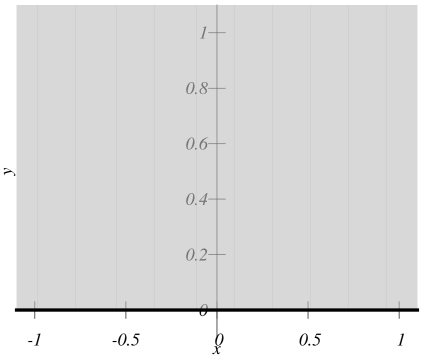
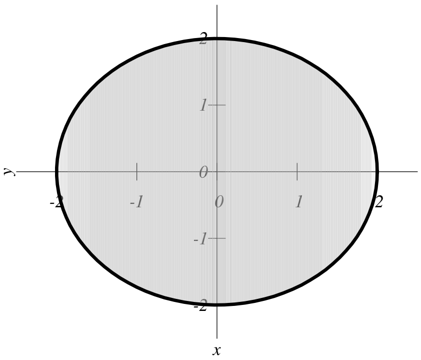
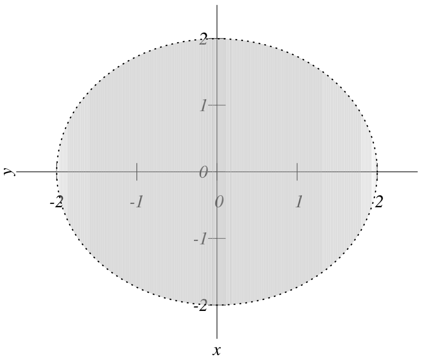
290. $D = \{(x,y)\colon\ y \geqslant 0\}$, $\partial D = \{(x,y)\colon\ y = 0\}$, D ei ole lahtine ($(0,0) \in D \setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



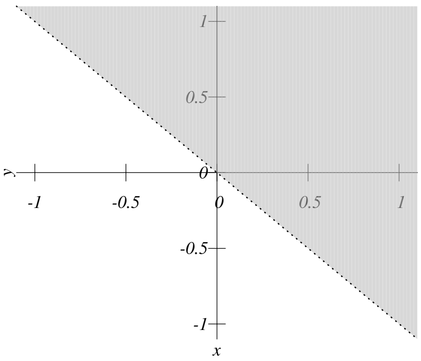
291. $D = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 \leqslant 4\}$, $\partial D = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 = 4\}$, D ei ole lahtine ($(2,0) \in D \setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



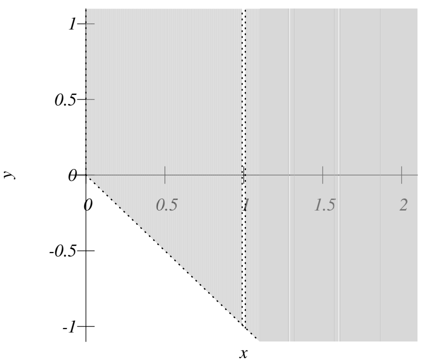
292. $D = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 < 4\}$, $\partial D = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 = 4\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(2,0) \in \partial D \setminus D$);



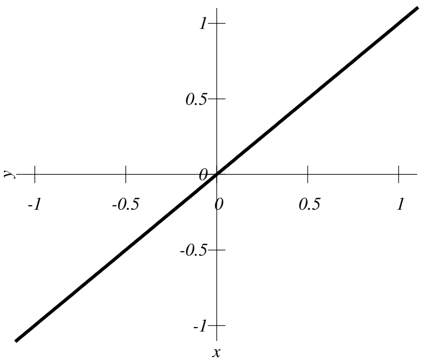
293. $D = \{(x,y)\colon\ x > -y\}$, $\partial D = \{(x,-x)\colon\ x \in \mathbb{R}\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0) \in \partial D \setminus D$);



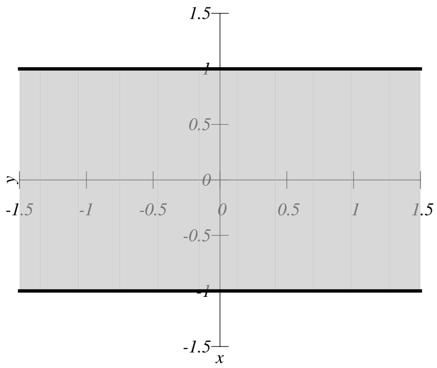
294. $D = \{(x, y)\colon\ x > -y,\ x > 0,\ x \neq 1\}$, $\partial D = \{(0, y)\colon\ y \geqslant 0\} \cup \{(1, y)\colon\ y \geqslant -1\} \cup \{(x, -x)\colon\ x \geqslant 0\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0) \in D \setminus D^{\circ}$);



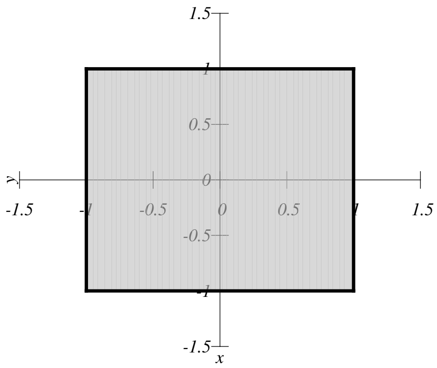
295. $D = \partial D = \{(x, x)\colon\ x \in \mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(0,0) \in D \setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



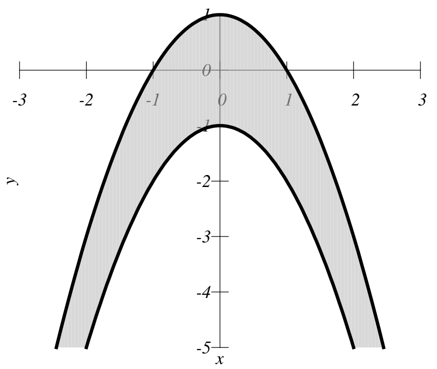
296. $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $\partial D = \{(x, -1)\colon\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1)\colon\ x \in \mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(0,1) \in D \setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



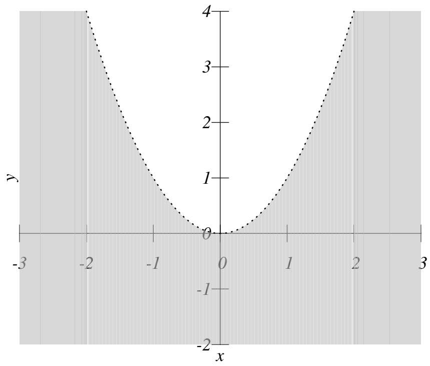
297. $D = [-1,1]^2$, $\partial D = \{(x,-1)\colon x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,1)\colon x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1,y)\colon y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,y)\colon y \in \mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(1,0) \in D \setminus D^\circ$), D on kinnine;



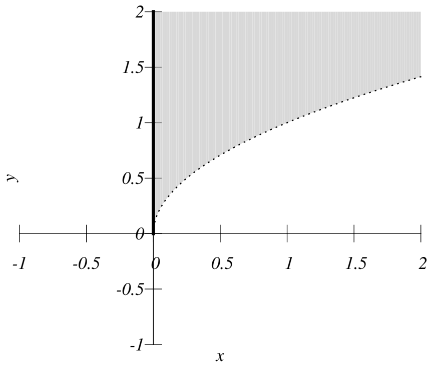
298. $D = \{(x,y)\colon -x^2 - 1 \leqslant y \leqslant -x^2 + 1\}$, $\partial D = \{(x,-x^2-1)\colon x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x^2+1)\colon x \in \mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(0,1) \in D \setminus D^\circ$), D on kinnine;



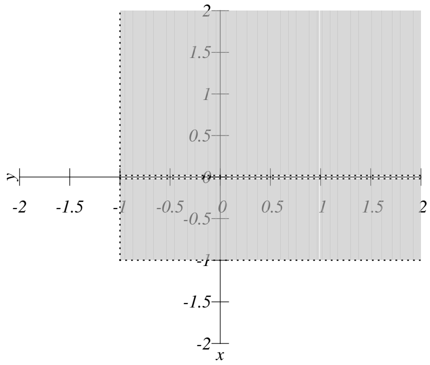
299. $D = \{(x,y)\colon x^2 > y\}$, $\partial D = \{(x,x^2)\colon x \in \mathbb{R}\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0) \in \partial D \setminus D$);



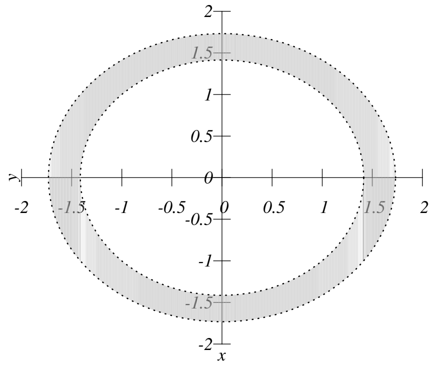
300. $D = \{(x, y)\colon\ y^2 > x \geqslant 0\}$, $\partial D = \{(y^2, y)\colon\ y \geqslant 0\} \cup \{(0, y)\colon\ y \geqslant 0\}$, D ei ole lahtine ($(0,1) \in D \setminus D^\circ$), D ei ole kinnine ($(0,0) \in \partial D \setminus D$);



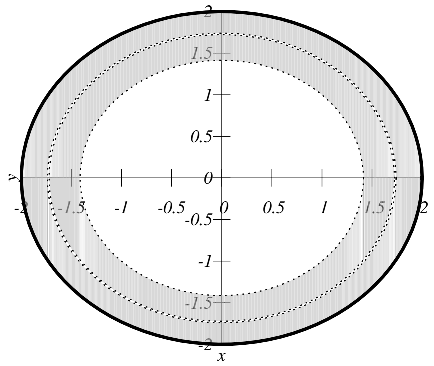
301. $D = (-1, \infty) \times ((-1, \infty) \setminus \{0\})$, $\partial D = \{(-1, y)\colon\ y \geqslant -1\} \cup \{(x, -1)\colon\ x \geqslant -1\} \cup \{(x, 0)\colon\ x \geqslant -1\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0) \in \partial D \setminus D$);



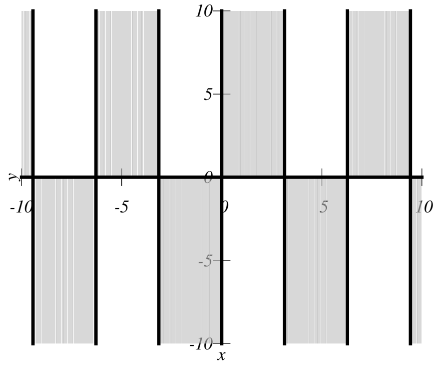
302. $D = \{(x, y)\colon 2 < x^2 + y^2 < 3\}$, $\partial D = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 = 2\} \cup \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 = 3\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(1,1) \in \partial D \setminus D$);



303. $D = \{(x,y)\colon 2 < x^2 + y^2 \leqslant 4, x^2 + y^2 \neq 3\}$, $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 2\} \cup \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 3\} \cup \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 4\}$, D ei ole lahtine ($(2,0) \in D \setminus D^\circ$), D ei ole kinnine ($(1,1) \in \partial D \setminus D$);

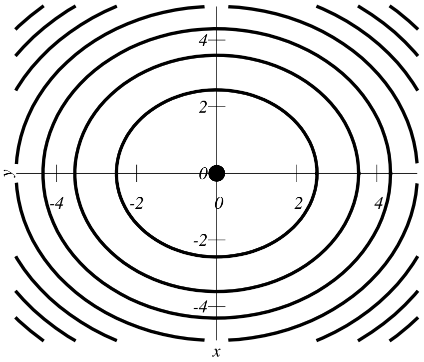


304. $D = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi] \times [0,\infty)\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi] \times (-\infty, 0]\right)$, $\partial D = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\pi\} \times \mathbb{R}\right) \cup \mathbb{R} \times \{0\}$, D ei ole lahtine ($(0,0) \in D \setminus D^\circ$), D on kinnine;

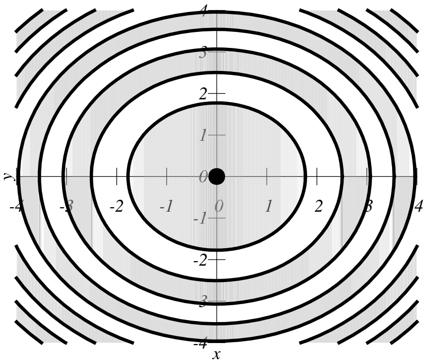


305. $D = \mathbb{R}^2$, $\partial D = \emptyset$, D on lahtine, D on kinnine;

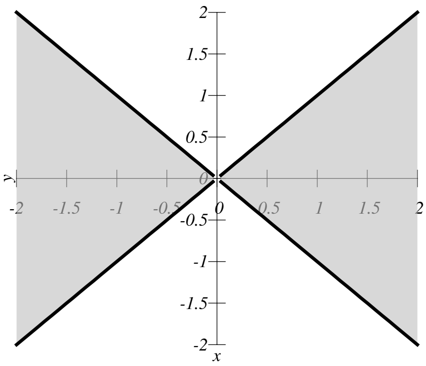
306. $D = \partial D = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 2n\pi\}$, D ei ole lahtine ($(0,0) \in D \setminus D^\circ$), D on kinnine;



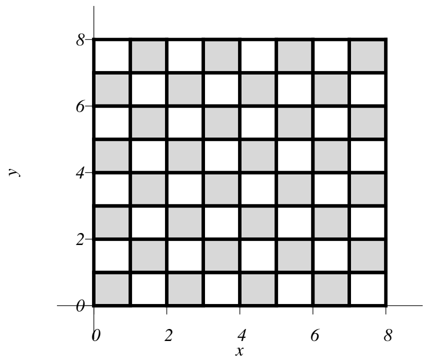
307. $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y)\colon 2n\pi \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (2n+1)\pi\}$, $\partial D = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = n\pi\}$, D ei ole lahtine ($(0,0) \in D \setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



308. $D = \{(x, y)\colon |y| \leqslant |x|,\ x \neq 0\}$, $\partial D = \{(x, y)\colon |y| = |x|\}$, D ei ole lahtine ($(1,1) \in D \setminus D^{\circ}$), D ei ole kinnine ($(0,0) \in \partial D \setminus D$);



309. $D = [0,8]^2 \cap \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} ([2m, 2m+1] \times [2n, 2n+1] \cup [2m+1, 2m+2] \times [2n+1, 2n+2])$, $\partial D = [0,8]^2 \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z})$, D ei ole lahtine ($(0,0) \in D \setminus D^{\circ}$), D on kinnine.



667. Statsionaarsed punktid määrame süsteemist $\begin{cases} -2x(3y^2+2x^3-3x)e^{-x^2-y^2} & = & 0, \\ -2y(3y^2+2x^3-3)e^{-x^2-y^2} & = & 0. \end{cases}$ Süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) \in \left\{(0,0),(0,\pm 1),\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(1,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$. Neis punktides saab f väärtused hulgast $\left\{0, 3e^{-1}, \pm\frac{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{4}}}{4}, 3e^{-\frac{4}{3}}\right\}$. Rajal $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=4\}$ omandab funktsioon väärtused $(2x^3+12-3x^2)e^4 \in [-16e^4, 16e^4]$ (ühe muutuja funktsiooni analüüs!). Neist väärtustest suurim on $16e^4$ (punktis $(2,0)$) ja vähim on $-16e^4$ (punktis $(-2,0)$).

668. Statsionaarsed punktid määrame süsteemist $\begin{cases} 3x^2-8x+2y & = & 0, \\ 2x-2y & = & 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) \in \{(0,0)\}$. (Punkt $(2,2)$ ei ole määramispiirkonnas.) Leiame hessiaanid: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, millest järeldub, et $H(0,0)$ on negatiivselt määratud, seega range lokaalne maksimum. Leiame, et $f(0,0)=0$.

Paneme tähele, et $f(5,0)=25$ ja $f(-5,0)=-225$, mistõttu punktis $(0,0)$ ei ole globaalne ekstreemum.

669. Statsionaarsed punktid määrame süsteemist $\begin{cases} -(e^y+1)\sin x = 0, \\ -e^y(y-\cos x+1) = 0 \end{cases}$ mis on samaväärne tingimusega $(x,y) \in \{(2k\pi,0)\colon\ k\in\mathbb{Z}\} \cup \{((2k-1)\pi,-2)\colon\ k\in\mathbb{Z}\}$ Leiame hessiaanid: $H(x,y) = \begin{pmatrix} -(e^y+1)\cos x & -e^y\sin x \\ -e^y\sin x & -e^y(y-\cos x+ \end{pmatrix}$ seega $H(2k\pi,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, negatiivselt määratud (range lok. maksimum) ning $H((2k-1)\pi,-2) = \begin{pmatrix} e^{-2}+1 & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix}$ on määramata (ekstreemumit pole).

670. Olgu $D = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, 30-x-y>0\}$. Ülesanne on leida funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$, kus $f(x,y) = x\cdot y\cdot(30-x-y)$, suurim väärtus.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 30\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon\overline{D}\to\mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} 30y-2xy-y^2 & = & 0, \\ 30x-2xy-x^2 & = & 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = (10,10)$. Seega mujal kui punktis $(10,10)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit hulgas D ei ole. Saame, et $f(10,10) = 1000$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $(10,10)$ on globaalne maksimum.

Lahendus 2. Aritmeetilise-geomeetrilise keskmise võrratus.

Lause. Olgu $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$, $D = (\mathbb{R}^+)^m$ ning $f\colon D \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v } D\text{-s,} \\ \forall \mathbf{X} \in D \text{ hessiaan } H(\mathbf{X}) \text{ on} \\ \text{positiivselt määratud,} \\ \mathbf{A} \in D \text{ on } f \text{ stats. punkt} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f\text{-l on punktis } \mathbf{A} \\ \qquad \text{range } \textbf{globaalne} \text{ miinimum.} \end{array}$$

Analoogiliselt,

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v } D\text{-s,} \\ \forall \mathbf{X} \in D \text{ hessiaan } H(\mathbf{X}) \text{ on} \\ \text{negatiivselt määratud,} \\ \mathbf{A} \in D \text{ on } f \text{ stats. punkt} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f\text{-l on punktis } \mathbf{A} \\ \qquad \text{range } \textbf{globaalne} \text{ maksimum.} \end{array}$$

Lause tõestuse idee. Vaatleme esimest implikatsiooni. Punktis **A** on range lokaalne miinimum. Olgu antud suvaline punkt $\mathbf{B} \in D$, kus $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$. Vaatleme ühe muutuja funktsiooni g vahemikus $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, mis on funktsiooni f lõige $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ sihis nii, et $\mathbf{A} \leftrightarrow 0$ ja $\mathbf{B} \leftrightarrow 1$. Funktsioonil g leidub lõplik **positiivne** teine tuletis kogu vahemikus $(0,1)$. Seega g' on rangelt kasvav lõigus $[0,1]$. Samas $g'(0) = 0$, mistõttu g' on positiivne kogu vahemikus $(0,1)$. Järelikult g on rangelt kasvav lõigus $[0,1]$, mistõttu $f(\mathbf{A}) = g(0) < g(1) = f(\mathbf{B})$.

Üldiselt saab lause tõestada suvalise kumera hulga D korral.

671. $D = (\mathbb{R}^+)^3$, $f(x,y,z) = x + y + z + \dfrac{81}{xyz}$. Statsionaarse punkti tingimus $\begin{cases} 1 - \dfrac{81}{x^2yz} = 0, \\ 1 - \dfrac{81}{xy^2z} = 0, \\ 1 - \dfrac{81}{xyz^2} = 0, \end{cases}$ on samaväärne nõudega $(x,y,z) = (3,3,3)$. Hessiaan $H(x,y,z) = \dfrac{xyz}{81} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^2} & \dfrac{1}{xy} & \dfrac{1}{xz} \\ \dfrac{1}{xy} & \dfrac{2}{y^2} & \dfrac{1}{yz} \\ \dfrac{1}{xz} & \dfrac{1}{yz} & \dfrac{2}{z^2} \end{pmatrix}$ on positiivselt määratud iga $(x,y,z) \in D$ korral. Lause põhjal on punktis $(3,3,3)$ funktsioonil f globaalne miinimum $f(3,3,3) = 12$.

Lahendus 2. Aritmeetilise-geomeetrilise keskmise võrratus.

672. Olgu fikseeritud $V > 0$, $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $f(x,y) = 2xy + 2x \cdot \dfrac{V}{xy} + 2y \cdot \dfrac{V}{xy} = 2xy + 2V \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$. Tarvis on leida funktsiooni f vähim väärtus hulgas D. Statsionaarse punkti tingimus $\begin{cases} 2y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ 2x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$ on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$.

Tähistame $D_1 = \{(x,y)\colon x > 0, y > 0, x + y < 2\sqrt[3]{2V}\}$. Paneme tähele, et $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) \in D_1$. Lahtises kumeras hulgas D_1 on lause põhjal punktis $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus $f\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 6\sqrt[3]{V^2}$, sest hessiaan $H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \dfrac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$ on positiivselt määratud iga $(x,y) \in D$ korral. Tõepoolest, kuna $xy \leqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 < \sqrt[3]{4V^2}$, siis $\dfrac{16V^2}{x^3y^3} - 4 > 0$.

Kui aga $(x,y) \in D \setminus D_1$, siis $x+y \geqslant 2\sqrt[3]{2V}$, mistõttu $f(x,y) = 2xy + \dfrac{2V(x+y)}{xy} \geqslant 2xy + \dfrac{4V\sqrt[3]{2V}}{xy} \geqslant 2\sqrt{8V\sqrt[3]{2V}} = 2^{\frac{8}{3}}V^{\frac{2}{3}} > 6\sqrt[3]{V^2}$, kuna $2^8 = 256 > 216 = 6^3$. Kokkuvõttes on punktis $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus hulgas D.

673. Olgu fikseeritud $V > 0$, $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $f(x,y) = xy + 2x\cdot\dfrac{V}{xy} + 2y\cdot\dfrac{V}{xy} = xy + 2V\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$. Tarvis on leida funktsiooni f vähim väärtus hulgas D. Statsionaarse punkti tingimus $\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} &= 0, \\ x - \dfrac{2V}{y^2} &= 0 \end{cases}$ on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$.

Tähistame $D_1 = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, x+y<2\sqrt[3]{4V}\}$. Paneme tähele, et $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) \in D_1$. Lahtises kumeras hulgas D_1 on lause põhjal punktis $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus $f\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 3\sqrt[3]{4V^2}$, sest hessiaan $H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$ on positiivselt määratud iga $(x,y) \in D$ korral. Tõepoolest, kuna $xy \leqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 < \sqrt[3]{16V^2}$, siis $\dfrac{16V^2}{x^3y^3} - 1 > 0$.

Kui aga $(x,y) \in D \setminus D_1$, siis $x+y \geqslant 2\sqrt[3]{4V}$, mistõttu $f(x,y) = xy + \dfrac{2V(x+y)}{xy} \geqslant xy + \dfrac{4V\sqrt[3]{4V}}{xy} \geqslant 2\sqrt{4V\sqrt[3]{4V}} = 2^{\frac{7}{3}}V^{\frac{2}{3}} > 3\sqrt[3]{4V^2}$, kuna $2^7 = 128 > 108 = 3^3\cdot 4$. Kokkuvõttes on punktis $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus hulgas D.

674. Olgu fikseeritud R. Risttahuka servapikkused olgu x, y ja z, siis $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$. Ülesanne on leida funktsiooni $f(x,y) = x\cdot y\cdot\sqrt{4R^2-x^2-y^2}$ suurim väärtus hulgas $D = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, x^2+y^2 < 4R^2\}$.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 4R^2\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^{\circ} = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \dfrac{4xR^2-2xy^2-x^3}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} &= 0, \\ \dfrac{4yR^2-2x^2y-y^3}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} &= 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}, \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}, \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}, \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{8R^3}{3\sqrt{3}}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}, \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$ on globaalne maksimum.

675. Olgu kolmnurga alus a ja tipunurk α. Ülejäänud kaks külge olgu b ja c, mille vastasnurgad olgu β ja γ. Kolmnurga pindala on $\dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2} = \dfrac{a^2}{2\sin\alpha}\cdot\sin\beta\sin\gamma$. See on ühe muutuja ekstreemumülesanne funktsiooni $f(x) = \dfrac{a^2}{2\sin\alpha}\cdot\sin x\sin(\pi-\alpha-x)$ jaoks vahemikus $(0, \pi-\alpha)$. Globaalne maksimum on $\dfrac{a^2}{2\sin\alpha}\left(\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)^2$ punktis $x = \dfrac{\pi-\alpha}{2}$.

676. Olgu fikseeritud p (pool ümbermõõtu). Ülesanne on leida funktsiooni $f(x,y) = \sqrt{p\cdot(p-x)\cdot(p-y)\cdot(x+y-p)}$ suurim väärtus hulgas $D = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, x+y<2p\}$.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 2p\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \dfrac{p(p-y)(2p-2x-y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}} &= 0, \\ \dfrac{p(p-x)(2p-x-2y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}} &= 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right)$ funktsioonil f lokaalne ekstreemumit ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right) = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right)$ on globaalne maksimum.

677. Ühe muutuja ekstreemumülesanne, $f(x) = \pi x^2(p-x)$ lõigus $[0,p]$. Globaalne maksimum on punktis $x = \dfrac{2p}{3}$.

678. Olgu kolmnurga küljed a, b ja c, kusjuures külg a olgu pöörlemisteljeks. Pöördkeha koosneb kahest põhjati kokkupandud koonusest. Koonuse põhja raadiuse ruut on $b^2(\sin\gamma)^2 = b^2 - b^2(\cos\gamma)^2 = b^2 - \dfrac{(c^2-a^2-b^2)^2}{4a^2}$. Sealjuures $a+b+c = 2p$. Koonuste koguruumala on $f(b) = \dfrac{\pi}{3}\cdot\left(b^2 - \dfrac{((2p-b-a)^2-a^2-b^2)^2}{4a^2}\right)\cdot a$. See on ühe muutuja ekstreemumülesanne vahemikus $(0, 2p-a)$. Globaalne maksimum on punktis $b = \dfrac{2p-a}{2}$.

679. Mõeldud on, et risttahuka servad on paralleelsed koordinaattelgedega. Olgu fikseeritud R. Risttahuka servapikkused olgu x, y ja z, siis $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 4$. Ülesanne on leida funktsiooni $f(x,y) = x\cdot y\cdot c\sqrt{4 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ suurim väärtus hulgas $D = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 4\}$.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 4\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \dfrac{cy\cdot(4a^2b^2-2b^2x^2-a^2y^2)}{ab\sqrt{4a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2}} &= 0, \\ \dfrac{cx\cdot(4a^2b^2-2a^2y^2-b^2x^2)}{ab\sqrt{4a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2}} &= 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}, \dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}, \dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}, \dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}, \dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)$ on globaalne maksimum.

680. Olgu $D = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, \pi-x-y>0\}$. Ülesanne on leida funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $f(x,y) = \sin x\sin y\sin(\pi-x-y)$, suurim väärtus.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant \pi\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \cos x\sin(2x+y) &= 0, \\ \sin x\sin(x+2y) &= 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit hulgas D ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

on globaalne maksimum. Otsitav kolmnurk on võrdkülgne.

Lahendus 2. Jenseni võrratus.

681. Olgu $D = \{(x,y)\colon\ x > 0, y > 0, \pi - x - y > 0\}$. Ülesanne on leida funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(\pi - x - y)$, suurim väärtus.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant \pi\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \cos x + \cos(x+y) &= 0, \\ \cos y + \cos(x+y) &= 0. \end{cases}$ Süsteemist järeldub, et $\cos x = -\cos(x+y) = \cos y$, millest $x, y \in (0,\pi)$ tõttu $x = y$. Niisiis $\cos x = -\cos 2x$, millest järeldub, et $2(\cos x)^2 + \cos x - 1 = 0$. Niisiis $\cos x = \dfrac{1}{2}$, mistõttu $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Kokkuvõttes leiame, et süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit hulgas D ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Rajal ∂D on f avaldises üks liidetav null, järele jääb $f(x,y) = \sin x + \sin y$ või $f(x,y) = 2\sin x$ või $f(x,y) = 2\sin y$. Et ükski neist väärtustest ei saa ületada arvu $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 2$, on punktis $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ globaalne maksimum. Otsitav kolmnurk on võrdkülgne.

Lahendus 2. Jenseni võrratus.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$, olgu D sidus.

$$D \text{ on ühelisidus } \overset{\text{def}}{\iff} \begin{array}{l} \text{iga pideva lihtsa kinnise joone } \gamma(I) \text{ korral} \\ \gamma(I) \text{ poolt piiratud hulk } E \text{ sisaldub hulgas } D. \end{array}$$

Lause. Olgu $\mathcal{G}$ lahtine ja ühelisidus. Olgu $T\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}^2$, kus $T(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$. Olgu Λ lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}$. Olgu $\partial\Delta = \Lambda$. Olgu $D = T(\Delta)$.

$$\left.\begin{array}{r} T \text{ on regulaarne,} \\ f \text{ on integreeruv } D\text{-s,} \\ \xi_{vu} \text{ ja } \eta_{vu} \text{ pidevad } \mathcal{G}\text{-s} \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\xi(u,v), \eta(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Lause. Olgu $D \subset X \subset \mathbb{R}^2$, D mõõtuv ja tõkestatud, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in D\ \ f(x,y) \leqslant g(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{r} E = \big\{(x,y,z)\colon (x,y) \in D, z \in [f(x,y), g(x,y)]\big\}, \\ f \text{ ja } g \text{ on int-vad hulgas } D \end{array}\right\} \implies V(E) = \iint_D (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Olgu $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv ühelisidus hulk. Olgu antud funktsioonid $x, y, z\colon \Delta \to \mathbb{R}$.
Olgu $\Omega\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$, kus $\Omega(t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ iga $(u,v) \in \Delta$ korral.
Vektorfunktsiooni Ω väärtuste hulka $\Omega(\Delta) = \{\Omega(u,v)\colon (u,v) \in \Delta\}$ nimetatakse *pinnaks* ruumis $\mathbb{R}^3$. Kui on antud funktsioonid x, y ja z, öeldakse mõnikord, et pind on antud *parameetriliselt.*

Olgu $\mathbf{U} = (u,v) \in \Delta$. Tähistame

$$\mathbf{n}(\mathbf{U}) = (A(\mathbf{U}), B(\mathbf{U}), C(\mathbf{U})) = \left(\begin{vmatrix} y_u(\mathbf{U}) & z_u(\mathbf{U}) \\ y_v(\mathbf{U}) & z_v(\mathbf{U}) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u(\mathbf{U}) & x_u(\mathbf{U}) \\ z_v(\mathbf{U}) & x_v(\mathbf{U}) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u(\mathbf{U}) & y_u(\mathbf{U}) \\ x_v(\mathbf{U}) & y_v(\mathbf{U}) \end{vmatrix} \right) = \big(x_u(\mathbf{U}), y_u(\mathbf{U}), z_u(\mathbf{U})\big) \times \big(x_v(\mathbf{U}), y_v(\mathbf{U}), z_v(\mathbf{U})\big).$$

$$\Omega(\Delta) \text{ on } \textit{sile} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} x_u,\ x_v,\ y_u,\ y_v,\ z_u,\ z_v \text{ pidevad hulgas } \Delta, \\ \forall \mathbf{U} \in \Delta\ \ (A(\mathbf{U}), B(\mathbf{U}), C(\mathbf{U})) \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Lause. Olgu $\Omega(\Delta)$ sile pind. Olgu $\mathbf{U}_0 \in \Delta$. Tähistame $\pi = \{\mathbf{X}\colon \langle \mathbf{n}(\mathbf{U}_0), \mathbf{X} - \Omega(\mathbf{U}_0)\rangle = 0\}$. Kehtib koondumine $\displaystyle\lim_{\mathbf{U}\to\mathbf{U}_0} \frac{d(\Omega(\mathbf{U}), \pi)}{\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_0\|} = 0$.

Lause näitab, et siledal pinnal on igas tema punktis $\Omega(\mathbf{U})$ puutujatasand $\pi_{\mathbf{U}}$, mille normaalvektor on $\mathbf{n}(\mathbf{U})$.

Olgu Δ kinnine mõõtuv ühelisidus hulk. Olgu $\Omega(\Delta)$ sile pind.

$T = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ on hulga Δ *alajaotus* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n, \\ \forall k = 1, \ldots, n \;\; \Delta_k \text{ on kinnine ja mõõtuv,} \\ \forall k, l = 1, \ldots, n \;\; k \neq l \Rightarrow \Delta_k^\circ \cap \Delta_l^\circ = \emptyset. \end{cases}$

Tähistame $\lambda(T) = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \operatorname{diam}(\Delta_k)$.

Iga tasandi $\pi = \{(x,y,z)\colon Ax + By + Cz + D = 0\}$ korral tähistame tähisega $p_\pi(\mathbf{U})$ punkti $\Omega(\mathbf{U})$ projektsiooni tasandile π. Arvutuslikult: $p_\pi(\mathbf{U}) = \Omega(\mathbf{U}) - \dfrac{\pi(\Omega(\mathbf{U}))}{\|\mathbf{n}_\pi\|} \cdot \mathbf{n}_\pi$, kus $\mathbf{n}_\pi = (A,B,C)$ ja $\pi(x,y,z) = Ax + By + Cz + D$.

Hulga Δ iga alajaotuse T korral valime iga $k = 1, \ldots, n$ jaoks $\mathbf{U}_k \in \Delta_k$ ning tähistame $\Omega_k = p_{\pi_{\mathbf{U}_k}}(\Delta_k)$. Hulgad Ω_k on mõõtuvad.

$S(\Omega(\Delta)) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(\Omega_k)$ (pinnatüki $\Omega(\Delta)$ *pindala*).

Lause. $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

874. Valime $\Delta = \left\{(u,v)\colon v \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right],\ u \in [0, 2\cos v]\right\}$,
$T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, siis $T(\Delta) = D$. Leiame, et $J(u,v) = u$. Saame, et
$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta u^2 \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos v} u^2 \,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \dfrac{32}{9}$.

Alternatiiv: Valime $\Delta = [0,1] \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,
$T(u,v) = (2u(\cos v)^2, 2u\cos v \sin v)$, siis $T(\Delta) = D$. Leiame, et $J(u,v) = 4u(\cos v)^2$. Saame, et
$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta 4u(\cos v)^2 \sqrt{u^2 \cdot 4(\cos v)^4 + u^2 \cdot 4(\cos v)^2(\sin v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8 \iint_\Delta u^2 (\cos v)^3 \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$
$8\int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u^2(\cos v)^3 \,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \dfrac{32}{9}$.

Märkus. Järgnevates ülesannetes saab ülaltoodud alternatiivse lahenduse esitada sageli. Sellise lahenduse eelis on, et Δ on lihtsa ehitusega hulk (ristkülik). Puuduseks on aga vajadus arvutada keerukam jakobiaan. Allpool pole kõnealust alternatiivi enam eraldi välja toodud.

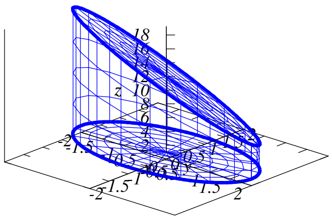
878. Valime $\Delta = \left\{(u,v)\colon v \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \arctan 2\right],\ u \in [4\cos v, 8\cos v]\right\}$, $T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, siis $T(\Delta) = D$. Leiame, et $J(u,v) = u$. Saame, et $\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta u^2 \sin v \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \left(\int_{4\cos v}^{8\cos v} u^2 \sin v \,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \dfrac{196}{25}$.

896. On antud $D = \{(x,y)\colon (x^2+y^2)^2 = 2a^2xy\}$.
Valime $\Delta = \left\{(u,v)\colon v \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right],\ u \in \left[0, |a|\sqrt{\sin 2v}\right]\right\}$,
$T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, siis $T(\Delta = D$. Leiame, et $J(u,v) = u$. Saame, et
$S(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2v}} u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = 2a^2$.

898. On antud $D = \{(x,y)\colon (x^2+y^2)^2 \leqslant 2ax^3\}$.
Valime $\Delta = \left\{(u,v)\colon v \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right],\ u \in \left[0, 2a(\cos v)^3\right]\right\}$,
$T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, siis $T(\Delta) = D$. Leiame, et $J(u,v) = u$. Saame, et
$S(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a(\cos v)^3} u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \dfrac{5\pi a^2}{8}$.

904. Olgu $D = \{(x,y)\colon x \in [0,1],\ y \in [0, 1-x]\}$ ning $f(x,y) = 1-x-y$. Siis $E = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ z \in [0, f(x,y)]\}$.
Saame, et $V(E) = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}$.

912. Olgu $D = \left\{(x,y)\colon \frac{x^2}{2^2} + y^2 \leqslant 1\right\}$, $f(x,y) = 1$, $g(x,y) = 12-3x-4y$. Siis $E = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ z \in [f(x,y), g(x,y)]\}$. Saame, et $V(E) = \iint_D (g(x,y)-f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (11-3x-4y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (11-3\cdot 2\cos v - 4\sin v)\cdot 2u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = 22\pi$.

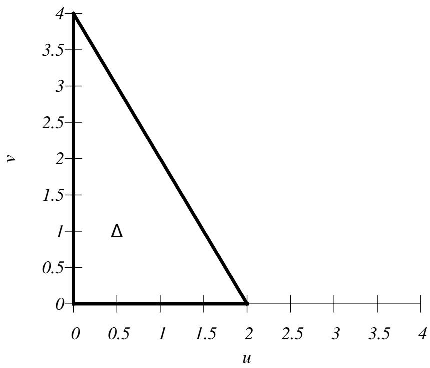


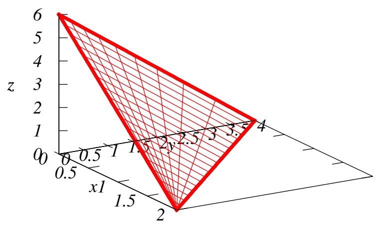
916. Olgu $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 3\}$, $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2+3}$, $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+3}$.
Siis $E = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ z \in [f(x,y), g(x,y)]\}$. Olgu $\Delta = [0,\sqrt{3}] \times [0,2\pi]$, $T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, siis $T(\Delta) = D$ ja $J(u,v) = u$. Saame, et $V(E) = \iint_D (g(x,y) - f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \sqrt{x^2+y^2+3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_\Delta u\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{2\pi} u\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = 4\pi\left(2\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$.

917. Olgu $D = \left\{(x,y)\colon |x+y| \leqslant \frac{\pi}{2},\ |x-y| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = \cos x\cos y$.
Siis $E = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ z \in [f(x,y), g(x,y)]\}$. Saame, et $V(E) = \iint_D (g(x,y)-f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \cos x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{|x|-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-|x|} \cos x\cos y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \pi$.

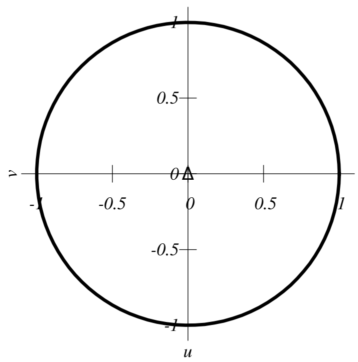
Alternatiiv: olgu $\Delta = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]^2$, $T(u,v) = (u+v, u-v)$, siis $T(\Delta) = D$ ja $J(u,v) = -2$. Saame, et $V(E) = \iint_D \cos x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta 2\cos(u+v)\cos(u-v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2u + \cos 2v)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \pi$.

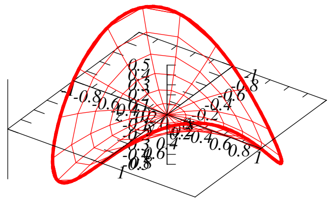
919. Olgu $\Delta = \{(u,v)\colon u \in [0,2],\ v \in [0,-2u+4]\}$ ning $\Omega(u,v) = \left(u, v, 6-3u-\frac{3}{2}v\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = \left(3, \frac{3}{2}, 1\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \frac{7}{2}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{7}{2}\cdot\mu(\Delta) = 14$.



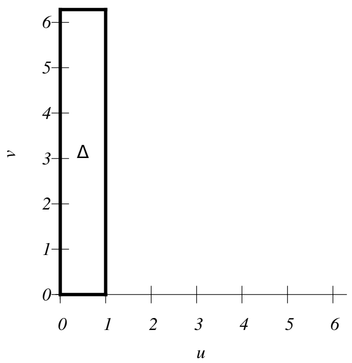


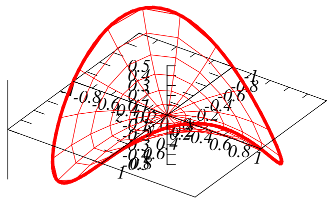
920. Olgu $\Delta = \{(u,v)\colon u^2+v^2 \leqslant 1\}$ ning $\Omega(u,v) = (u,v,uv)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = (-v,-u,1)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \sqrt{1+u^2+v^2}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$.



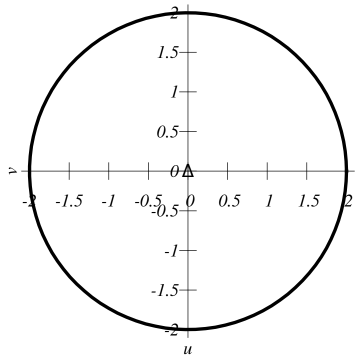


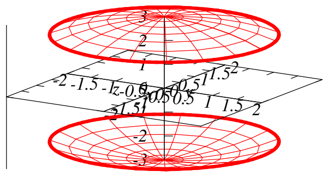
Alternatiiv. Olgu $\Delta = [0,1]\times[0,2\pi]$ ning $\Omega(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, u^2\sin v\cos v\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = (-u^2\sin v, -u^2\cos v, u)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = u\sqrt{1+u^2}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$.



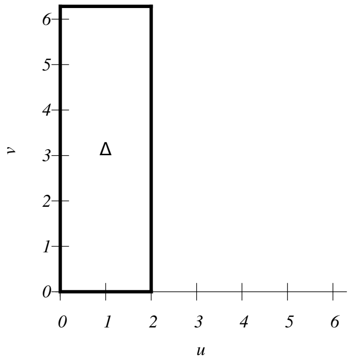


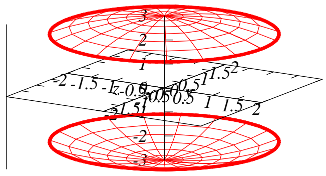
921. Antud pind koosneb kahest võrdpindsest tükist. Olgu $\Delta = \{(u,v)\colon u^2+v^2 \leqslant b^2\}$ ning $\Omega(u,v) = \left(u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2}\right)$. Leiame, et $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \left(\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 1\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = a\int_0^{2\pi}\left(\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = 2a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$. Seega otsitav pindala on $4a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$.



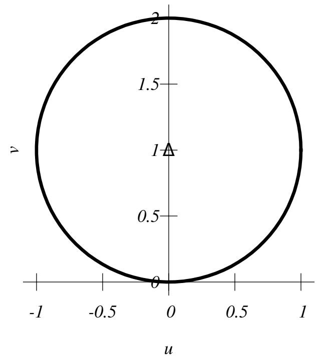


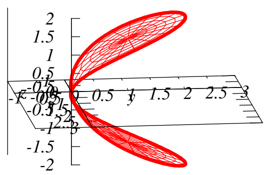
Alternatiiv. Olgu $\Delta = [0, b] \times [0, 2\pi]$ ning $\Omega(u, v) = \left(u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2 - u^2}\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u, v) = \left(\dfrac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}, \dfrac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}, u\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u, v)\| = \dfrac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u, v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^b \dfrac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = 2a\pi\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right)$. Seega otsitav pindala on $4a\pi\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right)$.





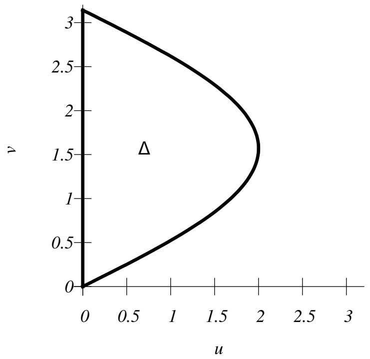
922. Antud pind koosneb kahest võrdpindsest tükist. Olgu $\Delta = \{(u, v)\colon\ u^2 + (v-1)^2 \leqslant 1\}$ ning $\Omega(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u, v) = \left(-\dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u, v)\| = \sqrt{2}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u, v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_\Delta \sqrt{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \pi\sqrt{2}$. Seega otsitav pindala on $2\pi\sqrt{2}$.

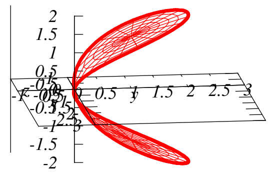




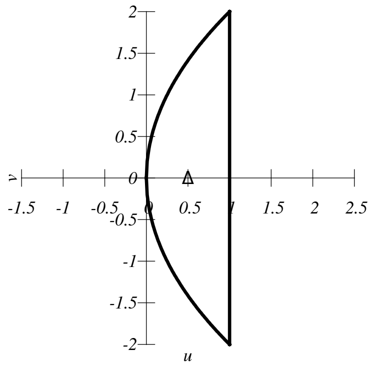
Alternatiiv. Olgu $\Delta = \{(u, v)\colon\ v \in [0, \pi],\ u \in [0, 2\sin v]\}$ ning $\Omega(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u, v) = (-u\cos v, -u\sin v, u)$ ning $\|\mathbf{n}(u, v)\| = u\sqrt{2}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u, v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\sin v} u\sqrt{2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v =$

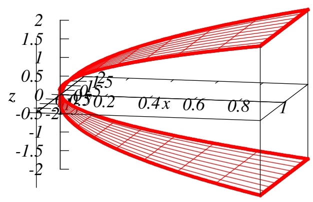
$\pi\sqrt{2}$. Seega otsitav pindala on $2\pi\sqrt{2}$.



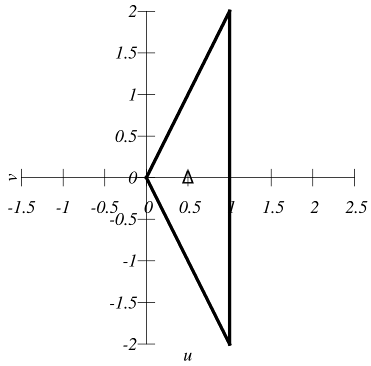


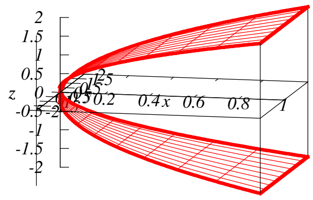
923. Antud pind koosneb kahest võrdpindsest tükist. Olgu $\Delta = \{(u,v)\colon\ u \in [0,1],\ v \in [-2\sqrt{u}, 2\sqrt{u}]\}$ ning $\Omega(u,v) = (u, v, 2\sqrt{u})$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{u}}, 0, 1\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \sqrt{\frac{u+1}{u}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{u}}^{2\sqrt{u}} \sqrt{\frac{u+1}{u}}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = 4\int_0^1 \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{8}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$. Seega otsitav pindala on $\frac{16}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$.



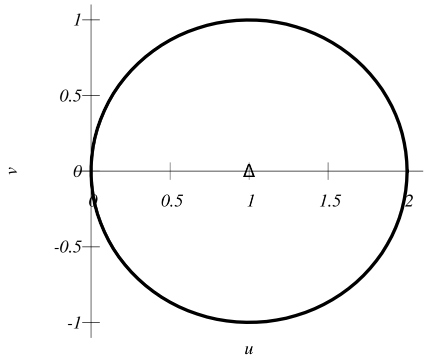


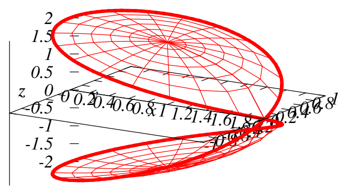
Alternatiiv. Olgu $\Delta = \{(u,v)\colon\ u \in [0,1],\ v \in [-2u, 2u]\}$ ning $\Omega(u,v) = (u^2, v, 2u)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = (-2, 0, 2u)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = 2\sqrt{1+u^2}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\int_0^1 \left(\int_{-2u}^{2u} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = 8\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{8}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$. Seega otsitav pindala on $\frac{16}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$.



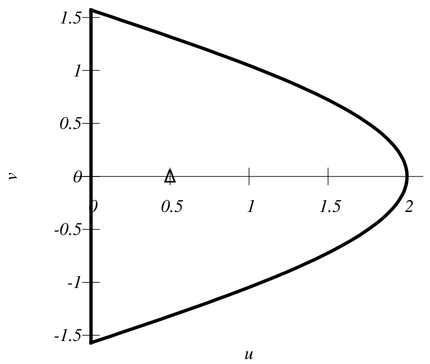


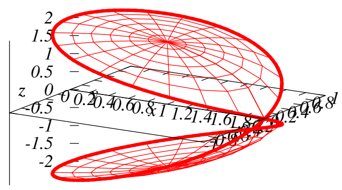
924. Antud pind koosneb kahest võrdpindsest tükist. Olgu $\Delta = \left\{(u,v)\colon\ u^2+v^2 \leqslant au\right\}$ ning $\Omega(u,v) = \left(u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2}\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = \left(\dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \dfrac{v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 1\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\varphi} \dfrac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}\right)\mathrm{d}\varphi = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a-a|\sin v|)\mathrm{d}v = a^2(\pi - 2)$. Seega otsitav pindala on $2a^2(\pi-2)$.





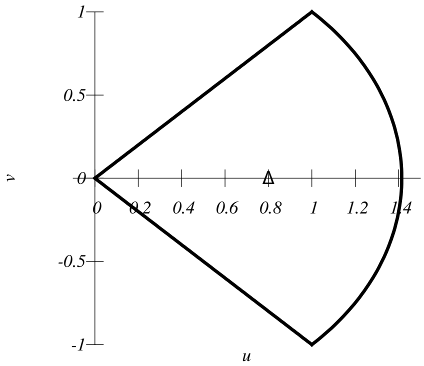
Alternatiiv. Olgu $\Delta = \left\{(u,v)\colon\ v \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right],\ u \in [0, a\cos v]\right\}$ ning $\Omega(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2-u^2}\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = \left(\dfrac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}, \dfrac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}, u\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \dfrac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos v} \dfrac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}}\right)\mathrm{d}v = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a-a|\sin v|)\mathrm{d}v = a^2(\pi-2)$. Seega otsitav pindala on $2a^2(\pi-2)$.

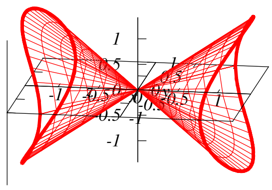




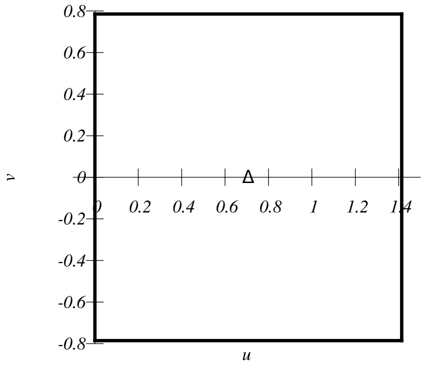
925. Antud pind koosneb neljast võrdpindsest tükist. Olgu $\Delta = \left\{(u,v)\colon\ u^2+v^2 \leqslant 2, u \geqslant 0, |v| \leqslant u\right\}$

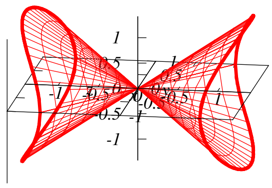
ning $\Omega(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}, 1\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{u^2-v^2}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2\cos\varphi\sqrt{2}}{r\sqrt{1-2(\sin\varphi)^2}}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} \pi r\,\mathrm{d}r = \pi$. Seega otsitav pindala on 4π.



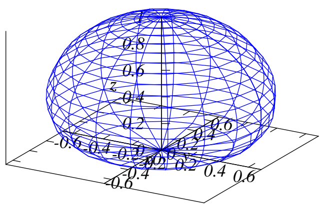


Olgu $\Delta = \left\{(u,v)\colon u \in \left[0, \sqrt{2}\right], v \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$ ning $\Omega(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, u\sqrt{\cos 2v}\right)$. Leiame, et $\mathbf{n}(u,v) = \frac{u}{\sqrt{\cos 2v}}\left(-\cos v, \sin v, \sqrt{\cos 2v}\right)$ ning $\|\mathbf{n}(u,v)\| = \frac{u\sqrt{2}\cos v}{\sqrt{\cos 2v}}$. Saame, et $S(\Omega(\Delta)) = \iint_\Delta \|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{u\sqrt{2}\cos v}{\sqrt{1-2(\sin v)^2}}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{2}} \pi u\,\mathrm{d}u = \pi$. Seega otsitav pindala on 4π.

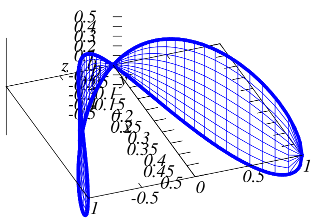




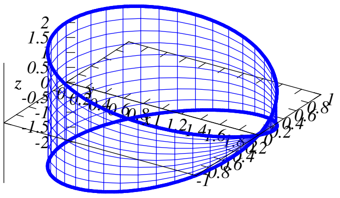
980. Saame, et $E = \left\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \in \left[0, \sqrt{a^3 z}\right]\right\}$. Olgu $T(u,v,w) = (u\cos v\sin w, u\sin v\sin w, u\cos w)$, siis $T(\Theta) = E$, kus $\Theta = \left\{(u,v,w)\colon v \in [0,2\pi], w \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], u \in \left[0, a(\cos w)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}$. Leiame, et $J(u,v,w) = -u^2\sin w$. Seega $\iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Theta u^2\sin w\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\sqrt[3]{\cos w}} u^2\sin w\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}w = \frac{\pi a^3}{3}$.



1049. Tingimus $2x-4x^2 \geqslant 0$ on samaväärne tingimusega $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Seega saame, et $L = \{(x,y) : y^2 = 2x\} = \left\{\left(\frac{t^2}{2}, t\right) : t \in [-1,1]\right\}$. Otsitav pindala on $S = \int_L \sqrt{2x-4x^2} - \left(-\sqrt{2x-4x^2}\right) \mathrm{d}s = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2-t^4} \cdot \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t$. Olgu $\sqrt{1-t^4} = u$, siis $2\int_0^1 t\sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t = -2\cdot\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. Olgu nüüd $u = \cos v$, siis $\int_0^1 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos v)^2}{|\sin v|} \cdot \sin v\,\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^2\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{4}$. Kokkuvõttes $2\int_{-2}^{2} |t|\sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t = 2\int_{-1}^{0} (-t)\sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 t\sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.



1050. Saame, et $L = \{(x,y) : x^2+y^2 = 2x\} = \left\{(2(\cos t)^2, 2\cos t \sin t) : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$. Otsitav pindala on $S = \int_L \sqrt{4-x^2-y^2} - \left(-\sqrt{4-x^2-y^2}\right) \mathrm{d}s = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4(\cos t)^4 - 4(\cos t \sin t)^2} \cdot \sqrt{4}\,\mathrm{d}t = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 16$.



1098. Olgu $\partial D = \{(a\cos t, b\sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$, siis $S(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,\mathrm{d}t?ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \pi ab$.

1099. Olgu $\partial D = \left\{\left(a(\cos t)^3, b(\sin t)^3\right) : t \in [0, 2\pi]\right\}$, siis $S(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} a(\cos t)^3 \cdot 3b(\sin t)^2 \cos t\,\mathrm{d}t = 3ab\int_0^{2\pi} (\cos t)^4 (\sin t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{3ab}{4}\int_0^{2\pi} (\sin 2t)^2 (\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} \left((\sin 2t)^2 \cos 2t + (\sin 2t)^2\right)\mathrm{d}t = \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} \left(\cos 2t - (\cos 2t)^{\cdots}\right.$ $\frac{3ab}{16}\int_0^{2\pi} (1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi ab}{8}$.

1100. Olgu $\partial D = \{(a(2\cos t - \cos 2t), a(2\sin t - \sin 2t)) : t \in [0, 2\pi]\}$, siis $S(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} a(2\cos t - \cos 2t) \cdot a(2\cos t - 2\cos 2t)\mathrm{d}t2a^2 \int_0^{2\pi} \left(2(\cos t)^2 - 3\cos 2t\cos t + (\cos 2t)^2\right)\mathrm{d}t = 6\pi a^2$.

1101. Olgu $\partial D = \left\{(t, t^2) : t \in [0,1]\} \cup \{(t^2, t) : t \in [0,1]\right\}$, siis $S(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 t \cdot 2t\,\mathrm{d}t + \int_1^0 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

1102. Viime läbi tasandi pöörde, kus $T(u,v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$. Pööre ei muuda pindala. Võrrand $(x+y)^3 = 2xy$ on samaväärne võrrandiga $2\sqrt{2}u^3 = u^2 - v^2$, millest $v^2 = u^2 - 2\sqrt{2}u^3$. Niisiis on $\partial D = \left\{\left(u, -\sqrt{u^2 - 2\sqrt{2}u^3}\right) : u \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]\right\} \cup \left\{\left(u, \sqrt{u^2 - 2\sqrt{2}u^3}\right) : u \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]\right\}$. Leiame, et $S(D) = -\int_{\partial D} v\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \left(-\sqrt{u^2 - 2\sqrt{2}u^3}\right)\mathrm{d}u - \int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^0 \sqrt{u^2 - 2\sqrt{2}u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \sqrt{u^2 - 2\sqrt{2}u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} u\sqrt{1 - 2\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{15}$. (Integreerida ositi.)

1103. Polaarkoordinaatides on lemniskaadi võrrand $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.
Seega $\partial D = \left\{\left(a\sqrt{2\cos 2\varphi}\cos\varphi, a\sqrt{2\cos 2\varphi}\sin\varphi\right) : \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\} \cup$
$\cup \left\{\left(a\sqrt{2\cos 2\varphi}\cos\varphi, a\sqrt{2\cos 2\varphi}\sin\varphi\right) : \varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right\}$. Leiame, et $S(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a\sqrt{2\cos 2\varphi}\cos\varphi \cdot \frac{\sqrt{2}a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = 4a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\cos 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 4\varphi + \cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = 2a^2$.

192. Saame, et $R = 1 : \lim_n \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = 1 : \lim_n \frac{(n+1)^n}{n^n} = \mathrm{e}$. Cauchy–Hadamard'i teoreemi põhjal $(-\mathrm{e}, \mathrm{e}) \subset X \subset [-\mathrm{e}, \mathrm{e}]$.

Kui $x = -\mathrm{e}$, siis saame arvrea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! e^n}{n^n}$. Kuna Stirlingi valemit kasutades näeme, et $\lim\limits_n \left|\frac{(-1)^n n! e^n}{n^n}\right| = \lim\limits_n \frac{\sqrt{2n\pi} n^n e^n}{e^n n^n} = \infty$, siis rida hajub. Analoogiliselt näeme, et rida hajub juhul $x = \mathrm{e}$. Kokkuvõttes $X = (-\mathrm{e}, \mathrm{e})$.

Alternatiiv: Kasutame rea koonduvuse uurimiseks d'Alembert'i tunnust. Leiame, et $C = \lim\limits_n \left|\frac{\frac{(n+1)! x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n! x^n}{n^n}}\right| = |x| \cdot \lim\limits_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{|x|}{\mathrm{e}}$.

Teame, et kui $C < 1$, siis rida koondub. $C < 1$ on samaväärne nõudega $\frac{|x|}{\mathrm{e}} < 1$ ehk $x \in (-\mathrm{e}, \mathrm{e})$.

Teame ka, et kui $C > 1$, siis rida hajub. $C > 1$ on samaväärne nõudega $x \in (-\infty, -\mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, \infty)$ ehk $x \notin [-\mathrm{e}, \mathrm{e}]$.

Otspunktid $-\mathrm{e}$ ja e vaatame läbi samamoodi nagu eelmises lahenduses.

193. Saame, et $R = 1 : \lim\limits_n \sqrt[n]{|n^n|} = 1 : \lim\limits_n n = 0$. Cauchy–Hadamard'i teoreemi põhjal $X = \{3\}$.

Alternatiiv: Kasutame rea koonduvuse uurimiseks Cauchy tunnust. Saame, et $C = \lim\limits_n \sqrt[n]{|n^n (x-3)^n|} = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 3, \\ \infty, & \text{kui } x \neq 3. \end{cases}$ Seega $X = \{3\}$.

194. Saame, et $R = 1 : \lim\limits_n \sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = 1 : \lim\limits_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Cauchy–Hadamard'i teoreemi põhjal $\left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \subset X \subset \left[2 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Olgu $x = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$, siis saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^n}$. See rida hajub, sest $\lim\limits_n \left|(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. Viimase koondumise põhjendab asjaolu, et

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\ln\left(\frac{(n+1)^n}{\mathrm{e} n^n}\right)}{\frac{1}{n}} &= \lim_n \frac{\mathrm{e} n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot ((n+1)\ln(n+1) - (n+1)\ln n - 1)}{\mathrm{e} n^n (n+1)} : \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \\
&= -\lim_n n^2 \left(\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}\right) = -\lim_n \frac{\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \\
&= -\lim_n \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}{-\frac{2}{n^3}} = -\lim \frac{n^2}{2(n+1)^2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt hajub ka rida, mis saadakse, kui $x = 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Kokkuvõttes $X = \left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Alternatiiv. Kasutame rea koonduvuse uurimiseks Cauchy tunnust. Saame, et $C = \lim\limits_n \sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n\right|} = |x-2| \lim\limits_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = |x-2| \cdot \mathrm{e}$.

Teame, et kui $C < 1$, siis rida koondub. $C < 1$ on samaväärne nõudega $|x-2| < \frac{1}{\mathrm{e}}$ ehk $x \in \left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Teame ka, et kui $C>1$, siis rida hajub. $C>1$ on samaväärne nõudega $|x-2|>\frac{1}{\mathrm{e}}$ ehk $x\in\left(-\infty,2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\cup\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}},\infty\right)$ ehk $x\notin\left[2-\frac{1}{\mathrm{e}},2+\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Koonduvust parempoolses otspunktis võime uurida logaritmilise tunnuse abil. Leiame $C=\lim_n\frac{\ln\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n}}}{\ln n}=\lim_n\frac{n+n^2\ln n}{(\ln n)n^2\ln(n+1)}=\lim_n\frac{\frac{1}{n\ln n}+1}{\ln(n+1)}=0$. Seega rida hajub.

Koonduvust vasakpoolses otspunktis peame uurima nagu eelmises lahenduses (logaritmiline tunnus kehtib positiivsete ridade jaoks).

195. Saame, et $X=[-1,1)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1,1)$ liikmeti diferentseerida, mistõttu $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, kui $x\in(-1,1)$. Seega $S(x)=-\ln|1-x|+C$, kui $x\in(-1,1)$. Konstandi C määrame, valides näiteks $x=0$. Saame, et $0=S(0)=-\ln|1-0|+C=C$. Niisiis $S(x)=-\ln(1-x)$, kui $x\in(-1,1)$. Abeli lemma põhjal kehtib $S(x)=-\ln(1-x)$, kui $x\in X$.

196. Saame, et $X=(-1,1)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1,1)$ liikmeti integreerida, mistõttu $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$, kui $x\in(-1,1)$. Seega $S(x)=\left(\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}$, kui $x\in X$.

197. Saame, et $X=(-1,1)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1,1)$ liikmeti integreerida, mistõttu $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n(n+1)t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{n+1}=\frac{x}{1+x}$, kui $x\in(-1,1)$. Seega $S(x)=\left(\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(x+1)^2}$, kui $x\in X$.

198. Saame, et $X=[1,3)$. Vaatleme astmerida $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$, mille summa $T(x)=(x-2)S(x)$. Viimase astmerea summa on leitud ülesandes **195**, kus saime, et $T(x-2)=-\ln(3-x)$, kui $x\in(1,3)$. Järelikult $S(x)=-\frac{\ln(3-x)}{x-2}$, kui $x\in(1,3)\setminus\{2\}$, ning $S(2)=0$ (see on näha algsest astmereast). Kasutades ka Abeli lemmat $x\to1+$ jaoks, leiame kokkuvõttes, et $S(x)=\begin{cases}-\frac{\ln(3-x)}{x-2}, & x\in X\setminus\{2\},\\ 0, & x=2.\end{cases}$

199. Muutujavahetusega $-t=x-2$ saame ülesande **198**. Seega käesolevas ülesandes $X=(-1,1]$ ja $S(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in X\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$

200. Saame, et $X=(-1,1)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1,1)$ liikmeti integreerida, mistõttu $\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x n(n-1)t^{n-2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(x-1)^2}-1$ (ül. **196** põhjal). Seega $S(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}$, kui $x\in X$.

201. Saame, et $X=(-1,1)$. Vaatleme astmerida $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nn(n-1)x^{n-2}$, mille summa olgu $T(x)$ ja mille koonduvuspiirkond on samuti $(-1,1)$, siis $x^2T(x)=S(x)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1,1)$ liikmeti integreerida, mistõttu $\int_0^x T(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x(-1)^nn(n-1)t^{n-2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1}$. Olgu viimase astmerea summa $U(x)$, siis $\int_0^x U(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x(-1)^nnt^{n-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{x^2}{1+x}$. Seega $U(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ ja $T(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$ ning $S(x)=x^2T(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)^3}$.

202. Saame, et $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots$ Uurime selle rea koonduvust D'Alembert'i tunnusega: $C=\lim_n\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}}{(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\right|=x^2$. Niisiis $(-1,1)\subset X\subset[-1,1]$. Punktis $x=1$ leiame Leibnizi tunnuse abil, et arvrida $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ koondub. Punktis $x=-1$ saame arvrea $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, mis samuti Leibnizi tunnuse põhjal koondub. Kokkuvõttes $X=[-1,1]$.

Kuna astmerida võib oma koonduvusvahemikus liikmeti diferentseerida, siis juhul $x\in(-1,1)$ leiame, et $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}$. Seega $S(x)=\arctan x+C$. Konstandi C määrame näiteks $S(0)=0$ abil. Abeli lemmat $x\to 1-$ ja $x\to -1+$ jaoks kasutades leiame, et $S(x)=\arctan x$, kui $x\in X$.

Olgu $D\subset\mathbb{R}$, $a\in D^\circ$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, olgu f kuitahes palju kordi dif-v punktis a.

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ on f-ni f Taylori rida p-s a $\iff$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Lause. Olgu astmerea $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ koonduvusraadius $R>0$.

$\left(\exists(c,d)\subset\mathbb{R}\ \forall x\in(c,d)\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)$ $\implies$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ on f-ni f Taylori rida.

Lause. Olgu $(c,d)\subset D\subset\mathbb{R}$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, f kuitahes palju kordi dif-v vahemikus (c,d).

$\left(\exists\alpha,C>0:\forall t\in(c,d)\ \ |f^{(n)}(t)|\leqslant C\alpha^n\right)$ $\implies$ $\forall x\in(c,d)\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Levinud Taylori ridadest.

(51) $f(x)=\mathrm{e}^x$. Saame, et $f^{(n)}(t)=\mathrm{e}^t$ ning $f^{(n)}(0)=1$. Seega f Maclaurini rida on $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Uurime, kas see rida koondub funktsiooniks f.

Fikseerime vahemiku $(-d,d)$. Lausesse sobivad $C=\mathrm{e}^d$ ja $\alpha=1$ ning seega saame, et $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Alternatiiv. Cauchy–Hadamard'i teoreemi (või d'Alembert'i tunnuse) põhjal näeme, et funktsiooni f Maclaurini rea koonduvuspiirkond on $\mathbb{R}$. Olgu $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k}$ (Taylori polünoom). Olgu $x\in\mathbb{R}$ suvaline. Kuna $f^{(n+1)}(t)=\mathrm{e}^t$, siis Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul annab, et leidub ξ_n arvude 0 ja x vahelt nii, et $\left|\mathrm{e}^x-T_n(x)\right|=\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\dfrac{\mathrm{e}^{\xi_n}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Stirlingi valemi abil näeme, et $\lim_n\dfrac{\mathrm{e}^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}=\mathrm{e}^{|x|}\lim_n\dfrac{(|x|e)^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}}=0$. Keskmise muutuja omaduse tõttu $\lim_n\left|\mathrm{e}^x-T_n(x)\right|=0$ ehk $\lim_n T_n(x)=\mathrm{e}^x$. Seega $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

(52) $f(x)=\sin x$. Saame, et $f^{(n)}(t)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin x, & \text{kui } 2\mid n,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos x, & \text{kui } 2\nmid n\end{cases}$ ning $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{kui } 2\mid n,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{kui } 2\nmid n.\end{cases}$

Seega f Maclaurini rida on $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{n+1}}{(2n+1)!}$. Uurime, kas see rida koondub funktsiooniks f.

Fikseerime vahemiku $(-d,d)$. Lausesse sobivad $\alpha=C=1$ ning seega saame, et $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{n+1}}{(2n+1)!}$.

Alternatiiv. Cauchy–Hadamard'i teoreemi (või d'Alembert'i tunnuse) põhjal näeme, et funktsiooni f Maclaurini rea koonduvuspiirkond on $\mathbb{R}$. Olgu $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(2k+1)!}$ (Taylori polünoom). Olgu $x \in \mathbb{R}$ suvaline. Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul annab, et leidub ξ_n arvude 0 ja x vahelt nii, et $|\sin x - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Stirlingi valemi abil näeme, et $\lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_n \frac{(e|x|)^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}} = 0$. Keskmise muutuja omaduse tõttu $\lim_n |\sin x - T_n(x)| = 0$ ehk $\lim_n T_n(x) = \sin x$. Seega $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n+1)!}$.

(53) $f(x) = \cos x$ analoogiline (52)-ga.

(54) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Vt. [G. Kangro Mat. analüüs II lk. 77]

(55) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Paneme tähele, et $(1-x)\cdot(1+x+\ldots+x^n) = 1-x^{n+1}$, millest $1+x+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Seega $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, kui $x \in (-1,1)$. Kuna astmerida on oma summa Taylori rida, siis $\forall x \in (-1,1)$ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Alternatiiv. Leiame tuletised: $f^{(n)}(t) = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$ ning $f^{(n)}(0) = n!$. Seega funktsiooni f Taylori rida on $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Cauchy–Hadamardi teoreemi (või näiteks Cauchy tunnuse) abil selgitame, et rea koonduvuspiirkond on $(-1,1)$. Uurime, kas see rida koondub funktsiooniks f.

Olgu $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ (Taylori polünoom). Olgu $x \in (-1,1)$ suvaline. Kuna $f^{(n+1)}(t) = \frac{(n+1)!}{(1-t)^{n+2}}$, siis Taylori valem jääkliikmega Cauchy kujul annab, et leidub ξ_n arvude x ja 0 vahelt nii, et $\left| \frac{1}{1-x} - T_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n x}{n!} \right| = |x| \cdot \frac{(n+1)|x-\xi_n|^n}{|1-\xi_n|^{n+2}}$. Kui $x \in (-1,0]$, siis $|x| \cdot \frac{(n+1)|x-\xi_n|^n}{|1-\xi_n|^{n+2}} \leqslant (n+1)|x|^{n+1} \underset{n}{\to} 0$. Kui aga $x \in (0,1)$, siis paneme tähele, et $\frac{x-\xi_n}{1-\xi_n} \leqslant \frac{x+1}{2}$ ning seetõttu $|x| \cdot \frac{(n+1)|x-\xi_n|^n}{|1-\xi_n|^{n+2}} \leqslant \frac{x}{(1-x)^2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{x+1}{2} \right)^n \to 0$. Mõlemal juhul annab keskmise muutuja omadus, et $\lim_n \left| \frac{1}{1-x} - T_n(x) \right| = 0$, mistõttu $\frac{1}{1-x} = \lim_n T_n(x)$ ehk $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, kui $x \in (-1,1)$.

(56) $f(x) = \ln(1+x)$. Kuna $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$, kui $x \in (-1,1)$, siis $\ln(1+x) + C = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$, kui $x \in (-1,1)$. Valides $x = 0$, leiame, et $C = 0$. Kuna astmerida on oma summa Taylori rida, on funktsiooni f Maclaurini rida leitud. Paneme tähele, et kui $x = 1$, siis rida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ koondub (Leibnizi tunnus). Seega, kasutades ka Abeli teoreemi, leiame, et $\forall x \in (-1,1]$ $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$.

Alternatiiv. Leiame tuletised: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, kui $n \in \mathbb{N}$. Niisiis funktsiooni f Maclaurini rida on $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$. Cauchy–Hadamardi teoreemi (või näiteks d'Alembert'i tunnuse) abil selgitame, et rea koonduvuspiirkond on $(-1,1]$. Uurime, kas see rida koondub funktsiooniks f.

Olgu $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ (Taylori polünoom). Olgu $x \in (-1,1)$ suvaline. Kuna $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$, siis Taylori valem jääkliikmega Cauchy kujul annab, et leidub ξ_n arvude x ja 0 vahelt nii, et $|\ln(1+x) - T_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n x}{n!}\right| = |x| \cdot \frac{|x-\xi_n|^n}{|1+\xi_n|^{n+1}}$. Kui $x \in [0,1)$, siis $|x| \cdot \frac{|x-\xi_n|^n}{|1+\xi_n|^{n+1}} \leqslant |x|^{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$. Kui $x \in (-1,0)$, siis $|x| \cdot \frac{|x-\xi_n|^n}{|1+\xi_n|^{n+1}} \leqslant \frac{x}{1+x} \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \xrightarrow[n]{} 0$. Mõlemal juhul annab keskmise muutuja omadus, et $\lim_n |\ln(1+x) - T_n(x)| = 0$, mistõttu $\ln(1+x) = \lim_n T_n(x)$ ehk $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, kui $x \in (-1,1)$. Otspunktis $x = 1$ töötame Abeli teoreemiga nagu eelmises lahenduses.

(57) $f(x) = \arctan x$. Kuna $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$, kui $-x^2 \in (-1,1)$ (ehk $x \in (-1,1)$), siis $\arctan x + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Valides $x = 0$, määrame $C = 0$. Kuna astmerida on oma summa Taylori rida, on funktsiooni f Maclaurini rida leitud. Paneme tähele, et kui $x = \pm 1$, siis rida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ koondub Leibnizi tunnuse põhjal (ta omandab kuju $\pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$). Seega, kasutades ka Abeli teoreemi, leiame, et $\forall x \in [-1,1]$ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Märkus. Ka siin saaks kordajad leida vahetult tuletiste võtmise teel, aga see on küllaltki tülikas.

210. Kasutame seda, et $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2-x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (x-2)^n$. Kuna astmerida on oma summa Taylori rida, on funktsiooni f Taylori rida punktis 2 leitud. Geomeetriline rida annab koonduvuseks nõude $\frac{2-x}{2} \in (-1,1)$ ehk $x \in (0,4)$.

Alternatiiv. Kuna $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$, siis $f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$. Niisiis funktsiooni f Taylori rida punktis 2 on $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (x-2)^n$. Cauchy–Hadamardi teoreemi (või näiteks d'Alembert'i tunnuse) abil leiame, et selle rea koonduvuspiirkond on $(0,4)$. Uurime, kas see rida koondub funktsiooniks f.

Olgu $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \cdot (x-2)^k$ (Taylori polünoom). Olgu $x \in (-1,1)$ suvaline. Kuna $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{t^{n+2}}$, siis Taylori valem jääkliikmega Cauchy kujul annab, et leidub ξ_n arvude x ja 2 vahelt nii, et $\left|\frac{1}{x} - T_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n (x-2)}{n!}\right| = |x-2| \cdot \frac{(n+1)|x-\xi_n|^n}{\xi_n^{n+2}}$. Kui $x \in [2,4)$, siis $|x-2| \cdot \frac{(n+1)|x-\xi_n|^n}{\xi_n^{n+2}} \leqslant \frac{n+1}{2} \left|\frac{x-2}{2}\right|^{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$. Kui aga $x \in (0,2)$, siis paneme tähele, et $\frac{\xi_n - x}{\xi_n} \leqslant \frac{2-x}{2}$ ning seetõttu $|x-2| \cdot \frac{(n+1)|x-\xi_n|^n}{\xi_n^{n+2}} \leqslant \frac{2-x}{x^2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{2-x}{2}\right)^n \to 0$. Mõlemal juhul annab keskmise muutuja omadus, et $\lim_n \left|\frac{1}{x} - T_n(x)\right| = 0$, mistõttu $\frac{1}{x} = \lim_n T_n(x)$ ehk $\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (x-2)^n$, kui $x \in (-1,1)$.

211. Kasutame seda, et $\ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}$. Kuna astmerida on oma summa Taylori rida, on funktsiooni f Taylori rida punktis 1 leitud. Koonduvus leiab aset juhul, kui $x - 1 \in (-1,1]$ ehk kui $x \in (0,2]$.

Alternatiiv. Leiame tuletised: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ja $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, kui $n \in \mathbb{N}$. Niisiis funktsiooni f Maclaurini rida on $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$. Cauchy–Hadamardi teoreemi (või näiteks d'Alembert'i tunnuse) abil selgitame, et rea koonduvuspiirkond on $(0,2]$. Uurime, kas see rida koondub funktsiooniks f.

Olgu $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}(x-1)^{k+1}$ (Taylori polünoom). Olgu $x\in(0,2)$ suvaline. Kuna $f^{(n+1)}(t)=\frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$, siis Taylori valem jääkliikmega Cauchy kujul annab, et leidub ξ_n arvude x ja 1 vahelt nii, et $|\ln x-T_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n(x-1)}{n!}\right|=|x-1|\cdot\frac{|x-\xi_n|^n}{|\xi_n|^{n+1}}$. Kui $x\in[1,2)$, siis $|x-1|\cdot\frac{|x-\xi_n|^n}{|\xi_n|^{n+1}}\leqslant|x-1|^{n+1}\underset{n}{\to}0$. Kui $x\in(0,1)$, siis $|x-1|\cdot\frac{|x-\xi_n|^n}{|\xi_n|^{n+1}}\leqslant\frac{1-x}{x}\cdot\left(\frac{2-x}{2}\right)^n\underset{n}{\to}0$. Mõlemal juhul annab keskmise muutuja omadus, et $\lim\limits_n|\ln x-T_n(x)|=0$, mistõttu $\ln x=\lim\limits_n T_n(x)$ ehk $\ln x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}$, kui $x\in(0,2)$. Otspunktis $x=2$ töötame Abeli teoreemiga nagu eelmises lahenduses.

212. Saame, et $f^{(4n)}(x)=(-4)^n e^x\sin x$, $f^{(4n+1)}(x)=(-4)^n e^x(\sin x+\cos x)$, $f^{(4n+2)}(x)=(-4)^n\cdot 2e^x\cos x$, $f^{(4n+3)}(x)=(-4)^n\cdot 2e^x(\cos x-\sin x)$, mistõttu $f^{(4n)}(0)=0$, $f^{(4n+1)}(0)=(-4)^n$, $f^{(4n+2)}(0)=f^{(4n+3)}(0)=2\cdot(-4)^n$. Niisiis funktsiooni f Taylori rida punktis 0 on $x+\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}-\frac{8x^6}{6!}-\frac{8x^7}{7!}+\frac{16x^9}{9!}+\ldots$. See rida koondub iga $x\in\mathbb{R}$ korral arvuks $f(x)$, sest $|f^{(n)}(x)|\leqslant 2^n$ iga n korral.

213. Saame, et $f^{(2n)}(x)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}(-1)^n\sin\frac{\pi x}{4}$ ning $f^{(2n+1)}(x)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}(-1)^n\cos\frac{\pi x}{4}$, mistõttu $f^{(2n)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}(-1)^n$ ja $f^{(2n+1)}(2)=0$. Niisiis funktsiooni f Taylori rida punktis 2 on $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. See rida koondub iga $x\in\mathbb{R}$ korral arvuks $f(x)$, sest $|f^{(n)}(x)|\leqslant\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ iga n korral.

TAY-1. a) tehtud ülalpool.

b) Kuna $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(-2n+1)}{2^n n!}(-x^2)^n$, siis liikmeti integreerides leiame, et $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}t^{2n}\,dt=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$. Koonduvusraadius integreerimisel ei muutu, seega $R=1$.

c) tehtud ülalpool.

214. Muutujavahetus $y=2x$.

215. Muutujavahetus $y=-x^2$.

216. Muutujavahetus $y=\frac{x}{2}$.

217. Muutujavahetus $y=2x$.

218. Kasutage valemit $(\sin x)^2=\frac{1-\cos 2x}{2}$ või pange tähele, et $f'(x)=\sin 2x$.

219. Kasutage valemit $(\cos x)^2=\frac{1+\cos 2x}{2}$ või pange tähele, et $f'(x)=-\sin 2x$.

221. Pange tähele, et $f(x)=x\cos x-\sin x$.

222. Pange tähele, et $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

223. Pange tähele, et $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

224. Saame, et $f(x)=(1-x)^{-2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)}{n!}(-x)^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ ning $R=1$.

225. Saame, et $f(x) = x^9 \cdot \dfrac{1}{1-x} = x^9 \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=9}^{\infty} x^n$ ning $R = 1$.

226. Saame, et $f(x) = (1-x)^{-2} + 2x \cdot (1-x)^{-3} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)}{n!}(-x)^n + 2x + 2x \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)\cdot(-4)\cdot\ldots\cdot(-3-n+1)}{n!}(-x)^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + 2x + 2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + 2x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$ ning $R = 1$.

227. Saame, et $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n$ ning $R = 2$.

228. Saame, et $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}x^n$ ning $R = 3$.

229. Saame, et $f(x) = \dfrac{5-2x}{6-5x+x^2} = -\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{3-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$ ning $R = 2$.

231. Saame, et $f(x) = \ln 8 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{8}\right) = \ln 2 + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{8^{n+1}(n+1)}$ ning $R = 8$.

232. Saame, et $f(x) = x\cdot(1-3x)^{-\frac{1}{2}} = x + x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-3x)^n = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^n}{2^n}x^{n+1}$ ning $R = 3$.

233. Saame, et $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}x^{2n}$ ning $R = 1$.

234. Saame, et $xf(x) = \mathrm{e}^x - 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, millest $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$ ning $R = \infty$.

235. Saame, et $xf(x) = \operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, millest $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ ning $R = \infty$.

243. Saame, et $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} + 2\arctan x = \ln(1+x) - \ln(1-x) + 2\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{-2}{2n+1} + \dfrac{2(-1)^n}{2n+1}\right)x^{2n+1} = 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ ning $R = 1$.

244. Saame, et $f(x) = \sin(1-x^3) = \sin 1\cos x^3 - \cos 1\sin x^3 = \sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{6n}}{(2n!)} - \cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}+1\right)}{n!}x^{3n}$ ning $R = \infty$.

245. Saame, et $f(x) = -3\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} + 3\cdot\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{-3}{2^n} + 3\right)x^n$ ning $R = 1$.

246. Kuna astmerida võib oma koonduvusvahemikus liikmeti integreerida, siis saame, et $f(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$ ning $R = \infty$.

247. Leiame, et $xf'(x) = 1 - \cos x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, millest $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n)!}$. Seega $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^x(-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n-1}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1-x^{2n}}{(2n)!n}$, $R = \infty$.

258. Saame, et $\mathrm{e}^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, kusjuures selle astmerea koonduvusraadius on ∞. Et astmerida võib integreerida liikmeti igas lõigus, mis asub koonduvusvahemikus, saame, et $I :=$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Leibnizi tunnuse veahinnang annab, et $\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} - I\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$. Seega on tarvis leida n, et $\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-3}$, esimene sobiv $n = 4$. Järelikult $|I - 0{,}747| < 10^{-3}$.

259. Analoogiline ülesandega 258.

260. Teeme muutujavahetuse $y = \frac{1}{x}$, saame, et $I := \int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx = \int_{\frac14}^{\frac12} \frac{e^y}{y^2}\,dy = \int_{\frac14}^{\frac12} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)!}\right) dy =$
$-\frac{1}{y}\Big|_{\frac14}^{\frac12} + \ln|x|\Big|_{\frac14}^{\frac12} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{(n+2)!(n+1)}\Big|_{\frac14}^{\frac12} = 2 + \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}(n+2)!(n+1)} - \frac{1}{4^{n+1}(n+2)!(n+1)}\right).$

Rea jääk on $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}(k+2)!(k+1)} - \frac{1}{4^{k+1}(k+2)!(k+1)}\right) \leqslant \frac{1}{(n+3)!(n+2)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)(n+3)!}.$
Vaja võtta vähemalt $n = 2$, et $R_n < 10^{-3}$. Saame, et $|I - 2{,}835| < 10^{-3}$.

261. Saame, et $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, kusjuures selle astmerea koonduvusraadius on ∞. Et astmerida võib integreerida liikmeti igas lõigus, mis asub koonduvusvahemikus, saame, et $I := \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx =$
$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}.$

Leibnizi tunnuse veahinnang annab, et $\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} - I\right| \leqslant \frac{1}{(2k+3)!(2k+3)}$. Seega on tarvis leida n, et $\frac{1}{(2k+3)!(2k+3)} < 10^{-4}$, esimene sobiv $n = 2$. Järelikult $|I - 0{,}946| < 10^{-4}$.

262. Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul annab, et $I := e^{\sin x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^k}{k!} + \frac{e^{\xi}(\sin x)^{n+1}}{(n+1)!}$, kus ξ asub $\sin 0$ ja $\sin x$ vahel. Et kõne all on $x \in \left[0, \frac12\right]$, siis hindame: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^k}{k!} + \frac{e^{\xi}(\sin x)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^k}{k!} + \frac{e x^{n+1}}{(n+1)!}$. Integraali monotoonsus annab, et $\int_0^{\frac12} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^k}{k!}\right) dx \leqslant \int_0^{\frac12} e^{\sin x}\,dx \leqslant$
$\int_0^{\frac12} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^k}{k!} + \frac{e x^{n+1}}{(n+1)!}\right) dx$, millest $\sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac12} \frac{(\sin x)^k}{k!}\,dx \leqslant \int_0^{\frac12} e^{\sin x}\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac12} \frac{(\sin x)^k}{k!}\,dx + \int_0^1 \frac{e x^{n+1}}{(n+1)!}\,dx.$
Kuna $\int_0^{\frac12} \frac{e x^{n+1}}{(n+1)!}\,dx = \frac{e}{2^{n+2}(n+2)!}$, siis kui $n = 4$, on $\frac{e}{2^{n+2}(n+2)!} < 10^{-4}$. Seega $|I - 0{,}6449| = \left|I - \sum_{k=0}^{4} \int_0^{\frac12} \frac{(\sin x)^k}{k!}\,dx\right| < 10^{-4}$.

Alternatiiv. Saame, et $e^{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n!}$. Et see rida koondub ühtlaselt lõigus $\left[0, \frac12\right]$ (täidetud on Weierstrassi tunnuse eeldused: $\frac{(\sin x)^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e < \infty$), võime integreerida liikmeti: $I :=$
$\int_0^{\frac12} e^{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac12} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n!}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\frac12} (\sin x)^n\,dx$. Rea jääk on $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\frac12} (\sin x)^k\,dx.$
Saame, et $R_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\frac12} x^k\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{1 - \frac12} = \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}}.$
Vaja võtta vähemalt $n = 5$, siis $R_n < 10^{-4}$. Saame, et $|I - 0{,}6449| < 10^{-4}$.

263. Olgu $y = \sqrt{x}$, siis saame, et $I := \int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}} y\ln(1+y)\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^{n+1}}{n}\right) \mathrm{d}y =$ $2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)^{n+1} \frac{y^{n+1}}{n} \mathrm{d}y = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^{n+2}}{n(n+2)}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}n(n+2)}$.

Leibnizi tunnuse veahinnang annab, et $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}n(n+2)} - I\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)2^{n+2}(n+3)}$. Seega on tarvis leida n, et $\frac{1}{(n+1)2^{n+2}(n+3)} < 10^{-3}$, esimene sobiv $n = 4$. Järelikult $|I - 0{,}071| < 10^{-3}$.