j - x_{j-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

Moodustame integraalsumma

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,\Delta x_j. \tag{3.4}$$

Definitsioon 3.1. Kui integraalsummadel (3.4) eksisteerib piirväärtus $I \in \mathbb{R}$, s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,\Delta x_j - I \right| < \varepsilon, \tag{3.5}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist f üle kaare AB projektsioonide järgi x-teljele* ja tähistatakse sümboliga

$$\cdot \int_{AB} f(x, y)\,dx := \lim \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,\Delta x_j := I. \tag{3.6}$$

Analoogiliselt defineeritakse *teist liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist f üle kaare AB projektsioonide järgi y-teljele*

$$\int_{AB} f(x, y)\,dy. \tag{3.7}$$

Kui funktsioonid $u = P(x, y)$ ja $v = Q(x, y)$ on määratud kaarel AB, siis me tähistame

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy := \int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy := \int_{AB} P(x, y)\,dx + \int_{AB} Q(x, y)\,dy.$$

Märkus 3.1. Toetudes Cantori teoreemile, saab näidata, et integraalsummade (3.4) piirväärtuse mõiste jääb samaks, kui definitsiooni 3.1 implikatsioonis (3.5) asendada tingimus

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta$$

tingimusega

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta$$

või tingimusega

$$\max\bigl\{|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta y_n|\bigr\} < \delta.$$

Siit järeldub, et teist liiki joonintegraali (3.6) (ning, analoogiliselt, ka (3.7)) olemasolu ja väärtus ei sõltu kaart AB esitavatest parameetrilistest võrranditest (3.1) – eeldusel, et need võrrandid määravad kaare alguspunktiks A ja lõpp-punktiks B.

Järgnev lause võtab kokku teist liiki joonintegrali olulisemad lihtsamat sorti omadused.

Lause 3.1. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = P(x, y)$, $u_1 = P_1(x, y)$, $u_2 = P_2(x, y)$, $v = Q(x, y)$, $v_1 = Q_1(x, y)$ ja $v_2 = Q_2(x, y)$ määratud xy-tasandil asuval sirgestuval lihtsal kaarel AB ning olgu $a_1, a_2, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$.*

(a) *Teist liiki joonintegraal sõltub kaare läbimise suunast: kaare AB läbimisel vastassuunas integraali märk muutub:*

$$\int_{BA} P\,dx + Q\,dy = -\int_{AB} P\,dx + Q\,dy.$$

(b) *Kui kaar AB on risti x-teljega, siis*

$$\int_{AB} P\,dx = 0; \tag{3.8}$$

kui kaar AB on risti y-teljega, siis

$$\int_{AB} Q\,dy = 0.$$

(c) (c1) *Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal*

$$\int_{AB} P\,dx =: I, \tag{3.9}$$

siis eksisteerib ka joonintegraal $\int_{AB} c\,P\,dx$, kusjuures

$$\int_{AB} c\,P\,dx = c\int_{AB} P\,dx.$$

(c2) *Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal* $\int_{AB} Q\,dy$, *siis eksisteerib ka joonintegraal* $\int_{AB} c\,Q\,dy$, *kusjuures*

$$\int_{AB} c\,Q\,dy = c\int_{AB} Q\,dy.$$

(d) (d1) *Kui eksisteerivad teist liiki joonintegraalid*

$$\int_{AB} P_1\,dx =: I_1 \quad ja \quad \int_{AB} P_2\,dx =: I_2, \tag{3.10}$$

siis eksisteerivad ka joonintegraalid $\int_{AB}\big(P_1 \pm P_2\big)\,dx$, *kusjuures*

$$\int_{AB}\big(P_1 \pm P_2\big)\,dx = \int_{AB} P_1\,dx \pm \int_{AB} P_2\,dx.$$

(d2) *Kui eksisteerivad teist liiki joonintegraalid*

$$\int_{AB} Q_1\,dy \quad ja \quad \int_{AB} Q_2\,dy, \tag{3.11}$$

siis eksisteerivad ka joonintegraalid $\int_{AB}\big(Q_1 \pm Q_2\big)\,dy$, *kusjuures*

$$\int_{AB}\big(Q_1 \pm Q_2\big)\,dy = \int_{AB} Q_1\,dy \pm \int_{AB} Q_2\,dy.$$

(e) *Eksisteerigu teist liiki joonintegraalid* (3.10) *ja* (3.11). *Siis eksiteerib ka joonintegraal*

$$\int_{AB}\big(a_1P_1 + a_2P_2\big)\,dx + \big(b_1Q_1 + b_2Q_2\big)\,dy, \tag{3.12}$$

kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{AB}&\big(a_1P_1 + a_2P_2\big)\,dx + \big(b_1Q_1 + b_2Q_2\big)\,dy\\ &= a_1\int_{AB} P_1\,dx + a_2\int_{AB} P_2\,dx + b_1\int_{AB} Q_1\,dy + b_2\int_{AB} Q_2\,dy.\end{aligned}$$

(f) *Olgu C kaare AB punkt. Teist liiki joonintegraal*

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerivad joonintegraalid

$$\int_{AC} P\,dx + Q\,dy \quad ja \quad \int_{CB} P\,dx + Q\,dy;$$

seejuures

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int_{CB} P\,dx + Q\,dy.$$

TÕESTUS. Olgu kaar AB esitatud parameetriliste võrranditega (3.1), kus

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big).$$

Jagame kaare AB osakaarteks selle kaare järjestikkuste punktidega (3.2), kus $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$. Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral valime osakaarel $A_{j-1}A_j$ punkti (3.3) ja tähistame

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

(a). Valides kaare AB alguspunktiks B, on funktsiooni P vastavad integraalsummad miinusmärgiga integraalsummad

$$\sum_{j=1}^{n} P(B_n)\,\Delta x_j \tag{3.13}$$

(sest lugedes kaare alguspunktiks punkti B, muutub punktide järjestus sellel kaarel vastupidiseks võrreldes juhuga, kui selle kaare alguspunktiks loetakse punkti A); seega nendel integraalsummadel eksisteerib piirväärtus parajasti siis, kui eksisteerib piirväärtus integraalsummadel (3.13), kusjuures need piirväärtused on vastasmärgilised; niisiis, integraal $\int_{BA} P\,dx$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib $\int_{AB} P\,dx$, kusjuures $\int_{BA} P\,dx = -\int_{AB} P\,dx$.

Analoogiliselt arutledes saame, et integraal $\int_{BA} Q\,dy$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib $\int_{AB} Q\,dy$, kusjuures $\int_{BA} Q\,dx = -\int_{AB} Q\,dy$.

Eelnevast järeldub, et integraal $\int_{BA} P\,dx + Q\,dy$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib integraal $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{BA} P\,dx + Q\,dy &= \int_{BA} P\,dx + \int_{BA} Q\,dy = -\int_{AB} P\,dx - \int_{AB} Q\,dy \\ &= -\Big(\int_{AB} P\,dx + \int_{AB} Q\,dy\Big) = -\int_{AA} P\,dx + Q\,dy.\end{aligned}$$

(b). Kui kaar AB on risti x-teljega, siis kõik integraalsummad (3.13) on võrdsed arvuga 0 (sest iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\Delta x_j = 0$), seega ka nende integraalsummade piirväärtus on 0, s.t. kehtib (3.8).

Juhtu, kus kaar AB on risti y-teljega, käsitletakse analoogiliselt.

(c). Tõestame ainult väite (c1). (Väide (c2) tõestatakse analoogiliselt.) Eksisteerigu teist liiki joonintegraal (3.9). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite (c1) tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} c\,P(B_j)\,\Delta x_j - c\,I\Big| = |c|\,\Big|\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\,\Delta x_j - I\Big| < \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $c \neq 0$. Integraali (3.9) olemasolu tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\,\Delta x_j - I\Big| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c\,P(B_j)\,\Delta x_j - c\,I\right| < |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

(d). Tõestame ainult väite (d1). (Väide (d2) tõestatakse analoogiliselt.) Eksisteerigu teist liiki joonintegraalid (3.10). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite (d1) tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{j=1}^{n}\big(P_1(B_j) \pm P_2(B_j)\big)\,\Delta x_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\big(P_1(B_j) \pm P_2(B_j)\big)\,\Delta x_j - (I_1 \pm I_2)\right|& \\ &= \left|\left(\sum_{j=1}^{n} P_1(B_j)\,\Delta x_j - I_1\right) \pm \left(\sum_{j=1}^{n} P_2(B_j)\,\Delta x_j - I_2\right)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} P_1(B_j)\,\Delta x_j - I_1\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} P_2(B_j)\,\Delta x_j - I_2\right|.\end{aligned}$$

Integraalide (3.10) olemasolu tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{j=1}^{n} P_1(B_j)\,\Delta x_j - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{j=1}^{n} P_2(B_j)\,\Delta x_j - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\big(P_1(B_j) \pm P_2(B_j)\big)\,\Delta x_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e). Joonintegraali (3.12) olemasolu järeldub vahetult väidetest (c) ja (d) (PÕHJENDADA!); seejuures (jällegi väidete (c) ja (d) põhjal)

$$\begin{aligned}\int_{AB} \big(a_1P_1 + a_2P_2\big)\,dx + \big(b_1Q_1 + b_2Q_2\big)\,dy& \\ &= \int_{AB} \big(a_1P_1 + a_2P_2\big)\,dx + \int_{AB} \big(b_1Q_1 + b_2Q_2\big)\,dy \\ &= \int_{AB} a_1P_1\,dx + \int_{AB} a_2P_2\,dx + \int_{AB} b_1Q_1\,dy + \int_{AB} b_2Q_2\,dy \\ &= a_1\int_{AB} P_1\,dx + a_2\int_{AB} P_2\,dx + b_1\int_{AB} Q_1\,dy + b_2\int_{AB} Q_2\,dy.\end{aligned}$$

(f). Väite (f) tõestus on eelnevatest tõestustest oluliselt keerulisem; KÄESOLEVAS KURSUSES ME SEDA VÄIDET EI TÕESTA. □

Kui L on sirgestuv kinnine kaar, siis kirjaviisist

$$\int_L P\,dx + Q\,dy \tag{3.14}$$

ei selgu, milline punkt tuleb valida kaare alguspunktiks (ja ühtlasi lõpp-punktiks) ning millises suunas tuleb see kaar läbida. Lihtne on näha, et kaare L ühesuguse läbimise suuna puhul ei sõltu integraal (3.14) kaare alguspunkti valikust, küll aga sõltub see integraal kaare läbimise suunast – kaare läbimisel vastassuunas muutub selle integraali märk.

Lihtsa kinnise kaare läbimise suunda, milles liikudes selle kaarega piiratud tasandi osa jääb vasakule, nimetatakse *positiivseks suunaks.* (Piltlikult väljendades, positiivne suund on kellaosuti liikumise vastassuund.)

On tavaks leppida kokku järgmises: kui L on sirgestuv kinnine kaar, siis *kirjaviisi* (3.14) *puhul mõistetakse kaare L läbimise suunana positiivset suunda,* s.t. selle integraali arvutamisel tuleb kaar L esitada parameetrilise võrranditega (1.4) nii, et parameetri t kasvades liigub vastav kaare punkt $\big(x(t), y(t)\big)$ mööda kaart positiivses suunas.

Kui on vaja märkida integraali üle lihtsa kinnise kaare L *negatiivses suunas* (s.t. kellaosuti liikumise vastassuunas), kirjutatakse integraali (3.14) ette miinusmärk.

3.2. Teist liiki joonintegraali arvutamine

Teoreem 3.2. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ pidev tükiti siledal lihtsal kaarel AB, mis on antud parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{3.15}$$

kus

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad ja \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big).$$

Siis eksisteerivad teist liiki joonintegraalid funktsioonist f üle kaare AB projektsioonide järgi nii x- kui ka y-teljele, kusjuures

$$\int_{AB} f(x, y)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t)\,dt \tag{3.16}$$

ja

$$\int_{AB} f(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t)\,dt. \tag{3.17}$$

TÕESTUS. Tõestame ainult valemi (3.16) (valem (3.17) tõestatakse analoogiliselt). Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et kaar AB on sile, s.t. funktsioonidel (3.15) eksisteerib pidev tuletis kogu lõigus $[\alpha, \beta]$. Tähistame

$$I := \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t)\,dt.$$

Fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab valemi (3.16) tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et, jagades lõigu $[\alpha, \beta]$ osalõikudeks punktidega $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$, valides iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral punkti $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ning tähistades

$$B_j := \bigl(x(\tau_j), y(\tau_j)\bigr), \quad \Delta x_j := x(t_j) - x(t_{j-1}), \quad \Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, \Delta x_j - I \right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral Newton–Leibnizi valemi põhjal

$$\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} x'(t)\, dt,$$

seega

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, \Delta x_j - I \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} f\bigl(x(\tau_j), y(\tau_j)\bigr) \int_{t_{j-1}}^{t_j} x'(t)\, dt - \int_{\alpha}^{\beta} f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\, x'(t)\, dt \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\bigl(x(\tau_j), y(\tau_j)\bigr)\, x'(t)\, dt - \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\, x'(t)\, dt \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Bigl| f\bigl(x(\tau_j), y(\tau_j)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \Bigr|\, |x'(t)|\, dt. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Kuna tuletisfunktsioon x' on pidev lõigus $[\alpha, \beta]$, siis Weierstrassi esimese teoreemi põhjal ta on ka tõkestatud selles lõigus, s.t. leidub $M > 0$ nii, et

$$\bigl|x'(t)\bigr| \leqslant M \quad \text{iga } t \in [\alpha, \beta] \text{ korral.}$$

Tähistame

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} f\bigl(x(t), y(t)\bigr), \quad m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}, t_j]} f\bigl(x(t), y(t)\bigr), \qquad j = 1, \ldots, n$$

(need supreemumid ja infiimumid eksisteerivad, sest lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev funktsioon $t \mapsto f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ on Weierstrassi teoreemi põhjal tõkestatud selles lõigus); siis

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I \right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (M_j - m_j)\, M\, dt = M \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \\ &= M \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\, \Delta t_j. \end{aligned}$$

Kuna lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev funktsioon funktsioon $t \mapsto f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ on integreeruv selles lõigus, siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\, \Delta t_j < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| < M\,\frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon.$$

□

Märkus 3.2. Teoreem 2.2 jääb kehtima, kui kaar L pole lihtne, kuid tal on lõplik arv kordseid punkte.

Märkus 3.3. Esitatud tõestus ei ole teoreemi 3.2 kõige loomulikum tõestus: tõestus lihtsustuks pisut, kui summas (3.18) kasutada absoluutväärtuste $\big|f\big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big) - f\big(x(t), y(t)\big)\big|$ hindamiseks Cantori teoreemi (ühe muutuja funktsioonide jaoks), mida paraku enamik käesoleva kursuse kuulajatest veel ei tunne.

Järgnev järeldus teoreemist 3.2 annab valemid teist liiki (tasandilise) joonintegraali arvutamiseks üle tükiti sileda kaare juhul, kui see kaar on antud võrrandiga $y = y(x)$, $x = x(y)$ või polaarkoordinaatides.

Järeldus 3.3. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ pidev tükiti siledal lihtsal tasandilisel kaarel AB.*

(a) *Olgu kaar AB esitatud võrrandiga*

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \tag{3.19}$$

kus funktsioonil (3.19) *eksisteerib lõigus $[a, b]$ pidev tuletis, välja arvatud, võibolla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused, ja*

$$A = \big(a, y(a)\big) \quad ja \quad B = \big(b, y(b)\big).$$

Siis

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\, dx \quad ja \quad \int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\, y'(x)\, dx.$$

(b) *Olgu kaar AB esitatud võrrandiga*

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \tag{3.20}$$

kus funktsioonil (3.20) *eksisteerib lõigus $[c, d]$ pidev tuletis, välja arvatud, võibolla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil x' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused, ja*

$$A = \big(x(c), c\big) \quad ja \quad B = \big(x(d), d\big).$$

Siis

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_c^d f\big(x(y), y\big)\, x'(y)\, dy \quad ja \quad \int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_c^d f\big(x(y), y\big)\, dy.$$

(c) *Olgu kaar AB esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga*

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{3.21}$$

kus funktsioonil (3.21) eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil r' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused, ja (ristkoordinaatides)

$$A = \big(r(\alpha)\cos\alpha, r(\alpha)\sin\alpha\big) \quad ja \quad B = \big(r(\beta)\cos\beta, r(\beta)\sin\beta\big).$$

(s.t. polaarkoordinaatides $A = \big(r(\alpha), \alpha\big)$ ja $B = \big(r(\beta), \beta\big)$). Siis

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big)\,\big(r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\,\sin\phi\big)\,d\phi$$

ja

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta f\big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big)\,\big(r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\,\cos\phi\big)\,d\phi.$$

TÕESTUS. Järelduse tõestus on sarnane järelduse 1.4 tõestusele (seejuures toetutakse teoreemi 1.3 asemel teoreemile 3.2). Seepärast jätame tõestamise lugejale. □

3.3. Greeni valem

Teoreem 3.4 (Greeni valem)**.** *Eksisteerigu pidevatel kahe muutuja funktsioonidel $u = P(x,y)$ ja $v = Q(x,y)$ pidevad osatuletised $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ tõkestatud kinnises piirkonnas $\mathcal{D}$, mille rajajoon $\partial\mathcal{D}$ on tükiti sile. Siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} P\,dx + Q\,dy. \tag{3.22}$$

Tõestame Greeni valemist ainult järgnevad erijuhud.

Lause 3.5. (a) *Olgu*

$$\mathcal{D} := \big\{(x,y)\colon\ x \in [a,b],\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\},$$

kus funktsioonidel

$$\alpha = \alpha(x) \quad ja \quad \beta = \beta(x), \qquad x \in [a,b],$$

eksisteerib lõigus $[a,b]$ *pidev tuletis. Siis*

$$-\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} P\,dx. \tag{3.23}$$

(b) *Olgu*

$$\mathcal{D} := \big\{(x,y)\colon\ y \in [c,d],\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\big\},$$

kus funktsioonidel

$$\gamma = \gamma(y) \quad ja \quad \delta = \delta(y), \qquad y \in [c,d],$$

eksisteerib lõigus $[a,b]$ *pidev tuletis. Siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} Q\,dy. \tag{3.24}$$

Tõestus. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.)

Tähistame

$$A := \big(a,\alpha(a)\big), \quad B := \big(b,\alpha(b)\big), \quad C := \big(b,\beta(b)\big), \quad D := \big(a,\beta(a)\big).$$

Siis ühel poolt

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \bigg(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\bigg)dx\\ &= \int_a^b \Big(P\big(x,\beta(x)\big) - P\big(x,\alpha(x)\big)\Big)dx;\end{aligned}$$

teiselt poolt,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} P\,dx &= \int_{AB} P\,dx + \int_{BC} P\,dx + \int_{CD} P\,dx + \int_{DA} P\,dx = \int_{AB} P\,dx + \int_{CD} P\,dx\\ &= \int_{AB} P\,dx - \int_{DC} P\,dx = \int_a^b P\big(x,\alpha(x)\big)\,dx - \int_a^b P\big(x,\beta(x)\big)\,dx\\ &= -\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Märkus 3.4. Valem (3.23) jääb kehtima, kui

(1) piirkond $\mathcal{D}$ esitub lõpliku ühendina $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j$, kus $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ on paarikaupa lõikumatute sisemustega kõvertrapetsid, mis rahuldavad lause 3.5, (a), eeldusi kõvertrapetsi $\mathcal{D}$ kohta.

Tõepoolest, eelduse (1) kehtides lause 3.5, (a), põhjal

$$-\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\sum_{j=1}^{n} \iint_{\mathcal{D}_j} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{n} -\iint_{\mathcal{D}_j} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{D}_j} P\,dx$$
$$= \int_{\partial \mathcal{D}} P\,dx.$$

Siin viimane võrdus kehtib, sest summas $\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{D}_j} P\,dx$ esinevad integraalid üle rajajoonte $\partial \mathcal{D}_j$ niisuguste osade, mis pole rajajoone $\partial \mathcal{D}$ osad, kaks korda, kusjuures ühel juhul läbitakse selline osa ühes suunas ja teisel juhul vastupidises suunas; seega koonduvad summas $\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{D}_j} P\,dx$ integraalid üle rajajoonte $\partial \mathcal{D}_j$ osade, mis pole rajajoone $\partial \mathcal{D}$ osad, paarikaupa välja.

Analoogiliselt saab näidata, et valem (3.24) jääb kehtima, kui

(2) piirkond $\mathcal{D}$ esitub lõpliku ühendina $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{D}'_i$, kus $\mathcal{D}'_1, \ldots, \mathcal{D}'_m$ on paarikaupa lõikumatute sisemustega kõvertrapetsid, mis rahuldavad lause 3.5, (b), eeldusi kõvertrapetsi $\mathcal{D}$ kohta.

Eelnevast järeldub, et kui samaaegselt kehtivad eeldused (1) ja (2), siis kehtib Greeni valem (3.22), sest niisugusel juhul

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial \mathcal{D}} Q\,dy + \int_{\partial \mathcal{D}} P\,dx$$
$$= \int_{\partial \mathcal{D}} P\,dx + Q\,dy.$$

3.4. Teist liiki joonintegraali sõltumatus integreerimisteest

Olgu funktsioonid P ja Q pidevad piirkonnas $\mathcal{D}$. Vaatleme teist liiki joonintegraali

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{3.25}$$

üle piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduva tükiti sileda kaare AB. Kui mis tahes piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduvate punkte A ja B ühendavate tükiti siledate kaarte L_1 ja L_2 korral (mille alguspunkt on A ja lõpp-punkt B)

$$\int_{L_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy,$$

siis öeldakse, et teist liiki joonintegraal (3.25) *ei sõltu integreerimisteest* piirkonnas $\mathcal{D}$. Sellisel juhul kasutatakse joonintegraali (3.25) märkimiseks sümbolit

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy :$$

see integraal sõltub integereerimistee alguspunktist A ja lõpp-punktist B, kuid mitte neid punkte ühendavast integreerimisteest.

Selles punktis anname mõned tarvilikud ja piisavad tingimused teist liiki joonintegraalide sõltumatuseks integreerimisteest. Selleks vajame me *ühelisidusa* (tasandilise) piirkonna mõistet.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et piirkond $\mathcal{D}$ on *ühelisidus,* kui mis tahes piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduva lihtsa kinnise kaarega piiratud tasandi osa sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$.

Teoreem 3.6. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = P(x,y)$ ja $v = Q(x,y)$ pidevad lahtises piirkonnas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *mis tahes punktide $A, B \in \mathcal{D}$ korral integraal* (3.25) *ei sõltu integreerimisteest piirkonnas $\mathcal{D}$;*

(ii) *integraalialune avaldis $P\,dx + Q\,dy$ on* täpne diferentsiaal, *s.t. leidub piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv kahe muutuja funktsioon $w = \Phi(x,y)$, mille täisdiferentsiaal on see avaldis:*

$$d\Phi = P\,dx + Q\,dy. \tag{3.26}$$

Seejuures kehtib "Newton–Leibnizi valem"

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \Phi(B) - \Phi(A). \tag{3.27}$$

Kui piirkond $\mathcal{D}$ on ühelisidus ning funktsioonidel P ja Q eksisteerivad selles piirkonnas pidevad osatuletised $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, siis tingimused (i) *ja* (ii) *on samaväärsed tingimusega*

(iii) *integraalialune avaldis $P\,dx + Q\,dy$ on* kinnine diferentsiaal, *s.t. piirkonnas $\mathcal{D}$*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3.28}$$

Märkus 3.5. Nagu järgnevast tõestusest näeme, kehtib implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(iii) (ning seega ka implikatsioon (i)$\Rightarrow$(iii)) ka ilma eelduseta piirkonna $\mathcal{D}$ ühelisidususe kohta.

Teoreemi 3.6 implikatsiooni (iii)$\Rightarrow$(ii) tõestus üldjuhul on käesoleva kursuse jaoks liiga keeruline. Seepärast piirdume me selle implikatsiooni tõestusega teataval erijuhul – *tähekujuliste* piirkondade juhul – mis hõlmab olulisemaid praktikas ettetulevaid ühelisidusaid piirkondi – muuhulgas ka näiteks kumeraid piirkondi.

Definitsioon 3.3. Öeldakse, et piirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ on *tähekujuline,* kui leidub punkt $A \in \mathcal{D}$ nii, et mis tahes punkti $B \in \mathcal{D}$ korral punkte A ja B ühendav sirglõik sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$.

Teoreemi 3.6 tõestus. (i)⇒(ii). Olgu kõikide $A, B \in \mathcal{D}$ korral integraal (3.25) sõltumatu integreerimisteest. Fikseerime vabalt punkti $A \in \mathcal{D}$ ja defineerime piirkonnas $\mathcal{D}$ kahe muutuja funktsiooni $w = \Phi(B) = \Phi(x, y)$ võrdusega

$$\Phi(B) = \int_A^B P\,dx + Q\,dy, \quad B \in \mathcal{D}$$

(seejuures me loeme $\Phi(A) = 0$). Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et piirkonnas $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q.$$

Tõestame neist samasustest vaid esimese (teine tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime vabalt $B := (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Me peame näitama, et

$$\frac{\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} P(x_0, y_0).$$

Märgime, et piirkonna $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu leidub $\delta > 0$ nii, et $U_\delta(B) \subset \mathcal{D}$; niisiis, kui $|h| < \delta$, siis punkte $B = (x_0, y_0)$ ja $C := (x_0 + h, y_0)$ ühendav sirglõik BC sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. Valides integraalis $\int_A^C P\,dx + Q\,dy$ integreerimisteeks kaare, mis on saadud vabalt valitud (punkte A ja B ühendava ja piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduva) kaare AB ja sirglõigu BC ühendamisel,

$$\begin{aligned}
\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(C) - \Phi(B) &= \int_A^C P\,dx + Q\,dy - \int_A^B P\,dx + Q\,dy \\
&= \int_B^A P\,dx + Q\,dy + \int_A^C P\,dx + Q\,dy = \int_B^C P\,dx + Q\,dy \\
&= \int_B^C P\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0)\,dx = P(\xi_h, y_0)\,h,
\end{aligned}$$

kus punkt ξ_h paikneb punktide x_0 ja $x_0 + h$ vahel (sellise punkti ξ_h olemasolu järeldub integraalarvutuse keskväärtusteoreemist); järelikult, arvestades, et $\xi_h \xrightarrow[h \to 0]{} x_0$, funktsiooni P pidevuse tõttu

$$\frac{\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{h} = P(\xi_h, y_0) \xrightarrow[h \to 0]{} P(x_0, y_0),$$

nagu soovitud.

(ii)⇒(i). Leidugu piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv kahe muutuja funktsioon $w = \Phi(x, y)$, mis rahuldab tingimust (3.26), s.t.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q.$$

Olgu piirkonna $\mathcal{D}$ punkte A ja B ühendav (piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduv) tükiti sile kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus

$$\big(x(\alpha), y(\alpha)\big) = A \quad \text{ja} \quad \big(x(\beta), y(\beta)\big) = B.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et kehtib (3.27). Veendume selles:

$$\begin{aligned}\int_{AB} P\,dx + Q\,dy &= \int_{AB} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y)\,dy \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t)\right) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\,\Phi\big(x(t), y(t)\big)\,dt \\ &\overset{(*)}{=} \Phi\big(x(\beta), y(\beta)\big) - \Phi\big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \\ &= \Phi(B) - \Phi(A),\end{aligned}$$

nagu soovitud (siin võrdus $(*)$ kehtib Newton–Leibnizi valemi põhjal).

Eeldame nüüd täiendavalt, et funktsioonidel P ja Q eksisteerivad piirkonnas $\mathcal{D}$ pidevad osatuletised $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (ii). Siis piirkonnas $\mathcal{D}$

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{ja} \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ning järelikult ka

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Kuna osatuletised $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ on pidevad piirkonnas $\mathcal{D}$, siis ka teist järku segaosatuletised $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial x}$ ja $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}$ on pidevad piirkonnas $\mathcal{D}$; järelikult teoreemi II.**??** põhjal $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}$ piirkonnas $\mathcal{D}$; niisiis ka $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ piirkonnas $\mathcal{D}$, nagu soovitud.

Eeldame nüüd täiendavalt, et piirkond $\mathcal{D}$ on tähekujuline.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (iii). Implikatsiooni tõestuseks piisab leida piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv kahe muutuja funktsioon $w = \Phi(x,y)$, mis rahuldab tingimust (3.26). Piirkonna $\mathcal{D}$ tähekujulisuse tõttu leidub punkt $A \in \mathcal{D}$ nii, et mis tahes punkti $B \in \mathcal{D}$ korral punkte A ja B ühendav sirglõik sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. Defineerime funktsiooni $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$\Phi(B) := \int_{AB} P\,dx + Q\,dy, \quad B \in \mathcal{D},$$

kus integreerimisteeks on punkte A ja B ühendav sirglõik (seejuures me loeme $\Phi(A) = 0$). Tingimuse (3.26) kehtivuseks piisab näidata, et piirkonnas $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q.$$

Tõestame neist samasustest vaid esimese (teine tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime vabalt $B := (x_0, y_0)$. Me peame näitama, et

$$\frac{\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} P(x_0, y_0).$$

Märgmime, et piirkonna $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu leidub $\delta > 0$ nii, et $U_\delta(B) \subset \mathcal{D}$; niisiis, kui $|h| < \delta$, siis punkte $B = (x_0, y_0)$ ja $C := (x_0 + h, y_0)$ ühendav sirglõik BC sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. Näeme, et

$$\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(C) - \Phi(B) = \int_{AC} P\,dx + Q\,dy - \int_{AB} P\,dx + Q\,dy.$$

Greeni valemi põhjal, tähistades kolmnurga ABC kontuuri tähega L ja selle kolmnurga enda tähega Δ ning oletades konkreetsuse mõttes, et $h > 0$ (juhtu, kus $h < 0$, käsitletakse analoogiliselt), järeldub samasusest (3.28), et

$$\begin{aligned}\int_L P\,dx + Q\,dy &= \int_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int_{CB} P\,dx + Q\,dy + \int_{BA} P\,dx + Q\,dy \\ &= \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned}\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0) &= \int_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int_{BA} P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_{BC} P\,dx + Q\,dy = \int_{BC} P\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0)\,dx \\ &= P(\xi_h, y_0)\,h,\end{aligned}$$

kus punkt ξ_h paikneb punktide x_0 ja $x_0 + h$ vahel (sellise punkti ξ_h olemasolu järeldub integraalarvutuse keskväärtusteoreemist); järelikult, arvestades, et $\xi_h \xrightarrow[h \to 0]{} x_0$, funktsiooni P pidevuse tõttu

$$\frac{\Phi(x_0 + h, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{h} = P(\xi_h, y_0) \xrightarrow[h \to 0]{} P(x_0, y_0),$$

nagu soovitud. □

3.5. Teist liiki joonintegraali rakendusi

VII peatükk.
Astmeread

§ 1. Astmerea koonduvuspiirkonna struktuur. Astmerea summa omadusi

1.1. Astmerea mõiste

Definitsioon 1.1. *Astmeridadeks* nimetatakse ridu kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots , \tag{1.1}$$

kus $a, a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Arvusid a_k, $k \in \mathbb{N}$, nimetatakse astmerea (1.1) *kordajateks.*

Rõhutame, et astmerida pole arvrida, vaid *funktsionaalrida* – tema liikmeteks pole mitte arvud, vaid astmefunktsioonid $x \mapsto a_k\,(x-a)^k$. Andes reas (1.1) muutujale x konkreetse arvulise väärtuse x_0, muutub astmerida (1.1) arvreaks $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x_0-a)^k$.

Öeldakse, et astmerida (1.1) koondub (vastavalt, koondub absoluutselt või hajub) punktis x_0 (või ka punktis $x = x_0$), kui arvrida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x_0-a)^k$ koondub (vastavalt, koondub absoluutselt või hajub).

Definitsioon 1.2. Hulka

$$\left\{x_0 \in \mathbb{R}\colon \text{ arvrida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0-a)^k \text{ koondub}\right\}$$

nimetatakse astmerea (1.1) *koonduvuspiirkonnaks.* Teisisõnu, astmerea koonduvuspiirkond on nende punktide hulk, milles see astmerida koondub.

1.2. Astmerea koonduvuspiirkonna struktuur (Cauchy–Hadamard'i teoreem)

Kõik selle paragrahvi tulemused tõestame vaid astmeridade jaoks kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{1.2}$$

(s.t. astmeridade (1.1) jaoks, kus $a = 0$). Kõik need tulemused on lihtsasti üle kantavad ka astmeridade (1.1) jaoks, sest astmerida (1.1) on muutuja vahetuse $z = x - a$ abil teisendatav astmereaks kujul (1.2).

Teoreem 1.1 (Cauchy–Hadamard'i teoreem)**.** *Astmerea* (1.2) *jaoks leidub üheselt määratud suurus* $R \in [0, \infty]$ *nii, et*

(1) *juhul* $R = \infty$ *rida* (1.2) *koondub absoluutselt igas punktis* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) *juhul* $0 < R < \infty$ *rida* (1.2) *koondub absoluutselt, kui* $x \in (-R, R)$*, ja hajub, kui* $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$*;*

(3) *juhul* $R = 0$ *astmerida* (1.2) *koondub vaid punktis* $x = 0$.

Seejuures

(a) *kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$*, siis*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \tag{1.3}$$

(siin $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ *korral loeme* $R = \infty$ *ja* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ *korral* $R = 0$*);*

(b) *kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$*, siis*

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}. \tag{1.4}$$

Definitsioon 1.3. Suurust R Cauchy–Hadamard'i teoreemist 1.1 nimetatakse astmerea (1.2) *koonduvusraadiuseks.* Kui $R > 0$, siis vahemikku $(-R, R)$ nimetatakse astmerea (1.2) *koonduvusvahemikuks.* Valemitele (1.3) ja (1.4) astmerea koonduvusraadiuse määramiseks viidatakse kui *Cauchy–Hadamard'i valemitele.*

Cauchy–Hadamard'i teoreemi 1.1 väidete (a) ja (b) tõestus. (a). Eksisteerigu (lõplik või lõpmatu) piirväärtus $L := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Tähistades $R := \dfrac{1}{L}$, piisab väite tõestuseks tõestada väited (1)–(3). Selleks märgime esmalt, et punktis $x = 0$ rida (1.2) koondub. Selle rea koonduvuse uurimiseks punktides $x \neq 0$ kasutame Cauchy tunnust: mis tahes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral eksisteerib piirväärtus

$$\begin{aligned} C :&= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x|^k} = \lim_{k\to\infty} |x| \sqrt[k]{|a_k|} \\ &= |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} |x|\,L, & \text{kui } L < \infty; \\ \infty, & \text{kui } L = \infty; \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{kui } R = \infty; \\ \dfrac{|x|}{R}, & \text{kui } 0 < R < \infty; \\ \infty, & \text{kui } R = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Cauchy tunnuse põhjal rida (1.2) koondub absoluutselt, kui $C < 1$, ja hajub, kui $C > 1$; seega järelduvad eelnevast võrdusteahelast väited (1)–(3).

(b). Eksisteerigu (lõplik või lõpmatu) piirväärtus $R := \lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$. Väite tõestuseks piisab tõestada väited (1)–(3). Selleks märgime esmalt, et punktis $x = 0$ rida (1.2) koondub. Selle rea koonduvuse uurimiseks punktides $x \neq 0$ kasutame d'Alembert'i tunnust: mis tahes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral eksisteerib piirväärtus

$$D := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|\,|x|^{k+1}}{|a_k|\,|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{\dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}} = \begin{cases} 0, & \text{kui } R = \infty; \\ \dfrac{|x|}{R}, & \text{kui } 0 < R < \infty; \\ \infty, & \text{kui } R = 0. \end{cases}$$

D'Alembert'i tunnuse põhjal rida (1.2) koondub absoluutselt, kui $D < 1$, ja hajub, kui $D > 1$; seega järelduvad eelnevast võrdusteahelast väited (1)–(3). □

Märkus 1.1. Saab näidata, et kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, kusjuures need kaks piirväärtust on võrdsed. Seega järeldub teoreemi 1.1 väide (b) väitest (a).

Märkus 1.2. Astmerida võib oma koonduvusvahemiku otspunktides nii koonduda kui ka hajuda. Näiteks

(a) astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, x^k$$

koonduvusvahemik on $(-1, 1)$, punktides $x = -1$ ja $x = 1$ see rida koondub;

(b) astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

koonduvusvahemik on $(-1, 1)$; punktides $x = -1$ ja $x = 1$ see rida hajub;

(c) astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, x^k$$

koonduvusvahemik on $(-1, 1)$; punktis $x = -1$ see rida hajub ning punktis $x = 1$ koondub;

(d) astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k$$

koonduvusvahemik on $(-1, 1)$; punktis $x = -1$ see rida koondub ning punktis $x = 1$ hajub.

1.3. Astmerea summa pidevus

Teoreem 1.2. *Astmerea summa on selle astmerea koonduvuspiirkonnas pidev funktsioon. Täpsemalt, olgu astmerea*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1.5}$$

koonduvusraadius $R > 0$. *Siis*

(a) *mis tahes* $x_0 \in (-R, R)$ *korral*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k;$$

(b) *kui astmerida* (1.5) *koondub oma koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis* $x = R$, *siis selle astmerea summa on vasakult pidev selles otspunktis, s.t.*

$$\lim_{x\to R-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k;$$

(c) *kui astmerida* (1.5) *koondub oma koonduvusvahemiku vasakpoolses otspunktis* $x = -R$, *siis selle astmerea summa on paremalt pidev selles otspunktis, s.t.*

$$\lim_{x\to -R+} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-R)^k.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Teoreemi 1.2 väiteid (b) ja (c) tuntakse *Abeli lemma* nime all.

1.4. Astmerea liikmeti integreerimine

Teoreem 1.3. *Olgu astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koonduvuspiirkond* X. *Siis võib seda astmerida igas lõigus* $[a, b] \subset X$ *liikmeti integreerida, s.t. selle astmerea summa on lõigus* $[a, b]$ *integreeruv funktsioon, kusjuures*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \, x^{k+1}}{k+1} \bigg|_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Teoreem 1.4. *Olgu astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *koonduvusraadius* $R > 0$. *Siis iga reaalarvu* $x \in (-R, R)$ *korral võib seda astmerida lõigus* $[0, x]$ *liikmeti integreerida, s.t. selle astmerea summa on lõigus* $[0, x]$ *integreeruv funktsioon, kusjuures*

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k z^k \, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

Seejuures astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *liikmeti integreerimise tulemusena saadava astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}$ *koonduvusraadius on samuti* R.

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

1.5. Astmerea liikmeti diferentseerimine

Teoreem 1.5. *Olgu astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koonduvusraadius* $R > 0$. *Siis võib seda astmerida vahemikus* $(-R, R)$ *liikmeti diferentseerida, s.t. selle astmerea summa on vahemikus* $(-R, R)$ *diferentseeruv funktsioon, kusjuures*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad x \in (-R, R).$$

Seejuures vaadeldava astmerea liikmeti diferentseerimise tulemusena saadava astmerea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *koonduvusraadius on samuti* R.

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Järeldus 1.6. *Olgu astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koonduvusraadius* $R > 0$. *Siis võib seda astmerida vahemikus* $(-R, R)$ *kui tahes palju kordi liikmeti diferentseerida, s.t. selle astmerea summa on vahemikus* $(-R, R)$ *kui tahes palju kordi diferentseeruv funktsioon, kusjuures iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral tema* n *järku tuletis on*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,x^{k-n}, \qquad x \in (-R, R).$$

Seejuures vaadeldava astmerea n*-kordse liikmeti diferentseerimise tulemusena saadava astmerea koonduvusraadius on samuti* R.

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

§ 2. Funktsiooni arendamine astmeritta

2.1. Taylori rida. Maclaurini rida

Olgu funktsioon f määratud punkti $a \in \mathbb{R}$ mingis ümbruses.

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et funktsioon f *on arendatav astmeritta*[1] punktis a, kui leidub astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, mis punkti a mingis ümbruses koondub funktsiooniks f, s.t. punkti a mingis ümbruses

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k. \tag{2.1}$$

Seejuures öeldakse, et rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ on funktsiooni f *arendus astmeritta.*

Teoreem 2.1. *Selleks, et funktsioon f oleks arendatav astmeritta punktis a, on tarvilik, et funktsioonil f eksisteeriks punkti a mingis ümbruses kui tahes kõrget järku tuletised. Seejuures, kui punkti a mingis lahtises ümbruses kehtib* (2.1), *siis selles ümbruses iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,(x-a)^{k-n}. \tag{2.2}$$

Tõestus. Olgu funktsioon f arendatav astmeritta punktis a, s.t. leidub astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ nii, et punktis a teatavas lahtises ümbruses $\mathcal{U}$ kehtib (2.1). Siis see lahtine ümbrus $\mathcal{U}$ sisaldab selle astmerea koonduvusvahemikus. Kuna järelduse 1.6 põhjal astmerea summal eksisteerivad selle astmerea koonduvusvahemikus kui tahes kõrget järku tuletised, siis funktsioonil f eksisteerivad ümbruses $\mathcal{U}$ kui tahes kõrget järku tuletised; seejuures (jällegi järelduse 1.6 põhjal) ümbruses $\mathcal{U}$ kehtib (2.2). □

Teoreem 2.2. *Funktsiooni arendus astmeritta on üheselt määratud.*

Täpsemalt, kui punkti a mingis ümbruses kehtib (2.1), *siis*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Tõestus. Kui punkti a mingis ümbruses kehtib võrdus (2.1), siis teoreemi 2.1 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$f^{(n)}(a) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,(a-a)^{k-n} = a_n n\,(n-1)\cdots 1 = a_n\, n!,$$

millest järeldub (2.3). □

[1] Öeldakse ka: funktsioon f on arendatav astmereaks.

Definitsioon 2.2. Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

nimetatakse funktsiooni f *Taylori reaks* punktis a. Arvusid (2.3) nimetatakse funktsiooni f *Taylori kordajateks* punktis a.

Teoreemist 2.2 järeldub, et

(a) funktsiooni f arendus astmeritta punktis a on funktsiooni f Taylori rida punktis a;

(b) kui astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ koonduvusraadius on suurem nullist, siis see astmerida on oma summa Taylori rida punktis a.

Definitsioon 2.3. Olgu funktsioon f määratud punkti 0 mingis ümbruses. Funktsiooni f Taylori rida punktis 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$$

nimetatakse funktsiooni f *Maclaurini reaks.*

Märkus 2.1. Leidub funktsioone, millel eksisteerivad mingi punkti teatavas ümbruses kui tahes kõrget järku tuletised, kuid mis pole arendatavad astmeritta selles punktis (s.t. selle punkti üheski ümbruses ei koondu funktsiooni Taylori rida selleks funktsiooniks). Klassikaline õpikunäide sellisest funktsioonist on

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{kui } x \neq 0; \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Saab näidata, et

(1) sellel funktsioonil f eksisteerivad igas punktis $x \in (-\infty, \infty)$ kui tahes kõrget järku tuletised;

(2) $f^n(0) = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Selle funktsiooni f Maclaurini rida on niisiis

$$0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0\,x^k.$$

See Maclaurini rida koondub arvuks 0 kogu arvteljel; järelikult mitte üheski punktis $x \neq 0$ ei koondu see Maclaurini rida funktsiooniks f (sest $f(x) \neq 0$, kui $x \neq 0$).

2.2. Taylori valem. Piisavaid tingimusi funktsiooni arendatavuseks astmeritta

Meenutame kursusest “Matemaatiline analüüs I” tuttavat *Taylori valemit.*

Teoreem 2.3 (Taylori valem)**.** *Eksisteerigu (ühe muutuja) funktsioonil f lõplik n järku tuletis punktis a. Siis punkti a teatavas ümbruses kehtib valem*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + r_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + r_n(x), \end{aligned} \tag{2.4}$$

kus

(a) $r_n(x) = o\big((x-a)^n\big)$ *protsessis* $x \to a$*;*

(b) *kui funktsioonil f eksisteerib punkti a mingis ümbruses lõplik $n+1$ järku tuletis, siis selles ümbruses*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}, \quad \textit{kus punkt } \xi_x \textit{ paikneb punktide } a \textit{ ja } x \textit{ vahel,}$$

ehk

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_x\,(x-a)\big)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}, \quad \textit{kus } 0<\theta_x<1;$$

(c) *kui funktsioonil f eksisteerib punkti a mingis ümbruses lõplik $n+1$ järku tuletis, siis selles ümbruses*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_x\,(x-a)\big)}{n!}\,(1-\theta_x)^n\,(x-a)^{n+1}, \quad \textit{kus } 0<\theta_x<1.$$

Valemit (2.4) nimetatakse funktsiooni f n järku *Taylori valemiks* punktis a. Polünoomi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

nimetatakse funktsiooni f n järku *Taylori polünoomiks* punktis a. Liidetavat $r_n(x)$ Taylori valemis (2.4) nimetatakse selle Taylori valemi *jääkliikmeks.* Jääkliikme $r_n(x)$ kujusid (a)–(c) nimetatakse vastavalt jääkliikme *Peano, Lagrange'i ja Cauchy kujudeks.*

Funktsiooni f Taylori valemit punktis 0

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + r_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + r_n(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

nimetatakse funktsiooni f *Maclaurini valemiks.* Maclaurini valemi jääkliikme Peano kuju on

$$r_n(x) = o(x^n) \quad \text{protsessis } x \to 0,$$

Lagrange'i kuju

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x\, x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \text{kus } 0 < \theta_x < 1,$$

ja Cauchy kuju

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x\, x)}{n!}\, (1-\theta_x)^n\, x^{n+1}, \quad \text{kus } 0 < \theta_x < 1.$$

Järeldus 2.4. *Eksisteerigu vahemikus $\mathcal{U}$ määratud funktsioonil f kui tahes kõrget järku tuletised punktis $a \in \mathcal{U}$. Siis funktsioon f Taylori rida punktis a koondub funktsiooniks f vahemikus $\mathcal{U}$ parajasti siis, kui funktsiooni f Talori valemi (punktis a) jääkliige koondub nulliks vahemikus $\mathcal{U}$.*

TÕESTUS. Tähistades sümboliga $r_n(x)$ funktsiooni f n järku Taylori valem jääkliikme punktis a,

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \quad &\text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral} \\
\iff \quad & \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad \text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral} \\
\iff \quad & \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral} \\
\iff \quad & \left| r_n(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral} \\
\iff \quad & r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral.}
\end{aligned}$$

□

Järeldus 2.5. *Eksisteerigu funktsioonil f kui tahes kõrget järku tuletised vahemikus $\mathcal{U}$.*

(a) *Leidugu reaalarvud $C, q > 0$ nii, et*

$$\left| f^{(n)}(\xi) \right| \leqslant C\, q^n \quad \textit{iga } n \in \mathbb{N} \textit{ ja iga } \xi \in \mathcal{U} \textit{ korral.} \tag{2.6}$$

Siis iga $a \in \mathcal{U}$ korral

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \quad \textit{iga } x \in \mathcal{U} \textit{ korral,} \tag{2.7}$$

s.t. funktsiooni f Taylori rida punktis a koondub funktsiooniks f vahemikus $\mathcal{U}$.

(b) *Leidugu reaalarv $C > 0$ nii, et*

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \leqslant C \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ ja iga } \xi \in \mathcal{U} \text{ korral.} \tag{2.8}$$

Siis iga $a \in \mathcal{U}$ korral kehtib (2.7), s.t. funktsiooni f Taylori rida punktis a koondub funktsiooniks f vahemikus $\mathcal{U}$.

Järelduse 2.5 tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgev lemma, mida me edaspidises kasutame ka funktsiooni $x \mapsto e^x$ arendamisel astmeritta.

Lemma 2.6. *Iga $c \in \mathbb{R}$ korral*

$$\frac{c^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Tõestus. Olgu $c \in \mathbb{R}$. Kuna koonduva rea üldliige koondub nulliks, siis piisab lause tõestuseks näidata, et arvrida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ koondub. Selleks kasutame d'Alembert'i tunnust, kusjuures üldisust kitsndamata võime eeldada, et $c \neq 0$ (sest $c = 0$ korral kõnealune rida koondub): kuna piirväärtus

$$\frac{\left|\dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{c^n}{n!}\right|} = \frac{|c|^{n+1}\, n!}{|c|^n\,(n+1)!} = \frac{|c|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1,$$

siis d'Alembert'i tunnuse põhjal arvrida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c^n}{n!}$ koondub (ja isegi absoluutselt), nagu soovitud. □

Järelduse 2.5 tõestus. (a). Järelduse 2.4 põhjal piisab väite tõestuseks näidata, et funktsiooni f Taylori valemi (punktis a) jääkliige koondub nulliks vahemikus $\mathcal{U}$. Tähistades funktsiooni f n järku Taylori valemi jääkliikme punktis a sümboliga $r_n(x)$, saame mis tahes $x \in \mathcal{U}$ korral (avaldades selle jääkliikme Lagrange'i kujul) lemma 2.6 põhjal

$$\left|r_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right|}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} \leqslant \frac{C\,q^{n+1}}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} = C\,\frac{\bigl(q\,|x-a|\bigr)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(siin punkt ξ_x paikneb punktide a ja x vahel); niisiis $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nagu soovitud.

(b). Väide järeldub vahetult väitest (a) sest tingimuse (2.8) kehtides kehtib (2.6), kus $q = 1$. □

2.3. Olulisemaid (astme)reaksarendusi

Loetleme mõned olulisemad Maclaurini ritta arendused:

$$(1)\qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+\cdots, \qquad x\in(-1,1);$$

$$(2)\qquad e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,x^k=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, \qquad x\in(-\infty,\infty);$$

$$(3)\qquad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots, \qquad x\in(-\infty,\infty);$$

$$(4)\qquad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots, \qquad x\in(-\infty,\infty);$$

$$(5)\qquad \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots, \qquad x\in(-1,1];$$

$$(6)\qquad \arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots, \qquad x\in[-1,1];$$

$$(7)\qquad (1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k, \qquad x\in\begin{cases}[-1,1], & \text{kui } \alpha>0;\\ (-1,1], & \text{kui } -1<\alpha<0;\\ (-1,1), & \text{kui } \alpha\leqslant -1.\end{cases}$$

Valem (1) (geomeetrilise rea summa!) on meile tuttav kursusest “Matemaatiline analüüs I”; valemit (7) me käesolevas kursuses ei tõesta. Selle peatüki lõpetuseks tõestame valemid (2)–(6).

VALEMI (2) TÕESTUSEKS piisab näidata, et selles valemis esinev astmerida on funktsiooni $f(x):=e^x$ Maclaurini rida, kusjuures selle funktsiooni Maclaurini valemi jääkliige

$$r_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \text{iga } x\in(-\infty,\infty) \text{ korral.}$$

Märgime, et

$$f^{(k)}(x)=e^x \quad \text{iga } k\in\{0\}\cup\mathbb{N} \text{ ja iga } x\in(-\infty,\infty) \text{ korral;}$$

seega $f^{(k)}(0)=e^0=1$ iga $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ korral; niisiis funktsiooni f Maclaurini rida on tõepoolest

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,x^k.$$

Funktsiooni f (n järku) Maclaurini valemi jääkliikme Lagrange'i kuju on

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta_x x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}=\frac{e^{\theta_x x}\,x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{kus } 0<\theta_x<1,$$

seega iga $x\in(-\infty,\infty)$ korral, arvestades, et

$$e^{\theta_x x}\leqslant e^{\theta_x |x|}\leqslant e^{|x|},$$

lemma 2.6 põhjal,

$$|r_n(x)| = \frac{e^{\theta_x x}}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \leqslant e^{|x|}\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

niisiis $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nagu soovitud. $\square$

Valemi (3) tõestus. Tähistame $f(x) := \sin x$. Märgime, et

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x \quad \text{jne.},$$

ehk, üldiselt, iga $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ korral

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{kui } n = 2k; \\ (-1)^k \cos x, & \text{kui } n = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in \{0\} \cup \mathbb{N};$$

seega

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{kui } n = 2k; \\ (-1)^k, & \text{kui } n = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in \{0\} \cup \mathbb{N};$$

niisiis funktsiooni f Maclaurini rida on tõepoolest

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}.$$

Valemi (3) kehtivus järeldub nüüd järeldusest 2.5, (b), sest iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $\xi \in (-\infty, \infty)$ korral

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \leqslant 1.$$

$\square$

Valemi (4) tõestus. Tähistame $f(x) := \cos x$. Märgime, et

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x \quad \text{jne.},$$

ehk, üldiselt, iga $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ korral

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & \text{kui } n = 2k; \\ (-1)^{k+1} \sin x, & \text{kui } n = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in \{0\} \cup \mathbb{N};$$

seega

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{kui } n = 2k; \\ 0, & \text{kui } n = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in \{0\} \cup \mathbb{N};$$

niisiis funktsiooni f Maclaurini rida on tõepoolest

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

Valemi (4) kehtivus järeldub nüüd järeldusest 2.5, (b), sest iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $\xi \in (-\infty, \infty)$ korral

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \leqslant 1.$$

$\square$

VALEMI (5) TÕESTUS. Kõigepealt paneme tähele, et vahemikus $z \in (-1,1)$

$$\big(\ln(1+z)\big)' = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k.$$

Kuna teoreemi 1.4 põhjal võib astmerida tema koonduvusvahemikus liikmeti integreerida, siis iga $x \in (-1,1)$ korral Newton–Leibnizi valemi põhjal

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(1+x) - \ln(1+0) = \ln(1+z)\Big|_0^x = \int_0^x \big(\ln(1+z)\big)'\,dz \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k z^k\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x z^k\,dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}\Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k.\end{aligned}$$

Paneme tähele, et viimase võrdusteahela paremal poolel olev astmerida hajub oma koonduvusvahemiku $(-1,1)$ vasakpoolses otspunktis $x=-1$, kuid koondub parempoolses otspunktis $x=1$; seega funktsiooni $x \mapsto \ln(1+x)$ ja astmerea summa pidevuse (vt. teoreemi 1.2) tõttu

$$\ln(1+1) = \lim_{x\to 1-}\ln(1+x) = \lim_{x\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,1^k.$$

Niisiis, valem (5) kehtib. □

VALEMI (6) TÕESTUS. Kõigepealt paneme tähele, et vahemikus $z \in (-1,1)$

$$(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

Kuna teoreemi 1.4 põhjal võib astmerida tema koonduvusvahemikus liikmeti integreerida, siis iga $x \in (-1,1)$ korral Newton–Leibnizi valemi põhjal

$$\begin{aligned}\arctan x &= \arctan x - \arctan 0 = \arctan z\Big|_0^x = \int_0^x (\arctan z)'\,dz \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k z^{2k}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x z^{2k}\,dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}.\end{aligned}$$

Paneme tähele, et viimase võrdusteahela paremal poolel olev astmerida koondub oma koonduvusvahemiku $(-1,1)$ otspunktides $x=\pm 1$; seega funktsiooni $x \mapsto \arctan x$ ja astmerea summa pidevuse (vt. teoreemi 1.2) tõttu

$$\arctan \pm 1 = \lim_{x\to\pm 1\mp}\arctan x = \lim_{x\to\pm 1\mp}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,(\pm 1)^{2k+1}.$$

Niisiis, valem (6) kehtib. □