Ülesanne. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε-δ-definitsioonist, tõestage, et

$$\lim_{x\to -6}\frac{x+7}{2x+13}=1.$$

Lahendus. Piirväärtuse all asuva funktsiooni määramispiirkond on

$$X=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{13}{2}\right\}.$$

Tarvis on veenduda, et kehtib lause

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in X\quad 0<|x-(-6)|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x+7}{2x+13}-1\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

Fikseerime $\varepsilon>0$. Meie eesmärk on leida reaalarv $\delta>0$ omadusega, et

$$\forall x\in X\quad 0<|x-(-6)|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x+7}{2x+13}-1\right|<\varepsilon. \tag{2}$$

Analüüsime implikatsiooniga tingimust olukorras, kus $x\in X$. Saame, et

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+7}{2x+13}-1\right|<\varepsilon\quad\Leftarrow\quad\left|\frac{x+7-2x-13}{2x+13}\right|<\varepsilon\quad\Leftarrow\quad\left|\frac{-(x+6)}{2x+13}\right|<\varepsilon\quad\Leftarrow\\ \Leftarrow\quad |x+6|\cdot\frac{1}{|2x+13|}<\varepsilon.\end{aligned} \tag{3}$$

Kui $\delta\leqslant\frac{1}{3}$, siis saame, et

$$\begin{aligned}0<|x-(-6)|<\delta\quad&\Rightarrow\quad |x+6|<\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{3}<x+6<\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\\ &\Rightarrow\quad -\frac{2}{3}<2x+12<\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{3}<2x+13<\frac{5}{3}\quad\Rightarrow\\ &\Rightarrow\quad\frac{1}{3}<|2x+13|\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{|2x+13|}<3.\end{aligned} \tag{4}$$

Eeldusel, et $\frac{1}{|2x+13|}<3$ saame, et

$$|x+6|\cdot\frac{1}{|2x+13|}<\varepsilon\quad\Leftarrow\quad |x+6|\cdot 3<\varepsilon\quad\Leftarrow\quad |x+6|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Olgu $\delta=\min\left\{\frac{1}{3},\frac{\varepsilon}{3}\right\}$. Siis $\delta\leqslant\frac{1}{3}$ ja $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Tõestame, et kehtib (2). Fikseerime $x\in X$. Saame, et

$$0<|x-(-6)|<\delta\quad\overset{(4)}{\Rightarrow}\quad\left\{\begin{array}{l}|x+6|<\frac{\varepsilon}{3},\\ \frac{1}{|2x+13|}<3\end{array}\right\}\quad\overset{(3),\,(5)}{\Rightarrow}\quad\left|\frac{x+7}{2x+13}-1\right|<\varepsilon.$$

Oleme näidanud, et kehtib (2). Niisiis on lause (1) tõestatud.

Märkus 1. Selle tõestuse läbitöötamisel on ülioluline jälgida ja järgida implikatsioonide suunda. Mõned implikatsioonid on tegelikult samaväärsused. Aga mitte kõik! Näiteks implikatsioon

$$\frac{1}{3} < 2x+13 < \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} < |2x+13|$$

teistpidi üldiselt ei kehti. (Kontranäiteks sobib valida x nii, et $2x+13 < -\frac{1}{3}$, näiteks $x = -7$.)

Eeldusel $\frac{1}{|2x+13|} < 3$ saadud implikatsioon

$$|x+6| \cdot \frac{1}{|2x+13|} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x+6| \cdot 3 < \varepsilon$$

ka teistpidi üldiselt ei kehti. (Nimelt võib juhtuda, et $|x+6| \cdot \frac{1}{|2x+13|}$ on arvule ε juba väga lähedal; kui nüüd võrratust $\frac{1}{|2x+13|} < 3$ arvestades vasakut poolt suurendada, võib leida aset olukord, kus $|x+6| \cdot 3 < \varepsilon$ on juba rikutud.)

Märkus 2. Arvu δ valik pole mingil juhul üheselt määratud! Kui selgub, et $\delta = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ sobib, siis sobib ka iga väiksem arv, näiteks $\delta = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{\varepsilon}{10}\right\}$ või $\delta = \frac{1}{2015}\min\left\{\frac{1}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$. Samuti pole otsest põhjust arvule δ seada kitsendus just $\delta \leqslant \frac{1}{3}$. Kui näiteks seada hoopis kitsendus $\delta \leqslant \frac{1}{100}$, saame, et

$$\begin{aligned}
0 < |x-(-6)| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |x+6| < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{100} < x+6 < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{50} < 2x+12 < \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad \frac{49}{50} < 2x+13 < \frac{51}{50} \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \frac{49}{50} < |2x+13| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|2x+13|} < \frac{50}{49}.
\end{aligned}$$

Tulemuse abil näeme, et sobivaks arvuks δ osutub $\min\left\{\frac{1}{100}, \frac{49\varepsilon}{50}\right\}$ (või sellest väiksem).

Küll aga implikatsioonide ahel (4) ei jää kehtima, kui arvule δ seatav kitsendus on liiga nõrk. Näiteks eeldusel $\delta \leqslant 1$ saame, et

$$\begin{aligned}
0 < |x-(-6)| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |x+6| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x+6 < 1 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad -2 < 2x+12 < 2 \quad \Rightarrow \quad -1 < 2x+13 < 3.
\end{aligned}$$

Tingimusest $-1 < 2x+13 < 3$ me ei saa järeldada võrratust, kus $|2x+13|$ oleks suurem kui mingi positiivne konstant (et hiljem saaksime öelda, et $\dfrac{1}{|2x+13|}$ oleks väiksem kui mingi positiivne konstant). Tõepoolest, kuna $2x+13 \in (-1,3)$, võib ta olla nullile kuitahes lähedal, seega võib $|2x+13|$ olla kuitahes väike positiivne arv.