Matemaatiline analüüs I

praktikumiülesannete kogu

2014. a. sügissemester

1. Summa sümbol. Hulkade rajad.

Näide: $\sum\limits_{k=0}^{4} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$ ning $a \in \mathbb{R}$.

$\max X = a \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a \in X, \\ \forall x \in X \;\; x \leqslant a. \end{cases}$ (a on hulga X *suurim element*)

$\min X = a \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a \in X, \\ \forall x \in X \;\; a \leqslant x. \end{cases}$ (a on hulga X *vähim element*)

X on *ülalt tõkestatud* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \;\; x \leqslant M$.

X on *alt tõkestatud* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \;\; m \leqslant x$.

$\sup X = a \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall x \in X \;\; x \leqslant a, \\ \forall b \in \mathbb{R} \;\; ((\forall x \in X\, x \leqslant b) \Rightarrow a \leqslant b). \end{cases}$ (a on hulga X *ülemine raja*)

$\inf X = a \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall x \in X \;\; a \leqslant x, \\ \forall b \in \mathbb{R} \;\; ((\forall x \in X\, b \leqslant x) \Rightarrow b \leqslant a). \end{cases}$ (a on hulga X *alumine raja*)

Olukorda, et X ei ole alt tõkestatud, tähistatakse ka $\inf X = -\infty$.
Olukorda, et X ei ole ülalt tõkestatud, tähistatakse ka $\sup X = \infty$.

Lause. $\begin{cases} \exists \max X \;\; \Rightarrow \;\; \sup X = \max X \\ \exists \min X \;\; \Rightarrow \;\; \inf X = \min X. \end{cases}$

1. Kirjutage summa sümboli Σ abil järgmised summad:

a) $1+2+3+4+5$;
b) $1-1+1-1+1-1$;
c) $1+1+1+1+1+1$;
d) $1-4+9-16+25$;
e) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$;
f) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7$;
g) $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$;
h) $1+q+q^2+\ldots+q^k$;
i) $a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$.

2. Kirjutage ilma summa sümbolita järgmised summad.

a) $\sum\limits_{k=1}^{6} b_k$;

b) $\sum\limits_{j=2}^{5} 3^j$;

c) $\sum\limits_{i=0}^{4} (2+i)$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \ln k$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{1} (-1)^{n+1} 5^n$;

f) $\sum\limits_{k=0}^{n} 3$.

3. Tõestage järgmised summa sümboli omadused.

a) $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \sum\limits_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$;

b) $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = \sum\limits_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$;

d) $\sum\limits_{i=1}^{n} c a_i = c \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, kus $c = \mathrm{const}$.

4. Leidke järgmised summad.

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

5. Leidke järgmiste hulkade vähim ja suurim element ning alumine ja ülemine raja.

a) $X = \left\{ \dfrac{n-1}{n^2+1} : n = 1, 2, \ldots \right\}$;

b) $X = \left\{ \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$;

c) $X = \left\{ 3 - \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$;

d) $X = \left\{ \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+1} : n = 1, 2, \ldots \right\}$;

e) $X = [0, 1]$;

f) $X = (0, 1)$;

g) $X = \{-1\} \cup (0, 1)$;

h) $X = \{n^2 - 2n + 3 : n = 1, 2, \ldots\}$;

i) $X = [-1, \infty)$;

j) $X = (-1, \infty)$;

k) $X = \left\{ \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1, 2 \right\}$.

6*. Leidke (koos põhjendusega) $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ ja $\inf B$, kus

$$A = \{0{,}2,\ 0{,}22,\ 0{,}222,\ \ldots\}$$

ning B koosneb vahemiku $(0, 1)$ lõplikest ja lõpmatutest kümnendmurdudest, mille kümnendesituses on ainult numbrid 0 ja 1.

7*. Leidke järgmise hulga alumine ja ülemine raja:

$$\left\{ \frac{(n+1)}{2^n} : n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

2. Funktsiooni määramispiirkond. Funktsiooni tõkestatus. Jada piirväärtus.

Olgu X ja Y hulgad.

Kujutus e. *funktsioon* $f\colon X \to Y$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ eeskiri, mis hulga X igale elemendile x seab vastavusse kindla elemendi $f(x)$ hulgast Y.

X – kujutuse f *lähtehulk* (e. *määramispiirkond*),
Y – kujutuse f *sihthulk*,
$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ – kujutuse f *väärtuste hulk* (e. *muutumispiirkond*).
Olgu $X_1 \subset X \subset \mathbb{R}$ ja $f : X \to \mathbb{R}$.

f *alt tõkestatud* hulgas X_1 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{f(x) : x \in X_1\}$ on alt tõkestatud,

f *ülalt tõkestatud* hulgas X_1 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{f(x) : x \in X_1\}$ on ülalt tõkestatud,

f *tõkestatud* hulgas X_1 $\overset{\text{def}}{\iff}$ f on alt ja ülalt tõkestatud hulgas X_1.

Kujutust, mille lähtehulk on $\mathbb{N}$ ja sihthulk on $\mathbb{R}$, nimetatakse *arvjadaks* ehk *jadaks.*
Tähis: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ või $(a_n)_n$ või (a_n) või $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.
Olgu (a_n) arvjada, $A \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_n a_n = A$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$

Olukorras $A = \infty$ seisab implikatsiooni paremal pool $a_n > \varepsilon$. Olukorras $A = -\infty$ seisab implikatsiooni paremal pool $a_n < -\varepsilon$.

Jada (a_n) on koonduv $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists A \in \mathbb{R} : \lim\limits_n a_n = A.$

Lause. $|r| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_n r^n = 0.$

Lause. $a > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_n a^{\frac{1}{n}} = 1.$

Lause. $\lim\limits_n n^{\frac{1}{n}} = 1.$

Olgu $(n_k) \subset \mathbb{N}$. Jada $(a_{n_k})_k$ nimetatakse jada (a_n) *osajadaks.*
Lause. Olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_n a_n = A, \\ (n_k) \subset \mathbb{N} \end{array}\right\} \implies \lim\limits_k a_{n_k} = A.$$

Lause (piirväärtuse aritmeetika)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad. Olgu $*$ mingi aritmeetiline tehe.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_n a_n = A, \\ \lim\limits_n b_n = B \end{array}\right\} \implies \lim\limits_n (a_n * b_n) = A * B.$$

Sealjuures jagamistehte juures tuleb nõuda, et nii B kui ka iga n korral b_n ei oleks võrdne nulliga.
Lause (piirväärtuse monotoonsus)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_n a_n = A, \\ \lim\limits_n b_n = B, \\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \ a_n \leqslant b_n \end{array}\right\} \implies A \leqslant B.$$

Piirväärtuse monotoonsusest järeldub (valides $(a_n) = (b_n)$), et piirväärtus on üheselt määratud.
Lause (keskmise muutuja omadus)**.** Olgu $A \in \mathbb{R}$, olgu (a_n), (b_n) ja (c_n) arvjadad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_n a_n = A, \\ \lim\limits_n b_n = A, \\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \ a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \end{array}\right\} \implies \lim\limits_n c_n = A.$$

8. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

a) $f(x) = \sqrt{x+4}$;
b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;
c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \dfrac{1}{x}$;
d) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2} + \dfrac{1}{2^x}$;
e) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$;

f) $f(x) = \log(x-6)$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$;

h) $f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(2-\sqrt{x}\right)}$;

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-|x|}}{\ln|x|}$;

j) $f(x) = \arcsin(2x-1)$;

k) $f(x) = \arccos\dfrac{2}{1+x}$;

l) $f(x) = \sqrt{D(x)-1}$, kus D on Dirichlet' funktsioon;

m) $f(x) = \sqrt{1-\arctan x}$;

n) $f(x) = \sqrt{\log \sin x}$;

o) $f(x) = \sqrt{\ln\cos 2\pi x}$;

p) $f(x) = \log_x(2-x)$;

q) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sh} x}$;

r) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2} + x - \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} x}\right)$.

9. Otsustage, kas järgmised funktsioonid f on alt tõkestatud, ülalt tõkestatud, tõkestatud hulgas A.

a) $f(x) = x^2$, $A = [-1,5]$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = (0,1)$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$;

d) $f(x) = -\ln x$, $A = (0,3)$;

e) $f(x) = 5$, $A = (0,\pi)$;

f) $f(x) = \begin{cases} n, & x \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{mujal}, \end{cases}$ $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

10. Leidke mittekonstantne funktsioon, mis on tõkestatud kogu reaalteljel.

11. Leidke funktsioon, mis on tõkestamata igas vahemikus $(n, n+1)$, kus $n \in \mathbb{N}$.

12. Tõestage, et f on tõkestatud hulgas A parajasti siis, kui leidub selline arv $K > 0$, et $|f(x)| \leqslant K$ iga $x \in A$ korral.

13. Olgu f ja g hulgas A tõkestatud funktsioonid. Tõestage, et h ja p, kus $h(x) = f(x) + g(x)$ ja $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, on samuti hulgas A tõkestatud funktsioonid.

14. Leidke järgmiste jadade piirväärtused.

a) $x_n = n^2 - (-1)^n$;

b) $x_n = \dfrac{2n}{5n-1}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n} + 3$;

d) $x_n = \dfrac{1}{2n}\sin n + \sqrt[n]{3}$;

e) $x_n = \dfrac{n^2+2n-6}{(3n-1)^2}$;

f) $x_n = \dfrac{n}{n+1} + n^2 \sin n\pi$;

g) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{(2-3n)^2}$;

h) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} + \sqrt[n]{3n}$;

i) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\sin 9}$;

j) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{(-2)^n}$;

k) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$;

l) $x_n = \cos n\pi$;

m) $x_n = n^{(-1)^n}$;

n) $x_n = (-1)^n n$;

o) $x_n = \begin{cases} 1, \text{kui } n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{n}, \text{kui } n = 2k. \end{cases}$

15*. Olgu $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ selline, et $f(x) > 0$ iga $x \in [-1,1]$ korral ning $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

a) Tähistame $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Veenduge, et funktsioon g ei ole ülalt tõkestatud lõigus $[-1,1]$.

b) Tooge näide konkreetsest funktsioonist f, mille korral $f(x) > 0$ iga $x \in [-1,1]$ jaoks ning $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

16*. Leidke piirväärtused

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n(n+1)}-n\right).$$

3. Funktsiooni piirväärtus.

$a \in \mathbb{R}$ on hulga X *kuhjumispunkt* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\delta>0\ \ ((a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\})\cap X \neq \emptyset$.
Olgu a hulga X kuhjumispunkt ning $A \in \mathbb{R}$. Olgu $X_1 \subset X \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall\varepsilon>0 : \exists\delta>0\ \ \forall x\in X\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

Piirväärtuse ülejäänud definitsioonid saadakse eelneva definitsiooni modifitseerimisel. Nii näiteks protsessi $x\to\infty$ korral on implikatsiooni eelduses $x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$ (ehk $0<|x-a|<\delta$) asemel $x>D$, kus D on vastavalt antud ε-le leitud positiivne arv. Protsessi $x\to-\infty$ korral on aga implikatsiooni eelduses $x<-D$. Sealjuures tuleb modifitseerida ka kuhjumispunktiks olemise tingimusi. Analoogiliselt jada piirväärtusega defineeritakse ka funktsioonide jaoks lõpmatud piirväärtused.
Olgu a hulga X kuhjumispunkt ning $A\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall\varepsilon>0 : \exists\delta>0\ \ \forall x\in X\ \ 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

Protsessi $x\to a-$ jaoks modifitseeritakse implikatsiooni eeldus kujule $0<a-x<\delta$.

Lause. Olgu $A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad\iff\quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A\\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A\end{cases}$$

Lause (piirväärtuse aritmeetika)**.** Olgu $A,B\in\mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt, olgu $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ ning $*$ olgu mingi aritmeetiline tehe.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a}(f(x)*g(x)) = A*B.$$

Sealjuures jagamistehte juures tuleb nõuda, et nii B kui ka $g(x)$ (punkti a mingis ümbruses) ei oleks võrdne nulliga.

Lause (piirväärtuse monotoonsus)**.** Olgu $A,B\in\mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt, olgu $f,g\colon X\to\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B,\\ \exists\delta>0 : \forall x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}\ \ f(x)\leqslant g(x)\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad A\leqslant B.$$

Piirväärtuse monotoonsusest järeldub (valides $f=g$), et piirväärtus on üheselt määratud.

Lause (keskmise muutuja omadus)**.** Olgu $A\in\mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt, olgu $f,g,h\colon X\to\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = A,\\ \exists\delta>0 : \forall x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}\ \ f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a} h(x) = A.$$

Piirväärtuse aritmeetika, monotoonsus ja keskmise muutuja omadus kehtivad ka kõigi teiste protsesside jaoks.

Teoreem (Heine kriteerium)**.** Olgu $A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt, olgu $f\colon X\to\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad\iff\quad \forall(x_n)\subset X\setminus\{a\}\ \left(\lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = A\right).$$

Heine kriteerium kehtib ka lõpmatute ning ühepoolsete protsesside jaoks.

Heine kriteeriumit saab järgmisel viisil kasutada, näitamaks, et piirväärtust $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ei eksisteeri. Leiame kaks jada (x_n) ja $(\tilde{x}_n)$, mille elemendid on hulgast $X\setminus\{a\}$, nii, et $\lim\limits_n x_n = a$, $\lim\limits_n f(x_n) = A$, $\lim\limits_n f(\tilde{x}_n) = B$, kusjuures $A \neq B$.
Kui piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ eksisteeriks, siis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.
Piirväärtuse ühesuse tõttu $A = B$, vastuolu.
Järelikult piirväärtust $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ei eksisteeri.

17. Sõnastage piirväärtuse definitsioon järgmiste piirväärtuste jaoks.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 6$;
b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$;
c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$;
d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

18. Tõestage definitsiooni põhjal järgmised võrdused.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(2-5x) = 2$;
b) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7) = 5$;
c) $\lim\limits_{x\to -1}(3x-1) = -4$;
d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$;
e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{x} = 1$;
f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2} = \infty$;
g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[5]{x+1} = -\infty$.

19. Tõestage definitsiooni põhjal järgmised võrdused.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$;
b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$;
c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-5}{3x+1} = \dfrac{2}{3}$;
d) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2x+1} = \sqrt{7}$;
e) $\lim\limits_{x\to -8}\sqrt{1-x} = 3$;
f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$;
g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1} = \dfrac{1}{2}$;
h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{3x+7} = \dfrac{5}{3}$;
i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1} = \infty$.

20. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-5x^2+5)$;
b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;
c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$;
d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$;
e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;
f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}$;
g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

21. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2+x-2}$;
b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$;
c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}}$;
d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arccos\log x}{\sin\frac{\pi x}{6}}$;
e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$;
f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$;
g) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$;
h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(x-1)^2}$;
i) $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1+x}{x}\right|$;
j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x-1}$;
k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{|\sin x|}-\frac{1}{|\tan x|}\right)$;
l) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$;
m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

22. Kirjutage välja järgmiste piirväärtuste definitsioonid ε-δ-keeles.

a) $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\infty$;
b) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$;
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$.

23. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b.

a) $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{kui } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, \text{kui } 1<x\leqslant 3,\end{cases}$
$a=1,\ b=2$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{kui } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, \text{kui } 1<x\leqslant 2,\end{cases}$
$a=0,\ b=1$.

24. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x}{(x+1)^2}$;
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+1}{(x-1)^3}$;
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x-\ln 2}{x^3+\sin 2}$;
d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x+2}{x+\sqrt[3]{x}}+2^x\right)$;
e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x+5}$;
f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$.

25. Leidke järgmised piirväärtused või tõestage, et piirväärtus puudub.

a) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{|\sin x|}{x}$;
b) $\lim\limits_{x\to0-}\frac{|\sin x|}{x}$;
c) $\lim\limits_{x\to2+}\frac{|x-2|}{x-2}$;
d) $\lim\limits_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x-2}$;
e) $\lim\limits_{x\to3+}\frac{x}{x-3}$;
f) $\lim\limits_{x\to3-}\frac{x}{x-3}$;
g) $\lim\limits_{x\to-3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}$;
h) $\lim\limits_{x\to-3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}$;
i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$;
j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$;
k) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$;
l) $\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{\lfloor x\rfloor}$;
m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;
n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\arctan x^2}{(x+1)^2}$;
o) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, kus $f(x)=\begin{cases} x, & \text{kui } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\end{cases}$
p) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$;
q) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$;
r) $\lim\limits_{x\to0-}\left(2^{\frac{1}{x}}+\frac{\sin x}{x}\right)$;
s) $\lim\limits_{x\to0+}\left(2^{\frac{1}{x}}+\frac{\sin x}{x}\right)$;
t) $\lim\limits_{x\to0+} x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$;
u) $\lim\limits_{x\to0-} x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$;
v) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$;
w) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

26*. Olgu antud funktsioon $f\colon (-a,a)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$. Tõestage, et kehtib implikatsioon ($L\in\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to0} f(x)=L \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to0} f(|x|)=L.$$

Kas kehtib vastupidine implikatsioon? (Kui jah, tuleb tõestada. Kui ei, peaks tooma näite.)

4. Funktsiooni piirväärtus. Lõpmata väikeste suuruste võrdlemine.

Lause. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, olgu ∞ hulga X kuhjumispunkt (st. $\forall R > 0 \ (R,\infty) \cap X \neq \emptyset$), olgu $\alpha, \beta \colon X \to \mathbb{R}$.

$\alpha \in O(\beta)$ protsessis $x \to \infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \exists K > 0 \ \exists D > 0 : \forall x \in X \ \ x > D \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K\beta(x)$.

$\alpha \in \Theta(\beta)$ protsessis $x \to \infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \alpha \in O(\beta) \wedge \beta \in O(\alpha)$.

$\alpha \in o(\beta)$ protsessis $x \to \infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall K > 0 \ \exists D > 0 : \forall x \in X \ \ x > D \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K\beta(x)$.

Lause. $\alpha \in o(\beta) \iff \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

$\alpha \sim \beta$ protsessis $x \to \infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ (*ekvivalentsus*).

Lause. $\alpha \sim \beta \implies \alpha \in \Theta(\beta)$.

Landau sümbolid (ehk *O-notatsiooni*) ja suuruste ekvivalentsuse saab analoogiliselt defineerida ka kõigi teiste protsesside ning ka jada piirväärtuse jaoks.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga X kuhjumispunkt, olgu $f, g, h \colon X \to \mathbb{R}$, olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Teoreem.

$$\left.\begin{array}{r} f \sim g \text{ protsessis } x \to a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot h(x) = A \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} g(x)\cdot h(x) = A.$$

Lause. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{x}{n}} = 1.$

27. Leidke järgmised funktsiooni piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

28. Otsustage, millised väidetest $\alpha \in O(\beta)$, $\alpha \in o(\beta)$, $\alpha \in \Theta(\beta)$ (või vastupidised) kehtivad.

a) $\alpha(x) = x^3$, $\beta(x) = 5x^2 + 100$, kui $x \to \infty$;

b) $\alpha_n = \sqrt[3]{n^6 + 1}$, $\beta_n = n^2$, kui $n \to \infty$;

c) $\alpha_n = n \log_2 n$, $\beta_n = n^2$, kui $n \to \infty$;

d) $\alpha_n = n \log_2 n$, $\beta_n = n \ln n$, kui $n \to \infty$;

e) $\alpha_n = 5n^2$, $\beta_n = n^2 + 8$, kui $n \to \infty$;

f) $\alpha(x) = (x-4)^7$, $\beta(x) = 3(x-4)$, kui $x \to 4$;

g) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n!}$, kui $n \to \infty$;

h) $\alpha_n = n^n$, $\beta_n = (n+1)^n$, kui $n \to \infty$.

i) $\alpha_n = n^{100}$, $\beta_n = 2^n$, kui $n \to \infty$.

29. Näidake, et

a) $x^2 + 5x^4 \sim x^2$, kui $x \to 0$;

b) $\sin x + \tan 2x \sim 3x$, kui $x \to 0$;

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kui $x \to \infty$;

d) $x^3 - 3x + 2 \sim 3(x-1)^2$, kui $x \to 1$;

e) $\dfrac{n+2}{\sqrt{n^3 - 1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, kui $n \to \infty$.

30. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x+x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 8x}{\arctan 4x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x \arcsin 3x}{\sin 3x \arctan 2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x \tan 2x}{(x-x^3)^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin \frac{x}{1-x}}{\ln(1-x)}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{\sin 3x}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^5}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\sin x}-\sqrt[4]{1+\sin x}}{x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x+x^3}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\arcsin x}{x+x^2}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+\arcsin x}{3x-\arcsin x}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+3\arcsin x}{2x-\arctan x}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-2\tan x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)}$;

r) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[4]{x^4-4x^3}-x\right)$.

31*. Kehtigu mingis protsessis $\alpha(x) \in o(1)$, $\beta(x) \in o(1)$ ning $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Tõestage, et selles protsessis kehtib ka $\ln \alpha(x) \sim \ln \beta(x)$.

32*. Olgu $a \in \mathbb{R}$. Arvutage piirväärtus

$$\lim_{n} \frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right).$$

Näpunäide. $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Pidevad ja katkevad funktsioonid

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, olgu $a \in X$ hulga X kuhjumispunkt.

f pidev punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Modifitseerides protsesse, defineeritakse ka vasak- ja parempoolne pidevus punktis a.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga X kuhjumispunkt.

F-nil f on esimest liiki katkevus punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$

F-nil f on kõrvaldatav katkevus punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}, \\ a \notin X \vee f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x). \end{cases}$

F-nil f on teist liiki katkevus punktis a $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ vähemalt üks piirväärtustest $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ on lõpmatu või ei eksisteeri.

33. Olgu $a > 0$. Tõestage, kasutades piirväärtuse ε-δ-keelset definitsiooni, et järgmised funktsioonid on pidevad punktis a.

a) $f(x) = 3x$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

e) $f(x) = \sin x$;

f) $f(x) = \cos x$.

34. Milline ühepoolne pidevus on punktis a järgmistel funktsioonidel?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ 2x+1, & \text{kui } x > 1, \end{cases}$ $a = 1$;

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $a = 4$;

c) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{4}, & \text{kui } x \leqslant 2, \\ 5, & \text{kui } x > 2, \end{cases}$ $a = 2$.

35. Millistena valida arvud a ja b, et järgmised funktsioonid oleksid pidevad oma määramispiirkonnas?

a) $f(x) = \begin{cases} 3 + ax^2, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ x+1, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - a, & \text{kui } x < 1, \\ \cos \pi x, & \text{kui } x \geqslant 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{kui } x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & \text{kui } -\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{kui } x > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

36. Joonistage arvuti abil järgmiste funktsioonide graafikud. Millised katkevused on nendel funktsioonidel? Kui võimalik, kõrvaldage katkevused.

a) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2x}$;

b) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$;

f) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x|}$;

h) $f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$;

i) $f(x) = 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}$.

j) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$;

k) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$.

37*. Öeldakse, et funktsioon f on *kumer hulgas* $A \subset \mathbb{R}$, kui mistahes arvude $x, y \in A$ ja mistahes arvu $\lambda \in [0,1]$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(Piltlikult öeldes tähendab funktsiooni f kumerus seda, et f graafik on nõgus.)
Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, kusjuures $a < b$, suvalised reaalarvud. Kas kehtib implikatsioon

$$f \text{ on kumer lõigus } [a,b] \quad \Rightarrow \quad f \text{ on pidev lõigus } [a,b]?$$

38*. Tõestage, et iga lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni f korral ka tema absoluutväärtus $g := |f|$ on pidev lõigus $[a,b]$. Tooge näide, et vastupidine väide alati ei kehti (s.t. g pidevusest ei järeldu f pidevus).

6. Funktsiooni tuletis.

Olgu X intervall (st. tõkestatud või tõkestamata lõik, poollõik või vahemik).
Olgu $a \in X^\circ$ (sisepunkt), olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$.
$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (f-ni f *tuletis* punktis a).
f *diferentseeruv* punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f'(a) \in \mathbb{R}$.
Olgu $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, olgu $a \in X^\circ$.

Lause. f ja g dif-vad punktis a $\implies \begin{cases} f+g \text{ on dif-v punktis } a, \\ (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a). \end{cases}$

Lause.
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ dif-v punktis } a, \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies \begin{cases} \lambda \cdot f \text{ on dif-v punktis } a, \\ (\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a). \end{cases}$$

Lause. f ja g dif-vad punktis a $\implies \begin{cases} f \cdot g \text{ on dif-v punktis } a, \\ (f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a). \end{cases}$

Lause.
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ ja } g \text{ dif-vad punktis } a, \\ g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \implies \begin{cases} \dfrac{f}{g} \text{ on dif-v punktis } a, \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}. \end{cases}$$

Olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$, $h\colon E \to \mathbb{R}$, kusjuures $f(X) \subset E$, $a \in X^\circ$, $f(a) \in E^\circ$.
Lause (liitfunktsiooni dif-vus)**.**
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ dif-v punktis } a, \\ h \text{ dif-v punktis } f(a) \end{array}\right\} \implies \begin{cases} h\circ f \text{ on dif-v punktis } a, \\ \left(h\circ f\right)'(a) = h'(f(a))\cdot f'(a). \end{cases}$$

39. Lähtudes tuletise definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = \cos x$; d) $f(x) = \ln|x|$.

40. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a, b, c ja α on konstandid).

a) $f(x) = x^4$;

b) $f(x) = x + 6x^{\frac{1}{3}}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2$;

d) $f(x) = 2^x - \mathrm{e}^x$;

e) $f(x) = \log_2|x| + \sin x$;

f) $f(x) = (\cos x)\cdot(\tan\alpha)$;

g) $f(x) = x^a b^x$;

h) $f(x) = x^5\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^\alpha$;

i) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + \sqrt{2x}$;

j) $f(x) = x\ln x + 10^x$;

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x} - \ln\dfrac{1}{x}$;

l) $f(x) = \mathrm{e}^{3x} + \log(3|x|)$;

m) $f(t) = 2t\sin t - (t^2-2)\cos t$;

n) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x a^x}{1+\ln a}$;

o) $f(x) = \tan x - \cot x + 3$;

p) $f(u) = \dfrac{\sin u}{u} - \ln u \cos u$;

q) $f(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$;

r) $f(x) = x \arcsin x + b^2 c$;

s) $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$;

t) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$;

u) $f(x) = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$;

v) $f(x) = \operatorname{th} x + \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$;

w) $f(x) = \arctan x + \operatorname{arth} x$;

x) $f(x) = \ln a + \arccos \alpha$;

y) $f(x) = \arcsin \alpha \operatorname{arsh} x$;

z) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcth} x}{1-x^2}$.

41. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a ja b on konstandid).

a) $f(x) = (3x-5)^4$;

b) $f(x) = (3-5x)^4$;

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$;

d) $f(x) = 2\sqrt{1-x}$;

e) $f(x) = 3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$;

f) $f(x) = (1-2x)^{-2}$;

g) $f(x) = e^{2x+\cos 2x}$;

h) $f(x) = \sin 2x + 2\ln\sqrt{x}$;

i) $f(x) = \cos^2 3x + \cos b$;

j) $f(x) = \ln\sin(2x+1)$;

k) $f(x) = \dfrac{\ln\cos 2x}{\cos 2x}$;

l) $f(x) = \dfrac{e^{3x} a^{3x+5}}{1+\ln a}$.

42. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a on konstant).

a) $f(x) = \ln\tan x$;

b) $f(x) = \ln\tan x + \ln\cot x$;

c) $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$;

d) $f(x) = \sqrt{\cot x}\sin^2 x$;

e) $f(x) = \arctan 2x + \ln(1+4x^2)$;

f) $f(x) = \operatorname{arccot} x \ln \operatorname{arccot} x$;

g) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

h) $f(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

i) $f(x) = \arctan\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$;

43*. Olgu

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}.$$

Tõestage, et $f'\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \dfrac{1}{2}$.

44*. Olgu $g(0) = 0$ ja olgu g diferentseeruv punktis $x = 0$. Avaldage g tuletise kaudu

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + g\left(\frac{x}{10}\right)}{x}.$$

7. Funktsiooni tuletis. Logaritmiline diferentseerimine.

Olgu $X_1 \subset X \subset \mathbb{R}$ ning $f\colon X \to \mathbb{R}$.

f *rangelt kasvav* hulgas X_1 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x_1, x_2 \in X_1 \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

f *rangelt kahanev* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} \forall x_1, x_2 \in X_1 \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Mitterangete variantide korral jäetakse sõna „rangelt“ ära ning implikatsiooni paremal pool seisab mitterange võrratusmärk.
Kui $X_1 = X$, jäetakse väljend „hulgas X_1“ ära.
Üldnimetus „kasvava“ ja „kahaneva“ jaoks: „monotoonne“.
Olgu $f\colon (a,b) \to (c,d)$. Olgu $f((a,b)) = (c,d)$.
Lause. f rangelt kasvav $\implies$ f on bijektiivne.
Olgu X ja Y suvalised hulgad. Olgu $f\colon X \to Y$.
Lause. f on bijektiivne $\iff$ $\exists g\colon Y \to X : \begin{cases} \forall x \in X \;\; g(f(x)) = x, \\ \forall y \in Y \;\; f(g(y)) = y. \end{cases}$
Lauses märgitud kujutust g nimetatakse kujutuse f *pöördkujutuseks* ehk *pöördfunktsiooniks* ja tähistatakse f^{-1}.
Niisiis, rangelt kasvaval funktsioonil $f\colon (a,b) \to (c,d)$, kus $f((a,b)) = (c,d)$, leidub pöördfunktsioon $f^{-1}\colon (c,d) \to (a,b)$.
Lause (pöördfunktsiooni dif-vus)**.** Olgu $x \in (a,b)$.

$$\left.\begin{array}{r} f\colon (a,b) \to (c,d), \\ f((a,b)) = (c,d), \\ f \text{ pidev}, \\ f \text{ rangelt kasvav}, \\ f \text{ dif-v punktis } x, \\ f'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \implies f^{-1} \text{ dif-v punktis } y := f(x).$$

NB! Kõik eelneva saab tõestada ka rangelt kahaneva funktsiooni ning poollõigu ja lõigu jaoks.

45. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a on konstant).

a) $f(x) = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$;
b) $f(x) = \operatorname{th} \ln x$;
c) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{ch}^2 x}$;
d) $f(x) = \ln \operatorname{ch} x + \dfrac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}$;
e) $f(x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;
f) $f(x) = \operatorname{arch} \ln \cos x$;
g) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$;
h) $f(x) = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6$;
i) $f(x) = x^2 \operatorname{arsh} \dfrac{x^2}{a^2} - \sqrt{a^4 + x^4}$;
j) $f(x) = \operatorname{arth} \ln \sin 2x$;
k) $f(x) = \operatorname{arcth} \operatorname{cth} x$;
l) $f(x) = \log_x a$.

46. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $f(x) = x^x$, kui $x > 0$;
b) $f(x) = x^{\sin x}$, kui $x > 0$;
c) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, kui $x < -1$ või $x > 0$;
d) $f(x) = (\ln x)^x$, kui $x > 1$;
e) $f(x) = x^3 \mathrm{e}^{x^2} \sin 2x$;
f) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;
g) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

47. Leidke tuletised f', kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on tuletised olemas.

a) $f(x) = u(x)^2$;

b) $f(x) = \sin v(x)$;

c) $f(x) = x^3 u(x)$;

d) $f(x) = u(x)^3 \cos x$;

e) $f(x) = u(x) \ln v(x)$;

f) $f(x) = \arctan \dfrac{u(x)}{v(x)}$;

g) $f(x) = u(x^2)$;

h) $f(x) = u(x + \cos x)$;

i) $f(x) = x u(\ln x)$.

48. Kasutades lauset pöördfunktsiooni tuletisest, leidke järgmiste funktsioonide tuletised, kirjutades funktsioonid kujul $f(f^{-1}(y)) = y$ ja võttes selle võrduse pooltest tuletise.

a) $f(x) = \arcsin x$;

b) $f(x) = \arccos x$;

c) $f(x) = \arctan x$;

d) $f(x) = \operatorname{arsh} x$;

e) $f(x) = \operatorname{arth} x$;

f) $f(x) = \ln x$;

g) $f(x) = \sqrt{x}$.

49*. Öeldakse, et funktsioon f on *paarisfunktsioon*, kui $f(-x) = f(x)$ iga x korral. Öeldakse, et f on *paaritu funktsioon*, kui $f(-x) = -f(x)$ iga x korral.

Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferentseeruv kogu reaalteljel.

a) Tõestage implikatsioon

$$f \text{ on paaritu funktsioon} \quad \Rightarrow \quad f' \text{ on paarisfunktsioon.}$$

b) Kas kehtib implikatsioon

$$f' \text{ on paarisfunktsioon} \quad \Rightarrow \quad f \text{ on paaritu funktsioon?}$$

50*. Olgu funktsioon g neli korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(-\infty, \infty)$. Kas sellest, et leidub

$$\lim_{x \to -\infty} \left(g(x) + g'(x) + 2\, g''(x) + g'''(x) + g''''(x) \right),$$

järeldub, et eksisteerib $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$? Põhjendage vastust või tooge vastavad näited.

8. Kõrgemat järku tuletised.

Lause. f dif-v punktis $a \quad \Longrightarrow \quad f$ pidev punktis a.

51. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised. Ettevaatust kleepepunktides!

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5, & \text{kui } x \leqslant 2, \\ 9 - 3x, & \text{kui } x > 2; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4x, & \text{kui } x < 1, \\ 3 - x^2, & \text{kui } x \geqslant 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x - 4, & \text{kui } x \leqslant -1, \\ 2x^2 + 3x - 1 & \text{kui } x > -1; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ 1 - x^2, & \text{kui } x \geqslant 0; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2, & \text{kui } x < 0, \\ -1, & \text{kui } x = 0, \\ x^2, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$

52. Leidke järgmiste funktsioonide teine tuletis f''.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$;
b) $f(x) = \tan x$;
c) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$;
d) $f(x) = x^x$.

53. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud tuletised.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, leidke $f^{(4)}$;
b) $f(x) = x^2 \ln x$, leidke $f^{(5)}$;
c) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, leidke $f^{(6)}$.

54. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud tuletised, kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on vajalik arv korda diferentseeruvad funktsioonid.

a) $f(x) = u(x^2)$, leidke f'';
b) $f(x) = u(\mathrm{e}^x)$, leidke f''';
c) $f(x) = u(x)^2$, leidke f''';
d) $f(x) = u(x) + \ln v(x)$, leidke f'';
e) $f(x) = \dfrac{u(x^2)}{x}$, leidke f''.

55*. Funktsioon φ on diferentseeruv ning rahuldab iga x korral seost $\varphi'(x) = F(\varphi(x))$, kus F on funktsioon, millel on olemas kuitahes kõrget järku tuletised. Olgu hulk X selline, et $0 \in X \subset \mathbb{R}$. Olgu funktsioon $f : X \to \mathbb{R}$ diferentseeruv punktis $x = 0$. Tähistame $g(x) = f(|x|)$. Tõestage, et funktsioon g on diferentseeruv punktis $x = 0$ parajasti siis, kui $f'(0) = 0$.

56*. Olgu vahemikus $(0,1)$ kaks korda diferentseeruv funktsioon g selline, et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ korral

$$\beta g''(z) + \alpha g'(z) + \gamma g(z) = 0, \quad z \in (0,1), \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Tõestage, et g on lõpmata arv kordi diferentseeruv.

9. Parameetriliselt antud funktsiooni diferentseerimine. Joone puutuja ja normaal.

Olgu I intervall, olgu antud funktsioonid $x, y\colon I \to \mathbb{R}$.
Olgu $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, kus $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ iga $t \in I$ korral.
Vektorfunktsiooni γ väärtuste hulka $\gamma(I) = \{\gamma(t)\colon t \in I\}$ nimetatakse *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^2$. Kui on antud funktsioonid x ja y, öeldakse mõnikord, et joon on antud *parameetriliselt.*

Joon $\gamma(I)$ määrab punkti $\gamma(t_0)$ ümbruses funktsiooni $f \overset{\text{def}}{\iff} \exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)\ \ y(t) = f(x(t))$.
Olgu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Joont $\{(a+tu, b+tv)\colon t \in \mathbb{R}\}$ nimetatakse *sirgeks.* Vektorit $\vec{s} = (u,v)$ nimetatakse selle sirge *sihivektoriks.* Sihivektoriga ristuvat vektorit $\vec{n} = (v, -u)$ nimetatakse selle sirge *normaalvektoriks.* Sihivektorit võib korrutada suvalise nullist erineva arvuga, tulemusena saadav vektor määrab ikka sama sirge.
Lause. $\{(a+tu, b+tv)\colon t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y)\colon (x-a)\cdot v = (y-b)\cdot u\}$.
Võrrandit $(x-a)\cdot v = (y-b)\cdot u$ sirge määramiseks nimetatakse selle sirge *kanooniliseks võrrandiks.*
Sageli kirjutatakse võrrand kujul $\dfrac{x-a}{u} = \dfrac{y-b}{v}$. (NB! Nulliga jagamine!)
Lause. $\{(x,y)\colon (x-a)\cdot v = (y-b)\cdot u\} = \{(x,y)\colon vx - uy + (bu - av) = 0\}$.
Võrrandit kujul $Ax + By + C = 0$ (kus $(A,B) \neq (0,0)$) sirge määramiseks ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse selle sirge *üldvõrrandiks.* Üldvõrrandist on mugav välja lugeda sirge normaalvektorit (A,B) ja sihivektorit $(B,-A)$.

Olgu I intervall, olgu joon $\gamma(I)$ antud funktsioonidega $x, y\colon I \to \mathbb{R}$. Olgu x ja y diferentseeruvad punktis t_0 ning $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$.
Joone $\gamma(I)$ *puutujaks* punktis $(x(t_0), y(t_0))$ nimetatakse sirget $\{(x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0)\colon t \in \mathbb{R}\}$.
See tähendab, punktis $(x(t_0), y(t_0))$ sellele joonele tõmmatud puutuja sihivektor on $\big(x'(a), y'(b)\big)$.
Joone $\gamma(I)$ *normaaliks* punktis $(x(t_0), y(t_0))$ nimetatakse sirget, mis läbib punkti $(x(t_0), y(t_0))$ ja mille sihivektor on $(y'(t_0), -x'(t_0))$.
Joonte kirjapanekul pannakse sageli kirja ainult joone punktihulka määrav tingimus. Nii näiteks kirjutatakse $\{(x, f(x))\colon x \in I\}$ asemel $y = f(t)$. Parameetriliselt antud joone $\{(x(t), y(t))\colon t \in I\}$ asemel kirjutatakse $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

57. Joonistage järgmised parameetriliselt antud jooned.

a) $x(t) = t,\ y(t) = t^2$;
b) $x(t) = t^3,\ y(t) = t$;
c) $x(t) = t,\ y(t) = \sin t$;
d) $x(t) = \cos t,\ y(t) = t$;
e) $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t$;
f) $x(t) = 3\cos t,\ y(t) = 4\sin t$;
g) $x(t) = t^2,\ y(t) = t^3$;
h) $x(t) = \cos^3 t,\ y(t) = \sin^3 t$.

58. Eeldades, et punkti $(x(t), y(t))$ ümbruses määrab parameetriliselt antud joon kaks korda diferentseeruva funktsiooni f, leidke tuletis f' ja teine tuletis f''.

a) $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t$;
b) $x(t) = \dfrac{t+1}{t},\ y(t) = \dfrac{t-1}{t}$;
c) $x(t) = \ln(1+t^2),\ y(t) = t - \arctan t$;
d) $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \cos t)$;
e) $x(t) = 2t^3 + 1,\ y(t) = 9t^2$;
f) $x(t) = \ln(1+t),\ y(t) = (1+t)^2$;
g) $x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\sin^3 t$;
h) $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t$.

59. Leidke puutuja ja normaal järgmistele joontele märgitud punktis. Joonistage graafik koos puutuja ja normaaliga.

a) $y = \tan 2x$ koord. alguspunktis;
b) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$ lõikepunktis x-teljega;
c) $y = (x+1)\sqrt[3]{7-x}$, $P_0(-1,0)$;
d) $y = \ln x$, $P_0(\mathrm{e},1)$;
e) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;
f) $x = \ln(1+t^2),\ y = t + \arctan t$, $P_0(0,0)$;
g) $x = \dfrac{1+t}{t^3},\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}$, $P_0(2,2)$;

60. Millise nurga all lõikuvad järgmised jooned? Joonistage graafik.
a) $y = \ln x$ ja x-telg;
b) paraboolid $y = (x-2)^2$ ja $y = -4 + 6x - x^2$;
c) paraboolid $y = x^2$ ja $y = x^3$?

61. Missuguse parameetri a väärtuse korral puutuvad jooned $y = ax^2$ ja $y = \ln x$?

62. Missugune peab olema kordajate a, b ja c vaheline seos, et parabool $y = ax^2 + bx + c$ puutuks x-teljega?

63*. Paraboolil $y = ax^2$ (kus $a \neq 0$) on valitud punktid A_1, A_2 ja A_3. Olgu k_1 paraboolile punktis A_1 tõmmatud puutuja tõus ning k_{ij} olgu lõikajate A_{ij} tõusud $(i, j = 1,2,3)$. Tõestage, et $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$.

64*. Olgu $x = a\cos g(t)$ ja $y = b\sin g(t)$. Tõestage, et

$$x\,y^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = b^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

10. L'Hospitali reegel.

Olgu $a\in\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}$ ja $A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Olgu $f,g\colon X\to\mathbb{R}$. Leidugu $\theta>0$ nii, et $(a,a+\theta)\subset X$.

Teoreem (l'Hospitali reegel)**.**

$$\left.\begin{aligned} f \text{ ja } g \text{ dif-vad hulgas } (a,a+\theta),\\ \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0,\\ \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Teoreem (l'Hospitali reegel)**.**

$$\left.\begin{aligned} f \text{ ja } g \text{ dif-vad hulgas } (a,a+\theta),\\ \lim_{x\to a+} |f(x)| = \lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty,\\ \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

L'Hospitali reegli mõlemad variandid kehtivad ka kõigi muude (ühe-, kahepoolsete ja lõpmatute) protsesside jaoks.

65. Leidke järgmised piirväärtused. Kui muidu ei saa, kasutage l'Hospitali reeglit.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{1-x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{\mathrm{e}^{4x}}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin 6x}{\ln\sin x}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\ln x\ln(1-x)$;

k) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$.

66. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (\cot x)^{\sin x}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

67. Leidke järgmised piirväärtused, veendudes eelnevalt, et neid l'Hospitali reegliga leida ei saa, kuigi esineb sobiv määramatus.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

68*. Leidke definitsioonist lähtudes funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln 2} - \dfrac{1}{2^x-1}, & \text{kui } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

tuletis punktis 0.
Näpunäide. L'Hospitali reegel.

11. Taylori valem.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ning $a \in X^\circ$.
Teoreem (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul)**.**

$$f \text{ on } n \text{ korda dif-v punktis } a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0.$$

Olgu $c, d \in \mathbb{R}$, kusjuures $c < d$.
Teoreem (Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.**

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ on } n+1 \text{ korda dif-v vahemikus } (c,d), \\ a, x \in (c,d) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,x) \text{ või } \in (x,a) \quad :$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

69. Leidke järgmiste funktsioonide Taylori n-järku polünoomid antud punktis a.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 2$;
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$, $n = 2$;
c) $f(x) = \arctan x$, $a = 1$, $n = 3$
d) $f(x) = \sin x$, $a = 30^\circ$, $n = 4$.

70. Kirjutage välja Taylori n-järku valem jääkliikmega Peano kujul ja Lagrange'i kujul punktis $a = 0$.

a) $f(x) = \sin x$, $n = 3$;
b) $f(x) = \tan x$, $n = 1$;
c) $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 2$;
d) $f(x) = \arcsin x$, $n = 2$;
e) $f(x) = \arctan x$, $n = 2$;
f) $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $n = 1$.

71. Hinnake absoluutset viga järgmistes Taylori valemi kaudu saadud ligikaudsetes valemites.

a) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, kui $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;
b) $\tan x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$, kui $|x| \leqslant 0{,}1$;
c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, kui $0 \leqslant x \leqslant 1$;
d) $\operatorname{ch} x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$, kui $|x| \leqslant 0{,}2$;
e) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$, kui $|x| \leqslant 1$.

72. Lähtudes Taylori valemist, esitage polünoom $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ avaldise $x-1$ astmete lineaarse kombinatsioonina.

73. Lähtudes Taylori valemist, esitage polünoom $P(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + 16$ avaldise $x+2$ astmete lineaarse kombinatsioonina.

74*. Sisekujundaja Malle ütles matemaatik Mihklile: „Mul on vaja seinale joonistada kahest samal kõrgusel asuvast punktist kinnitatud rippuv kett. Ma tean, et selleks tuleb seinale joonistada aheljoon võrrandiga $y = 3\operatorname{ch}\frac{x}{3}$, aga selle funktsiooni väärtusi on tülikas välja arvutada."

Mihkel vastas: „Sa teed seda asja liiga keeruliselt. Kui $|x| \leqslant \delta$, siis on mõttekas kasutada funktsiooni $y = 3 + \frac{x^2}{6}$. Sajandiku täpsuse saad sa sedasi küll kätte, ma mõtlen,
$\left|3 + \frac{x^2}{6} - 3\operatorname{ch}\frac{x}{3}\right| < \frac{1}{100}$."
Leidke mingi konkreetne arv $\delta > 0$ nii, et Mihkli väide oleks tõene.

12. Funktsiooni monotoonsus ja ekstreemumid.

Lause. Olgu I intervall.

$$\left.\begin{aligned} f \text{ pidev } I\text{-s},\\ f \text{ dif-v } I^\circ\text{-s},\\ \forall x \in I^\circ\ f'(x) > 0 \end{aligned}\right\} \implies f \text{ rangelt kasvav } I\text{-s}.$$

$$\left.\begin{aligned} f \text{ pidev } I\text{-s},\\ f \text{ dif-v } I^\circ\text{-s},\\ \forall x \in I^\circ\ f'(x) < 0 \end{aligned}\right\} \implies f \text{ rangelt kahanev } I\text{-s}.$$

Lause väited kehtivad ka mitterangel juhul, siis tuleb eeldada tuletise mittepositiivsust/mittenegatiivsust vahemikus I° ja tulemusena saadakse, et f on kasvav/kahanev intervallis I.
Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ja $a \in X^\circ$.

F-nil f on punktis a *range lokaalne maksimum* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\ \ f(x) < f(a)$.

F-nil f on punktis a *range lokaalne miinimum* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\ \ f(x) > f(a)$.

Mitterangete variantide korral jäetakse sõna „rangelt" ära ning nõutakse mitterangeid võrratusi.
Üldnimetus lokaalse maksimumi ja miinimumi jaoks: *lokaalne ekstreemum.*

Lause (Fermat)**.**

$$\left.\begin{aligned} \text{f on dif-v punktis } a,\\ \text{f-nil } f \text{ on punktis } a \text{ lokaalne ekstreemum} \end{aligned}\right\} \implies f'(a) = 0.$$

Lause. Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ja $a \in X^\circ$.

$$\left.\begin{aligned} \exists \delta > 0 : f \text{ dif-v vahemikes } (a-\delta, a) \text{ ja } (a, a+\delta),\\ f \text{ pidev p-s } a,\\ \forall t \in (a-\delta, a)\ \ f'(t) > 0,\\ \forall t \in (a, a+\delta)\ \ f'(t) < 0 \end{aligned}\right\} \implies \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ range lokaalne maksimum.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\exists\delta>0: f \text{ dif-v vahemikes } (a-\delta,a) \text{ ja } (a,a+\delta),\\ f \text{ pidev p-s } a,\\ \forall t\in(a-\delta,a)\ \ f'(t)<0,\\ \forall t\in(a,a+\delta)\ \ f'(t)>0\end{array}\right\} \implies \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ range lokaalne miinimum.}$$

Lause väited kehtivad ka mitterangel juhul, siis tuleb eeldada tuletise mittepositiivsust/mittenegatiivsust ja tulemusena saadakse, et funktsioonil f on lokaalne maksimum või miinimum punktis a.
Üldnimetus funktsiooni suurima ja vähima väärtuse jaoks: *globaalne ekstreemum.*

Teoreem (Weierstrass)**.** Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$.
f pidev lõigus $[a,b]$ $\implies$ $\exists x_1,x_2\in[a,b]:\forall x\in[a,b]\ \ f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$.

75. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad.

a) $f(x)=x^3-3x^2$;
b) $f(x)=8x^2-x^4$;
c) $f(x)=x-\sin x$;
d) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$;
e) $f(x)=\arccos(1+x)$;
f) $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$, kus $x>0$;
g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{kui } x\in(-\infty,-1],\\ -1, & \text{kui } x\in(-1,1],\\ x^2-2x, & \text{kui } x\in(1,\infty);\end{cases}$
h) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{kui } |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \operatorname{sgn}\sin x, & \text{kui } \dfrac{\pi}{2}<|x|<\pi;\end{cases}$
i) $f(x)=(x-1)\sin\lfloor x\rfloor$, $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

76. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

a) $f(x)=x^3-3x$;
b) $f(x)=8x^2-x^4$;
c) $f(x)=x\ln x$;
d) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$;
e) $f(x)=(x^2-1)^2$;
f) $f(x)=x^2-4x+4$;
g) $f(x)=x\ln^2 x$;
h) $f(x)=(x-4)^3x$;
i) $f(x)=4x^5-5x^4$;
j) $f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$;
k) $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2}$;
l) $f(x)=\begin{cases}x-\ln|x|, & \text{kui } x\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0,\end{cases}$
m) $f(x)=x-\arctan x$;
n) $f(x)=1-|x|+\ln|x|$;
o) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$;
p) $f(x)=\ln(x^4+4x^3+30)$;
q) $f(x)=\begin{cases}\ln|x|, & \text{kui } x\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0,\end{cases}$
r) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{kui } -\dfrac{\pi}{2}<x<0,\\ \cos x, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$
s) $f(x)=x\arctan x$,
t) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{kui } x>0,\\ -1, & \text{kui } x=0,\\ -x^2-2, & \text{kui } x<0.\end{cases}$

77. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

a) $f(x)=x^2-2x+3$, $x\in[0,5]$;
b) $f(x)=x^2-2x+3$, $x\in(0,5)$;
c) $f(x)=x^3-3x+1$, $x\in[-2,3]$;
d) $f(x)=x^3-3x+1$, $x\in(-2,3)$;
e) $f(x)=x-\ln x$, $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$;
f) $f(x)=x-\ln x$, $x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$;
g) $f(x)=\sin^2 x$, $x\in[-\pi,\pi]$;
h) $f(x)=\sin^2 x$, $x\in(-\pi,\pi)$;
i) $f(x)=\arccos x$;

j) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$;

k) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

l) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

78. Leidke arvu 36 niisugused kaks tegurit, mille ruutude summa on minimaalne.

79. Tuleb valmistada kaanega kast, mille ruumala on 72 cm^3 ja põhja servade suhe on $1:2$. Määrake kasti mõõtmed nii, et kasti täispindala oleks minimaalne.

80. Akna kuju on ristkülik korrapärase kolmnurgaga ülemises osas. Akna ümbermõõt on 3 m. Milline peab olema akna alus, et akna pindala oleks maksimaalne?

81. Kanali ristlõige on ristkülik poolringiga alumises osas. Kanali ristlõike ümbermõõt on 4,5 m. Milline peab olema poolringi raadius, et kanali ristlõike pindala oleks maksimaalne?

82. Pöördkoonuse moodustaja pikkus on 20 cm. Missuguse kõrguse korral on koonuse ruumala maksimaalne?

83. Leidke kerasse kujundatud maksimaalse ruumalaga ringsilindri mõõtmed, kui kera raadius on R.

84. Paraboolil $y = x^2$ leidke punkt, mille kaugus sirgest $y = 2x - 4$ on minimaalne.

85. Punktist A väljub punkti B suunas auto, liikudes kiirusega 80 $\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Samal ajal väljub punktist B rong, liikudes punkti C suunas kiirusega 50 $\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. On teada, et $\angle ABC = 60^\circ$ ja $|AB| = 200$ km. Missugusel ajamomendil (lugedes aega liikumise algmomendist alates) on sõidukid teineteisele kõige lähemal?

86. Tööline pani tähele, et ringsilindri kujuliste kruuside valmistamisel kulub liiga palju materjali. Ta tegi ettepaneku muuta kruusi kõrgust ja läbimõõtu nii, et kruusi maht jääks endiseks, aga materjali kuluks minimaalne hulk. Tema ettepanek lükati tagasi. Miks?

87*. Olgu antud funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$\sqrt{|f(x_1) - f(x_2)|} \leqslant |x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Tõestage, et funktsioon f on konstantne.

88*. Majakas asub rannast 4 km kaugusel merel (punktis B). Pood asub rannajoonel, 4 km kaugusel punktist A (punkt, mis asub rannal, kui majaka poolt tulla kõige otsemat ja lühemat teed rannale). On teada, et majakavaht sõuab kiirusega 4 km/h ja kõnnib kiirusega 5 km/h. Millist teed pidi peab majakavaht minema poodi, et kuluks kõige vähem aega (ehk kui kaua tuleb aerutada ja kaua kõndida)? Rannajoone võime lugeda risti lõiguga AB.

13. Funktsiooni kumerus ja nõgusus, käänupunktid, asümptoodid.

Olgu I intervall, $I \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Joon $y = f(x)$ on *kumer* I-s $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall [x_1, x_2] \subset I \ \ \forall x \in [x_1, x_2] \ \ f(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

Joon $y = f(x)$ on nõgus I-s $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall [x_1, x_2] \subset I \ \ \forall x \in [x_1, x_2] \ \ f(x) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

Lause. Olgu I lahtine intervall, $I \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ dif-v } I\text{-s} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{joon } y = f(x) \text{ kumer } I\text{-s} \Leftrightarrow f' \text{ kasvav } I\text{-s}, \\ \text{joon } y = f(x) \text{ nõgus } I\text{-s} \Leftrightarrow f' \text{ kahanev } I\text{-s}. \end{cases}$$

Lause. Olgu I lahtine intervall, $I \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ kaks korda dif-v } I\text{-s} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{joon } y = f(x) \text{ kumer } I\text{-s} \Leftrightarrow \forall x \in I \ \ f''(x) \leqslant 0, \\ \text{joon } y = f(x) \text{ nõgus } I\text{-s} \Leftrightarrow \forall x \in I \ \ f''(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Leidugu $\delta > 0$ nii, et $(a - \delta, a + \delta) \subset X \subset \mathbb{R}$ ning $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Punkt $(a, f(a))$ on joone $y = f(x)$ *käänupunkt* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \text{ kumer } (a - \delta, a)\text{-s}, \\ y = f(x) \text{ nõgus } (a, a + \delta)\text{-s} \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \text{ nõgus } (a - \delta, a)\text{-s}, \\ y = f(x) \text{ kumer } (a, a + \delta)\text{-s}. \end{array} \right.$$

Olgu s sirge. Tähistame punkti (x, y) kaugust sirgest s (st. punktist (x, y) sirgeni s tõmmatud ristlõigu pikkust) tähisega $d((x, y), s)$.

Leidugu $R > 0$ nii, et $(R, \infty) \subset X \subset \mathbb{R}$ ning olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Sirge s on joone $y = f(x)$ *kaldasümptoot* protsessis $x \to \infty$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim\limits_{x \to \infty} d((x, f(x)), s) = 0$.

Analoogiliselt defineeritakse kaldasümptoot protsessis $x \to \infty$.

Lause. Olgu $m, b \in \mathbb{R}$.

Sirge $y = mx + b$ on joone $y = f(x)$ kaldasümptoot protsessis $x \to \infty$ $\iff$

$$\iff \quad \begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ b = \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big). \end{cases}$$

Analoogiline lause kehtib protsessi $x \to -\infty$ jaoks.

Olgu $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $(a, a + \delta) \subset X \subset \mathbb{R}$ või $(a - \delta, a) \subset X \subset \mathbb{R}$ ning $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Sirge $x = a$ on joone $y = f(x)$ *püstasümptoot* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \infty \vee \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \vee \lim_{x \to a-} f(x) = \infty \vee \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty.$$

89. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute $y = f(x)$ kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$;

b) $f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$;

c) $f(x) = \arctan x - x$;

d) $f(x) = x^2 \left(\ln x - \dfrac{1}{2} \right)$;

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$;

f) $f(x) = x^3 - 6x^2$;

g) $f(x) = \ln(1 + x^2)$;

h) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$;

90. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + 1}$;

e) $f(x) = x \ln \left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x} \right)$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^x}$;

g) $f(x) = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$.

91. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = 4 \cdot \dfrac{x+1}{x^2}$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1-x^2}{2}}$;

d) $f(x) = \dfrac{(1+\ln x)^2}{2}$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$;

f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$;

g) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$;

h) $f(x) = \begin{cases} 1+\ln|x|, & \text{kui } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1], \\ \mathrm{e}^{-x}, & \text{kui } x \in (1, \infty); \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x+2} - 1, & \text{kui } x < -1, \\ x^3 - 3x^2, & \text{kui } x \geqslant -1. \end{cases}$

92*. Kujutage koordinaatteljestikus punktide (x, y) hulk, mis rahuldavad tingimust

$$\min\Big\{\max\big\{|x|, |y|\big\}, |x| + |y| - 1\Big\} = 2.$$

Lisage ka selgitused, kuidas saite just sellise joonise.

93*. On antud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ 3 - x, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$$

Olgu $g(x) = f(f(x))$. Avaldage funktsioon g valemina ning joonestage tema graafik.

14. Algfunktsioon ja määramata integraal.

Olgu D intervall, $D \subset X \subset \mathbb{R}$, $F, f \colon X \to \mathbb{R}$.

Funktsioon F on funktsiooni f *algfunktsioon* intervallis $D \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in D \;\; F'(x) = f(x)$.

Lause. F ja G on f algfunktsioonid intervallis $D \implies \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in D \;\; G(x) = F(x) + C$.

Olgu funktsioon F funktsiooni f algfunktsioon intervallis D. Funktsiooni f *määramata integraaliks* intervallis D nimetatakse avaldist $F(x) + C$. (Siin C on reaalarv, mille väärtus jäetakse täpsustamata.)

Lause. Olgu D intervall, $D \subset X \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon D \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} \exists \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D, \\ \exists \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D \end{array}\right\} \implies \int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D.$$

Lause. Olgu D intervall, $D \subset X \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon D \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\exists \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D \implies \int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D.$$

Lause. Olgu T ja X intervallid, $f \colon T \to \mathbb{R}$, $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} F \text{ on } f \text{ algf-n int-s } T, \\ \varphi(X) \subset T, \\ \varphi \text{ on dif-v int-s } X \end{array}\right\} \implies \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C \text{ int-s } X.$$

94. Lihtsustage järgmised avaldised.

a) $\left(\int \tan x \, dx\right)'$; b) $\left(\int 2^{x+1} \, dx\right)'$; c) $\dfrac{d}{dx} \int \arctan x \, dx$;

95. Vahetu integreerimise teel leidke järgmised integraalid.

a) $\int x^4 \, dx$;

b) $\int (3\sqrt{x} - 4) \, dx$;

c) $\int 5x\sqrt{x} \, dx$;

d) $\int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

e) $\int (x^3 - 1)^2 \, dx$;

f) $\int 10^x \, dx$;

g) $\int e^{5x} \, dx$;

h) $\int 5^x e^x \, dx$;

i) $\int (1 + e^x)^2 \, dx$;

j) $\int (2^x - 3^x)^2 \, dx$;

k) $\int (2^x e^x + \ln 2) \, dx$;

l) $\int \sin \alpha \, dx$ (α on konstant);

m) $\int (\cos x - 3 \sin x) \, dx$;

n) $\int \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) dx$;

o) $\int 2 \cos^2 \dfrac{x}{2} \, dx$;

p) $\int \left(2 \sin^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 2\right) dx$;

q) $\int \dfrac{\cos 2x \, dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

r) $\int \dfrac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$;

s) $\int \dfrac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} \, dx$;

t) $\int \tan^2 x \, dx$;

u) $\int \cot^2 x \, dx$;

v) $\int (\tan x - \cot x)^2 \, dx$;

w) $\int (\arcsin x + \arccos x) \, dx$;

x) $\int \dfrac{\arctan x + \operatorname{arccot} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$;

y) $\int \dfrac{2 \, dx}{\sqrt{4 - 4x^2}}$;

z) $\int \dfrac{x^2 \, dx}{x^2 + 1}$;

aa) $\int \dfrac{(1 + x)^2 \, dx}{x(1 + x^2)}$;

ab) $\int \dfrac{x^4 \, dx}{x^2 + 1}$;

ac) $\int \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \, dx$;

ad) $\int (\operatorname{sh} 2 - \operatorname{sh} x) \, dx$;

ae) $\int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} \, dx$;

af) $\int 2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2} \, dx$;

ag) $\int \operatorname{th}^2 x \, dx$;

ah) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}$;

ai) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh}^2 x}$;

aj) $\int \dfrac{\operatorname{ch} 2x \, dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}$.

96. Leidke diferentsiaali märgi alla viimise võttega järgmised integraalid.

a) $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$;
b) $\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{\cos^2 4x}$;
c) $\int (x-3)^5\,\mathrm{d}x$;
d) $\int (3x+5)^4\,\mathrm{d}x$;
e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$;
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-7}$;
g) $\int (4-x)^6\,\mathrm{d}x$;
h) $\int \sqrt[3]{7-2x}\,\mathrm{d}x$;
i) $\int \sin(x-4)\,\mathrm{d}x$;
j) $\int \cos(1-2x)\,\mathrm{d}x$;
k) $\int \mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x$;
l) $\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-16x^2}}$;
m) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$;
n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9}$;
o) $\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{1+(5x+1)^2}$.

15. Muutuja vahetuse võte.

97. Leidke diferentsiaali märgi alla viimise võttega järgmised integraalid.

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;
b) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+1}$;
c) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$;
d) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;
e) $\int \frac{(2x-5)\,\mathrm{d}x}{x^2-5x+2}$;
f) $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\ln 3}$;
g) $\int \mathrm{e}^x \cos \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;
h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;
i) $\int \frac{(1+x)^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$;
j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$;
k) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x+1}$;
l) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;
m) $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$;
n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$;
o) $\int \frac{\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{7+\operatorname{ch} x}}$;
p) $\int \frac{(1+\operatorname{th} x)^3\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x}$;
q) $\int \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{f(x)}$;
r) $\int \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;
s) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cot x)\sin^2 x}$;
t) $\int \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;
u) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$;
v) $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$;
w) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$;
x) $\int \tan x\,\mathrm{d}x$;
y) $\int \cot x\,\mathrm{d}x$;
z) $\int \cos^2 x\sin 2x\,\mathrm{d}x$;
aa) $\int \frac{\arctan^3 x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$;
ab) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;
ac) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$;
ad) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$;
ae) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;
af) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$;
ag) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$;
ah) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;
ai) $\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}$;
aj) $\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\cos x}\,\mathrm{d}x$;
ak) $\int (\tan^2 x+\tan^4 x)\,\mathrm{d}x$;
al) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$;
am) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$;
an) $\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$;
ao) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$;
ap) $\int (\sin x+\cos x)^2\,\mathrm{d}x$.

98. Leidke järgmised integraalid märgitud muutuja vahetusega.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2},\ x=t-1;$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x,\ t=\sqrt{1-x};$

c) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\ t=\sqrt{1-x^2};$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}},\ x=\sin^2 t;$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}},\ x=\frac{1}{\cos t};$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x,\ t=x-\frac{1}{x}.$

99. Sobiva muutuja vahetusega leidke järgmised integraalid.

a) $\displaystyle\int \frac{\exp\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}};$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}};$

c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x;$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x}{x};$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}};$

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}};$

g) $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[4]{x^3}};$

h) $\displaystyle\int \frac{\ln\tan x\,\mathrm{d}x}{\sin x\cos x};$

i) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}};$

j) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}};$

k) $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)}\,\mathrm{d}x;$

100*. Leidke kõik diferentseeruvad funktsioonid $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mis rahuldavad tingimust

$$f'(x)=-5f(x)\neq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

101*. Avaldage integraal

$$\int [f(x)]^3[g(x)]^3[f(x)g'(x)+g(x)f'(x)]\,dx$$

funktsioonide f ja g kaudu.

16. Ositi integreerimine ja ratsionaalfunktsioonide integreerimine.

Lause. Olgu D intervall, $f,g\colon D\to\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f,\ g \text{ dif-v int-s } D,\\ \exists\displaystyle\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \text{ int-s } D \end{array}\right\} \implies \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \text{ int-s } D.$$

102. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

a) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x;$

b) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x;$

c) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x;$

d) $\displaystyle\int xa^x\,\mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x;$

f) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x;$

h) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x;$

i) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x;$

j) $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x;$

k) $\displaystyle\int x^4\cos x\,\mathrm{d}x.$

103. Leidke järgmised integraalid, määrates nad kahekordsel ositi integreerimisel saadud võrrandeist.

a) $\int e^x \sin x \, dx$;

b) $\int e^x \cos x \, dx$;

c) $\int \sin \ln x \, dx$;

d) $\int \cos \ln x \, dx$;

e) $\int \operatorname{ch} x \sin x \, dx$.

104. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int x^2 \ln x \, dx$;

b) $\int \frac{x e^x \, dx}{(1+x)^2}$;

c) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$;

d) $\int x^2 \ln(x-1) \, dx$;

e) $\int x \cos^2 x \, dx$;

f) $\int e^{\sin x} \sin 2x \, dx$;

g) $\int \arctan x \, dx$;

h) $\int \arcsin x \, dx$;

i) $\int x \arctan^2 x \, dx$;

j) $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$;

k) $\int x \sin \ln x \, dx$;

l) $\int x^2 \cos \ln x \, dx$;

m) $\int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \, dx$.

105. Kordajaid leidmata esitage algmurdude summana järgmised ratsionaalsed funktsioonid, kasutades tundmatute kordajate märkimiseks tähti A, B, C, ...

a) $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$;

b) $\frac{1}{x(x+1)^2}$;

c) $\frac{x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}$;

d) $\frac{x^2+1}{x(x+2)^2(x^2+x+1)^2}$;

e) $\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x^2-2x-3)}$;

f) $\frac{x^3(x+1)+1}{(x-1)(x+2)}$.

106*. Leidke määramata integraal $\int \frac{x+3}{(x^2+2)^2} \, dx$.

107*. Leidke määramata integraal $\int \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \, dx$

17. Ratsionaal- ja irratsionaalfunktsioonide integreerimine.

108. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \, dx$;

b) $\int \frac{x \, dx}{(x+1)(2x+1)}$;

c) $\int \frac{x^3+2}{x^2+x-2} \, dx$;

d) $\int \frac{(x+2)^2 \, dx}{(x-1)^2 x}$;

e) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} \, dx$;

f) $\int \frac{(x+2) \, dx}{x^2(x+1)^2}$;

g) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

h) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

i) $\int \frac{2 \, dx}{x(x^2+2x+2)}$;

j) $\int \frac{x^3 \, dx}{x^2+4x+8}$.

109. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

b) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$;

c) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

d) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$;

e) $\int \cos^3 2x\sin 2x\,dx$;

f) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

g) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

110. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int \sin 2x\sin 3x\,dx$;

b) $\int \cos x\sin 3x\,dx$;

c) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$;

d) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$;

e) $\int \sin x\sin^2 3x\,dx$;

f) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,dx$.

111. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$;

c) $\int \frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{x}\,dx$;

d) $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{2x-1}}\,dx$;

e) $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

f) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}}$;

g) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

112*. Leidke integraal $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,dx$.

113*. Leidke integraal $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{3\sin x+2\cos x}\,dx$.

18. Arvread.

Olgu (a_n) arvjada.

Kirjutist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ehk $\sum_n a_n$ ehk $\sum a_n$ nimetatakse *arvreaks* ehk *reaks*.

Arvusid $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nimetatakse rea $\sum_n a_n$ *osasummadeks*.

Rea $\sum_n a_n$ *summaks* nimetatakse piirväärtust $\lim_n S_n$.

Rida $\sum_n a_n$ on *koonduv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ jada (S_n) on koonduv.

Kui rida ei ole koonduv, siis nimetatakse teda *hajuvaks*.

Lause. Rida $\sum_n a_n$ on koonduv $\implies$ $\lim_n a_n = 0$.

Rida $\sum_n a_n$ on positiivne $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n \geqslant 0$.

Lause. Olgu $m \in \mathbb{N}$. Olgu antud rida $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tähistame $b_n = a_{n+m}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Rida $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on koonduv $\iff$ rida $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ on koonduv.

Lause (I võrdluslause)**.**

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N}\ \ b_n \geqslant a_n \geqslant 0, \\ \text{rida } \sum_n b_n \text{ on koonduv} \end{array}\right\} \implies \text{rida } \sum_n a_n \text{ on koonduv.}$$

Lause (II võrdluslause)**.**

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n, b_n \geqslant 0, \\ \lim_n \dfrac{a_n}{b_n} \in (0,\infty) \end{array}\right\} \implies \left(\text{rida } \sum_n a_n \text{ on koonduv} \Leftrightarrow \text{rida } \sum_n b_n \text{ on koonduv}\right).$$

114. Leidke järgmiste ridade osasummade jadad (S_n) ja summad S.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$;

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)$;

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$.

115. Leidke read, mille osasummad on järgmised.

a) $S_n = \ln(n+2)$;

b) $S_n = \dfrac{n+3}{n+1}$;

c) $S_n = \dfrac{1}{n+1}$;

d) $S_n = n+1$;

e) $S_n = \dfrac{n^2}{n^2+2}$;

f) $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

116. Näidake järgmiste ridade hajuvust koonduvuse tarviliku tunnuse või vahe $|S_{2n}-S_n|$ uurimise teel, kus S_n on rea n-nes osasumma.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{10}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tan\frac{\pi}{n+1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-\frac{1}{n}}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

117. Positiivsete ridade võrdluslausete abil tehke kindlaks, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)3^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2(n+1)^2}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{\pi}{3^n}$; i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \tan\dfrac{\pi}{3^n}$.

118*. Leidke rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ osasummade jadad (S_m) ja summa S.

119*. Tõestage võrdus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

põhjendades eelnevalt, et mõlemad read koonduvad.

19. Arvread.

Rida $\sum\limits_n a_n$ on *absoluutselt koonduv* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ rida $\sum\limits_n |a_n|$ on koonduv.

Lause. Rida $\sum\limits_n a_n$ on absoluutselt koonduv $\Longrightarrow$ rida $\sum\limits_n a_n$ on koonduv.

Teoreem (Cauchy tunnus)**.** Olgu $\sum\limits_n a_n$ arvrida ning $D=\lim\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

$0\leqslant D<1 \quad\Longrightarrow\quad$ rida $\sum\limits_n a_n$ on absoluutselt koonduv,

$D>1 \quad\Longrightarrow\quad$ rida $\sum\limits_n a_n$ on hajuv.

Teoreem (D'Alembert'i tunnus)**.** Olgu $\sum\limits_n a_n$ arvrida ning $D=\lim\limits_n\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

$0\leqslant D<1 \quad\Longrightarrow\quad$ rida $\sum\limits_n a_n$ on absoluutselt koonduv,

$D>1 \quad\Longrightarrow\quad$ rida $\sum\limits_n a_n$ on hajuv.

120. Positiivsete ridade võrdluslausete abil tehke kindlaks, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n2^n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{a}{n}\right)$; g) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\cos\dfrac{\pi}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3}$.

121. D'Alembert'i tunnuse või Cauchy tunnuse abil otsustage, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n n}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n-1}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n+1)!}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1{,}1^n}{n}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{3}\right)^n$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

m) $\sum_{n=4}^{\infty}\alpha^n\arcsin\frac{\pi}{n}$, kus $\alpha>0$;

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$;

o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

122. Uurige järgmiste ridade koonduvust.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^n}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{3^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}}\cos\frac{\pi}{n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^n}$;

g) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln^{\alpha}\cos^{-1}\frac{\pi}{n}$.

123*. Uurige rea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$ koonduvust.

124*. Milliste b väärtuste korral on rida

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(b+1)(b+2)\cdots(b+k)}$$

koonduv?

20. Arvread ja astmeread.

Teoreem (Leibnizi tunnus)**.**

$$\left.\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant 0,\\ \lim_n a_n=0\end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow\quad \text{rida } \sum_n(-1)^n a_n \text{ on koonduv.}$$

Olgu (a_n) arvjada ning $a\in\mathbb{R}$. Kirjutist $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-a)^n$ nimetatakse *astmereaks*. Arvusid a_n nimetatakse selle astmerea *kordajateks.*

Astmerida kujutab endast funktsioonide $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kus $f_n(x)=a_n\cdot(x-a)^n$, rida $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$. Iga konkreetse $x\in\mathbb{R}$ fikseerimisel muutub astmerida $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-a)^n$ arvreaks.

Astmerea $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-a)^n$ *koonduvuspiirkond* $X\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}:\ \text{arvrida } \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-a)^n \text{ on koonduv}\right\}$.

Astmerea $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-a)^n$ *absoluutse koonduvuse piirkond*

$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}\colon \text{arvrida } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n \text{ on absoluutselt koonduv} \right\}.$

Astmerea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ *koonduvusraadius* $R \stackrel{\text{def}}{=} 1 : \varlimsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1 : \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Teoreem (Cauchy–Hadamard)**.** $(a-R, a+R) \subset A \subset X \subset [a-R, a+R]$.

125. Millised järgmistest ridadest on absoluutselt koonduvad, millised on tingimisi koonduvad ja millised on hajuvad?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$;

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n\sqrt{n}}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$;

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$;

j) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n3^n}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+\cos n\pi}{n}$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{e^n}$;

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a^n}{n!}$;

o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$.

126. Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadiused R, koonduvuspiirkonnad X ja absoluutse koonduvuse piirkonnad A.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$;

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{4}\right)^n$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+2)^n$;

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} (x-3)^n$;

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\,x^n$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$;

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$;

q) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$;

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$.

127. Leidke järgmiste astmeridade koonduvuspiirkonnad X ja summad $S(x)$.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-3)^n$;

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$.

128*. Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum_k (-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub. Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast $\sum_k (-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub.

129*. Leidke kõik a väärtused, mille korral rida koondub ning kõik need a väärtused, mille korral rida koondub absoluutselt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}.$$

21. Määratud integraal.

$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ on lõigu $[a,b]$ *alajaotus* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Alajaotuse tähis: T või $T[x_0, \ldots, x_n]$.
Tähistame $\mathfrak{T} = \{T : T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ alajaotus}\}$.
Olgu $T[x_0, \ldots, x_n]$ lõigu $[a,b]$ mingi alajaotus. Tähistame $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral. Tähistame $\lambda(T) = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$. Tähistagu $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ suvalist vektorit, kus $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral.
Olgu $[a,b] \subset X$, $f : X \to \mathbb{R}$.
f on *integreeruv* lõigus $[a,b]$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T \in \mathfrak{T}, \forall \xi \ \ \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon.$$

Arvu I nimetatakse funktsiooni f *määratud integraaliks* lõigus $[a,b]$ ja tähistatakse $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Olgu $[a,b] \subset X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.
Lause. f int-v lõigus $[a,b]$ $\implies$ f tõkestatud lõigus $[a,b]$.
Lause. f pidev lõigus $[a,b]$ $\implies$ f int-v lõigus $[a,b]$.
Lause. f-l lõplik või loenduv arv katkevuspunkte lõigus $[a,b]$ $\implies$ f int-v lõigus $[a,b]$.
Lause. f kasvav või kahanev lõigus $[a,b]$ $\implies$ f int-v lõigus $[a,b]$.
Olgu $[a,b] \subset X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ ja } g \text{ int-vad lõigus } [a,b], \\ \forall x \in [a,b] \ \ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right\} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause. Olgu $x_0 \in [a,b]$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ ja } g \text{ int-vad lõigus } [a,b], \\ \forall x \in [a,b] \ \ f(x) \leqslant g(x), \\ f \text{ ja } g \text{ on pidevad punktis } x_0, \\ f(x_0) < g(x_0) \end{array}\right\} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause. f int-v lõigus $[a,b]$ $\implies$ $\forall [a_1, b_1] \subset [a,b]$ f on int-v lõigus $[a_1, b_1]$.

Teoreem.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v lõigus } [a,b], \\ f \text{ pidev punktis } x_0 \in (a,b) \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \text{olgu } F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ kus } x \in [a,b], \\ F \text{ on dif-v punktis } x_0, \\ F'(x_0) = f(x_0). \end{array}\right.$$

Teoreem kehtib ka lõigu otspunktides $x_0 = a$ ja $x_0 = b$, aga väites saadakse sel juhul, et F-l eksisteerib lõplik ühepoolne tuletis vastavas otspunktis, mis võrdub vastavalt väärtusega $f(a)$ või $f(b)$.

Teoreem (Newton–Leibniz)**.**

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ pidev lõigus } [a,b], \\ G \text{ on } f \text{ algfunktsioon lõigus } [a,b] \end{array}\right\} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

Lause. f int-v lõikudes $[a,c]$ ja $[c,b]$ $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v lõigus } [a,b], \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause. f, g int-vad lõigus $[a,b]$ $\implies \displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v lõigus } [a,b], \\ \text{hulga } \{x \in [a,b]\colon f(x) \neq g(x)\} \text{ võimsus on lõplik} \end{array}\right\} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

130. Otsustage, millisesse integreeruvate funktsioonide klassi kuuluvad järgmised funktsioonid $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{|\sin x|}$;

b) $f(x) = \left\lfloor \dfrac{1}{x + 0{,}1} \right\rfloor$;

c) $f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor$;

d) $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \dfrac{\pi}{x}$;

e) $f(x) = (10x - \lfloor 10x \rfloor)\mathrm{e}^{|\sin x|}$.

131. Järgmisi integraale arvutamata (mõnda neist ei saagi elementaarfunktsioonide abil täpselt välja arvutada) tehke kindlaks, kas nad on positiivsed või negatiivsed ja kumb kahest integraalist on suurem.

a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \ln^3 x\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

132. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised punktis x.

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$;

b) $F(x) = \displaystyle\int_2^x \sin t\,\mathrm{d}t$;

c) $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$;

d) $F(x) = \displaystyle\int_2^{\exp x} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$;

e) $F(x) = \displaystyle\int_x^3 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

f) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$;

g) $F(x) = \displaystyle\int_x^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$;

h) $F(x)=\int_x^{2x}\ln^2 t\,\mathrm{d}t$; i) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$; j) $F(x)=\int_2^x \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

133. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$; e) $\int_{-5}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$; i) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$; f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; j) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{5\,\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2\,x}$;

c) $\int_1^{\ln 3}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; g) $\int_1^4\frac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_1^4\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_{-1}^3(2^x+1)\,\mathrm{d}x$; l) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

134. Integreerige järgmised funktsioonid, võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna.

a) $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{kui } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2, & \text{kui } 0<x\leqslant 1;\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x}, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}, & \text{kui } \dfrac{\pi}{4}<x\leqslant \dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{kui } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<0,\\ 1-x^2, & \text{kui } 0\leqslant x<1;\\ \mathrm{e}^x, & \text{kui } 1\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

135. Määrake arv ξ nii, et kehtiks võrdus $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

a) $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; d) $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

136. Leidke järgmised integraalid.

a) $\int_{-1}^2|x|\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$; e) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{|x|}}{2}\,\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^4|x-2|\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^3|x(x-2)|\,\mathrm{d}x$;

137*. Olgu $p>0$. Riemanni integraali kasutades leidke piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}\right).$$

22. Määratud integraal.

Olgu $a>0$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v lõigus } [0,a], \\ \forall x\in[0,a]\ \ f(-x)=-f(x) \end{array}\right\} \implies \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v lõigus } [0,a], \\ \forall x\in[0,a]\ \ f(-x)=f(x) \end{array}\right\} \implies \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

138. Leidke järgmised sümmeetrilisel lõigul antud integraalid.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x;$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2};$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x;$

d) $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos x+\tan\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x;$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^5+x^4+15x^3+4)\,\mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x;$

h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x|+|\sin x|)\,\mathrm{d}x.$

139. Leidke järgmised integraalid diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x;$

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{t+1};$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x+3)^3\,\mathrm{d}x;$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2x+\pi)\,\mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int_{0}^{4} (4-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x;$

f) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+4}};$

g) $\displaystyle\int_{-2}^{5} \mathrm{e}^{5-x}\,\mathrm{d}x;$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{8\,\mathrm{d}x}{1+4x^2};$

i) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{4+9x^2};$

j) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}};$

k) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{10}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}};$

l) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x};$

m) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x};$

n) $\displaystyle\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x;$

o) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\mathrm{e}^x-1)^4\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x;$

p) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x;$

q) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x;$

r) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x;$

s) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}.$

140. Kasutades muutuja vahetust, leidke järgmised integraalid.

a) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}};$

b) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x};$

c) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+2x}};$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5};$

e) $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x-x^2}};$

f) $\displaystyle\int_{-0,5}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+2x-x^2}};$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x};$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{d}x}{3+2\cos x}.$

141. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

a) $\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^{1} xe^x\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{1} x\arctan x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{3} \ln(x+3)\,\mathrm{d}x$;

f) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{1} x^3 e^x\,\mathrm{d}x$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,\mathrm{d}x$;

i) $\int_1^{\exp\pi} \sin\ln x\,\mathrm{d}x$;

j) $\int_1^{2} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

142. Leidke järgmised **määramata** integraalid.

a) $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,\mathrm{d}x$;

f) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

143*. Olgu f lõigul $[0,a]$ pidev funktsioon, kus $a>0$, kusjuures $f(x)+f(a-x)\neq 0$ iga $x\in[0,a]$ korral. Arvutage määratud integraal $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x$.

144*. Funktsioon f on pidev lõigus $[0,1]$. Tõestage, et kehtib võrdus

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

23. Määratud integraal ja päratu integraal.

Olgu $a\in\mathbb{R}$, $[a,\infty)\subset X\subset\mathbb{R}$, $f\colon X\to\mathbb{R}$. Olgu $\forall l\in(a,\infty)$ korral f int-v lõigus $[a,l]$.

$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{l\to\infty}\int_a^{l} f(x)\,\mathrm{d}x$ (*päratu integraal*).

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal protsessi $x\to-\infty$ jaoks.

Päratu integraal $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ on *koonduv* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$.

Olgu $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\text{päratu integraal } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ on } \textit{koonduv} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists c\in\mathbb{R}: \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R},\\ \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Päratu integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ on koonduv $\Longrightarrow$ $\forall c\in\mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Olgu $b\in\mathbb{R}$, $[a,b)\subset X\subset\mathbb{R}$, $f\colon X\to\mathbb{R}$. Olgu $\forall l\in[a,l]$ korral f int-v lõigus $[a,l]$, kusjuures f olgu tõkestamata poollõigus $[a,b)$.

$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{l\to b-}\int_a^{l} f(x)\,\mathrm{d}x$ (*päratu integraal*).

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal protsessi $x\to a+$ jaoks.

Analoogiliselt protsessiga $x\to\infty$ defineeritakse tõkestamata funktsiooni päratu integraali koonduvus.

Kui päratu integraal ei ole koonduv, siis öeldakse, et ta on *hajuv*.

145. Leidke järgmised integraalid.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$;

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_0^{1} 2^{4x+5}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_0^{4} 3^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

f) $\displaystyle\int_{\pi^2}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$;

h) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}$;

i) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

k) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x$;

l) $\displaystyle\int_1^{5} (x-3)^5\mathrm{e}^{|x-3|}\,\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$;

n) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$;

p) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

q) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x}}$;

r) $\displaystyle\int_1^{\exp\frac{\pi}{2}} x\cos\ln x\,\mathrm{d}x$;

s) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$;

t) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1}$;

u) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x$;

w) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\cos^3 x\right|\sin x\,\mathrm{d}x$;

x) $\displaystyle\int_0^{\pi} |1-2\sin x|\,\mathrm{d}x$.

146. Arvutage järgmised integraalid või veenduge nende hajuvuses.

a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

b) $\displaystyle\int_0^{2} \sqrt[3]{\frac{2}{x}}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x}$;

d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$;

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$;

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$;

j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

k) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$;

l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$;

m) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$;

n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

o) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x$;

p) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;

q) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

r) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$;

s) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\sin x\,\mathrm{d}x$;

t) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

u) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$;

v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$;

w) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x}\,\mathrm{d}x$;

x) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

147*. Veenduge, et päratu integraal $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x} x^\alpha \,\mathrm{d}x$ on koonduv mistahes reaalarvu α korral.
Näpunäide: Veenduge, et $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha+2} = 0$ *ning kasutage seda väidet ülesande lahendamisel.*

148*. Tõestage, et päratu integraal

$$\int_1^\infty \frac{\arctan 2x - \arctan x}{x} \,\mathrm{d}x$$

koondub.
Näpunäide. Avaldage $\arctan 2x - \arctan x$ ühe arkustangensina, kasutades seost $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

24. Kujundi pindala ja keha ruumala.

Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]\ \ f(x) \geqslant 0$, olgu f pidev.
Hulka $D = \{(x,y)\colon x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\}$ nimetatakse *kõvertrapetsiks*.
Olgu D kõvertrapets.
Tähistame $S^* = \inf\limits_{T\in\mathfrak{T}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\max\limits_{t\in[x_{k-1},x_k]} f(t)\right)\cdot\Delta_k$, $S_* = \sup\limits_{T\in\mathfrak{T}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\min\limits_{t\in[x_{k-1},x_k]} f(t)\right)\cdot\Delta_k$.
Kõvertrapetsil D leidub pindala $\overset{\text{def}}{\iff}$ $S^* = S_*$.
$S^* = S_* \implies S_D \overset{\text{def}}{=} S^*$ (kõvertrapetsi *pindala*).
Lause. $S_D = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, olgu f pidev. Leidugu $m \in \mathbb{R}$ nii, et $\forall x \in [a,b]\ \ f(x) \geqslant m$.
Tähistame $D = \{(x,y)\colon x \in [a,b],\ y \in [m, f(x)]\}$.
Olgu $f_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kus $f_1(x) = f(x) - m$. Tähistame $D_1 = \{(x,y)\colon x \in [a,b], y \in [0, f_1(x)]\}$.
$S_D \overset{\text{def}}{=} S_{D_1}$ (hulga D *pindala*).
Olgu nüüd $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]\ \ f(x) \leqslant g(x)$, olgu f ja g pidevad.
Olgu $D = \{(x,y)\colon x \in [a,b],\ y \in [f(x), g(x)]\}$.
Tähistame $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (miinimum eksisteerib Weierstrassi teoreemi tõttu),
$D_1 = \{(x,y)\colon x \in [a,b], y \in [m, f(x)]\}$ ning $D_2 = \{(x,y)\colon x \in [a,b], y \in [m, g(x)]\}$.
$S_D \overset{\text{def}}{=} S_{D_2} - S_{D_1}$ (hulga D *pindala*).
Lause. $S_D = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.
Olgu $\varrho\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $\forall \theta \in [\alpha,\beta]\ \ \varrho(\theta) \geqslant 0$, olgu ϱ pidev.
Hulka $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\colon \varphi \in [\alpha,\beta],\ r \in [0, \varrho(\varphi)]\}$ nimetatakse *kõversektoriks*.
Olgu D kõversektor. Olgu lõigu $[\alpha,\beta]$ alajaotuste hulk $\mathfrak{T}$.
Tähistame $S^* = \inf\limits_{T\in\mathfrak{T}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\max\limits_{\tau\in[\omega_{k-1},\omega_k]} \dfrac{\varrho(\tau)^2}{2}\right)\cdot\Delta_k$, $S_* = \sup\limits_{T\in\mathfrak{T}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\min\limits_{\tau\in[\omega_{k-1},\omega_k]} \dfrac{\varrho(\tau)^2}{2}\right)\cdot\Delta_k$.
Kõversektoril D leidub pindala $\overset{\text{def}}{\iff}$ $S^* = S_*$.
$S^* = S_* \implies S_D \overset{\text{def}}{=} S^*$ (kõversektori *pindala*).
Lause. $S_D = \int_\alpha^\beta \dfrac{\varrho(\omega)^2}{2}\,\mathrm{d}\omega$.

Olgu nüüd $K \subset [a,b] \times \mathbb{R}^2$. Iga $x \in [a,b]$ korral tähistame $D_x = \{(y,z)\colon (x,y,z) \in K\}$. Nõuame, et keha K rahuldaks järgmisi tingimusi:
1) $\forall x \in [a,b]\ \exists S_{D_x}$;
2) $\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ \ \big(D_{x_1} \subset D_{x_2}\big) \vee \big(D_{x_2} \subset D_{x_1}\big)$;
3) tähistame $S\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kus $S(x) = S_{D_x}$, olgu S pidev.

Tähistame $V^* = \inf\limits_{T \in \mathfrak{T}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\max\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} S(t) \right) \cdot \Delta_k$, $V_* = \sup\limits_{T \in \mathfrak{T}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\min\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} S(t) \right) \cdot \Delta_k$.

Kehal K leidub ruumala $\overset{\text{def}}{\iff}$ $V^* = V_*$.
$V^* = V_* \implies V_K \overset{\text{def}}{=} V^*$ (keha K *ruumala*).

Lause. $V_K = \displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

149. Leidke järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad ($a, b > 0$).

a) $y = x^2$ ja $y^2 = 8x$;
b) $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$ ja $x = 1$;
c) $y = 2x - x^2$ ja $x + y = 0$;
d) $y = x^2$ ja $y = x^3$;
e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$ ja $x = \dfrac{\pi}{2}$;
f) $y = \sin x$, $y = -\sin x$, $x = 0$ ja $x = \pi$;
g) $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ja $x = \mathrm{e}$;
h) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ellips);
i) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$;
j) $y = x^2 \ln x$ ja $y = 0$;
k) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (kardioid);
l) $r = a \sin 3\varphi$ (kolmeleheline roos);
m) $r = 2a(2 + \cos\varphi)$;
n) $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$;
o) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

150. Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade ruumalad (a, b ja c on positiivsed konstandid).

a) $x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$, $x = 0$ ja $z = 0$;
b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \dfrac{c}{a}x$ ($x \geqslant 0$) ja $z = 0$;
c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (ellipsoid);
d) $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

151. Leidke ruumalad kehadel, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x-telje.

a) $y = \sin x$ ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) ja $y = 0$;
b) $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$ ja $x = 4$;
c) $y = x^2$ ja $y^2 = x$;
d) $y = \sin^2 x$ ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) ja $y = 0$;
e) $y = \mathrm{e}^{-x}$ ($0 \leqslant x < \infty$) ja $y = 0$;
f) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ ($a > 0$), $x = -a$, $x = a$ ja $y = 0$ (aheljoon);
g) $y^2 = x^3$ ja $x = 1$ (poolkuupparabool);
h) $x^2 - y^2 = a^2$ ja $x = 2a$ (hüperbool).

152. Leidke kera segmendi ruumala, kui kera raadius on r ja segmendi kõrgus on h.

25. Joone kaare pikkus.

Olgu I intervall. Olgu $\varphi_1, \varphi_2\colon I \to \mathbb{R}$. Olgu $\gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

Joon $\gamma(I)$ on *kaar* $\overset{\text{def}}{\iff}$ I on lõik.

Joon $\gamma(I)$ on *lihtne* $\overset{\text{def}}{\iff}$ γ on injektiivne.

Joon $\gamma(I)$ on *pidev* $\overset{\text{def}}{\iff}$ φ_1 ja φ_2 on pidevad.

Joon $\gamma(I)$ on *sile* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \varphi_1 \text{ ja } \varphi_2 \text{ on dif-vad,} \\ \varphi_1' \text{ ja } \varphi_2' \text{ on pidevad.} \end{cases}$

Kaar $\gamma([a,b])$ on *lihtne kinnine* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \gamma(a) = \gamma(b), \\ \forall\, t_1, t_2 \in [a,b) \;\; \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2. \end{cases}$

Olgu $L := \gamma([a,b])$ lihtne pidev kaar. Olgu $T[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ lõigu $[a,b]$ alajaotus.
Tähistame $\lambda(T) = \max\limits_{k=1,\ldots,n} (t_k - t_{k-1})$.

Tähistame $p(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})\big)^2 + \big(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})\big)^2}$.

Lühidalt öeldes on $p(T)$ sellise kõõlmurdjoone pikkus, mille tipud on punktid $\gamma(t_k)$, kus $k = 1, \ldots, n$.
Kaare L *pikkuseks* nimetatakse piirväärtust $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p(T)$. Tähis: ℓ_L.

Kaar L on *sirgestuv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \ell_L$.

Lause. L lihtne sile kaar $\Longrightarrow$ $\begin{cases} L \text{ on sirgestuv,} \\ \ell_L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, \mathrm{d}t. \end{cases}$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} L := \gamma([a,b]) \text{ lihtne pidev kaar,} \\ a < c < b, \\ L_1 := \gamma([a,c]) \text{ ja } L_2 := \gamma([c,b]) \text{ sirgestuvad} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} L \text{ on sirgestuv,} \\ \ell_L = \ell_{L_1} + \ell_{L_2}. \end{cases}$$

NB! Ülaltoodud mõisted saab defineerida ja tulemused kehtivad ka juhul, kui mõiste „lihtne“ asendada mõistega „lihtne kinnine“.

153. Leidke järgmiste joonte märgitud kaarte pikkused.

a) $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$;

b) $y = \ln x$ $(\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8})$;

c) $y = \ln\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2})$;

d) $y = \arcsin \mathrm{e}^{-x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

e) $y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)$ $(1 \leqslant x \leqslant 1 + a)$;

f) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ $(-a \leqslant x \leqslant a)$ (aheljoon).

154. Leidke järgmiste joonte pikkused.

a) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

b) $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ (ellipsi evoluut e. kõverusringjoonte keskpunktide poolt joonistatud kõver);

c) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ (kardioid);

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (astroid);

e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellips);

f) $r = a\varphi$ esimene keerd (Archimedese spiraal);

g) $r\varphi = 1$ punktist $(2, \frac{1}{2})$ kuni punktini $(\frac{1}{2}, 2)$ (hüperboolne spiraal);

h) $r = \varphi^2$, $\varphi \in \left[0, \sqrt{5}\right]$;

i) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (kardioid);

j) $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, kus $1 \leqslant r \leqslant 3$.

Vastused ja lahendused

1. a) $\sum\limits_{k=1}^{5} k$; b) $\sum\limits_{k=0}^{5} (-1)^k$; c) $\sum\limits_{k=1}^{6} 1$; d) $\sum\limits_{k=1}^{5} (-1)^{k-1}k^2$; e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; f) $\sum\limits_{k=1}^{7} k^{(-1)^{k-1}}$; g) $\sum\limits_{k=1}^{10} a_k$; h) $\sum\limits_{i=0}^{k} q^i$; i) $\sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.
2. a) $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$; b) $3^2+3^3+3^4+3^5$; c) $(2+0)+(2+1)+(2+2)+(2+3)+(2+4)$;
d) $-\ln 1+\ln 2-\ln 3+\ldots+(-1)^n\ln n$; e) 5; f) $\underbrace{3+3+\ldots+3}_{n+1 \text{ liidetavat}}$.

3. a) $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = a_0+a_1+\ldots+a_n = a_{k-k}+a_{(1+k)-k}+\ldots+a_{(n+k)-k} = \sum\limits_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$;
b) $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n = a_{(m-k)+k}+a_{(m-k+1)+k}+\ldots+a_{(n-k)+k} = \sum\limits_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$;
c) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) = (a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$; d) $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = ca_1+ca_2+\ldots+ca_n = c(a_1+a_2+\ldots+a_n) = c\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, kus $c=\text{const}$.
4. a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{1}{2}\cdot((1+(2n-1))+(3+(2n-3))+\ldots+((2n-1)+1)) = \frac{1}{2}\cdot n\cdot 2n = n^2$;
b) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\ldots+2n = \frac{1}{2}\cdot((2+2n)+(4+(2n-2))\ldots+(2n+2)) = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(2n+2) = n(n+1)$;
c) $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1}{1-x}\cdot(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$;
d) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$.
5. a) $X = \left\{\frac{n-1}{n^2+1} : n=1,2,\ldots\right\} = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{3}{17}, \frac{2}{13}, \ldots, \frac{n-1}{n^2+1}, \ldots\right\}$.
Näitame, et $\min X = 0$. Tõestame selleks, et iga $n\in\mathbb{N}$ korral kehtib $\frac{n-1}{n^2+1}\geqslant 0$. See võrratus on samaväärne võrratusega $n-1\geqslant 0$, mis ilmselt kehtib.
Näitame, et $\max X = \frac{1}{5}$. Tõestame selleks, et iga $n\in\mathbb{N}$ korral kehtib $\frac{n-1}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{5}$. See võrratus on samaväärne võrratusega $5\cdot(n-1)\leqslant n^2+1$ ehk $n^2-5n+6\geqslant 0$ ehk $(n-2)(n-3)\geqslant 0$. See tähendab, et $n\leqslant 2$ või $n\geqslant 3$. Viimane tingimus on kõigi naturaalarvude n korral täidetud.
Kuna vähim ja suurim element on olemas, siis alumine ja ülemine raja võrduvad vastavalt nendega, seega $\inf X = 0$ ja $\sup X = \frac{1}{5}$.
b) $X = \left\{\frac{1}{n} : n=1,2,\ldots\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.
Näitame, et hulgas X vähimat elementi ei leidu. Oletame väitevastaselt, et $\frac{1}{n_0}$ on hulga X vähim element. Siis peaks kehtima võrratus $\frac{1}{n_0}\leqslant\frac{1}{n_0+1}$. See tähendab, et $n_0+1\leqslant n_0$, mis on võimatu.
Näitame, et $\min X = 1$. Tõestame selleks, et iga $n\in\mathbb{N}$ korral kehtib $\frac{1}{n}\leqslant 1$. See võrratus on samaväärne ilmselt kehtiva võrratusega $n\geqslant 1$.
Näitame, et $\inf X = 0$. Kõigepealt, iga $n\in\mathbb{N}$ korral kehtib ilmselt $\frac{1}{n}\geqslant 0$. Seega 0 on hulga X alumine tõke

ning on jäänud näidata, et ta on suurim alumine tõke. Kui arv a on selline, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\frac{1}{n} \geqslant a$, siis on kaks võimalust. Esiteks võib olla $a > 0$. Siis oleks võrratus $\frac{1}{n} \geqslant a$ samaväärne võrratusega $n \leqslant \frac{1}{a}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. See on võimatu, sest leidub kuitahes suuri naturaalarve. Järelikult peab kehtima teine variant: $a \leqslant 0$. Oleme näidanud, et 0 on hulga X suurim alumine tõke, mistõttu $\inf X = 0$.
Kuna hulga X suurim element on 1, siis $\sup X = 1$.

c) Analoogiline ülesandega b). $\max X$ ei leidu, $\inf X = \min X = 2$, $\sup X = 3$.

d) $X = \left\{\frac{n(-1)^n}{n+1} : n = 1, 2, \ldots\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots, \frac{n(-1)^n}{n+1}, \ldots\right\}$.
Näitame, et hulgas X vähimat ega suurimat elementi ei leidu. Oletame, et hulgas X leidub vähim element, siis ta ilmselt on negatiivne, kuna igast positiivsest elemendist on näiteks $-\frac{1}{2}$ väiksem. Olgu $-\frac{n_0}{n_0+1}$ hulga X vähim element, siis peaks kehtima muuseas ka $-\frac{n_0}{n_0+1} \leqslant -\frac{n_0+2}{(n_0+2)+1}$ ehk $\frac{n_0}{n_0+1} \geqslant \frac{n_0+2}{n_0+3}$, mis on samaväärne võrratusega $n_0 \cdot (n_0 + 3) \geqslant (n_0 + 1) \cdot (n_0 + 2)$ ehk $0 \geqslant 2$, vastuolu.
Analoogilise argumendiga saame järeldada vastuolu sellest, et mingi element $\frac{n_0}{n_0+1}$ on hulga X suurim element.
Näitame, et $\inf X = -1$. Kõigepealt, -1 on hulga X alumine tõke, sest $-1 \leqslant -\frac{n}{n+1}$, kuna $n + 1 \geqslant n$ (kui n on paaritu) ning ilmselt $-1 \leqslant \frac{n}{n+1}$ (kui n on paaris). Olgu nüüd arv a hulga X mingi alumine tõke, see tähendab, $a \leqslant -\frac{n}{n+1}$ (kõigi paaritute n-de korral) ja $a \leqslant \frac{n}{n+1}$ (kõigi paaris n-de korral). Võrratus $a \leqslant -\frac{n}{n+1}$ annab, et $an + a + n \leqslant 0$ ehk $n(a+1) \leqslant -a$. Juhul $a > -1$ saame, et $n \leqslant \frac{-a}{a+1}$, mis on võimatu, kuna leidub kuitahes suuri paarituid arve. Järelikult kehtib $a \leqslant -1$, mis annab, et -1 on hulga X suurim alumine tõke, st. $\inf X = -1$.
Analoogilise argumendiga näitame, et $\sup X = 1$. (Kasutada tuleb põhiliselt paarisarvuliste n väärtuste korral saadavaid hulga X elemente.)

e) $X = [0, 1]$.
Lõigu definitsiooni põhjal $0 \leqslant x \leqslant 1$ iga $x \in X$ korral ning samas $0, 1 \in X$. Seega $\min X = 0$ ja $\max X = 1$. Järelikult ka $\inf X = 0$ ja $\sup X = 1$.

f) $X = (0, 1)$.
Näitame, et hulgas X vähimat ega suurimat elementi ei leidu. Oletame, et x on hulga X vähim element, siis $0 < x < 1$ (kuna $x \in X$). Seega ka $0 < \frac{x}{2} < x < 1$, kusjuures seetõttu, et x on hulga X vähim element, peab kehtima $\frac{x}{2} \geqslant x$. See on võimatu.
Oletame nüüd, et x on hulga X suurim element, siis $0 < x < 1$. Seega ka $0 < x < \frac{x+1}{2} < 1$, kusjuures seetõttu, et x on hulga X suurim element, peab kehtima $\frac{x+1}{2} \leqslant x$. See on võimatu.
Näitame, et $\inf X = 0$ ja $\sup X = 1$. Kõigepealt, $0 \leqslant x$ iga $x \in X$ korral, see tähendab, 0 on hulga X alumine tõke. Olgu nüüd a selline, et $a \leqslant x$ iga $x \in X$ korral. Kui $a > 0$, siis $0 < \frac{a}{2} < a \leqslant x$ iga $x \in X$ korral, kusjuures $\frac{a}{2} \in X$, millest $a \leqslant \frac{a}{2}$. See on võimatu. Järelikult $a \leqslant 0$, mis tähendab, et 0 on hulga X suurim alumine tõke ehk $\inf X = 0$.
Analoogiliselt näitame, et $\sup X = 1$.

g) $X = \{-1\} \cup (0, 1)$. Ilmselt $\min X = -1$, seega $\inf X = -1$. Analoogiliselt ülesandega f) saame, et $\max X$ ei leidu ja $\sup X = 1$.

h) $X = \{n^2 - 2n + 3 \colon n = 1, 2, \ldots\} = \{2, 3, 6, 11, 18, \ldots, n^2 - 2n + 3, \ldots\}$.
Näitame, et $\min X = 2$. Selleks näitame, et mistahes naturaalarvu n korral $n^2 - 2n + 3 \geqslant 2$. Viimane võrratus on samaväärne võrratusega $(n-1)^2 \geqslant 0$, mis ilmselt kehtib.
Näitame, et hulgas X suurimat elementi ei leidu. Oletame, et $n_0^2 - 2n_0 + 3$ on hulga X suurim element, siis peab kehtima $n_0^2 - 2n_0 + 3 \geqslant (n_0 + 1)^2 - 2(n_0 + 1) + 3$ ehk $0 \geqslant 2n_0 + 1 - 2$. Viimane võrratus tähendab, et $2n_0 \leqslant 1$, mis on võimatu.
Kuna $\min X = 2$, siis $\inf X = 2$.

Näitame, et $\sup X = \infty$, see tähendab, et hulk X on ülalt tõkestamata. Oletame, et M on hulga X ülemine tõke, see tähendab, $n^2 - 2n + 3 \leqslant M$ iga naturaalarvu n korral. See annab, et $(n-1)^2 \leqslant M - 2$ iga naturaalarvu n korral. Viimane tingimus ei kehti, kuna leidub kuitahes suuri naturaalarvude ruutusid. Saadud vastuolu näitab, et hulk X on ülalt tõkestamata.
i) $X = [-1, \infty)$.
Põhjendus, et $\min X = \inf X = -1$, on analoogiline ülesandes e)) toodud põhjendusega.
Näitame, et hulgas X suurimat elementi ei leidu. Kui x_0 oleks hulga X suurim element, siis peaks kehtima ka $x_0 + 1 \leqslant x_0$ (kuna ka $x_0 + 1 \in X$), mis on võimatu.
Näitame, et $\sup X = \infty$, see tähendab, et hulk X on ülalt tõkestamata. Oletame, et M on hulga X ülemine tõke, see tähendab, $x \leqslant M$ iga $x \in X$ korral. Kuna $1 \leqslant M < M+1$, siis ka $M+1 \in X$, mis tähendab võrratust $M + 1 \leqslant M$, vastuolu. Järelikult hulk X on ülalt tõkestamata.
j) $X = (-1, \infty)$.
Põhjendused, et hulgas X vähimat ega suurimat elementi ei leidu, on analoogilised ülesannetes f)) ja i)) toodud põhjendustega.
Põhjendus, et $\inf X = -1$, on analoogiline ülesandes f)) toodud põhjendusega. Põhjendus, et $\sup X = \infty$, on analoogiline ülesandes i)) toodud põhjendusega.
k) $X = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.
Hulk X on lõplik; lihtsa võrdluse teel näeme, et $\min X = \inf X = \frac{1}{3}$ ning $\max X = \sup X = 2$.
8. a) $X = [-4, \infty)$; b) $X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; c) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) $X = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $X = (-2, 0]$; f) $X = (6, \infty)$; g) $X = [-2, 1) \setminus \{0\}$; h) $X = [0, 4) \setminus \{1\}$; i) $X = (-1, 1) \setminus \{0\}$; j) $X = [0, 1]$; k) $X = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$; l) $X = \mathbb{Q}$; m) $X = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; n) $X = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$; o) $X = \mathbb{Z}$; p) $X = (0, 2) \setminus \{1\}$; q) $X = [0, \infty)$; r) $X = (-1, 1)$.
9. a) Kuna $0 \leqslant x^2 \leqslant 25$ iga $x \in [-1, 5]$ korral, siis f on tõkestatud hulgas A.
b) Kuna $\frac{1}{x} \geqslant 1$ iga $x \in (0, 1)$ korral, siis f on alt tõkestatud hulgas A. Funktsioon f ei ole ülalt tõkestatud hulgas A. Oletame, et M on ülemine tõke funktsioonile f hulgas A, siis iga $x \in (0, 1)$ korral $\frac{1}{x} \leqslant M$. Siit järeldame, et $M \geqslant 2$ (näiteks seetõttu, et $0 < \frac{1}{\frac{1}{2}} \leqslant M$). Saame, et $x \geqslant \frac{1}{M}$ iga $x \in (0, 1)$ korral. See on võimatu, sest ka arv $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M}$ kuulub hulka $(0, 1)$, ent $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M} < \frac{1}{M}$.
c) Kuna $1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 2$ iga $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ korral, siis f on tõkestatud hulgas A.
d) Saame, et $\ln x \leqslant \ln 3$ iga $x \in (0, 3)$ korral, mistõttu $-\ln x \geqslant -\ln 3$ iga $x \in (0, 3)$ korral. Järelikult on funktsioon f hulgas A alt tõkestatud. Funktsioon f ei ole ülalt tõkestatud hulgas A. Oletame, et M on ülemine tõke funktsioonile f hulgas A, siis iga $x \in (0, 3)$ korral $-\ln x \leqslant M$. Siit saame, et $\ln x \geqslant -M$, millest potentseerides $x \geqslant \mathrm{e}^{-M}$. Sealjuures kindlasti $M > 0$, näiteks seetõttu, et $0 < -\ln \frac{1}{2} \leqslant M$. Saadud võrratus $x \geqslant \mathrm{e}^{-M}$ iga $x \in (0, 3)$ jaoks on võimatu, sest näiteks arv $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-M}$ kuulub samuti hulka $(0, 3)$ (see arv on positiivne ning $M > 0$ tõttu väiksem kui $\frac{1}{2}$), kuigi $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-M} < \mathrm{e}^{-M}$.
e) Kuna $5 \leqslant f(x) \leqslant 5$ iga $x \in (0, \pi)$ korral, siis f on tõkestatud hulgas A.
f) Kuna $f(x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ korral, siis $0 \leqslant f(x) \leqslant 0$ iga $x \in A$ korral, järelikult f on tõkestatud hulgas A.
10. Näiteks $f(x) = \sin x$ või $f(x) = \cos x$ (mõlemad on alt tõkestatud arvuga -1 ja ülalt arvuga 1).
11. Näiteks $f(x) = \cot \pi x$. Näeme, et f ei ole määratud ainult juhul $x = n$, kus $n \in \mathbb{Z}$. Sealjuures vahemikus $\left(n, n + \frac{1}{2}\right)$ saab f kuitahes suuri ja vahemikus $\left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right)$ saab f kuitahes väikesi väärtusi, kus $n \in \mathbb{Z}$.
12. Kui $|f(x)| \leqslant K$ iga $x \in A$ korral, siis $-K \leqslant f(x) \leqslant K$ iga $x \in A$ korral. Niisiis on f tõkestatud hulgas A. Vastupidi, olgu f tõkestatud hulgas A. Siis leiduvad m ja M, et $m \leqslant f(x) \leqslant M$ iga $x \in A$ korral. Tähistame $K = 1 + \max\{|m|, |M|\}$, siis $K \geqslant 1 > 0$ ning $K > |m|$ ja $K > |M|$.

Olgu nüüd $x \in A$. Saame, et $-K < -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| < K$. Seega $|f(x)| \leqslant K$ iga $x \in A$ korral.
13. Leidugu arvud m_1, m_2, M_1, M_2 nii, et $m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1$ ja $m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2$ kõigi $x \in A$ korral. Siis $m_1 + m_2 \leqslant f(x) + g(x) \leqslant M_1 + M_2$ kõigi $x \in A$ korral, mis tähendab, et h on hulgas A tõkestatud.
Ülesande 5 põhjal võime f ja g tõkestatuse eelduse panna kirja ka nii: leiduvad $K_1, K_2 > 0$ selliselt, et $|f(x)| \leqslant K_1$ ja $|g(x)| \leqslant K_2$ iga $x \in A$ korral. Järelikult $|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant K_1 K_2$ iga $x \in A$ korral. Oleme saanud, et funktsioon p on tõkestatud hulgas A.
17. a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \quad x > D \Rightarrow \big|f(x) - 6\big| < \varepsilon$;
b) $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow f(x) > E$;
c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$;
d) $\forall E > 0 \quad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \quad x < -D \Rightarrow f(x) > E$.
18. a) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2-5x) - 2| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$|(2-5x)-2| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |5x| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Niisiis, valides $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \Rightarrow \quad |(2-5x)-2| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
b) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(4x-7) - 5| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$|(4x-7)-5| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |4(x-3)| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Niisiis, valides $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \Rightarrow \quad |(4x-7)-5| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
c) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x-(-1)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x-1) - (-4)| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$|(3x-1)-(-4)| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x+3| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x-(-1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Niisiis, valides $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$0 < |x-(-1)| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x-(-1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad |(3x-1)-(-4)| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
d) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 + x - 2}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left| \frac{x^2 + x - 2}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x-1| < \varepsilon$$

(eeldusel, et $x \neq 1$ ehk $0 < |x-1|$). Niisiis, valides $\delta = \varepsilon$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x-1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 + x - 2}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
e) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{3x^2 + x}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left| \frac{3x^2 + x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \left| \frac{3x^2 + x - x}{x} \right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(eeldusel, et $x \neq 0$ ehk $0 < |x|$). Niisiis, valides $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{3x^2 + x}{x} - 1 \right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
f) Vaja on näidata, et

$$\forall E > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x+2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(x+2)^2} > E.$$

Fikseerime $E > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\frac{1}{(x+2)^2} > E \quad \Leftarrow \quad (x+2)^2 < \frac{1}{E} \quad \Leftarrow \quad |x+2| < \frac{1}{\sqrt{E}}$$

(eeldusel, et $x \neq -2$ ehk $0 < |x+2|$). Niisiis, valides $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$0 < |x+2| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x+2| < \frac{1}{\sqrt{E}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(x+2)^2} > E,$$

nagu soovitud.

g) Vaja on näidata, et

$$\forall E > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x < -D \quad \Rightarrow \quad \sqrt[5]{x+1} < -E$$

Fikseerime $E > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\sqrt[5]{x+1} < -E \quad \Leftarrow \quad x+1 < -E^5 \quad \Leftarrow \quad x < -(E^5+1).$$

Niisiis, valides $D = E^5 + 1$, kehtib ülalsaadu põhjal

$$x < -D \quad \Rightarrow \quad x < -(E^5+1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[5]{x+1} < -E,$$

nagu soovitud.

19. a) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x > D \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{5}{3\cdot|3x+2|} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x+2| > \frac{5}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 3x+2 > \frac{5}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 3x > \frac{5}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad x > \frac{5}{9\varepsilon}.$$

Olgu $D = \frac{5}{9\varepsilon}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x > D \quad \Rightarrow \quad x > \frac{5}{9\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.

b) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x < -D \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{5}{3\cdot|3x+2|} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x+2| > \frac{5}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 3x+2 < -\frac{5}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \quad 3x < -\left(\frac{5}{3\varepsilon} + 2\right) \quad \Leftarrow \quad x < -\left(\frac{5}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right).$$

Olgu $D = \frac{5}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x < -D \quad \Rightarrow \quad x < -\left(\frac{5}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.

c) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x < -D \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x-5}{3x+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\frac{2x-5}{3x+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{17}{3\cdot|3x+1|} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x+1| > \frac{17}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 3x+1 < -\frac{17}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \quad 3x < -\left(\frac{17}{3\varepsilon}+1\right) \quad \Leftarrow \quad x < -\left(\frac{17}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}\right).$$

Olgu $D = \frac{17}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x < -D \quad \Rightarrow \quad x < -\left(\frac{17}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x-5}{3x+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
d) Vaja on näidata, et

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists\delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{2x+1} - \sqrt{7}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\sqrt{2x+1} - \sqrt{7}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \left|\frac{2x-6}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{7}}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{2|x-3|}{\sqrt{7}} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x-3| < \frac{\varepsilon\sqrt{7}}{2}.$$

Olgu $\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{7}}{2}$, siis ülalsaadu põhjal

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-3| < \frac{\varepsilon\sqrt{7}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{2x+1} - \sqrt{7}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
e) Vaja on näidata, et

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists\delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < |x+8| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{1-x} - 3\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\sqrt{1-x} - 3\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \left|\frac{1-x-9}{\sqrt{1-x}+3}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{|x+8|}{3} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x+8| < 3\varepsilon.$$

Olgu $\delta = 3\varepsilon$, siis ülalsaadu põhjal

$$0 < |x+8| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x+8| < 3\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{1-x} - 3\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
f) Vaja on näidata, et

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x > D \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2+1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\frac{x^2+1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2\cdot(2x^2+1)} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad 2x^2+1 > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 2x^2 > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \quad x^2 > \frac{1}{4\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad x > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Olgu $D = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x > D \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2+1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
g) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x < -D \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^3+1}{2x^3+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\frac{x^3+1}{2x^3+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2\cdot|2x^3+1|} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |2x^3+1| > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 2x^3+1 < -\frac{1}{2\varepsilon} \quad \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \quad x^3 < -\left(1 + \frac{1}{4\varepsilon}\right) \quad \Leftarrow \quad x < -\sqrt[3]{1+\frac{1}{4\varepsilon}}.$$

Olgu $D = \sqrt[3]{1+\frac{1}{4\varepsilon}}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x < -D \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt[3]{1+\frac{1}{4\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^3+1}{2x^3+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
h) Vaja on näidata, et

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x > D \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{5x+1}{3x+7} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kehtivad implikatsioonid

$$\left|\frac{5x+1}{3x+7} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{32}{3\cdot|3x+7|} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x+7| > \frac{32}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad 3x+7 > \frac{32}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \quad 3x > \frac{32}{3\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad x > \frac{32}{9\varepsilon}.$$

Olgu $D = \frac{32}{9\varepsilon}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x > D \quad \Rightarrow \quad x > \frac{32}{9\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{5x+1}{3x+7} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon,$$

nagu soovitud.
i) Vaja on näidata, et

$$\forall E > 0 \qquad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x > D \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x+1} > E.$$

Fikseerime $E > 0$. Olukorras $x > D > 0$ saame, et

$$\frac{x^2}{x+1} > E \quad \Leftarrow \quad x^2 > E(x+1) \quad \Leftarrow \quad x^2 > E \quad \Leftarrow \quad x > \sqrt{E}.$$

Olgu $D = \sqrt{E}$, siis ülalsaadu põhjal

$$x > D \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x+1} > E,$$

nagu soovitud.

20. a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 5x^2 + 5) = 1^3 - 5\cdot 1^2 + 5 = 1;$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{3}{5};$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2};$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{1-1+1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3};$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} - \dfrac{1}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x^2+x+1} = \dfrac{3}{3} = 1;$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-\sqrt[3]{x+1}\right)\left(1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(x+1)}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}} = -\dfrac{1}{3};$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-(x^2+1)\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(1-(x^2+1)\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = \dfrac{2}{3}.$

21. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4-(x+3)}{(x+2)\cdot(x-1)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)} = -\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x+2)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)} = -\dfrac{1}{12};$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x+4)\cdot(x-4)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(x+4)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)} = \dfrac{1}{32};$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)\cdot\left(1+\sqrt{x+3}\right)}{1-(x+3)} = -\lim\limits_{x\to -2}\left(1+\sqrt{x+3}\right) = -2;$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arccos\log x}{\sin\frac{\pi x}{6}} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} = \pi;$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 4\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x} = 4\cdot 1 = 4;$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x} = \dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \dfrac{2}{3}\cdot 1 = \dfrac{2}{3};$

g) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1;$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \infty;$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{1+x}{x}\right| = \infty;$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\cos x - 1} = -\infty$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{|\sin x|} - \dfrac{1}{|\tan x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-|\cos x|}{|\sin x|} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{|\sin x|} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x}{2}\right|} = \lim\limits_{x\to 0}\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| = 0$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \mathrm{e}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-2}{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \mathrm{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

14. a) Kuna $n^2-(-1)^n \geqslant n^2-1$ ning $\lim\limits_n(n^2-1)=\infty$, siis $\lim\limits_n\left(n^2-(-1)^n\right)=\infty$.

b) $\lim\limits_n \dfrac{2n}{5n-1} = \lim\limits_n \dfrac{2\cdot n}{n\cdot\left(5-\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_n \dfrac{2}{5-\frac{1}{n}} = \dfrac{2}{5}$.

c) $\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n}+3\right) = 0+3 = 3$.

d) Kuna $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, mis annab, et $\sin n \in O(1)$ (tõkestatud suurus), ning $\lim\limits_n \dfrac{1}{2n} = 0$, siis $\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{2n}\sin n + \sqrt[n]{3}\right) = 0+1 = 1$.

e) $\lim\limits_n \dfrac{n^2+2n-6}{(3n-1)^2} = \lim\limits_n \dfrac{n^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(3-\frac{1}{n}\right)^2} = \dfrac{1}{9}$.

f) $\lim\limits_n\left(\dfrac{n}{n+1}+n^2\sin n\pi\right) = \lim\limits_n\left(\dfrac{n}{n+1}+n^2\cdot 0\right) = \lim\limits_n\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+0\right) = 1$.

g) $\lim\limits_n \dfrac{1+2+\ldots+n}{(2-3n)^2} = \lim\limits_n \dfrac{n(n+1)}{2\cdot(2-3n)^2} = \lim\limits_n \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2\cdot\left(\frac{2}{n}-3\right)^2} = \dfrac{1}{18}$.

h) $\lim\limits_n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} + \sqrt[n]{3n}\right) = \lim\limits_n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^2 + \lim\limits_n \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{3} = \mathrm{e}^2+1\cdot 1 = \mathrm{e}^2+1$.

i) $\lim\limits_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\sin 9} = \lim\limits_n \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\sin 9} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

j) Kuna $-\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{(-2)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ ning $\lim\limits_n\left(-\dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_n \dfrac{1}{2^n} = 0$, siis $\lim\limits_n \dfrac{1}{(-2)^n} = 0$. Niisiis $\lim\limits_n\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{(-2)^n}\right) = 0+0 = 0$.

k) Kuna $0 \leqslant 1+(-1)^n \leqslant 2$, siis $1+(-1)^n \in O(1)$ (tõkestatud suurus). Et $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} = 0$, siis $\lim\limits_n \dfrac{1+(-1)^n}{n} = \lim\limits_n \dfrac{1}{n}\cdot\left(1+(-1)^n\right) = 0$.

l) Saame, et $\cos n\pi = (-1)^n$. Jadal $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty} = (-1,1,-1,1,\ldots)$ on osajada $(-1,-1,-1,\ldots)$, mille piirväärtus on -1, ning osajada $(1,1,1,\ldots)$, mille piirväärtus on 1. Seega $\lim\limits_n(-1)^n$ ei eksisteeri.

m) Jadal $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},\ldots\right)$ on osajada $(2,4,6,\ldots)$, mille piirväärtus on ∞, ning osajada $\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\ldots\right)$, mille piirväärtus on 0. Seega $\lim\limits_n n^{(-1)^n}$ ei eksisteeri.

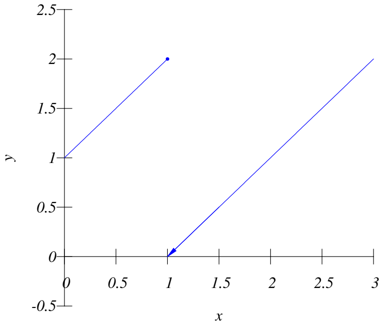
n) Jadal $\left((-1)^n n\right)_{n=1}^{\infty} = (-1,2,-3,4,-5,\ldots)$ on osajada $(2,4,6,\ldots)$, mille piirväärtus on ∞, ning osajada

$(-1,-3,-5,\ldots)$, mille piirväärtus on $-\infty$. Seega $\lim_n (-1)^n n$ ei eksisteeri.

o) Jadal $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \ldots\right)$ on osajada $(1,1,1,\ldots)$, mille piirväärtus on 1, ning osajada $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$, mille piirväärtus on 0. Seega $\lim_n x_n$ ei eksisteeri.

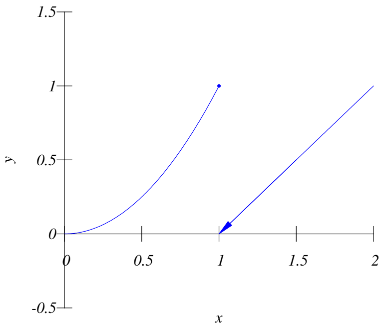
22. a) $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < a - x < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > E$;
b) $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > E$;
c) $\forall E > 0 \quad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x > D \quad \Rightarrow \quad f(x) < -E$;
d) $\forall E > 0 \quad \exists D > 0 \quad : \quad \forall x \qquad x < -D \quad \Rightarrow \quad f(x) > E$.

23. a) `f(x) := if x>=0 and x<=1 then x+1 else if x>1 and x<=3 then x-1;`
`plot2d(f(x),[x,0,3]);`



$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x+1) = 1+1 = 2$;
$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x-1) = 1-1 = 0$;
$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x-1) = 2-1 = 1$, mistõttu ka vastavad ühepoolsed piirväärtused on võrdsed 1-ga.

b) `f(x) := if x>=0 and x<=1 then x^2 else if x>1 and x<=2 then x-1;`
`plot2d(f(x),[x,0,2]);`



$\lim_{x\to 0-} f(x)$ ei eksisteeri, kuna $f(x)$ pole määratud, kui $x < 0$;
$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$;
$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 = 1$;
$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x-1) = 1-1 = 0$.

24. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\cdot\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{5}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=1;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+1}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}=3;$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x-\ln 2}{x^3+\sin 2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln 2}{x^3}}{1+\frac{\sin 2}{x^3}}=0;$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x+2}{x+\sqrt[3]{x}}+2^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}+\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=5+0=5;$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}{x\cdot\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}{x\cdot\left(1+\frac{5}{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}x\cdot\dfrac{\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}{1+\frac{5}{x}}=-1;$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-2.$

25. a) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}=1;$

b) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1;$

c) $\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x-2}{x-2}=1;$

d) $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{2-x}{x-2}=-1;$

e) $\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{x}{x-3}=\infty;$

f) $\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{x}{x-3}=-\infty;$

g) $\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{x^2-9}{|x+3|}=\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3+}(x-3)=-6;$

h) $\lim\limits_{x\to-3-}\dfrac{x^2-9}{|x+3|}=\lim\limits_{x\to-3-}\dfrac{(x+3)(x-3)}{-x-3}=\lim\limits_{x\to-3+}(3-x)=6;$

i) valime $x_n=\frac{1}{n}$, siis $\lim\limits_n x_n=0$ ja $\lim\limits_n\dfrac{x_n}{|x_n|}=1$; valime $\tilde{x}_n=-\frac{1}{n}$, siis $\lim\limits_n\tilde{x}_n=0$ ja $\lim\limits_n\dfrac{\tilde{x}_n}{|\tilde{x}_n|}=-1$; Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus puudub;

j) valime $x_n=-2\pi n$, siis $\lim\limits_n x_n=-\infty$ ja $\lim\limits_n\cos x_n=1$; valime $\tilde{x}_n=-2\pi n+\frac{\pi}{2}$, siis $\lim\limits_n\tilde{x}_n=-\infty$ ja $\lim\limits_n\cos\tilde{x}_n=0$; Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus puudub;

k) valime $x_n=\frac{1}{2\pi n}$, siis $\lim\limits_n x_n=0$ ja $\lim\limits_n\sin\dfrac{1}{x_n}=0$; valime $\tilde{x}_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$, siis $\lim\limits_n\tilde{x}_n=0$ ja $\lim\limits_n\sin\dfrac{1}{\tilde{x}_n}=1$; Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus puudub;

l) valime $x_n=2n$, siis $\lim\limits_n x_n=\infty$ ja $\lim\limits_n(-1)^{\lfloor x_n\rfloor}=1$; valime $\tilde{x}_n=2n+1$, siis $\lim\limits_n\tilde{x}_n=\infty$ ja $\lim\limits_n(-1)^{\lfloor x_n\rfloor}=$

-1; Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus puudub;

m) kuna $|\sin x| \leqslant 1$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, siis $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$;

n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x \arctan x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x^2 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+2+\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$;

o) kuna $0 \leqslant f(x) \leqslant x$ ja $\lim\limits_{x\to0} x = 0$, siis $\lim_{x\to0} f(x) = 0$;

p) $\lim\limits_{x\to0+} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0$;

q) $\lim\limits_{x\to0-} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 1$;

r) $\lim\limits_{x\to0-} \left(2^{\frac{1}{x}} + \frac{\sin x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$;

s) $\lim\limits_{x\to0+} \left(2^{\frac{1}{x}} + \frac{\sin x}{x}\right) = \infty$;

t) Kasutame ahelvõrratust $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$, mis kehtib iga $y \in \mathbb{R}$ korral. Saame, et $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$, millest korrutades positiivse arvuga x (protsess on $x \to 0+$) saame $x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) < x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant x \cdot \frac{1}{x}$, mis annab, et $1 - x < x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$. Siit järeldub keskmise muutuja omaduse abil, et $\lim\limits_{x\to0+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

u) Saame, et $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$, millest korrutades negatiivse arvuga x (protsess on $x \to 0-$) saame $x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) > x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant x \cdot \frac{1}{x}$, mis annab, et $1 - x > x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1$. Siit järeldub keskmise muutuja omaduse abil, et $\lim\limits_{x\to0-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

v) Eeldades, et $0 < x < 1$, kehtib $\lfloor x \rfloor = 0$, mistõttu $\lim\limits_{x\to0+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 0$.

w) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.

27. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \mathrm{e}^2 \cdot 1 = \mathrm{e}^2$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+\ln 2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1+\ln 2} = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^6 \cdot \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3 = \mathrm{e}^6 \cdot 1 = \mathrm{e}^6$.

28. a) Kuna $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+100}{x^3} = 0$, siis $\beta \in o(\alpha)$, seega ka $\beta \in O(\alpha)$.

b) Kuna $\lim\limits_{n} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\limits_{n} \frac{\sqrt[3]{n^6+1}}{n^2} = 1$, siis $\alpha \in \Theta(\beta)$ ja vastupidi.

c) Kuna $\lim\limits_{n} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\limits_{n} \frac{\log_2 n}{n} = \lim\limits_{n} \log_2 \sqrt[n]{n} = 0$, siis $\alpha_n \in o(\beta_n)$, muidugi siis ka $\alpha_n \in O(\beta_n)$.

d) Kuna $\log_2 n = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$, siis $\alpha_n \in \Theta(\beta_n)$ ja vastupidi.

e) Kuna $\lim\limits_n \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\limits_n \dfrac{5n^2}{n^2+8} = 5$, siis $\alpha_n \in \Theta(\beta_n)$ ja vastupidi.

f) Kuna $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)^7}{3(x-4)} = 0$, siis $\alpha \in o(\beta)$, seega ka $\alpha \in O(\beta)$.

g) Kuna $\lim\limits_n \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim\limits_n \dfrac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{(n-1)!} = 0$, siis $\beta_n = o(\alpha_n)$, seega ka $\beta_n \in O(\alpha_n)$.

h) Kuna $\lim\limits_n \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim\limits_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, siis $\beta_n \in \Theta(\alpha_n)$ ja vastupidi.

i) Paneme tähele, et $\lim\limits_n \sqrt[n]{\dfrac{n^{100}}{2^n}} = \lim\limits_n \dfrac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{2} = \dfrac{1}{2}$. Seega, valides $\varepsilon = \frac{1}{4}$, leidub jada piirväärtuse def. põhjal $N \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant N \Rightarrow \left|\sqrt[n]{\dfrac{n^{100}}{2^n}} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt[n]{\dfrac{n^{100}}{2^n}} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{n^{100}}{2^n} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Keskmise muutuja omaduse ja koondumise $\lim\limits_n \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ tõttu ka $\lim\limits_n \dfrac{n^{100}}{2^n} = 0$. Seega $\alpha_n \in o(\beta_n)$, järelikult ka $\alpha_n \in O(\beta_n)$.

29. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+5x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1+5x^2\right) = 1+0 = 1$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \tan 2x}{3x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{2x} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{((x+1)-x)\cdot 2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{2}{2} = 1$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{3(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{3(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$;

e) $\lim\limits_n \dfrac{\frac{n+2}{\sqrt{n^3-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_n \dfrac{(n+2)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}} = \lim\limits_n \dfrac{n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = \lim\limits_n \dfrac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

30. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x}{2x} = 3$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{1+x} = 5$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 8x}{\arctan 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x}{4x} = 2$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x \arcsin 3x}{\sin 3x \arctan 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot 3x}{3x\cdot 2x} = 1$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x \tan 2x}{(x-x^3)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cdot 2x}{x^2\cdot\left(1-x^2\right)^2} = 6$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$;

g) kuna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{0}{1} = 0$, siis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\frac{x}{1-x}}{\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{1-x}}{-x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x-1} = -1$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{x}{8}+1}-1\right)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\frac{x}{8}}{3}}{x} = \dfrac{1}{24}$;

i) kuna $\lim\limits_{x\to 0}(x+x^2)=0$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x+x^2}{3}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{9}=\dfrac{1}{9}$;

j) kuna $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}(-2x)=0$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x^2}-1}{x+x^5}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{x+x^5}=$
$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{5}}{x+x^5}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{4}}{x+x^5}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

k) kuna $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}2x=0$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^2}-1}{\sin x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sin x}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x^2}{5}}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{5}}{x}=0-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{2}{5}$;

l) kuna $\lim\limits_{x\to 0}(\pm\sin x)=0$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sin x}-\sqrt[4]{1+\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sin x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}=$
$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{3}}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=-\frac{7}{12}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{1+x^2}=0$;

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{\arcsin x}{x}}{1+x}=0$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\arcsin x}{3x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\frac{\arcsin x}{x}}{3-\frac{\arcsin x}{x}}=\dfrac{3}{2}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+3\arcsin x}{2x-\arctan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+3\cdot\frac{\arcsin x}{x}}{2-\frac{\arctan x}{x}}=5$;

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2\tan x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-2\cdot\frac{\tan x^2}{x^2}}{2-\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=\dfrac{3-2}{2-1}=1$;

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-4x^3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{1-\dfrac{4}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(|x|\cdot\sqrt[4]{1-\dfrac{4}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt[4]{1-\dfrac{4}{x}}-1\right)=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{-\frac{4}{x}}{4}=-1$, sest $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4}{x}=0$.

33. a) Vaja on näidata, et $\lim\limits_{x\to a}3x=3a$. Selleks näitame, et
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad:\quad\forall x\qquad|x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad|3x-3a|<\varepsilon.$
Fikseerime $\varepsilon>0$. Kuna $|3x-3a|<\varepsilon\Leftarrow 3|x-a|<\varepsilon\Leftarrow|x-a|<\frac{\varepsilon}{3}$, siis valides $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, kehtib
$|x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad|x-a|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\Rightarrow\quad|3x-3a|<\varepsilon.$

b) Vaja on näidata, et $\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$. Selleks näitame, et
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad:\quad\forall x\qquad|x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad|x^2-a^2|<\varepsilon.$
(NB! Kehtib $a>0$.) Saame, et $|x^2-a^2|<\varepsilon\Leftarrow|x-a|\cdot|x+a|<\varepsilon$. Lisaks sellele kehtib ka $|x-a|<\frac{a}{2}\Rightarrow$ $-\frac{a}{2}<x-a<\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{3a}{2}<x+a<\frac{5a}{2}\Rightarrow|x+a|<\frac{5a}{2}$. Niisiis, eeldusel $|x-a|<\frac{a}{2}$ kehtib implikatsioon $|x-a|\cdot|x+a|<\varepsilon\Leftarrow|x-a|\cdot\frac{5a}{2}<\varepsilon\Leftrightarrow|x-a|<\frac{2\varepsilon}{5a}$.
Järelikult piisab leida δ selliselt, et $\delta\leqslant\frac{a}{2}$ ja $\delta\leqslant\frac{2\varepsilon}{5a}$. Olgu $\delta=\min\left\{\frac{a}{2},\frac{2\varepsilon}{5a}\right\}$. Saame, et

$$|x-a|<\delta\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}|x-a|<\frac{a}{2}\Rightarrow|x+a|<\frac{5a}{2}\\|x-a|<\frac{2\varepsilon}{5a}\end{array}\right\}\Rightarrow|x^2-a^2|=|x-a|\cdot|x+a|<\frac{2\varepsilon}{5a}\cdot\frac{5a}{2}=\varepsilon.$$

c) Vaja on näidata, et $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. Selleks näitame, et
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad:\quad\forall x\qquad |x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon.$
Fikseerime $\varepsilon>0$. Saame, et $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\varepsilon$. Lisaks sellele kehtib implikatsioon

$$|x-a|<\frac{a}{2}\quad\Leftrightarrow\quad-\frac{a}{2}<x-a<\frac{a}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{\frac{a}{2}}<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{3a}{2}}\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\sqrt{x}+\sqrt{a}>\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}>\sqrt{a}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Niisiis, eeldusel $|x-a|<\frac{a}{2}$ saame, et

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\varepsilon\Leftarrow|x-a|\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}<\varepsilon\Leftrightarrow|x-a|<\varepsilon\sqrt{a}.$$

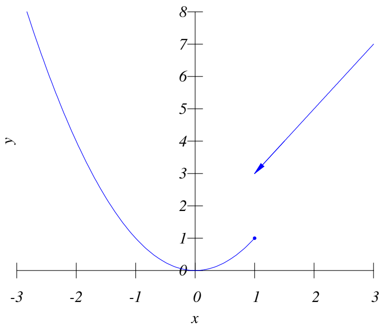
Järelikult piisab leida δ selliselt, et $\delta\leqslant\frac{a}{2}$ ja $\delta\leqslant\varepsilon\sqrt{a}$. Olgu $\delta=\min\left\{\frac{a}{2},\varepsilon\sqrt{a}\right\}$. Saame, et

$$|x-a|<\delta\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}|x-a|<\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{a}}\\ |x-a|<\varepsilon\sqrt{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\frac{|x-a|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon.$$

d) Vaja on näidata, et $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$. Selleks näitame, et
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad:\quad\forall x\qquad |x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon.$
Fikseerime $\varepsilon>0$. Saame, et $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{|x-a|}{|x|a}<\varepsilon$. Lisaks sellele kehtib implikatsioon
$|x-a|<\frac{a}{2}\Leftrightarrow-\frac{a}{2}<x-a<\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}\Rightarrow 0<\frac{1}{x}<\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{1}{|x|}<\frac{2}{a}$.
Niisiis, eeldusel $|x-a|<\frac{a}{2}$ saame, et
$\frac{|x-a|}{|x|a}<\varepsilon\Leftarrow\frac{|x-a|}{a}\cdot\frac{2}{a}<\varepsilon\Leftrightarrow|x-a|<\frac{\varepsilon a^2}{2}$.
Järelikult piisab leida δ selliselt, et $\delta\leqslant\frac{a}{2}$ ja $\delta\leqslant\frac{\varepsilon a^2}{2}$. Olgu $\delta=\min\left\{\frac{a}{2},\frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$. Saame, et

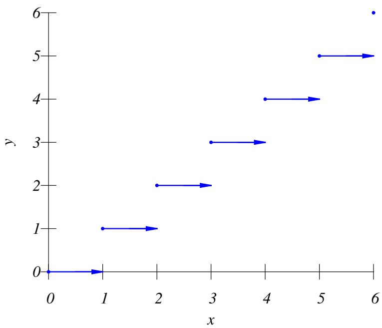
$$|x-a|<\delta\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}|x-a|<\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{1}{|x|}<\frac{2}{a}\\ |x-a|<\frac{\varepsilon a^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}\cdot\frac{|x-a|}{|x|}<\frac{1}{a}\cdot\frac{\varepsilon a^2}{2}\cdot\frac{2}{a}=\varepsilon.$$

e) Kasutame valemit $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ning võrratust $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$. Vaja on näidata, et
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad:\quad\forall x\qquad |x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad|\sin x-\sin a|<\varepsilon.$
Fikseerime $\varepsilon>0$. Saame, et $|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leqslant2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot1=|x-a|$. Niisiis, valime $\delta=\varepsilon$, siis saame, et $|x-a|<\delta\Rightarrow|x-a|<\varepsilon\Rightarrow|\sin x-\sin a|\leqslant|x-a|<\varepsilon$.
f) Tõestus on analoogiline eelmise punktiga, ainult kasutada tuleb valemit $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.
34. a)
```
f(x) := if x<=1 then x^2 else 2*x+1;
plot2d(f(x), [x,-3,3]);
```



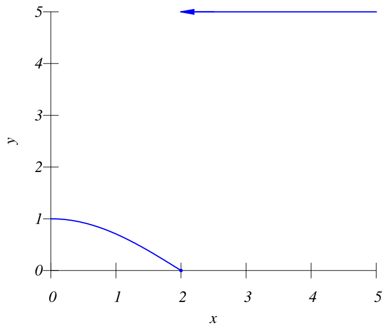
$f(1) = 1^2 = 1,$
$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 = 1^2 = 1,$
$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} 2x + 1 = 2 + 1 = 3,$
seega on f vasakult pidev (ja ei ole paremalt pidev) punktis $a = 1$;

b) `plot2d(floor(x), [x,0,6]);`



$f(4) = 4,$
$\lim_{x \to 4-} f(x) = \lim_{x \to 4-} \lfloor x \rfloor = 3,$
$\lim_{x \to 4+} f(x) = \lim_{x \to 4+} \lfloor x \rfloor = 4,$
seega on f paremalt pidev (ja ei ole vasakult pidev) punktis $a = 4$;

c)
```
f(x) := if x<=2 then cos(%pi*x/4) else 5;
plot2d(f(x), [x,0,5], [y,-1,6]);
```



$f(2) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$
$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} \cos\dfrac{\pi x}{4} = 0,$
$\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} 5 = 5,$
seega on f vasakult pidev (ja ei ole paremalt pidev) punktis $a = 2$.

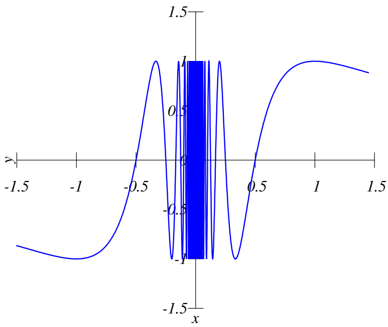
35. a) Näeme, et f on pidev kõigis punktides $x \neq 1$, kuna tegemist on elementaarfunktsiooniga. Saame, et $f(1) = 3 + a \cdot 1^2 = 3 + a$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (3 + ax^2) = 3 + a$ ning $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} (x+1) = 2$. Selleks, et kehtiks võrdus $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (ning et üldse eksisteeriks kahepoolne piirväärtus), peavad ühepoolsed piirväärtused olema võrdsed ning omakorda võrduma $f(1)$-ga. Seega saame tingimuse $3 + a = 2$, millest $a = -1$.

b) Näeme, et f on pidev kõigis punktides $x \neq 1$, kuna tegemist on elementaarfunktsiooniga. Saame, et $f(1) = \cos\pi = -1$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (x - a) = 1 - a$ ning $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \cos\pi x = -1$. Selleks, et kehtiks võrdus $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (ning et üldse eksisteeriks kahepoolne piirväärtus), peavad ühepoolsed piirväärtused olema võrdsed ning omakorda võrduma $f(1)$-ga. Seega saame tingimuse $1 - a = -1$, millest $a = 2$.

c) Näeme, et f on pidev kõigis punktides $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, kuna tegemist on elementaarfunktsiooniga. Saame, et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}-} -2\sin x = 2$ ning $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}+} (a\sin x + b) = -a + b$. Selleks, et kehtiks võrdus $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (ning et üldse eksisteeriks kahepoolne piirväärtus), peavad ühepoolsed piirväärtused olema võrdsed ning omakorda võrduma $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$-ga. Seega saame tingimuse $-a + b = 2$.

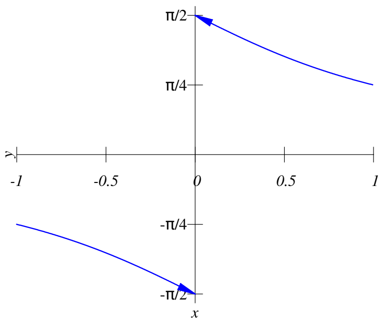
Analoogiliselt, kuna $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} (a\sin x + b) = a + b$ ning $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \cos x = 0$, siis saame tingimuse $a + b = 0$. Kokkuvõttes oleme saanud võrrandisüsteemi $\begin{cases} -a + b = 2, \\ a + b = 0 \end{cases}$ mille lahendamisel leiame, et $a = -1$ ja $b = 1$.

36. a) `plot2d(sin(%pi/(2*x)), [x,-1,1]);`



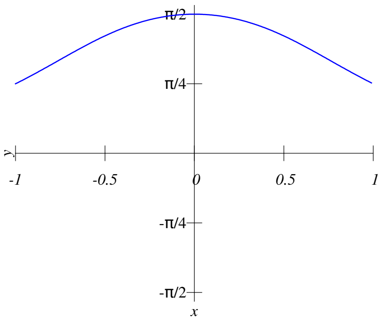
Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = 0$. Veendume, et $\lim\limits_{x \to 0+} \sin \dfrac{\pi}{2x}$ ei eksisteeri. Valides $x_k = \frac{1}{4k}$, kehtib $\lim_k x_k = 0$ ning saame, et $\sin \frac{\pi}{2x_k} = \sin \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{4k}} = \sin 2k\pi = 0$. Valides aga
$\tilde{x}_k = \frac{1}{4k+1}$, kehtib $\lim_k \tilde{x}_k = 0$ ning saame, et $\sin \frac{\pi}{2\tilde{x}_k} = \sin \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{4k+1}} = \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$. Muidugi siis ka $\lim_k \sin \frac{\pi}{2x_k} = 0$ ning $\lim_k \sin \frac{\pi}{2\tilde{x}_k} = 1$. Heine kriteeriumi kohaselt piirväärtust $\lim_{x \to 0+} \sin \frac{\pi}{2x}$ ei leidu. Järelikult on punktis $x = 0$ tegemist teist liiki katkevusega.

b) `plot2d(atan(1/x), [x,-1,1]);`



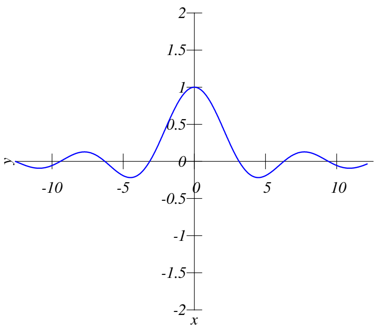
Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = 0$. Saame, et $\lim\limits_{x \to 0-} \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ ning $\lim\limits_{x \to 0+} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Seega on tegu esimest liiki, kuid mitte kõrvaldatava katkevusega, kuna $-\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$.

c) `plot2d(atan(1/x^2), [x,-1,1]);`



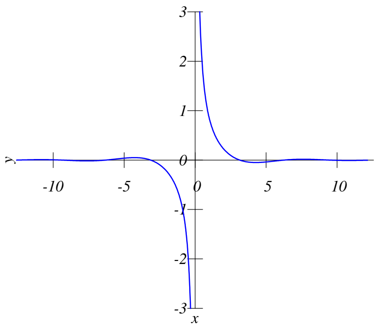
Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x=0$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}$. Järelikult vastavad ühepoolsed tuletised võrduvad, mistõttu on tegemist esimest liiki ja kõrvaldatava katkevusega. Katkevuse kõrvaldamiseks defineerime antud funktsiooni kujul $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

d) `plot2d(sin(x)/x, [x,-10,10]);`



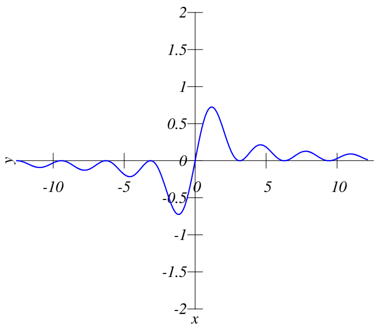
Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x=0$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Järelikult vastavad ühepoolsed tuletised võrduvad, mistõttu on tegemist esimest liiki ja kõrvaldatava katkevusega. Katkevuse kõrvaldamiseks defineerime antud funktsiooni kujul $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

e) `plot2d(sin(x)/x^2, [x,-10,10], [y,-3,3]);`



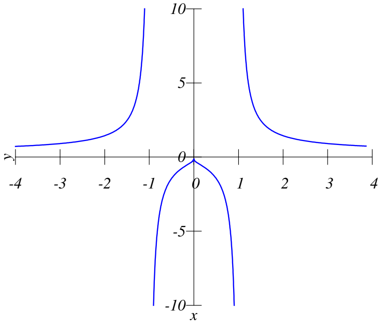
Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = 0$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\infty$. Järelikult on tegemist teist liiki katkevusega.

f) `plot2d(sin(x)^2/x, [x,-10,10]);`



Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = 0$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0$. Järelikult vastavad ühepoolsed tuletised võrduvad, mistõttu on tegemist esimest liiki ja kõrvaldatava katkevusega. Katkevuse kõrvaldamiseks defineerime antud funktsiooni kujul
$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

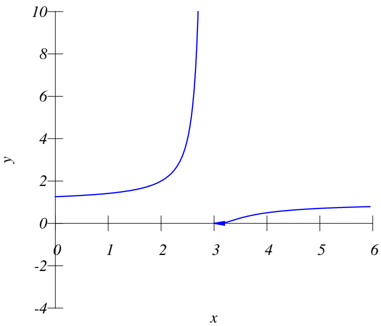
g) `plot2d(1/log(abs(x)), [x,-4,4], [y,-10,10]);`



Piirkondades $x > 0$ ja $x < 0$ on tegemist elementaarfunktsioonidega $\frac{1}{\ln x}$ ja $\frac{1}{\ln(-x)}$, sealjuures punktid $x = 1$ ja $x = -1$ ei kuulu määramispiirkonda (muudavad nimetaja nulliks). Saame, et $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{\ln x} = \infty$, mistõttu on tegemist teist liiki katkevusega. Analoogiliselt on punktis $x = -1$ teist liiki katkevus.

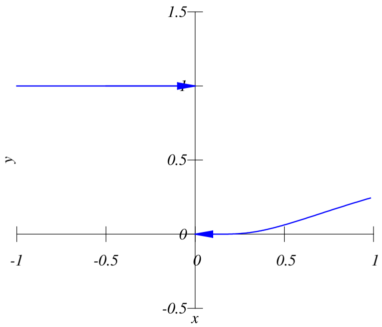
Punktis $x = 0$ pole logaritm määratud; saame, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln|x|} = 0$. Järelikult vastavad ühepoolsed tuletised võrduvad, mistõttu on tegemist esimest liiki ja kõrvaldatava katkevusega. Selle katkevuse kõrvaldamiseks defineerime antud funktsiooni kujul $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

h) `plot2d(2^(1/(3-x)),[x,0,6],[y,-10,10]);`



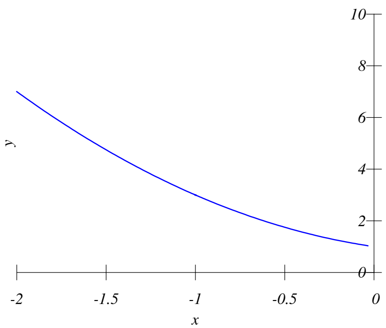
Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = 3$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 3-} 2^{\frac{1}{3-x}} = \infty$, mistõttu on tegemist teist liiki katkevusega.

i) `plot2d(2^(-(1/abs(x)+1/x)), [x,-1,1], [y,-0.5,1.5]);`



Piirkondades $x > 0$ ja $x < 0$ on tegemist elementaarfunktsioonidega $2^{-\frac{2}{x}}$ ja 1. Punkt $x = 0$ ei kuulu antud funktsiooni määramispiirkonda. Saame, et $\lim\limits_{x\to 0-} 2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0-} 1 = 1$ ning $\lim\limits_{x\to 0+} 2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0+} 2^{-\frac{2}{x}} = 0$. Seega on tegemist esimest liiki, kuid mitte kõrvaldatava katkevusega.

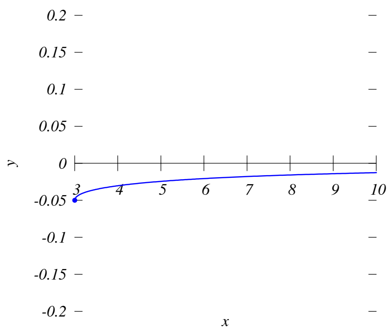
j) `plot2d((x^3+1)/(x+1), [x,-2,0], [y,0,10]);`



Tegemist on elementaarfunktsiooniga, määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = -1$. Saame, et $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x^2 - x + 1) = 3$. Järelikult vastavad ühepoolsed tuletised võrduvad, mistõttu on tegemist esimest liiki ja kõrvaldatava katkevusega. Selle katkevuse kõrvaldamiseks defineerime antud funktsiooni kujul

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1}, & \text{kui } x \neq -1, \\ 3, & \text{kui } x = -1. \end{cases}$$

k) `plot2d((2-sqrt(x-3))/(x^2-49),[x,3,10]);`



Piirkonnas $x \geqslant 3$ on tegemist elementaarfunktsiooniga (kui $x < 3$, pole $\sqrt{x-3}$ määratud). Funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu punkt $x = 7$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = -\lim\limits_{x\to 7} \frac{1}{(x+7)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = -\frac{1}{14\cdot 4} = -\frac{1}{56}$. Järelikult vastavad ühepoolsed tuletised võrduvad, mistõttu on tegemist esimest liiki ja kõrvaldatava katkevusega. Selle katkevuse kõrvaldamiseks defineerime antud funktsiooni kujul $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}, & \text{kui } x \neq 7, \\ -\frac{1}{56}, & \text{kui } x = 7. \end{cases}$

39. a) $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{t^2-x^2}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{(t-x)(t+x)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x}(t+x) = 2x$;

b) $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{t^3-x^3}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{(t-x)(t^2+tx+x^2)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x}(t^2+tx+x^2) = 3x^2$;

c) $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{\cos t - \cos x}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{-2\sin\frac{t-x}{2}\sin\frac{t+x}{2}}{t-x} = -\lim\limits_{t\to x} \frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} \cdot \lim\limits_{t\to x} \sin\frac{t+x}{2} = -\sin x$;

d) kui $x > 0$, siis $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{\ln t - \ln x}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{\ln\left(1+\left(\frac{t}{x}-1\right)\right)}{x\cdot\left(\frac{t}{x}-1\right)} = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$,

kui aga $x < 0$, siis $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \frac{\ln(-t)-\ln(-x)}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \frac{\ln\left(1+\left(\frac{t}{x}-1\right)\right)}{x\cdot\left(\frac{t}{x}-1\right)} = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$.

40. a) $f'(x) = 4x^3$;
b) $f'(x) = 1 + 6\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}$;
c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;
d) $f'(x) = 2^x\ln 2 - e^x$;
e) $f'(x) = \frac{1}{x\ln 2} + \cos x$;
f) $f'(x) = -\sin x \cdot \tan\alpha$;
g) $f'(x) = ax^{a-1}b^x + x^a b^x \ln b = x^{a-1}b^x(a + x\ln b)$;
h) $f'(x) = 5x^4 e^x + x^5 e^x = x^4 e^x(5+x)$;
i) $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$;
j) $f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 10^x\ln 10 = \ln x + 1 + 10^x\ln 10$;

k) $f'(x) = \dfrac{2x\ln x - x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} - \dfrac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} + \dfrac{1}{x}$;

l) $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{3x} = 3\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{x}$;

m) $f'(t) = 2\sin t + 2t\cos t - 2t\cos t + (t^2-2)\sin t = t^2\sin t$;

n) $f'(x) = \frac{1}{1+\ln a}\cdot\left(\mathrm{e}^x a^x + \mathrm{e}^x a^x \ln a\right) = \mathrm{e}^x a^x$;

o) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$;

p) $f'(u) = \frac{u\cos u - \sin u}{u^2} - \frac{1}{u}\cos u + \ln u\cdot\sin u = \left(\ln u - \frac{1}{u^2}\right)\cdot\sin u$;

q) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$;

r) $f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

s) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$;

t) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$;

u) $f'(x) = \mathrm{sh}\,x + x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = x\,\mathrm{ch}\,x$;

v) $f'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} - \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1-\mathrm{sh}\,x}{ch^2 x}$;

w) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2}$;

x) $f'(x) = 0$;

y) $f'(x) = \frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1+x^2}}$;

z) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2) + 2x\,\mathrm{arcth}\,x}{(1-x^2)^2} = \dfrac{1+2x\,\mathrm{arcth}\,x}{(1-x^2)^2}$.

41. a) $f'(x) = 4(3x-5)^3\cdot(3x-5)' = 12(3x-5)^3$;

b) $f'(x) = 4(3-5x)^3\cdot(3-5x)' = -20(3-5x)^3$;

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\cdot(2x+1)' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

d) $f'(x) = 2\frac{2\sqrt{1-x}}{\cdot}(1-x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$;

e) $f'(x) = 3\cdot\frac{1}{3}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-x^2)' = -\frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$;

f) $f'(x) = (-2)(1-2x)^{-3}\cdot(1-2x)' = \frac{4}{(1-2x)^3}$;

g) $f'(x) = \mathrm{e}^{2x+\cos 2x}\cdot(2x+\cos 2x)' = (2-2\sin 2x)\mathrm{e}^{2x+\cos 2x}$;

h) $f'(x) = 2\cos 2x + \frac{2}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\cos 2x + \frac{1}{x}$;

i) $f'(x) = 2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'\cdot(3x)' = -6\cos 3x\sin 3x = -3\sin 6x$;

j) $f'(x) = \frac{1}{\sin(2x+1)}\cdot(\sin(2x+1))'\cdot(2x+1)' = 2\cot(2x+1)$;

k) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-2\sin 2x)\cdot\cos 2x - (-2\sin 2x)\ln\cos 2x}{\cos^2 2x} = \dfrac{2(\ln\cos 2x - 1)\sin 2x}{\cos^2 2x}$;

l) $f'(x) = \frac{1}{1+\ln a}\cdot\left(3\mathrm{e}^{3x}a^{3x+5} + 3\mathrm{e}^{3x}a^{3x+5}\ln a\right) = 3\mathrm{e}^{3x}a^{3x+5}$.

42. a) $f'(x) = \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$;

b) $f'(x) = (\ln\tan x\cdot\cot x)' = (\ln 1)' = 0$;

c) $f'(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \mathrm{arsh}\,x$;

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cot x}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x + \sqrt{\cot x}\cdot 2\sin x\cos x = \sqrt{\cot x}\sin 2x - \frac{1}{2\sqrt{\cot x}}$;

e) $f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 + \frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x = \frac{2+8x}{1+4x^2}$;

f) $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln \operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} x \cdot \frac{1}{\operatorname{arccot} x} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1+\ln \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$;

g) $f'(x) = \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \arcsin x$;

h) $f'(x) = \arccos x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \arccos x$;

i) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

45. a) $f'(x) = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = x \operatorname{ch} x$;

b) $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \operatorname{ch}^2 \ln x}$;

c) $f'(x) = e^{\operatorname{ch}^2 x} \cdot 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 2x e^{\operatorname{ch}^2 x}$;

d) $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} x + \frac{-2}{2\operatorname{ch}^3 x} \cdot \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \cdot (\operatorname{ch}^2 x - 1) = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x$;

e) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{|1+x^2|}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{|2x|(1+x^2)} = -\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2}$;

f) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(\ln\cos x)^2-1}} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\tan x}{\sqrt{(\ln\cos x)^2-1}}$;

g) $f'(x) = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

h) $f'(x) = \frac{6x^5(1+x^{12})-12x^{11}\cdot x^6}{(1+x^{12})^2} - \left(-\frac{1}{1+(x^6)^2}\right) \cdot 6x^5 = \frac{6x^5(1-x^{12})}{(1+x^{12})^2} + \frac{6x^5}{1+x^{12}} = \frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$;

i) $f'(x) = 2x \operatorname{arsh} \frac{x^2}{a^2} + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2+1}} \cdot \frac{2x}{a^2} - \frac{1}{2\sqrt{a^4+x^4}} \cdot 4x^3 = 2x \operatorname{arsh} \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a^4}} - \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a^4}} = 2x \operatorname{arsh} \frac{x^2}{a^2}$;

j) $f'(x) = \frac{1}{1-(\ln\sin 2x)^2} \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot 2\cos 2x = \frac{2\cot 2x}{1-(\ln\sin 2x)^2}$;

k) $f'(x) = x' = 1$;

l) $f'(x) = \left(\frac{\ln a}{\ln x}\right)' = -\frac{\ln a}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln a}{x \ln^2 x}$.

46. a) Kuna $\ln|f(x)| = x \ln x$, siis $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

b) Kuna $\ln|f(x)| = \sin x \ln x$, siis $f'(x) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

c) Kuna $\ln|f(x)| = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, siis

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

d) Kuna $\ln|f(x)| = x \ln|\ln x|$, siis $f'(x) = (\ln x)^x \cdot \left(\ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x}\right)$.

e) Kuna $\ln|f(x)| = 3\ln|x| + x^2 + \ln|\sin 2x|$, siis $f'(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x \cdot \left(\frac{3}{x} + 2x + 2\cot x\right)$.

f) Kuna $\ln|f(x)| = 2\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| - 3\ln|x-5|$, siis $f'(x) = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3} \cdot \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x-5}\right)$.

g) Kuna $\ln|f(x)| = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\ln|x^2-1|$, siis $f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}} \cdot \left(\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{4x}{3(x^2-1)}\right)$.

47. a) $f'(x) = 2u(x)u'(x)$;

b) $f'(x) = v'(x)\cos v(x)$;

c) $f'(x) = 3x^2 u(x) + x^3 u'(x)$;

d) $f'(x) = 3u(x)^2 u'(x)\cos x - u(x)^3 \sin x$;

e) $f'(x) = u'(x)\ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)}$;

f) $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{u(x)^2}{v(x)^2}} \cdot \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{u(x)^2+v(x)^2}$;

g) $f'(x) = u'(x^2) \cdot 2x$;

h) $f'(x) = u'(x+\cos x) \cdot (1-\sin x)$;

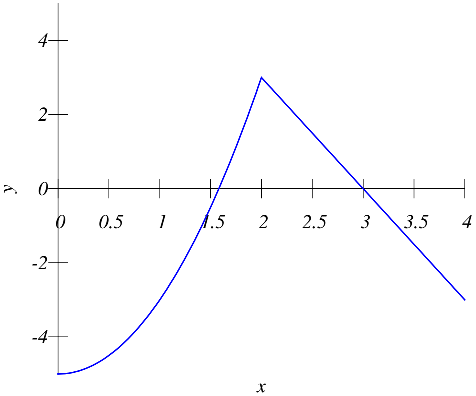
i) $f'(x) = u(\ln x) + u'(\ln x)$.

48. a) $f(\sin y) = y$, millest $f'(\sin y)\cos y = 1$ ehk $f'(\sin y) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$. Niisiis $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
b) $f(\cos y) = y$, millest $-f'(\cos y)\sin y = 1$ ehk $f'(\cos y) = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$. Niisiis $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
c) $f(\tan y) = y$, millest $f'(\tan y)\cdot\frac{1}{\cos^2 y} = 1$ ehk $f'(\tan y) = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$. Niisiis $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
d) $f(\operatorname{sh} y) = y$, millest $f'(\operatorname{sh} y)\operatorname{ch} y = 1$ ehk $f'(\operatorname{sh} y) = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}}$. Niisiis $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
e) $f(\operatorname{th} y) = y$, millest $f'(\operatorname{th} y)\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} = 1$ ehk $f'(\operatorname{th} y) = \operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y}$. Niisiis $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
f) $f(\mathrm{e}^y) = y$, millest $f'(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y = 1$ ehk $f'(\mathrm{e}^y) = \frac{1}{\mathrm{e}^y}$. Niisiis $f'(x) = \frac{1}{x}$.
g) $f(y^2) = y$, millest $f'(y^2)\cdot 2y = 1$ ehk $f'(y^2) = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{y^2}}$. Niisiis $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Alternatiivid.
a) $\sin f(x) = x$, millest $f'(x)\cos f(x) = 1$ ehk $f'(x) = \frac{1}{\cos\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
b) $\cos f(x) = x$, millest $-f'(x)\sin f(x) = 1$ ehk $f'(x) = -\frac{1}{\sin\arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos\arccos x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
c) $\tan f(x) = x$, millest $f'(x)\cdot\frac{1}{(\cos f(x))^2} = 1$ ehk $f'(x) = (\cos\arctan x)^2 = \frac{1}{1+(\tan\arctan x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$.
d) $\operatorname{sh} f(x) = x$, millest $f'(x)\operatorname{ch} f(x) = 1$ ehk $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{sh}\operatorname{arsh} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
e) $\operatorname{th} f(x) = x$, millest $f'(x)\cdot\frac{1}{(chx)^2} = 1$ ehk $f'(x) = (\operatorname{ch}\operatorname{arth} x)^2 = \frac{1}{1-(\operatorname{th}\operatorname{arth} x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$.
f) $\mathrm{e}^{f(x)} = x$, millest $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = 1$ ehk $f'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.
g) $(f(x))^2 = x$, millest $f'(x)\cdot 2f(x) = 1$ ehk $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

51. a) Ilmselt $f'(x) = 4x$, kui $x < 2$, ning $f'(x) = -3$, kui $x > 2$.
$\lim\limits_{t\to 2-}\frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2-}\frac{(2t^2-5)-3}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2-}\frac{2t^2-8}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2-}(2t+4) = 8$,
$\lim\limits_{t\to 2+}\frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2+}\frac{(9-3t)-3}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2+}\frac{6-3t}{t-2} = -3$. Seega kahepoolset piirväärtust $f'(2)$ ei leidu.
Vastus: $f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{kui } x < 2, \\ \text{ei leidu}, & \text{kui } x = 2, \\ -3, & \text{kui } x > 2. \end{cases}$
Tuletise mitteleidumine on hästi näha graafikult: ühepoolsed puutujad on erineva tõusuga.

```
f(x) := if x <= 2 then 2*x**2-5 else 9-3*x;
plot2d(f(x), [x,0,4]]);
```



b) Ilmselt $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$, kui $x < 1$, ning $f'(x) = -2x$, kui $x > 1$.

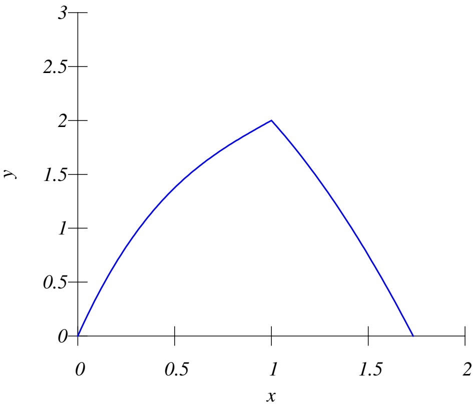
$\lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{(t^3-3t^2+4t)-2}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{t^3-3t^2+4t-2}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1-} (t^2-2t+2) = 1$,

$\lim\limits_{t\to 1+} \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1+} \dfrac{(3-t^2)-2}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1+} \dfrac{-t^2+1}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1+} (-1-t) = -2$. Seega kahepoolset piirväärtust $f'(1)$ ei leidu.

Vastus: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 4, & \text{kui } x < 1, \\ \text{ei leidu}, & \text{kui } x = 1, \\ -2x, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$

Tuletise mitteleidumine on hästi näha graafikult: ühepoolsed puutujad on erineva tõusuga.

```
f(x) := if x < 1 then x**3-3*x**2+4*x else 3-x**2;
plot2d(f(x), [x,0,2]]);
```



c) Ilmselt $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, kui $x < -1$, ning $f'(x) = 4x + 3$, kui $x > -1$.

$\lim\limits_{t\to -1-} \dfrac{f(t)-f(-1)}{t+1} = \lim\limits_{t\to -1-} \dfrac{(t^3+t^2-2t-4)-(-2)}{t+1} = \lim\limits_{t\to -1-} \dfrac{t^3+t^2-2t-2}{t+1} = \lim\limits_{t\to -1-} (t^2-2) = -1$,

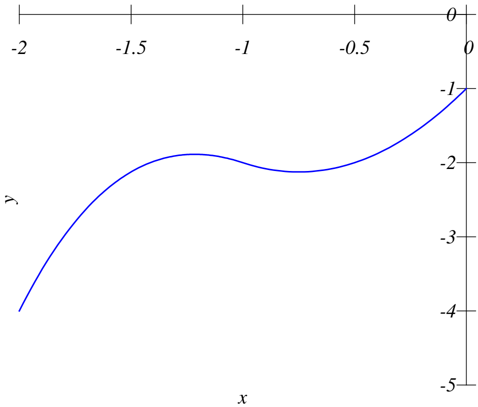
$\lim\limits_{t\to -1+} \dfrac{f(t)-f(-1)}{t+1} = \lim\limits_{t\to -1+} \dfrac{(2t^2+3t-1)-(-2)}{t+1} = \lim\limits_{t\to -1+} (2t+1) = -1$. Seega $f'(-1) = -1$.

(Ka jooniselt on näha, et punktis $x = -1$ on kaks funktsiooni kleebitud kokku siledalt – nurkpunkti ei teki.)

Vastus: $f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3x^2+2x-2, & \text{kui } x<-1, \\ -1, & \text{kui } x=-1, \\ 4x+3, & \text{kui } x>-1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 3x^2+2x-2, & \text{kui } x\leqslant -1, \\ 4x+3, & \text{kui } x>-1 \end{array} \right\} =$

$= \left\{ \begin{array}{ll} 3x^2+2x-2, & \text{kui } x<-1, \\ 4x+3, & \text{kui } x\geqslant -1. \end{array} \right.$

```
f(x) := if x <= -1 then x**3+x**2-2*x-4 else 2*x**2+3*x-1;
plot2d(f(x), [x,-2,0]]);
```



d) Ilmselt $f'(x) = 2x$, kui $x < 0$, ning $f'(x) = -2x$, kui $x > 0$.

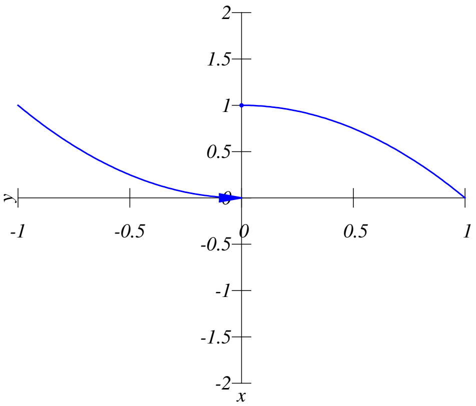
$\lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{t^2-1}{t} = -\infty,$

$\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{(1-t^2)-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} (-t) = 0$. Seega kahepoolset piirväärtust $f'(0)$ ei leidu.

(See, et funktsioonil f punktis 0 lõplik tuletis puudub, on järeldatav juba sellest, et f pole pidev punktis 0. Tõepoolest, $\lim\limits_{t\to 0-} f(t) = 0$, aga $f(0) = 1$.)

Vastus: $f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x, & \text{kui } x<0, \\ \text{ei leidu}, & \text{kui } x=0, \\ -2x, & \text{kui } x>0. \end{array} \right.$

```
f(x) := if x < 0 then x**2 else 1-x**2;
plot2d(f(x), [x,-1,1]]);
```



e) Ilmselt $f'(x) = -2x$, kui $x \neq 0$.

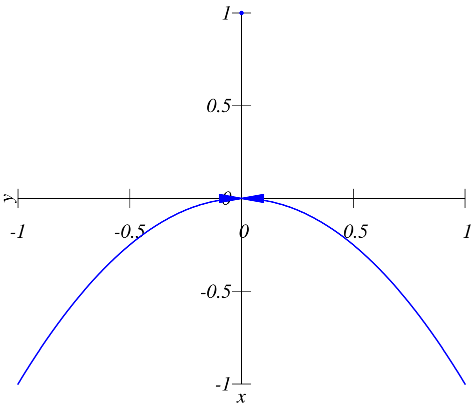
$\lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{-t^2-1}{t} = \infty$,

$\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{-t^2-1}{t} = -\infty$. Seega kahepoolset piirväärtust $f'(0)$ ei leidu.

(See, et funktsioonil f punktis 0 lõplik tuletis puudub, on järeldatav juba sellest, et f pole pidev punktis 0. Tõepoolest, $\lim\limits_{t\to 0-} f(t) = 0$, aga $f(0) = 1$.)

Vastus: $f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{kui } x \neq 0, \\ \text{ei leidu}, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

```
f(x) := if notequal(x, 0) then -x**2 else 1;
plot2d(f(x), [x,-1,1]]);
```



f) Ilmselt $f'(x) = -2x$, kui $x < 0$, ning $f'(x) = 2x$, kui $x > 0$.

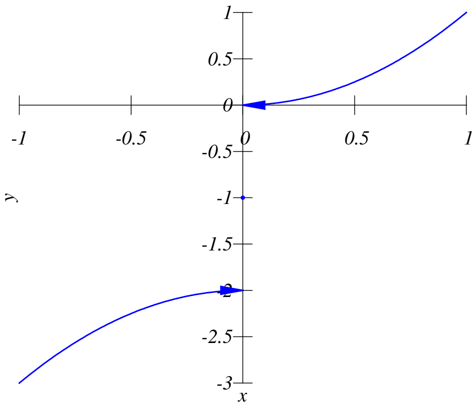
$\lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{-t^2-2-(-1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{-t^2-1}{t} = \infty$,

$\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{t^2-(-1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{t^2+1}{t} = \infty$. Seega $f'(0) = \infty$. (See, et funktsioonil f punktis 0

lõplik tuletis puudub, on järeldatav sellest, et f pole pidev punktis 0. Tõepoolest, $\lim\limits_{t\to 0-} f(t) = -2$, aga $f(0) = -1$.)

Vastus: $f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{kui } x < 0, \\ \infty, & \text{kui } x = 0, \\ 2x, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$

```
f(x) := if x<0 then -x**2-2 else if x>0 then x**2 else -1;
plot2d(f(x), [x,-1,1]]);
```



Lause.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ paremalt pidev punktis } a, \\ \exists\delta > 0 : f \text{ on dif-v vahemikus } (a, a+\delta), \\ \text{leidub lõplik } \lim\limits_{x\to a+} f'(x) \end{array}\right\} \implies f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x),$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ vasakult pidev punktis } a, \\ \exists\delta > 0 : f \text{ on dif-v vahemikus } (a-\delta, a), \\ \text{leidub lõplik } \lim\limits_{x\to a-} f'(x) \end{array}\right\} \implies f'_-(a) = \lim_{x\to a-} f'(x).$$

Kasutades ülaltoodud lauset, võime leida ülesannetes a), b) ja c) (NB! aga **mitte** ülesannetes d), e) ja f)!) kleepepunktides ühepoolsed tuletised mugavamini.

a) Funktsioon f on pidev punktis 2, sest $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} (9-3x) = 3 = f(2)$. Seega $f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2-} 4x = 8$ ja $f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2+} -3 = -3$. Tegu on nurkpunktiga, $f'(2)$ puudub.

b) Funktsioon f on pidev punktis 1, sest $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (x^3 - 3x^2 + 4x) = 2 = f(1)$. Seega $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (3x^2 - 6x + 4) = 1$ ja $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1+} (-2x) = -2$. Tegu on nurkpunktiga, $f'(1)$ puudub.

c) Funktsioon f on pidev punktis -1, sest $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} (2x^2+3x-1) = -2 = f(-1)$. Seega $f'_-(-1) = \lim\limits_{x\to -1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1-} (3x^2 + 2x - 2) = -1$ ja $f'_+(-1) = \lim\limits_{x\to -1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1+} (4x+3) = -1$. Kleepimine toimub siledalt, $f'(-1) = -1$.

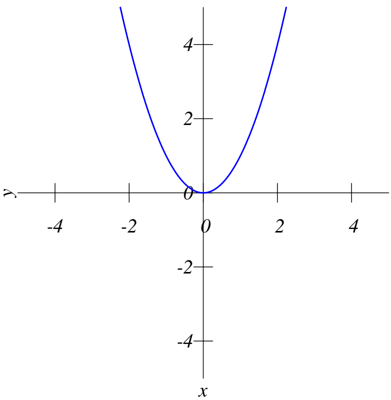
52. a) $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{-x^2}$;
b) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = -\frac{2}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$;

c) $f'(x)=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, $f''(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x\sqrt{1+x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{x+x^3+2x+2x^3-x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$;
d) eeldame, et $x>0$, siis $\ln|f(x)|=x\ln x$, millest $f'(x)=x^x(\ln x+1)$, seega $\ln|f'(x)|=x\ln x+\ln(\ln x+1)$, millest $f''(x)=x^x(\ln x+1)\cdot\left(\ln x+1+\frac{1}{\ln x+1}\cdot\frac{1}{x}\right)$.

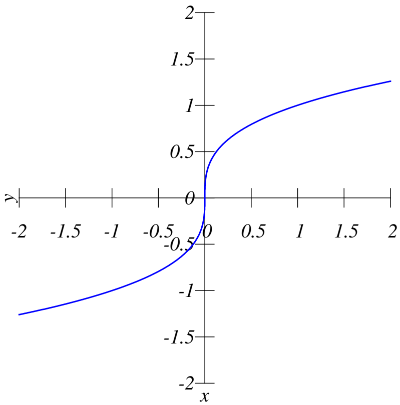
53. a) $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$, $f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}$ ja $f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1-x)^5}$;
b) $f'(x)=2x\ln x+x$, $f''(x)=2\ln x+2+1=2\ln x+3$, $f'''(x)=\frac{2}{x}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{2}{x^2}$, $f^{(5)}(x)=\frac{4}{x^3}$;
c) $f'(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x$, $f''(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x=-2\mathrm{e}^x\sin x$, $f'''(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x-2\mathrm{e}^x\cos x$, $f^{(4)}(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x-2\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x\cos x+2\mathrm{e}^x\sin x=-4\mathrm{e}^x\cos x$, $f^{(5)}(x)=-4\mathrm{e}^x\cos x+4\mathrm{e}^x\sin x$, $f^{(6)}(x)=-4\mathrm{e}^x\cos x+4\mathrm{e}^x\sin x+4\mathrm{e}^x\sin x+4\mathrm{e}^x\cos x=8\mathrm{e}^x\sin x$.

54. a) $f'(x)=u'(x^2)\cdot 2x$, $f''(x)=u''(x^2)\cdot 2x\cdot 2x+u'(x^2)\cdot 2=4x^2u''(x^2)+2u'(x^2)$;
b) $f'(x)=u'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$, $f''(x)=u''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x+u'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$, $f'''(x)=u'''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{2x}+2u''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x}+u''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x+u'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x=u'''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{3x}+3u''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x}+u'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$;
c) $f'(x)=2u(x)u'(x)$, $f''(x)=2u'(x)^2+2u(x)u''(x)$, $f'''(x)=4u'(x)u''(x)+2u'(x)u''(x)+2u(x)u'''(x)=6u'(x)u''(x)+2u(x)u'''(x)$;
d) $f'(x)=u(x)+\frac{v'(x)}{v(x)}$, $f''(x)=u''(x)+\frac{v''(x)v(x)-v'(x)^2}{v(x)^2}$;
e) $f'(x)=\frac{2xu'(x^2)\cdot x-u(x^2)}{x^2}=2u'(x^2)-\frac{u(x^2)}{x^2}$, $f''(x)=2\cdot 2xu''(x^2)-\frac{2xu'(x^2)\cdot x^2-2xu(x^2)}{x^4}=4xu''(x^2)-\frac{2u'(x^2)}{x}+\frac{2u(x^2)}{x^3}$;

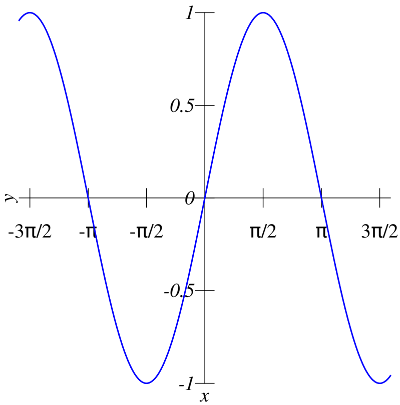
57. a) `plot2d([parametric, t, t**2, [t,-5,5]]);`



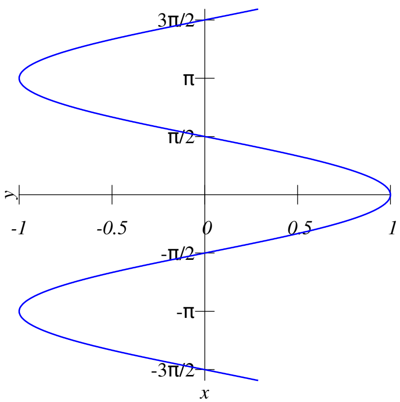
b) `plot2d([parametric, t**3, t, [t,-2,2]]);`



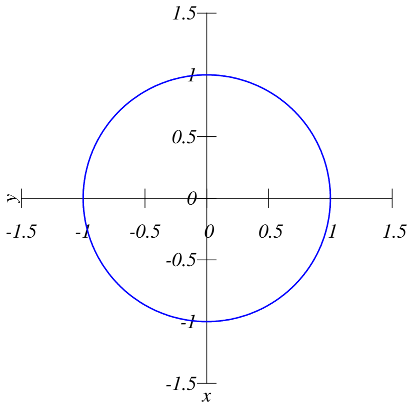
c) `plot2d([parametric, t, sin(t), [t,-5,5]]);`



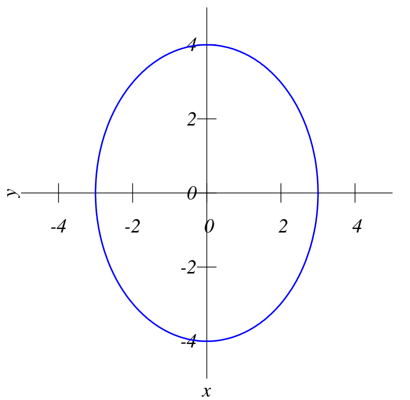
d) `plot2d([parametric, cos(t), t, [t,-5,5]]);`



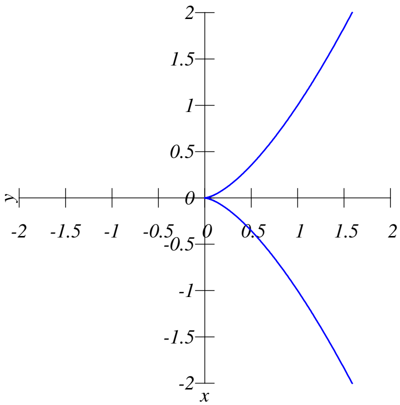
e) `plot2d([parametric, cos(t), sin(t), [t,0,2*%pi]]);`



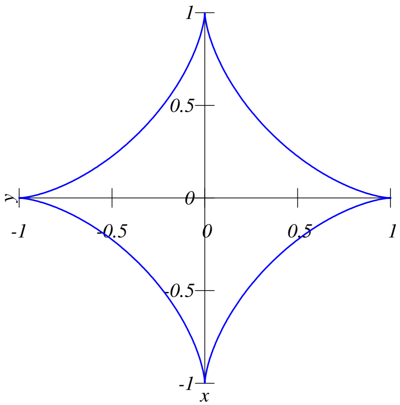
f) `plot2d([parametric, 3*cos(t), 4*sin(t), [t,0,2*%pi]]);`



g) `plot2d([parametric, t**2, t**3, [t,-2,2]]);`



h) `plot2d([parametric, cos(t)**3, sin(t)**3, [t,-1,1]]);`



58. a) kuna $\dot{y}(t) = \cos t$ ja $\dot{x}(t) = -\sin t$, siis $f'(\cos t) = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$ ning $f''(\cos t) = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$;

b) kuna $\dot{y}(t) = -\frac{1}{t^2}$ ja $\dot{x}(t) = \frac{1}{t^2}$, siis $f'\left(\frac{t+1}{t}\right) = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = -1$ ning $f''\left(\frac{t+1}{t}\right) = 0$;

c) kuna $\dot{y}(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ ja $\dot{x}(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, siis $f'(\ln(1+t^2)) = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$ ning $f''(\ln(1+t^2)) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$;

d) kuna $\dot{y}(t) = a\sin t$ ja $\dot{x}(t) = a - a\cos t$, siis $f'(a(t-\sin(t))) = \frac{a\sin t}{a-a\cos t} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$ ning $f''(a(t-\sin(t))) = \frac{\frac{-1}{1-\cos t}}{a-a\cos t} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$;

e) kuna $\dot{y}(t) = 18t$ ja $\dot{x}(t) = 6t^2$, siis $f'(2t^3+1) = \frac{18t}{6t^2} = \frac{3}{t}$ ning $f''(2t^3+1) = -\frac{3}{6t^4} = -\frac{1}{2t^4}$;

f) kuna $\dot{y}(t) = 2(1+t)$ ja $\dot{x}(t) = \frac{1}{1+t}$, siis $f'(\ln(1+t)) = \frac{2(1+t)}{\frac{1}{1+t}} = 2(1+t)^2$ ning $f''(\ln(1+t)) = \frac{4(1+t)}{\frac{1}{1+t}} = 4(1+t)^2$;

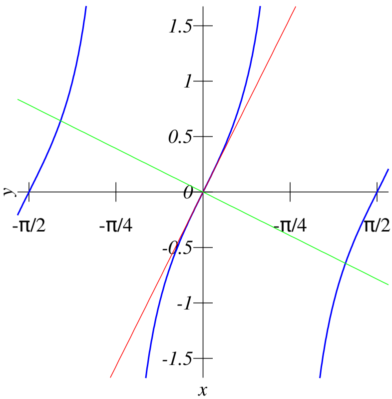
g) kuna $\dot{y}(t) = 3a\sin^2 t\cos t$ ja $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, siis $f'(a\cos^3 t) = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$ ning

$f''(a\cos^3 t) = \dfrac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t \sin t\, \mathrm{d}t} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t \sin t}$;

h) kuna $\dot{y}(t) = b\cos t$ ja $\dot{x}(t) = -a\sin t$, siis $f'(a\cos t) = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$ ning $f''(a\cos t) = \dfrac{\frac{b}{a\sin^2 t}}{-a\sin t\, \mathrm{d}t} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$.

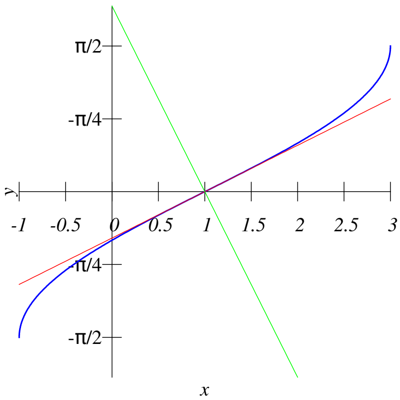
59. a) $y'(0) = \frac{2}{\cos^2 2\cdot 0} = 2$,
$\vec{s} = (1,2)$,
$\vec{n} = (2,-1)$,
puutuja võrrand on $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2}$ ehk $2x - y = 0$,
normaali võrrand on $\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1}$ ehk $x + 2y = 0$;

```
plot2d([tan(2*x), 2*x, -x/2], [x,-2,2], [y,-2,2]);
```



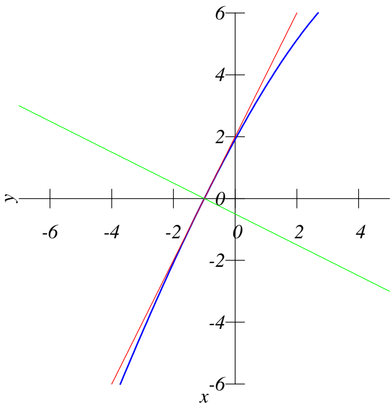
b) funktsiooni $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$ lõikepunkt x teljega on $(1,0)$,
$y'(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}$,
$\vec{s} = (2,1)$,
$\vec{n} = (1,-2)$,
puutuja võrrand on $\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{1}$ ehk $x - 2y - 1 = 0$,
normaali võrrand on $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-2}$ ehk $2x + y - 2 = 0$;

```
plot2d([asin((x-1)/2), (x-1)/2, -2*x+2], [x,-1,3], [y,-2,2]);
```



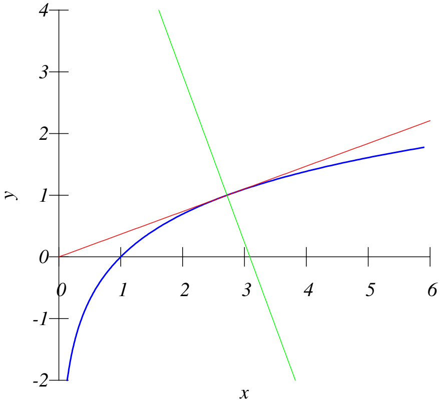
c) $y'(-1) = 8^{\frac{1}{3}} = 2$,
$\vec{s} = (1, 2)$,
$\vec{n} = (2, -1)$,
puutuja võrrand on $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2}$ ehk $2x - y + 2 = 0$,
normaali võrrand on $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1}$ ehk $x + 2y + 1 = 0$;

```
plot2d([(x+1)*(7-x)**(1/3), 2*x+2, -x/2-1/2],[x,-7,5]);
```



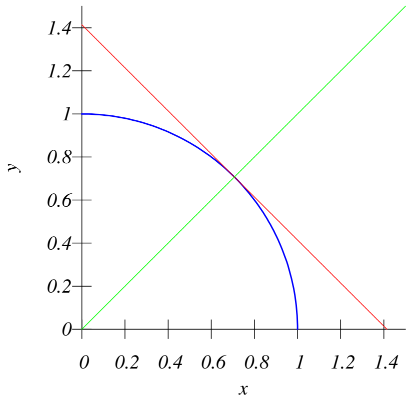
d) $y'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$,
$\vec{s} = (\mathrm{e}, 1)$,
$\vec{n} = (1, -\mathrm{e})$,
puutuja võrrand on $\frac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{y-1}{1}$ ehk $x - \mathrm{e}y = 0$,
normaali võrrand on $\frac{x-\mathrm{e}}{1} = \frac{y-1}{-\mathrm{e}}$ ehk $\mathrm{e}x + y - (1 + \mathrm{e}^2) = 0$;

```
plot2d([log(x), 1/%e*x, -%e*x+1+%e**2], [x,0,6]);
```



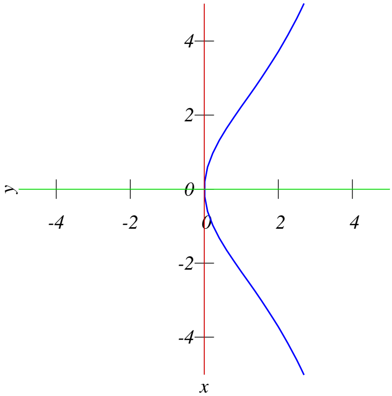
e) $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\vec{s} = (-1, 1)$,
$\vec{n} = (1, 1)$,
puutuja võrrand on $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}$ ehk $x + y - \sqrt{2} = 0$,
normaali võrrand on $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}$ ehk $x - y = 0$;

```
plot2d([[parametric, cos(t), sin(t), [t,0,%pi/2]], -x+sqrt(2),x], [x,0,1.5]);
```



f) kui $\ln(1+t^2) = 0$, siis $1 + t^2 = 1$, millest $t^2 = 0$, samas $t = 0$ rahuldab ka teist võrrandit $t + \arctan t = 0$, seega punktile P_0 vastab $t = 0$,
$x'(0) = \frac{2\cdot 0}{1+0^2} = 0$, $y'(0) = 1 + \frac{1}{1+0^2} = 2$,
$\vec{s} = (0, 1)$,
$\vec{n} = (1, 0)$,
puutuja võrrand on $\frac{x}{0} = \frac{y}{1}$ ehk $x = 0$,
normaali võrrand on $\frac{x}{1} = \frac{y}{0}$ ehk $y = 0$;

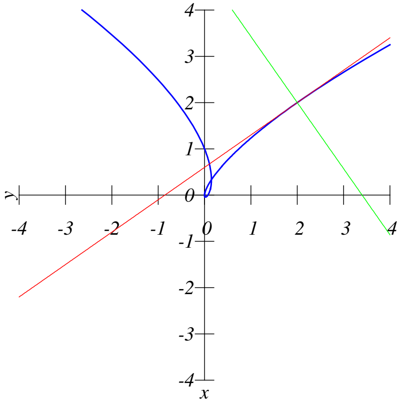
```
plot2d([[parametric, log(1+t**2), t+atan(t), [t,-10,10], [nticks,100]],
[parametric, 0, t, [t,-5,5]], 0],[x,-5,5]);
```



g) Seosest $\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}=2$ saame, et $t=-\frac{3}{4}$ või $t=1$. Sel juhul $x=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{27}{8}}=-\frac{2}{27}$ (ei sobi) või $x=\frac{1+1}{1}=2$. Niisiis $t=1$.

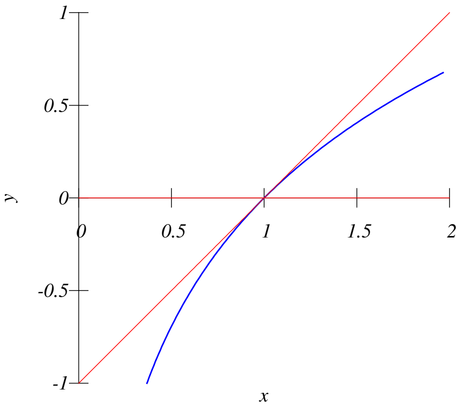
$x'(1)=-\frac{2\cdot 1+3}{1^4}=-5$, $y'(1)=-\frac{1}{2\cdot 1^2}-\frac{3}{1^3}=-\frac{7}{2}$,
$\vec{s}=(10,7)$,
$\vec{n}=(-7,10)$,
puutuja võrrand on $\frac{x-2}{10}=\frac{y-2}{7}$ ehk $7x-10y+6=0$,
normaali võrrand on $\frac{x-2}{-7}=\frac{y-2}{10}$ ehk $10x+7y-34=0$.

```
plot2d([[parametric, (1+t)/t**3, 3/(2*t**2)+1/(2*t), [t,-100,100], [nticks,10000]],
7*x/10+6/10, -10/7*x+34/7],[x,0,4]);
```



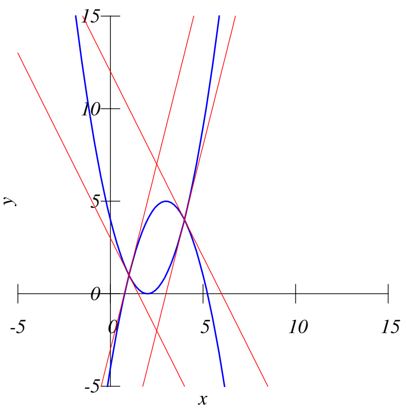
60. a) Lõikepunkti koordinaadid leiame süsteemist $\begin{cases} y=\ln x, \\ y=0, \end{cases}$ millest saame, et $P_0(1,0)$. Saame, et $y'(1)=\frac{1}{1}=1$, millest $\vec{s}=(1,1)$. x-telje sihiline vektor on $\vec{x}=(1,0)$. Niisiis $\cos\angle(\vec{s},\vec{x})=\frac{\langle\vec{s},\vec{x}\rangle}{|\vec{s}|\cdot|\vec{x}|}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Järelikult $\angle(\vec{s},\vec{x})=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

```
plot2d([log(x), x-1], [x,0,2], [y,-1,1]);
```



b) Lõikepunkti koordinaadid leiame süsteemist $\begin{cases} y=(x-2)^2, \\ y=-4+6x-x^2, \end{cases}$ millest saame, et $P_1(1,1)$ ning $P_2(4,4)$.
Punktis $P_1(1,1)$ on $y_1'(1) = 2\cdot(1-2) = -2$ ja $y_2'(1) = 6-2\cdot 1 = 4$, millest $\vec{s}_1 = (1,-2)$ ja $\vec{s}_2 = (1,4)$. Niisiis $\cos\angle(\vec{s}_1,\vec{s}_2) = \frac{\langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|} = \frac{1-8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}} = -\frac{7}{\sqrt{85}}$. Nurga võime valida väiksema kahest nurgast α ja $\pi-\alpha$; saame, et $\angle(\vec{s}_1,\vec{s}_2) = \arccos\frac{7}{\sqrt{85}}$.
Punktis $P_2(4,4)$ on $y_1'(4) = 2\cdot(4-2) = 4$ ja $y_2'(4) = 6-2\cdot 4 = -2$, millest $\vec{s}_1 = (1,4)$ ja $\vec{s}_2 = (1,-2)$. Siit tuleb sama nurk (vektorite skalaarkorrutis ja pikkused on samad, mis esimese lõikepunkti juures).

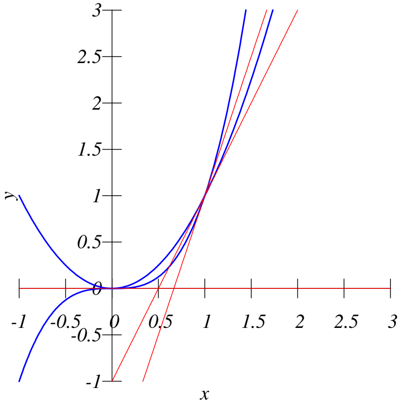
```
plot2d([(x-2)**2, -4+6*x-x**2, -2*x+3, 4*x-3, 4*x-12, -2*x+12], [x,-5,15]);
```



c) Lõikepunkti koordinaadid leiame süsteemist $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x^3, \end{cases}$ millest saame, et $P_1(0,0)$ ning $P_2(1,1)$.

Punktis $P_1(0,0)$ on $y_1'(0) = 2\cdot 0 = 0$ ja $y_2'(0) = 3\cdot 0^2 = 0$, millest nähtub, et tegemist on puutumisega, joonte vaheline nurk on 0.
Punktis $P_2(1,1)$ on $y_1'(1) = 2\cdot 1 = 2$ ja $y_2'(1) = 3\cdot 1^2 = 3$, millest $\vec{s}_1 = (1,2)$ ja $\vec{s}_2 = (1,3)$. Niisiis $\cos\angle(\vec{s}_1,\vec{s}_2) = \frac{\langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|} = \frac{1+6}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$. Järelikult $\angle(\vec{s}_1,\vec{s}_2) = \arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

```
plot2d([x**2, x**3, 0, 2*x-1, 3*x-2], [x,-1,3]);
```



61. Joontel peab olema ühine punkt ning selles ühises punktis peavad puutujavektorid olema kollineaarsed. Joone $y = ax^2$ puutujavektor punktis (x, ax^2) on $(1, 2ax)$ ning joone $y = \ln x$ puutujavektor punktis $(x, \ln x)$ on $(1, \frac{1}{x})$. Siit saame tingimuse $2ax = \frac{1}{x}$, millest $x^2 = \frac{1}{2a}$ (järelikult $a > 0$), seega $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$, ning kuna $x > 0$ (vastasel korral pole $\ln x$ määratud), on $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$. Nüüd määrame a väärtuse sellest, et punkt $(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{2})$ asuks ka joonel $y = \ln x$. Saame, et $\ln\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2}$, millest $\frac{1}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\mathrm{e}}$ ehk $a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

62. Puutumine tähendab, et puutuja sihivektor on kollineaarne vektoriga $(1,0)$. Puutuja sihivektor punktis x on $(1, 2ax+b)$. Siit saame, et puutumine saab aset leida sellise x korral, kus $2ax+b = 0$ ehk $x = -\frac{b}{2a}$. Samas peab puutepunkt asuma x-teljel, millest saame tingimuse $0 = a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$ ehk $b^2 = 4ac$.

65. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi(x-1)}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos\frac{\pi(1-x)}{2}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sin^2\frac{\pi(1-x)}{4}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\frac{\pi^2(1-x)^2}{16}}{1-x} = 0$;

c) kuna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x} = 2$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^2\cdot x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\frac{x^4}{4}}{x^2\cdot x^2} = \dfrac{1}{2}$;

e) kuna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$;

f) kuna $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{4x}} = 0$, siis $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{4x}} = 0$, millest $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{4x}} = 0$, järelikult $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{4x}} = 0$, mistõttu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{\mathrm{e}^{4x}} = 0$;

g) kuna $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{6\cos 6x\sin x}{\cos x\sin 6x} = 1$, siis $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin 6x}{\ln\sin x} = 1$;

h) kuna $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{3}(\tan x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{4\sin x\cos x} = \dfrac{1}{12}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{(\sin x)^{\frac{5}{3}}(\cos x)^{\frac{7}{3}}} = \dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{3}$, siis $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1} = \dfrac{1}{3}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x = \lim\limits_{y\to 0} y\tan\dfrac{\pi}{2}(1-y) = \lim\limits_{y\to 0} y\cot\dfrac{\pi}{2}y = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cos\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y} = \dfrac{2}{\pi}$;

j) kirjutame $\lim\limits_{x\to 1-}\ln x\ln(1-x) = \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$; saame, et $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x\ln^2 x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x\ln^2 x}{1-x}$;
kuna $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{-1} = 0$, siis $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x\ln^2 x}{1-x} = 0$, mistõttu ka $\lim\limits_{x\to 1-}\ln x\ln(1-x) = 0$;

k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x - x+1}{(x-1)\ln x}$; kuna $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}) = \dfrac{1}{2}$ (põhjuseks on $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$), siis ka $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right) = \dfrac{1}{2}$;

l) kuna $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$ ning $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$ (vt. e)), siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3} = 0\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$, järelikult ka $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

66. a) saame, et $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = 0$, seega $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+}\exp(\ln x^x) = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x\right) = \mathrm{e}^0 = 1$;

b) saame, et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\ln x = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, millest $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1}\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\ln x\right) = \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x\right) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$;

c) saame, et $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)\ln\cot x = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\cot x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{\cot x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$, millest $\lim\limits_{x\to 0+}(\cot x)^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0+}\exp\left((\sin x)\ln\cot x\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)\ln\cot x\right) = \mathrm{e}^0 = 1$;

d) saame, et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(\mathrm{e}^x+x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x} = 2$, mistõttu $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^2$;

e) saame, et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, millest $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\exp\dfrac{\ln x}{x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$;

f) saame, et $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3\ln x}{4+\ln x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$, millest $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0+}\exp\dfrac{3\ln x}{4+\ln x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3\ln x}{4+\ln x}\right) = \mathrm{e}^3$;

g) saame, et $\lim\limits_{x\to 1-}\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x) = \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}} = \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}} = -\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1-}\cot\dfrac{\pi x}{2}\cdot\lim\limits_{y\to 0+}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}{y} = 0\cdot\lim\limits_{y\to 0+}\dfrac{\sin\frac{\pi y}{2}}{x} = 0\cdot\lim\limits_{y\to 0+}\dfrac{\frac{\pi y}{2}}{x} = 0$, mistõttu $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x\to 1-}\exp\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)\right) = \exp\lim\limits_{x\to 1-}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)\right) = \mathrm{e}^0 = 1$;

h) saame, et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, mistõttu $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\exp\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} =$

$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = e^0 = 1.$

67. a) L'Hospitali reegli kasutamisel (põhimõtteliselt see on võimalik, kuna $\lim_{x\to\infty}(x \pm \sin x) = \infty$, sest $x \pm \sin x \geqslant x-1$) peaksime arvutama piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \tan^2 \frac{x}{2}$. Viimast piirväärtust aga ei eksisteeri Heine kriteeriumi põhjal: valides $x = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi, \ldots$, tuleb $\tan^2 \frac{x}{2} = 0$, aga valides $x = \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots$, tuleb $\tan^2 \frac{x}{2} = 1$.

Ent antud piirväärtuse saame leida vahetult: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$. Nimelt näeme, et $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, kuna $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ning $|\sin x| \leqslant 1$ kõigi reaalarvude x korral.

b) L'Hospitali reegli kasutamisel peaksime arvutama piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. See on omakorda määramatus kujul $\frac{\infty}{\infty}$ ning L'Hospitali reegel nõuaks siin arvutada piirväärtus $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ent see on jälle algne piirväärtus ning lahendamisega edasi pole me jõudnud. (Me ei saanud isegi teada, kas algne piirväärtus üldse eksisteerib.)

Antud piirväärtuse saame leida vahetult: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{1}{1} = 1$.

c) L'Hospitali reegli kasutamisel peaksime arvutama piirväärtuse $\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$. Piirväärtuse all olev suurus on tõkestatud, kuna $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ ning eeldusel $|x| \leqslant 1$ kehtib $\left|2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right| \leqslant 2|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| + \left|\cos\frac{1}{x}\right| = 2+1 = 3$. Niisiis, kui see piirväärtus eksisteerib, on ta reaalarv, olgu ta A. Lisaks teame, et $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$, kuna siinus on tõkestatud.

Seega saame, et $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\cos x \cdot \frac{\cos\frac{1}{x} - 2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} + 2x\sin\frac{1}{x}\right) = -A$.

Tegelikult aga piirväärtust $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ ei leidu. Nimelt, kui valida $(x_n) = \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \ldots, \frac{1}{2k\pi}, \ldots\right)$, siis $\lim_n \cos\frac{1}{x_n} = 1$. Kui aga valida $(x_n) = \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{(2k-1)\pi}, \ldots\right)$, siis $\lim_n \cos\frac{1}{x_n} = -1$. Järelikult Heine kriteeriumi põhjal ei leidu $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

Seega ei saa leiduda ka $\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$.

Ent nõutava piirväärtuse saame arvutada vahetult: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$. (Teises teguris on hääbuv suurus korda tõkestatud suurus.)

69. a) $P(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2 = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$;

b) $P(x) = f(25) + f'(25)\cdot(x-25) + \frac{f''(25)}{2}\cdot(x-1)^2 = 5 + \frac{x-25}{10} - \frac{(x-25)^2}{1000}$;

c) $P(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}\cdot(x-1)^3 = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12}$;

d) $P(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot(x-1)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{6}\cdot(x-1)^3+\frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{24}\cdot(x-1)^4=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{1}{48}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4$.

70. a) $\sin x=\sin 0+(\cos 0)\cdot(x-0)+(-\sin 0)\cdot(x-0)^2+(-\cos 0)\cdot(x-0)^3+\alpha(x)=x-\frac{x^3}{6}+\alpha(x)$, kus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^3}=0$; $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\sin\xi}{24}\cdot x^4$, kus ξ asub 0 ja x vahel; b) $\tan x=\tan 0+\left(\frac{1}{\cos^2 0}\right)\cdot(x-0)+\alpha(x)=x+\alpha(x)$, kus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=0$; $\tan x=x+\frac{\sin\xi}{\cos^3\xi}\cdot x^2$, kus ξ asub 0 ja x vahel; c) $\ln(1+x)=\ln(1+0)+\frac{1}{1+0}\cdot x-\frac{1}{(1+0)^2}\cdot\frac{x^2}{2}+\alpha(x)=x-\frac{x^2}{2}+\alpha(x)$, kus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^2}=0$; $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{(1+\xi)^3}\cdot\frac{x^3}{6}$, kus ξ asub 0 ja x vahel; d) $\arcsin x=\arcsin 0+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}\cdot x+\frac{0}{(1-0^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x^2}{2}+\alpha(x)=x+\alpha(x)$, kus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^2}=0$; $\arcsin x=x+\frac{1+2\xi^2}{(1-\xi^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{x^3}{6}$, kus ξ asub 0 ja x vahel; e) $\arctan x=\arctan 0+\frac{1}{1+0^2}\cdot x-\frac{2\cdot 0}{(0^2+1)^2}+\alpha(x)=x+\alpha(x)$, kus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^2}=0$; $\arctan x=x+\frac{6\xi^2-2}{(\xi^2+1)^3}\cdot\frac{x^3}{6}$, kus ξ asub 0 ja x vahel; f) $\sqrt[n]{1+x}=\sqrt[n]{1+0}+\frac{1}{n\sqrt[n]{(1+0)^{n-1}}}\cdot x+\alpha(x)=1+\frac{x}{n}+\alpha(x)$, kus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=0$; $\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{x}{n}-\frac{(n-1)(1+x)^{\frac{1}{n}-2}}{n^2}\cdot\frac{x^2}{2}$, kus ξ asub 0 ja x vahel.

71. a) Rakendame Taylori valemit juhul $a=0$, $n=3$ ja kirjutame välja jääkliikme Lagrange'i kuju. Saame, et $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\sin\xi}{4!}\cdot x^4$, kus ξ asub x ja 0 vahel. Valemi $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ kasutamisel ($|x|\leqslant\frac{1}{2}$) tehtav viga on $\left|\frac{\sin\xi}{4!}\cdot x^4\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2^4}}{4!}=\frac{1}{384}$.

b) Analoogiliselt eelmise punktiga saame, et $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{8\sin^3\xi+16\sin\xi}{\cos^5\xi}\cdot\frac{x^4}{4!}$, kus ξ asub x ja 0 vahel. Valemi $\tan x\approx x+\frac{x^3}{3}$ kasutamisel ($|x|\leqslant\frac{1}{10}$) tehtav viga on $\left|\frac{8\sin^3\xi+16\sin\xi}{\cos^5\xi}\cdot\frac{x^4}{4!}\right|\leqslant\frac{24}{4!\cdot 10^4\cos^5\frac{1}{10}}\leqslant 2\cdot 10^{-4}$.

c) Analoogiliselt eelmise punktiga saame, et $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3}{8(\xi+1)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{x^3}{6}$, kus ξ asub x ja 0 vahel. Valemi $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ kasutamisel ($x\in[0,1]$) tehtav viga on $\left|\frac{3}{8(\xi+1)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{x^3}{6}\right|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{16}$.

d) Analoogiliselt eelmise punktiga saame, et $\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}\cdot\frac{x^3}{6}$, kus ξ asub x ja 0 vahel. Valemi $\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2}$ kasutamisel ($|x|\leqslant 0{,}2$) tehtav viga on $\left|\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}\cdot\frac{x^3}{6}\right|\leqslant\frac{e^{0,2}-e^{-0,2}}{2}\cdot\frac{1}{125\cdot 6}<\frac{3}{10^4}$.

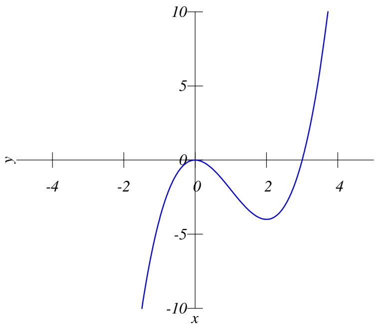
e) Analoogiliselt eelmise punktiga saame, et $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+e^{\xi}\cdot\frac{x^4}{24}$, kus ξ asub x ja 0 vahel. Valemi $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ kasutamisel ($|x|\leqslant 1$) tehtav viga on $\left|e^{\xi}\cdot\frac{x^4}{24}\right|\leqslant\frac{e}{24}<\frac{3}{25}$.

72. Taylori valemi põhjal $P(x)=P(1)+P'(1)(x-1)+\frac{P''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{P'''(1)}{6}(x-1)^3+\frac{P^{(4)}(1)}{24}(x-1)^{24}+\frac{P^{(5)}(1)}{120}(x-1)^5+\frac{P^{(6)}(\xi)}{720}\cdot(x-1)^6$, kus ξ asub x ja 1 vahel. Kuna $P(1)=0$, $P'(1)=5-8+3-2+2=0$, $P''(1)=20-24+6-2=0$, $P'''(1)=60-48+6=18$, $P^{(4)}(1)=120-48=72$, $P^{(5)}(1)=120$ ja $P^{(6)}(\xi)=0$ igasuguse ξ korral, siis $P(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5$.

73. Analoogiliselt eelmise ülesandega saame, et $P(x)=P(-2)+P'(-2)(x+2)+\frac{P''(-2)}{2}(x+2)^2+\frac{P'''(-2)}{6}(x+2)^3+\frac{P^{(4)}(-2)}{24}(x+2)^24+\frac{P^{(5)}(-2)}{120}(x+2)^5$ (jääkliige on null, sest $P^{(6)}(\xi)=0$ mistahes ξ korral). Arvutanud välja vajalikud tuletised, leiame, et $P(x)=3(x+2)^5-26(x+2)^4+86(x+2)^3-134(x+2)^2+101(x+2)-18$.

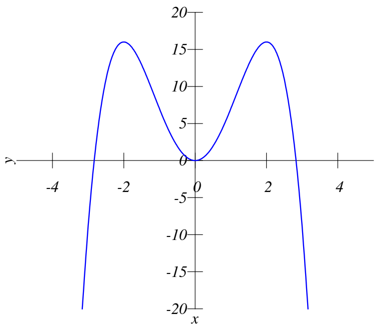
75. a) f on pidev kogu reaalteljel, $f'(x)=3x^2-6x$. Intervallides $(-\infty,0]$ ja $[2,\infty)$ on f rangelt kasvav, intervallis $[0,2]$ aga rangelt kahanev.

```
plot2d(x**3-3*x**2, [x,-5,5], [y,-10,10]);
```



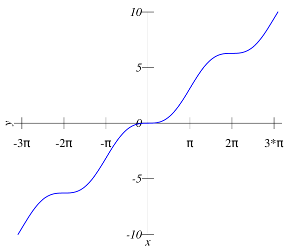
b) f on pidev kogu reaalteljel, $f'(x) = 16x - 4x^3$. Intervallides $(-\infty, -2]$ ja $[0, 2]$ on f rangelt kasvav, intervallides $[-2, 0]$ ja $[2, \infty)$ aga rangelt kahanev.

```
plot2d(8*x**2-x**4, [x,-5,5], [y,-20,20]);
```



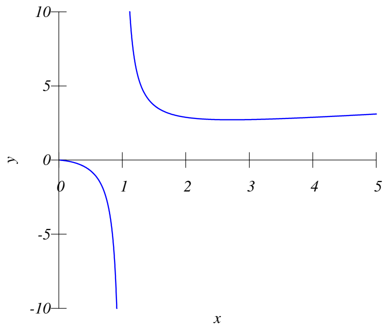
c) f on pidev kogu reaalteljel, $f'(x) = 1 - \cos x$. f on kasvav kogu reaalteljel, sealjuures rangelt kasvav kõigis intervallides $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Kokkuvõttes on f rangelt kasvav kogu reaalteljel.

```
plot2d(x-sin(x), [x,-10,10], [y,-10,10]);
```



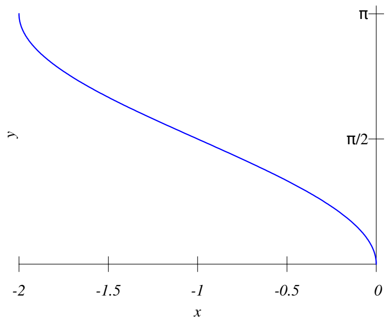
d) f määramispiirkond on $(0,1) \cup (1, \infty)$, selles on f pidev, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Intervallides $(0, 1)$ ja $(1, \mathrm{e}]$ on f rangelt kahanev, intervallis $[\mathrm{e}, \infty)$ aga rangelt kasvav.

```
plot2d(x/log(x), [x,0,5], [y,-10,10]);
```



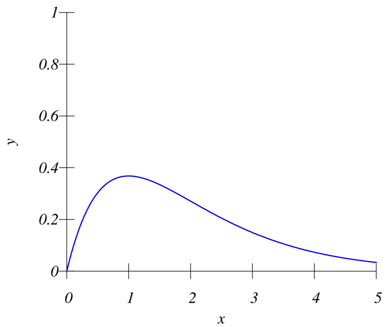
e) f määramispiirkonnas peab olema täidetud nõue $1+x \in [-1,1]$ ehk $x \in [-2,0]$. Oma määramispiirkonnas $[-2,0]$ on f pidev. Leiame $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x(2+x)}}$. Niisiis f on kogu määramispiirkonnas $[-2,0]$ rangelt kahanev.

```
plot2d(acos(1+x), [x,-2,0], [y,0,4]);
```



f) f määramispiirkond on $(0,\infty)$, määramispiirkonnas on f pidev. Saame, et $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, mis tähendab, et intervallis $(0,1]$ on f rangelt kasvav ning intervallis $[1,\infty)$ rangelt kahanev.

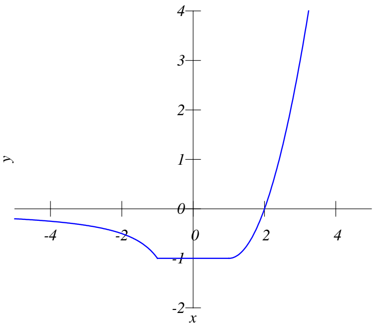
```
plot2d(x*exp(-x), [x,0,5], [y,0,1]);
```



g) f määramispiirkonnaks on kogu reaaltelg ning kontroll näitab, et f on pidev kogu määramispiirkonnas. (Punktis -1 näiteks $f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$, $\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{1}{x} = -1$ ning $\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} (-1) =$

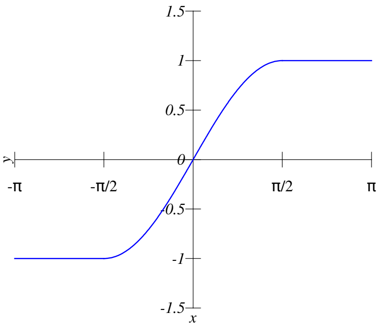
-1; analoogiline kontroll $f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ näitamiseks tuleb läbi viia ka punktis 1.) Intervallis $(-\infty,-1)$ kehtib $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, mis tähendab, et intervallis $(-\infty,-1]$ on f rangelt kahanev. Intervallis $[-1,1]$ on f kasvav ja kahanev (konstantne). Intervallis $(1,\infty)$ kehtib $f'(x) = 2(x-1)$, mis tähendab, et intervallis $[1,\infty)$ on f rangelt kasvav.

```
f(x) := if x <= -1 then 1/x else if x <= 1 then -1 else x**2-2*x;
plot2d(f(x), [x,-5,5], [y,-2,4]);
```



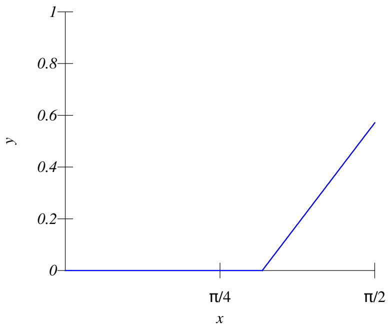
h) f määramispiirkonnaks on $(-\pi,\pi)$, kontroll näitab, et f on pidev kogu määramispiirkonnas. (Eraldi tuleb uurida punkte $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$.) Intervallis $\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ on $f(x) = -1$, seega f on kasvav ja kahanev (konstantne). Intervallis $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ kehtib $f'(x) = \cos x$, seega f on rangelt kasvav intervallis $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Intervallis $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ on $f(x) = 1$, seega f on kasvav ja kahanev (konstantne).

```
f(x) := if abs(x) <= %pi/2 then sin(x) else if abs(x) < %pi then signum(sin(x));
plot2d(f(x), [x,-%pi,%pi], [y,-1.5,1.5]);
```



i) f määramispiirkonnaks on $(0,\frac{\pi}{2})$. Kui $x \in (0,1)$, siis $\sin\lfloor x\rfloor = \sin 0 = 0$, mistõttu sel juhul $f(x) = (x-1)\cdot 0 = 0$. Kui $x \in (1,\frac{\pi}{2})$, siis $\lfloor x\rfloor = 1$, mistõttu $f(x) = (x-1)\sin 1$. Näeme, et funktsioon f on pidev punktis 1, nimelt $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} (x-1)\sin\lfloor x\rfloor = \lim\limits_{x\to 1+} (x-1)\sin 1 = 0 = f(1)$ ja $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} 0 = 0 = f(1)$. Intervallis $(0,1]$ on f kasvav ja kahanev (konstantne). Intervallis $(1,\frac{\pi}{2})$ kehtib $f'(x) = \sin 1 > 0$, mistõttu f on piirkonnas $[1,\frac{\pi}{2})$ rangelt kasvav.

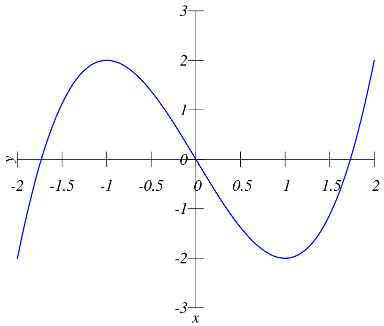
```
plot2d((x-1)*sin(floor(x)), [x,0,%pi/2], [y,0,1]);
```



76.

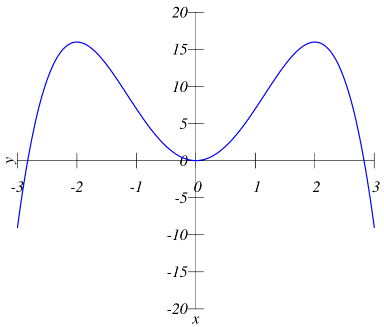
a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, seega kriitilised punktid on -1 ja 1. Punktist -1 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, järelikult on punktis -1 lokaalne maksimum. Punktist 1 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, järelikult on punktis 1 lokaalne miinimum.

```
plot2d(x**3-3*x, [x,-2,2], [y,-3,3]);
```



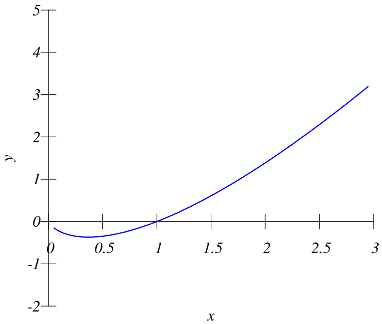
b) $f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(2-x)(2+x)$, seega kriitilised punktid on -2, 0 ja 2. Punktidest -2 ja 2 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, järelikult on punktides -2 ja 2 lokaalne maksimum. Punktist 0 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, järelikult on punktis 0 lokaalne miinimum.

```
plot2d(8*x**2-x**4, [x,-3,3], [y,-20,20]);
```



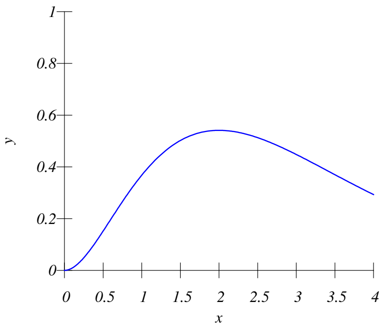
c) Määramispiirkond on $(0, \infty)$ ja $f'(x) = \ln x + 1$, seega kriitiline punkt on $\frac{1}{e}$. Punktist $\frac{1}{e}$ vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, järelikult on punktis $\frac{1}{\mathrm{e}}$ lokaalne miinimum.

```
plot2d(x*log(x), [x,0,3], [y,-2,5]);
```



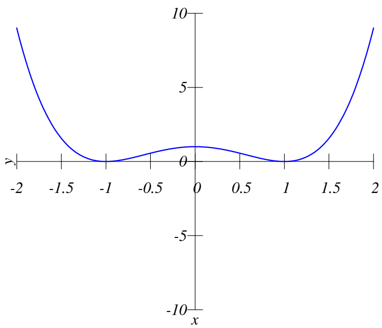
d) $f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$, seega kriitilised punktid on 0 ja 2. Punktist 0 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, järelikult on punktis 0 lokaalne miinimum. Punktist 2 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, järelikult on punktis 2 lokaalne maksimum.

```
plot2d(x**2*exp(-x), [x,0,4], [y,0,1]);
```



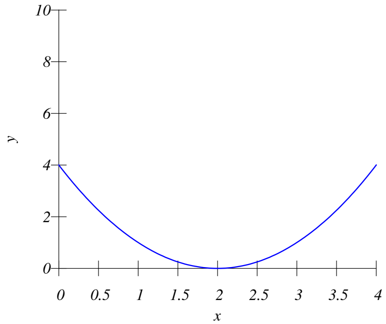
e) $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, seega kriitilised punktid on -1, 0 ja 1. Punktist -1 ja 1 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, järelikult on punktides -1 ja 1 lokaalne miinimum. Punktist 0 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, järelikult on punktis 0 lokaalne maksimum.

```
plot2d((x**2-1)**2, [x,-2,2], [y,-10,10]);
```



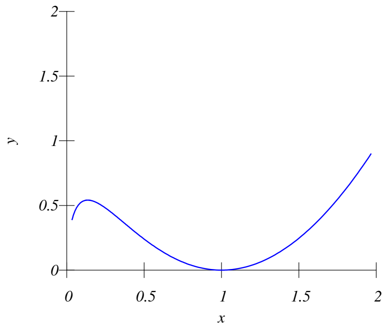
f) $f(x) = (x-2)^2$, seega on punktis 2 lokaalne miinimum.

```
plot2d((x-2)**2, [x,0,4], [y,0,10]);
```



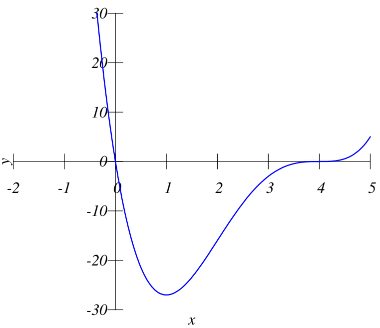
g) Määramispiirkond on $(0,\infty)$ ja $f'(x) = (\ln x + 2)\ln x$, seega kriitilised punktid on 1 ja $\frac{1}{e^2}$. Punktist 1 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, seega punktis 1 on lokaalne maksimum. Punktist $\frac{1}{e^2}$ vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, seega punktis $\frac{1}{e^2}$ on lokaalne miinimum.

```
plot2d(x*log(x)**2, [x,0,2], [y,0,2]);
```



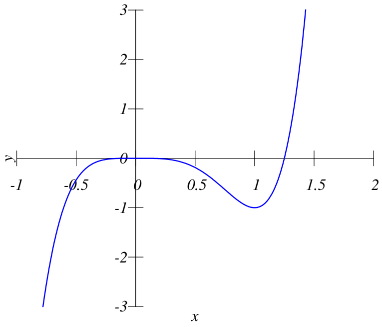
h) $f'(x) = 4(x-4)^2(x-1)$, seega kriitilised punktid on 1 ja 4. Punktist 1 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, seega punktis 1 on lokaalne miinimum. Punktist 4 vasakul ja paremal on tuletis positiivne, seega punktis 4 lokaalset ekstreemumit ei ole.

```
plot2d((x-4)**3*x, [x,-2,5], [y,-30,30]);
```



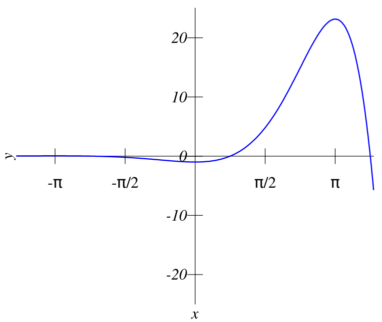
i) $f'(x) = 20x^3(x-1)$, seega kriitilised punktid on 0 ja 1. Punktist 0 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, seega punktis 0 on lokaalne maksimum. Punktist 1 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, seega punktis 1 on lokaalne miinimum.

```
plot2d(4*x**5-5*x**4, [x,-1,2], [y,-3,3]);
```



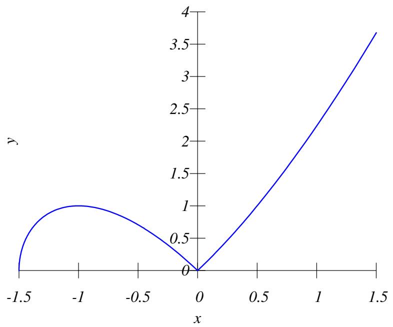
j) $f'(x) = 2e^x \sin x$, seega kriitilised punktid on kujul $k\pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$. Punktidest $2k\pi$ vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, seega punktides $2k\pi$ on lokaalne miinimum. Punktidest $(2k+1)\pi$ vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, seega punktides $(2k+1)\pi$ on lokaalne maksimum.

```
plot2d(exp(x)*(sin(x)-cos(x)), [x,-4,4] ,[y,-25,25]);
```



k) Määramispiirkonna punktide nõue on $2x^3+3x^2 \geqslant 0$, mis tähendab, et $x \geqslant -\frac{3}{2}$. Seega määramispiirkond on $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$. Saame, et $f'(x) = \frac{6x(x+1)}{2\sqrt{2x^3+3x^2}}$ punktides $x \neq 0$, seega kriitilised punktid on -1 ja 0 (NB! punktis 0 tuletist ei eksisteeri!). Punktist -1 vasakul on tuletis positiivne, paremal negatiivne, seega punktis -1 on lokaalne maksimum. Punktist 0 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, seega punktis 0 on lokaalne miinimum.

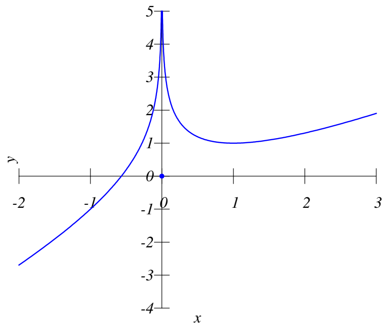
```
plot2d(sqrt(2*x**3+3*x**2), [x,-1.5,1.5], [y,0,5]);
```



l) Punktides $x \neq 0$ kehtib $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Seega kriitilised punktid on 0 ja 1. Punktis 0 pole funktsioon pidev. Samas näiteks kui $x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, siis $\ln|x| < -1$, millest $x - \ln|x| > x + 1 > 0 = f(0)$, mistõttu punktis 0 on lokaalne miinimum.

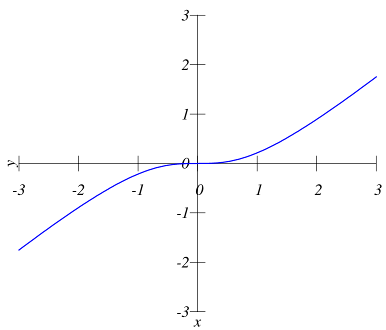
Punktist 1 vasakul on tuletis negatiivne, paremal positiivne, seega punktis 1 on lokaalne miinimum.

```
f(x) := if x = 0 then 0 else x - log(abs(x));
plot2d(f(x), [x,-2,3], [y,-4,5]);
```



m) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$, mistõttu kriitiliseks punktiks on 0. Kuna punktist 0 vasakul ja paremal on tuletis positiivne, siis funktsioonil f lokaalsed ekstreemumid puuduvad.

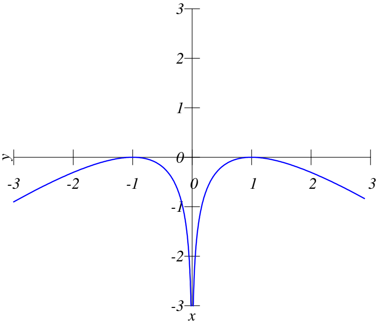
```
plot2d(x-atan(x), [x,-3,3], [y,-3,3]);
```



n) Määramispiirkonnaks on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Saame, et $f'(x) = -\operatorname{sgn} x + \frac{1}{x}$, seega kriitilised punktid on

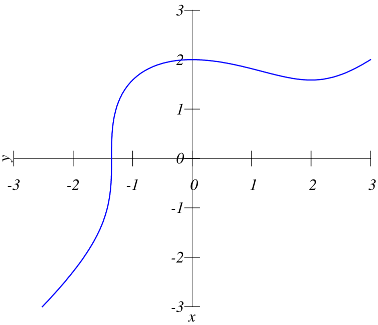
-1 ja 1. Punkti -1 ümbruses on $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, seega punktist -1 vasakul on tuletis positiivne ja paremal negatiivne, seega on funktsioonil f punktis -1 lokaalne maksimum. Punkti 1 ümbruses on $f'(x) = -1 + \frac{1}{x}$, seega punktist 1 vasakul on tuletis positiivne ja paremal negatiivne, seega on funktsioonil f punktis 1 lokaalne maksimum.

```
plot2d(1-abs(x)+log(abs(x)), [x,-3,3], [y,-3,3]);
```



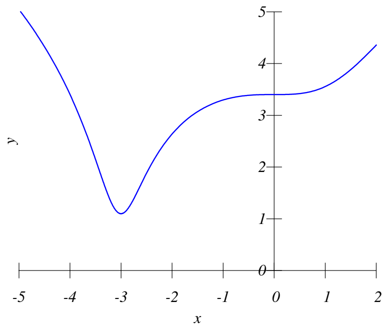
o) $f'(x) = \frac{3x(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2+8)^2}}$, seega on kriitilised punktid (nimetaja nullkoht) $c = \sqrt[3]{2\sqrt{2}-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}} + 1$, 0 ja 2. Punktist c läbiminekul tuletise märk ei muutu. Punktist 0 vasakul on tuletis positiivne ja paremal negatiivne, seega on funktsioonil f punktis 0 lokaalne maksimum. Punktist 2 vasakul on tuletis negatiivne ja paremal positiivne, seega on funktsioonil f punktis 2 lokaalne miinimum.

```
plot2d((x**3-3*x**2+8)**(1/3), [x,-3,3], [y,-3,3]);
```



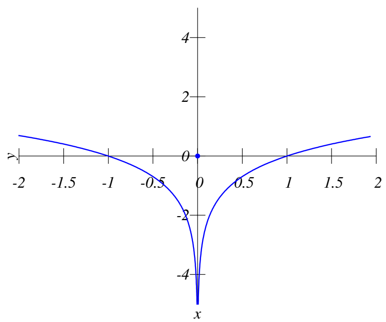
p) Määramispiirkonna leidmiseks paneme tähele, et funktsiooni $g(x) = x^4 + 4x^3 + 30$ lokaalsed ekstreemumid on $g'(x) = 4x^2(x+3)$ tõttu punktides -3 ja 0, kusjuures punktis -2 on lokaalne miinimum (mis on siiski positiivne) ning punktis 0 ekstreemum puudub. Seega f määramispiirkonnaks on kogu reaaltelg. $f'(x) = \frac{4x^2(x+3)}{x^4+4x^3+30}$, seega kriitilised punktid on -3 ja 0. Punktist -3 vasakul on tuletis negatiivne ja paremal positiivne, seega on funktsioonil f punktis -3 lokaalne miinimum. Punktis 0 lokaalne ekstreemum puudub, sest temast vasakul ja paremal on tuletis positiivne.

```
plot2d(log(x**4+4*x**3+30), [x,-5,2], [y,0,5]);
```



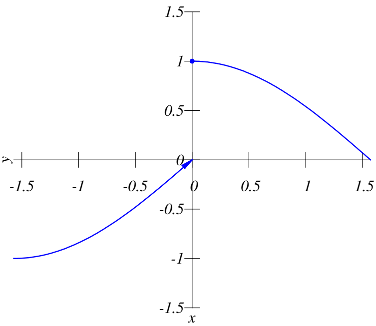
q) Kui $x \neq 0$, siis $f'(x) = \frac{1}{x}$, seega kriitiline punkt on ainult 0. Punktis 0 pole funktsioon f pidev. Saame, et vahemikus $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ kehtib $f(x) = \ln|x| < -1 < 0 = f(0)$, seega punktis 0 on funktsioonil f lokaalne maksimum.

```
f(x) := if x = 0 then 0 else log(abs(x));
plot2d(f(x), [x,-2,2], [y,-5,5]);
```



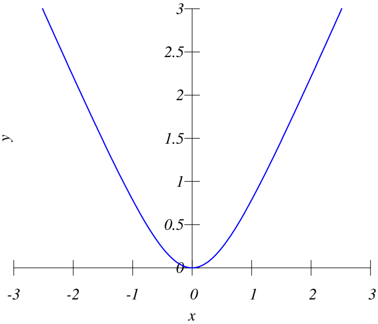
r) Punktis 0 pole funktsioon pidev. Kui $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, siis $f(x) < 0 < 1 = f(0)$, kui aga $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, siis $f(x) < 1 = f(0)$. Seega on punktis 0 lokaalne maksimum. Intervallis $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ on $f'(x) = \cos x$, seega lokaalset ekstreemumit selles intervallis pole. Intervallis $(0, \frac{\pi}{2})$ on $f'(x) = -\sin x$, seega ka selles intervallis lokaalset ekstreemumit pole.

```
f(x) := if x > -%pi/2 and x < 0 then sin(x) else if x <= %pi/2 then cos(x);
plot2d(f(x),[x,-%pi/2,%pi/2],[y,-1.5,1.5]);
```



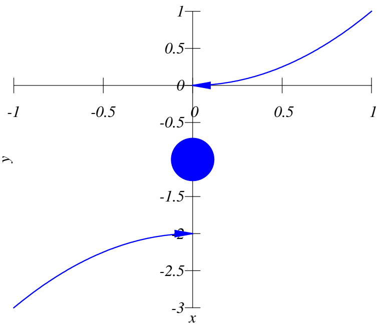
s) $f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$. Punkt 0 on kriitiline punkt, sealjuures kui $x < 0$, siis $\arctan x < 0$ ja $\frac{x}{1+x^2} < 0$, mistõttu $f'(x) < 0$, ja kui $x > 0$, siis analoogiliselt $f'(x) > 0$. Seega on punktis 0 funktsioonil f lokaalne miinimum ning rohkem lokaalseid ekstreemume pole.

```
plot2d(x*atan(x), [x,-3,3], [y,0,3]);
```



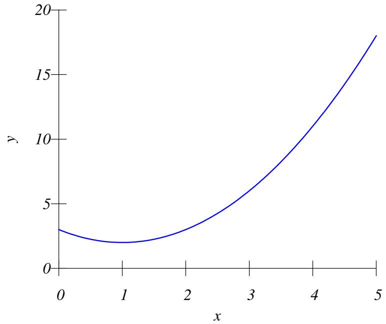
t) Punktis 0 pole funktsioon pidev. Kuna iga $\delta > 0$ korral $\frac{\delta}{2} \in (0,\delta)$, kusjuures $f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^2}{4} > -1 = f(0)$ ning $-\frac{\delta}{2} \in (-\delta,0)$, kusjuures $f\left(-\frac{\delta}{2}\right) = -\frac{\delta^2}{4} - 2 < -1 = f(0)$, siis punktis 0 lokaalset ekstreemumit pole. Intervallis $(0,\infty)$ on $f'(x) = 2x > 0$ ning intervallis $(-\infty,0)$ on $f'(x) = -2x < 0$, seega ka nendes intervallides lokaalset ekstreemumit pole.

```
f(x) := if x < 0 then -x^2-2 else if x = 0 then -1 else if x > 0 then x^2;
plot2d(f(x),[x,-1,1],[y,-1,1]);
```



77. a) $f'(x) = 2(x-1)$, seega võib funktsiooni f globaalne ekstreemum olla punktis 0, 1 ja 5. Saame, et $f(0) = 3$, $f(1) = 2$ ja $f(5) = 18$. Niisiis on funktsiooni f globaalne maksimum punktis 5 ja globaalne miinimum punktis 1.

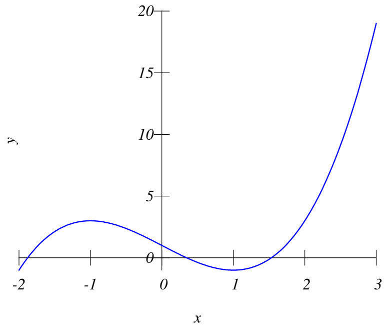
```
plot2d(x**2-2*x+3, [x,0,5], [y,0,20]);
```



b) $f'(x) = 2(x-1)$, seega funktsioon f on rangelt kahanev hulgas $(0,1]$ ja rangelt kasvav hulgas $[1,5)$. Järelikult funktsioonil f on globaalne miinimum punktis 1 ning globaalne maksimum puudub.

c) $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, seega võib funktsiooni f globaalne ekstreemum olla punktis -2, -1, 1 ja 3. Saame, et $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ ja $f(3) = 19$. Niisiis on funktsiooni f globaalne maksimum punktis 3 ja globaalne miinimum punktides -2 ja 1.

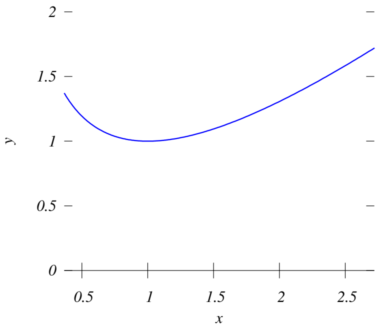
```
plot2d(x**3-3*x+1, [x,-2,3], [y,-1,20]);
```



d) $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, seega funktsioon f on rangelt kasvav hulkades $(-2,-1]$ ja $[1,3)$ ning rangelt kahanev hulgas $[-1,1]$. Et $f(2{,}5) = 9{,}125 > 3 = f(-1)$, siis funktsioonil f globaalne maksimum puudub. Näitame, et $f(x) > 3 = f(1)$, kui $x \in (-2,-1]$. Võrratus $x^3 - 3x + 1 > 3$ on samaväärne võrratusega $(x+2)(x-1)^2 > 0$, mis antud poollõigus kehtib. Seega globaalne miinimum on punktis 1.

e) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, seega võib funktsiooni f globaalne ekstreemum olla punktis $\frac{1}{e}$, 1 ja e. Saame, et $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} + 1$, $f(1) = 1$ ja $f(e) = e - 1$. Kuna $f(1) < f(\frac{1}{e})$ ja $f(1) < f(e)$, siis on funktsiooni f globaalne miinimum punktis 1. Kuna $e - 1 > \frac{1}{e} + 1$, siis on funktsiooni f globaalne maksimum punktis e.

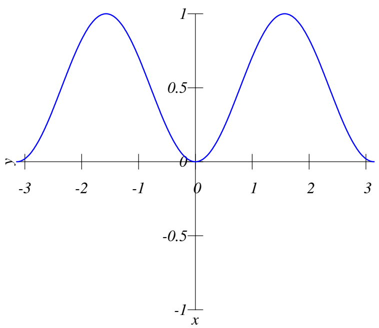
```
plot2d(x-log(x), [x,1/%e,%e], [y,0,2]);
```



f) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, seega funktsioon f on rangelt kahanev hulgas $\left(\frac{1}{e}, 1\right]$ ja rangelt kasvav hulgas $[1, e)$. Järelikult funktsioonil f on globaalne miinimum punktis 1 ning globaalne maksimum puudub.

g) $f'(x) = \sin 2x$, seega võib funktsiooni f globaalne ekstreemum olla punktis $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ ja π. Saame, et $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$ ja $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$, seega funktsiooni f globaalne miinimum on punktides $-\pi$, 0 ja π ning globaalne maksimum punktides $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$.

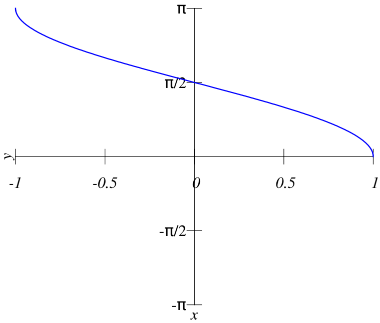
```
plot2d(sin(x)**2, [x,-%pi,%pi], [y,-1,1]);
```



h) $f'(x) = \sin 2x$, seega funktsioon f on rangelt kasvav hulkades $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ ja $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ning rangelt kahanev hulkades $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ja $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Et $0 \leqslant (\sin x)^2 \leqslant 1$ koguni kogu reaalteljel, siis on punktides $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ globaalne maksimum ja punktis 0 globaalne miinimum.

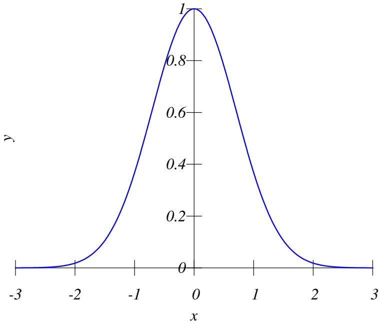
i) Määramispiirkond on $[-1, 1]$ ning $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, seega globaalne ekstreemum võib olla ainult punktides -1 ja 1. Kuna $f(-1) = \pi$ ja $f(1) = 0$, siis on funktsiooni f globaalne miinimum punktis 1 ja globaalne maksimum punktis -1.

```
plot2d(acos(x), [x,-1,1], [y,-%pi,%pi]);
```



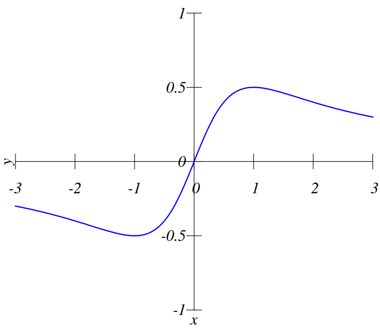
j) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, seega võib funktsiooni f globaalne ekstreemum olla ainult punktis 0. Kuna $f(x) = e^{-x^2} \leqslant 1 = f(0)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis on funktsioonil f globaalne maksimum punktis 0.

```
plot2d(exp(-x**2), [x,-3,3], [y,0,1]);
```



k) $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, seega võib funktsiooni f globaalne ekstreemum olla punktis -1 ja 1. Saame, et $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ja $f(1) = \frac{1}{2}$, kusjuures juhul $x \leqslant 0$ kehtib $f(x) \leqslant 0 < \frac{1}{2} = f(1)$ ja juhul $x > 0$ kehtib $1 + x^2 \geqslant 2x$, millest $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = f(1)$. Järelikult on funktsioonil f punktis 1 globaalne maksimum. Analoogiliselt näitame, et funktsioonil f on punktis -1 globaalne miinimum.

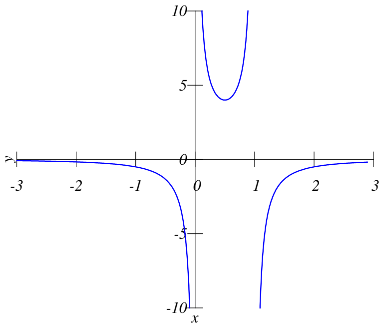
```
plot2d(x/(1+x**2), [x,-3,3], [y,-1,1]);
```



l) Määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. Saame, et $f'(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2 x^2}$, seega võib funktsioonil f

olla globaalne ekstreemum ainult punktis $\frac{1}{2}$. Kuna $f(\frac{1}{2}) = 4$, aga näiteks $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{4}) = 5\frac{1}{3}$, siis punktis $\frac{1}{2}$ funktsioonil f globaalset ekstreemumit ei ole.

```
plot2d(1/x+1/(1-x), [x,-3,3], [y,-10,10]);
```



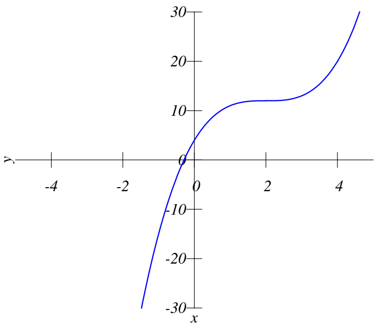
78. Olgu tegurid x ja $\frac{36}{x}$, siis vaja on leida funktsiooni $f(x) = x^2 + \left(\frac{36}{x}\right)^2$ globaalne miinimum. Saame, et $f'(x) = \frac{2(x-6)(x+6)(x^2+36)}{x^3}$, tuletise nullkohad on -6 ja 6, kusjuures lokaalne miinimum on mõlemas punktis. Et $f(x) = x^2 + \frac{36^2}{x^2} \geqslant 2 \cdot 36 = 72 = f(6) = f(-6)$, siis on mõlemas punktis globaalne miinimum.
79. Olgu üks serv x ja teine $2x$ cm, siis kolmas serv on $\frac{72}{2x^2} = \frac{36}{x^2}$ cm. Olgu $f(x) = 2\cdot 2x^2 + 2\cdot\frac{36}{x} + 2\cdot\frac{72}{x} = 4x^2 + \frac{216}{x}$. $f'(x) = \frac{8(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}$. Kriitiline punkt on 3 ning kui $x < 3$, siis $f'(x) < 0$ ja kui $x > 3$, siis $f'(x) > 0$. Niisiis on 3 funktsiooni f miinimumpunkt ja kasti servad peavad olema 3, 6 ja 4 cm.
80. Olgu kolmnurga külg x meetrit, siis ristküliku teine külg on $\frac{3}{2}(1-x)$ meetrit. Akna pindala olgu $f(x) = x\cdot\frac{3}{2}(1-x) + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Saame, et $f'(x) = \frac{3-(6-\sqrt{3})x}{2}$, millest leiame, et funktsiooni f globaalne maksimum on punktis $\frac{3}{6-\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{3}}{11}$.
81. Olgu poolringi läbimõõt x meetrit, siis ristküliku teine külg on $\frac{4{,}5-x-\frac{\pi}{2}x}{2}$ meetrit. Ristlõike pindala on $f(x) = x\cdot\frac{4{,}5-x-\frac{\pi}{2}x}{2} + \frac{\pi x^2}{8}$. Saame, et $f'(x) = \frac{9-(\pi+4)x}{4}$, millest leiame, et funktsiooni f globaalne maksimum on punktis $\frac{9}{\pi+4}$. Seega otsitav raadius on $\frac{9}{2\pi+8}$ meetrit.
82. Olgu koonuse kõrgus x cm, siis koonuse põhja raadius on $\sqrt{400-x^2}$ cm. Koonuse ruumala on $f(x) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(400-x^2)\cdot x$. Saame, et $f'(x) = \frac{\pi}{3}\cdot(400-3x^2)$. Siit leiame, et funktsiooni f globaalne maksimum on punktis $\frac{20}{\sqrt{3}}$.
83. Olgu silindri raadius x, siis pool kõrgust on $\sqrt{R^2-x^2}$. Niisiis on silindri ruumala $f(x) = \pi x^2\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}$. Saame, et $f'(x) = \frac{2\pi x(2R^2-3x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}$, millest leiame, et funktsiooni f globaalne maksimum on punktis $x = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.
84. Antud sirge $2x-y-4=0$ normaalvektor on $(2,-1)$. Leides punkti (a,a^2) kaugust antud sirgeni, koostame sirge läbi punkti (a,a^2) sihivektoriga $(2,-1)$, selle võrrandiks on $\frac{x-a}{2} = \frac{y-a^2}{-1}$ ehk $x+2y-(a+2a^2)=0$. Saadud sirge ja sirge $2x-y-4=0$ lõikepunkt on $\frac{1}{5}(2a^2+a+8, 4a^2+2a-4)$ ning kaugus punktist (a,a^2) on $f(a) = \sqrt{(a-\frac{1}{5}(a^2+a+8))^2+(a^2-\frac{1}{5}(2a^2+2a-4))^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}|a^2-2a+4|$. Kuna $a^2-2a+4 = (a-1)^2+3>0$, siis $f(a) = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^2-2a+4)$. Siit leiame tuletise abil globaalse miinimumi, kust saame otsitava punkti $(1,1)$.

85. Ajahetkel t tundi on auto kaugus punktist B võrdne $200-80t$ ning rongi kaugus punktist B võrdne $50t$. Auto ja rongi vahelise kauguse leiame koosinusteoreemist, see on $f(t)=\sqrt{(200-80t)^2+(50t)^2-(200-80t)\cdot(50t)\cdot\frac{1}{2}}=10\sqrt{129t^2-420t+400}$. Tuletise kaudu leiame globaalse miinimumi, see on ajahetkel $t=\frac{70}{43}$ tundi.

86. Olgu kruusi põhja raadius x ja ruumala V. Kruusi kõrgus on siis $\frac{V}{\pi x^2}$. Materjali kulub $f(x)=\pi x^2+2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}=\pi x^2+\frac{2V}{x}$. Saame, et $f'(x)=2\pi x-\frac{2V}{x^2}$, millest leiame, et f globaalne miinimum on punktis $x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Kruusi kõrgus on selle raadiuse korral $\frac{V\cdot\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi\cdot\sqrt[3]{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Ent kruuse, mille põhja diameeter on kaks korda suurem kui kõrgus, eriti ei ostetaks.

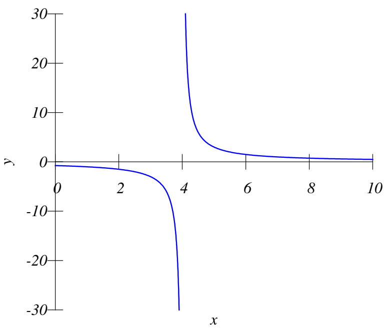
89. a) $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$, $f''(x)=6(x-2)$. Näeme, et f' on pidev kogu reaalteljel ning intervallis $(-\infty,2)$ on f'' negatiivne, seega intervallis $(-\infty,2]$ on f graafik kumer. Intervallis $(2,\infty)$ on f'' positiivne, seega intervallis $[2,\infty)$ on f graafik nõgus. Käänupunkt on $(2,12)$.

```
plot2d(x**3-6*x**2+12*x+4, [x,-5,5], [y,-30,30]);
```



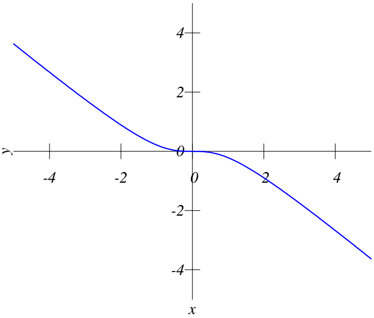
b) $f'(x)=-\frac{3}{(x-4)^2}$ ning $f''(x)=\frac{6}{(x-4)^3}$. Näeme, et f ja f' määramispiirkond on $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$, f' on pidev kogu määramispiirkonnas ning intervallis $(-\infty,4)$ on f'' negatiivne, intervallis $(4,\infty)$ on aga f'' positiivne. Seega intervallis $(-\infty,4)$ on f graafik kumer ja intervallis $(4,\infty)$ on f graafik nõgus. Käänupunktid puuduvad.

```
plot2d(3/(x-4), [x,0,10], [y,-30,30]);
```



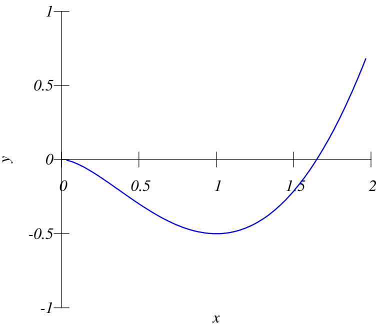
c) $f'(x)=-\frac{x^2}{1+x^2}$, $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Näeme, et f' on pidev kogu määramispiirkonnas, intervallis $(-\infty,0)$ on f'' positiivne ning intervallis $(0,\infty)$ on f'' negatiivne. Seega intervallis $(-\infty,0]$ on f graafik nõgus, intervallis $[0,\infty)$ on f graafik kumer ja käänupunkt on $(0,0)$.

```
plot2d(atan(x)-x, [x,-5,5], [y,-5,5]);
```



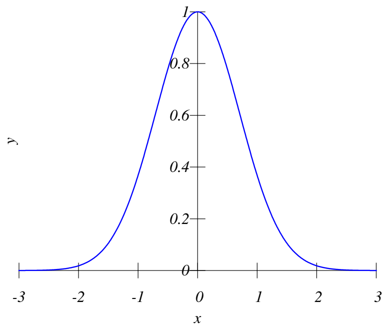
d) $f'(x) = 2x\ln x$, $f''(x) = 2\ln x + 2$. Näeme, et f ja f' määramispiirkond on $(0,\infty)$, f' on pidev kogu määramispiirkonnas, intervallis $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ on f'' negatiivne, intervallis $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\infty\right)$ on f'' positiivne. Seega intervallis $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ on f graafik kumer, intervallis $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\infty\right)$ on f graafik nõgus ja käänupunkt on $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},-\frac{3}{2\mathrm{e}^2}\right)$.

```
plot2d(x**2*(log(x)-1/2), [x,0,2], [y,-1,1]);
```



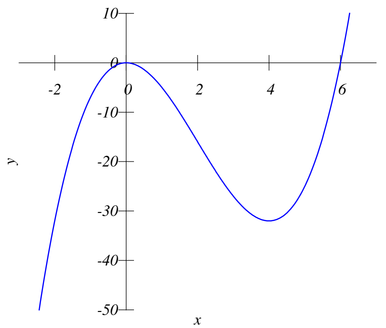
e) $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $f''(x) = 2(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$. Näeme, et f' on pidev kogu reaalteljel ning intervallides $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ja $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ on f'' positiivne ja intervallis $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ on f'' negatiivne, seega intervallides $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ja $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ on f graafik nõgus ja intervallis $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ on f graafik kumer. Käänupunktid on $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ ja $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$.

```
plot2d(exp(-x**2), [x,-3,3], [y,0,1]);
```



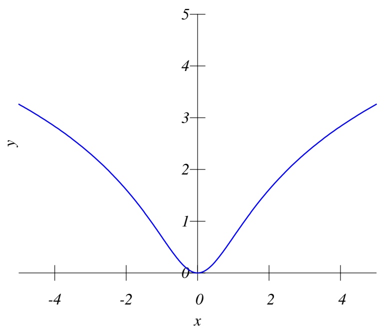
f) $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6(x-2)$. Näeme, et f' on pidev kogu reaalteljel ning intervallis $(-\infty, 2]$ on f'' negatiivne ja intervallis $(2, \infty)$ on f'' positiivne, seega intervallis $(-\infty, 2]$ on f graafik kumer ja intervallis $[2, \infty)$ on f graafik nõgus. Käänupunkt on $(2, -16)$.

```
plot2d(x**3-6*x**2, [x,-3,7], [y,-50,10]);
```



g) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $f''(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$. Näeme, et f' on pidev kogu reaalteljel ning intervallides $(-\infty, -1)$ ja $(1, \infty)$ on f'' negatiivne ja intervallis $(-1, 1)$ on f'' positiivne, seega intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f graafik kumer ning intervallis $[-1, 1]$ on f graafik nõgus. Käänupunktid on $(-1, \ln 2)$ ja $(1, \ln 2)$.

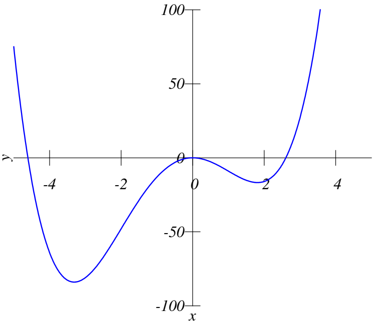
```
plot2d(log(1+x**2),[x,-5,5],[y,0,5]);
```



h) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x$, $f''(x) = 12(x-1)(x+2)$. Näeme, et f' on pidev kogu reaalteljel, intervallides $(-\infty, -2)$ ja $(1, \infty)$ on f'' positiivne ja intervallis $(-2, 1)$ on f'' negatiivne, seega intervallides $(-\infty, -2]$

ja $[1,\infty)$ on f graafik nõgus ning intervallis $[-2,1]$ on f graafik kumer. Käänupunktid on $(-2,-48)$ ja $(1,-9)$.

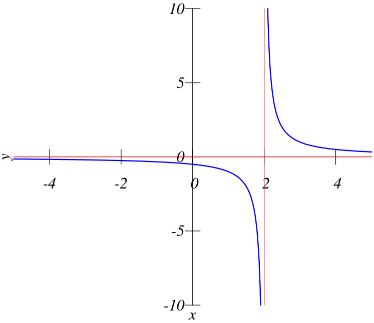
```
plot2d(x**4+2*x**3-12*x**2,[x,-5,5],[y,-100,100]);
```



90. a) Püstasümptoodid: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x-a}$, välja arvatud juhul, kui $a=2$. Saame, et $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ ja $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$, seega $x=2$ on püstasümptoot.

Kaldasümptoodid: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{1}{x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2-2x}=0$ ja $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}-0x\right)=0$, mistõttu $y=0$ on kaldasümptoot (rõhtasümptoot).

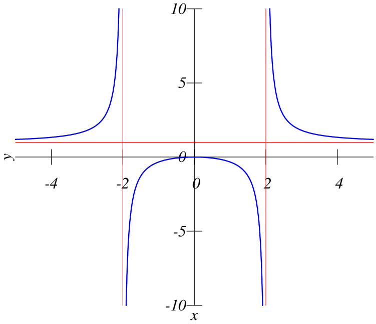
```
plot2d([1/(x-2), [parametric,2,t,[t,-10,10]], 0], [x,-5,5], [y,-10,10]);
```



b) Püstasümptoodid: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{a^2}{a^2-4}$, välja arvatud juhul, kui $a=\pm 2$. Siit saame püstasümptoodid $x=-2$ ja $x=2$.

Kaldasümptoodid: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2-4}}{x}=0$ ja $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-2}-0x\right)=1$, mistõttu $y=1$ on kaldasümptoot (rõhtasümptoot).

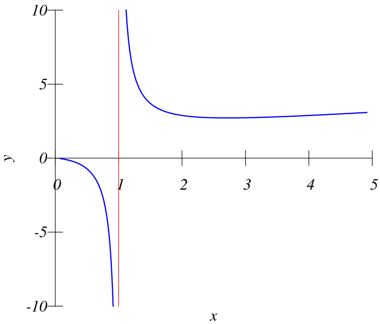
```
plot2d([x**2/(x**2-4), [parametric,2,t,[t,-10,10]], [parametric,-2,t,[t,-10,10]],
1],
[x,0,5], [y,-10,10]);
```



c) Püstasümptoodid: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x}{\ln x} = \frac{a}{\ln a}$ kõigi reaalarvude $a > 0$, $a \neq 1$ korral. Saame, et $\lim_{x \to 1-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$ ja $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{x}{\ln x} = \infty$, mistõttu $x = 1$ on püstasümptoot. Saame, et $\lim_{x \to 0+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to 0+} x = 0$, seega rohkem püstasümptoote ei ole.

Kaldasümptoodid: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = 0$ ja $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\ln x} - 0x \right) = \infty$, mistõttu kaldasümptoote ei ole.

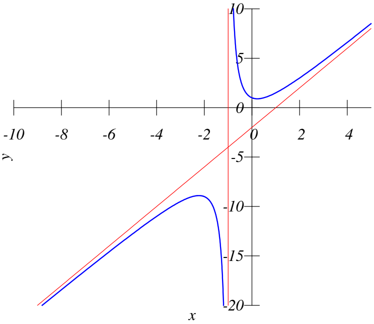
```
plot2d([x/log(x), [parametric,1,t,[t,-10,10]]], [x,0,5], [y,-10,10]);
```



d) Püstasümptoodid: $\lim\limits_{x \to -1-} \frac{2x^2+1}{x+1} = -\infty$ ja $\lim\limits_{x \to -1+} \frac{2x^2+1}{x+1} = \infty$, seega püstasümptoot on $x = -1$.

Kaldasümptoodid: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x} = 2$ ja $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x+1} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{x+1} = -2$, mistõttu $y = 2x - 2$ on kaldasümptoot.

```
plot2d([(2*x**2+1)/(x+1), [parametric,-1,t,[t,-20,10]], 2*x-2], [x,-10,5], [y,-20,10]);
```



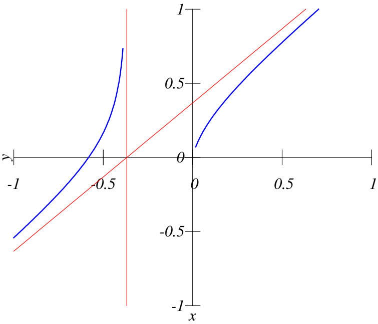
e) Püstasümptoodid: $\lim_{x\to 0} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2\cdot\left(e+\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e+\frac{1}{x}} = 0$ ja

$\lim_{x\to -\frac{1}{e}+} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = \infty$, mistõttu $x=-\frac{1}{e}$ on püstasümptoot.

Kaldasümptoodid: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x} = 1$ ja $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2\cdot\left(e+\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$. Seega kaldasümptoot on $y = x+\frac{1}{e}$.

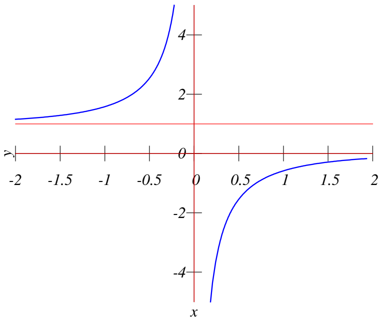
```
plot2d([x*log(%e+1/x), [parametric,-1/%e,t,[t,-1,1]], x+1/%e], [x,-1,1], [y,-1,1]);
```



f) Püstasümptoodid: $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1-e^x} = \infty$ ja $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1-e^x} = -\infty$, seega püstasümptoot on $x=0$.

Kaldasümptoodid: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x(1-e^x)} = 0$ ning $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-e^x} = 0$ ja $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-e^x} = 1$, seega kaldasümptoodid (rõhtasümptoodid) on $y=0$ ja $y=1$.

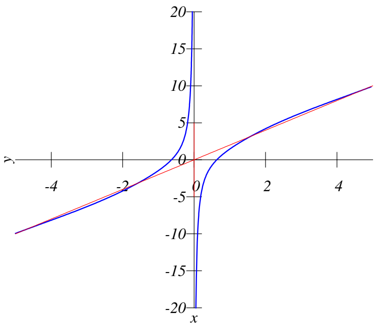
```
plot2d([1/(1-exp(x)), [parametric,0,t,[t,-5,5]], 0, 1], [x,-2,2], [y,-5,5]);
```



g) Püstasümptoodid: $\lim_{x\to 0-}\left(2x-\frac{\cos x}{x}\right)=\infty$ ning $\lim_{x\to 0+}\left(2x-\frac{\cos x}{x}\right)=-\infty$, seega püstasümptoot on $x=0$.

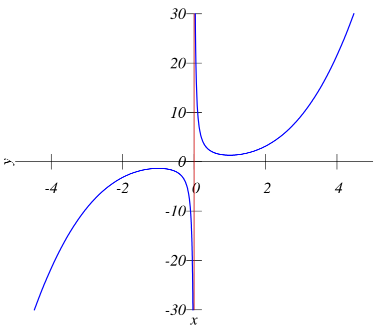
Kaldasümptoodid: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-\frac{\cos x}{x}}{x}=2-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x^2}=2$ ja $\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x-\frac{\cos x}{x}-2x\right)=0$, seega kaldasümptoot on $y=2x$.

```
plot2d([2*x-cos(x)/x, [parametric,0,t,[t,-30,30]], 2*x], [x,-5,5], [y,-20,20]);
```



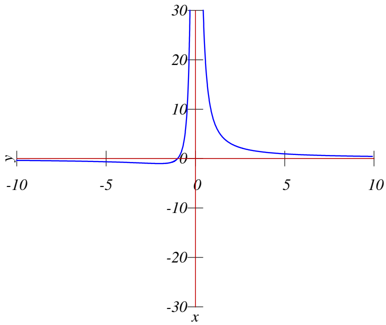
91. a) Määramispiirkond on $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. $f'(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$, intervallides $(-\infty,-1]$ ja $[1,\infty)$ on f kasvav ning intervallides $[-1,0)$ ja $(0,1]$ on f kahanev. $f''(x)=2x+\frac{2}{x^3}$, intervallis $(0,\infty)$ on f graafik nõgus ja intervallis $(-\infty,0)$ graafik kumer. Püstasümptoot on $x=0$ ja kaldasümptoodid puuduvad.

```
plot2d([x**3/3+1/x, [parametric,0,t,[t,-30,30]]], [x,-10,10], [y,-30,30]);
```



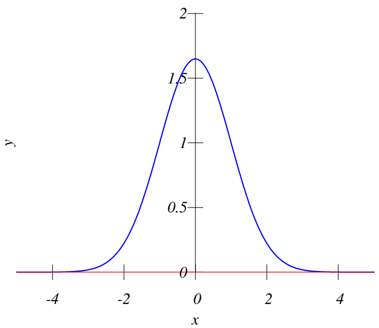
b) Määramispiirkond on $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}$, intervallides $(-\infty,-2]$ ja $(0,\infty)$ on f kahanev ning intervallis $[-2,0)$ on f kasvav. $f''(x)=\frac{8}{x^3}+\frac{24}{x^4}$, intervallis $(-\infty,-3]$ on f graafik kumer ning intervallides $[-3,0)$ ja $(0,\infty)$ on f graafik nõgus. Püstasümptoot on $x=0$, kaldasümptoot on $y=0$.

```
plot2d([4*(x+1)/x**2, [parametric,0,t,[t,-30,30]], 0], [x,-10,10], [y,-30,30]);
```



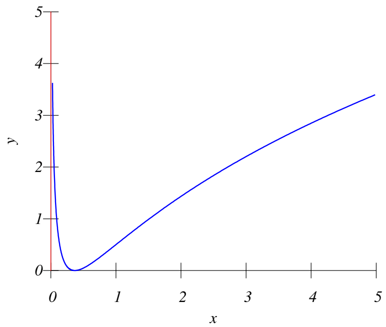
c) Määramispiirkond on $\mathbb{R}$. $f'(x)=-xe^{\frac{1-x^2}{2}}$, intervallis $(-\infty,0]$ on f kasvav ja intervallis $[0,\infty)$ on f kahanev. $f''(x)=(x^2-1)e^{\frac{1-x^2}{2}}$, intervallis $[-1,1]$ on f graafik kumer ning intervallides $(-\infty,-1]$ ja $[1,\infty)$ on f graafik nõgus. Püstasümptoote ei ole, kaldasümptoot on $y=0$.

```
plot2d([exp((1-x**2)/2), 0], [x,-5,5], [y,0,2]);
```



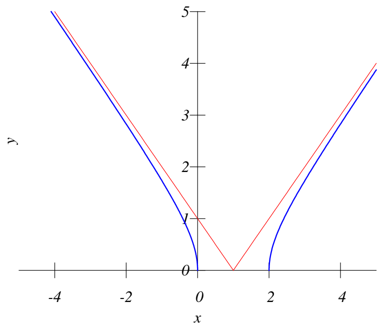
d) Määramispiirkond on $(0,\infty)$. $f'(x)=\frac{1+\ln x}{x}$, intervallis $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ on f kahanev ja intervallis $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$ on f kasvav. $f''(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$, intervallis $(0,1]$ on f graafik nõgus ja intervallis $[1,\infty)$ on f graafik kumer. Püstasümptoot on $x=0$, kaldasümptoodid puuduvad.

```
plot2d([(1+log(x))**2/2, [parametric,0,t,[t,0,5]]], [x,0,5], [y,0,5]);
```



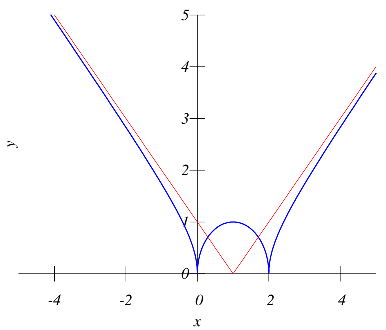
e) Määramispiirkond on $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$. $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, intervallis $(-\infty,0]$ on f kahanev ja intervallis $[2,\infty)$ on f kasvav. $f''(x) = -\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2(x-2)^2}$, intervallides $(-\infty,0]$ ja $[2,\infty)$ on f graafik kumer. Püstasümptoodid puuduvad, kaldasümptoodid on $y = x-1$ ja $y = -x+1$.

```
plot2d([sqrt(x**2-2*x), x-1, -x+1], [x,-5,5], [y,0,5]);
```



f) Määramispiirkond on $\mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{(x-1)\cdot\operatorname{sgn}(x^2-2x)}{\sqrt{|x^2-2x|}}$, intervallides $(-\infty,0]$ ja $[1,2]$ on f kahanev ning intervallides $[0,1]$ ja $[2,\infty)$ on f kasvav. $f''(x) = -\frac{\sqrt{|x^2-2x|}}{x^2(x-2)^2}$, intervallides $(-\infty,0]$, $[0,2]$ ja $[2,\infty)$ on f graafik kumer. Püstasümptoodid puuduvad, kaldasümptoodid on $y = x-1$ ja $y = -x+1$.

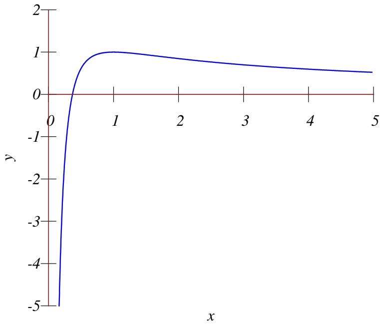
```
plot2d([sqrt(abs(x**2-2*x)), x-1, -x+1], [x,-5,5], [y,0,5]);
```



g) Määramispiirkond on $(0,\infty)$. $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, intervallis $(0,1]$ on f kasvav ning intervallis $[1,\infty)$ on f

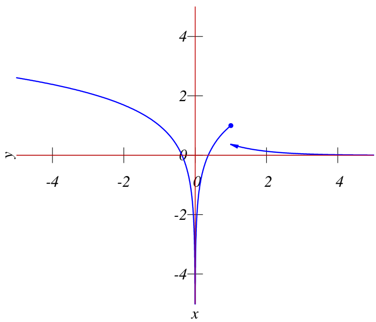
kahanev. $f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$, intervallis $(0, \sqrt{e})$ on f graafik kumer ning intervallis $(\sqrt{e}, \infty)$ on f graafik nõgus. Püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptoot on $y = 0$.

```
plot2d([(1+log(x))/x, [parametric,0,t,[t,-5,2]], 0], [x,0,5], [y,-5,2]);
```



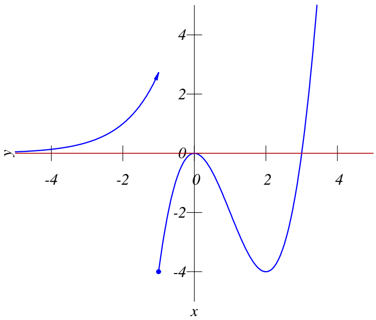
h) Määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kui } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ -e^{-x}, & \text{kui } x \in (1, \infty), \end{cases}$ intervallides $(-\infty, 0)$ ja $(1, \infty)$ on f kahanev, intervallis $(0, 1]$ on f kasvav. $f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{kui } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ e^{-x}, & \text{kui } x \in (1, \infty), \end{cases}$ intervallides $(-\infty, 0)$ ja $(0, 1]$ on f graafik kumer ning intervallis $(1, \infty)$ on f graafik nõgus. Püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptoot on $y = 0$.

```
f(x) := if x <= 1 then (1+log(abs(x))) else exp(-x);
plot2d([f(x), [parametric,0,t,[t,-5,5]], 0], [x,-5,5], [y,-5,5]);
```



i) Määramispiirkond on $\mathbb{R}$. $f'(x) = \begin{cases} e^{x+2}, & \text{kui } x < -1, \\ 3x^2 - 6x, & \text{kui } x > -1, \end{cases}$ intervallides $(-\infty, -1)$, $[-1, 0]$ ja $[2, \infty)$ on f kasvav ning intervallis $[0, 2]$ on f kahanev. $f''(x) = \begin{cases} e^{x+2}, & \text{kui } x < -1, \\ 6x - 6, & \text{kui } x > -1, \end{cases}$ intervallides $(-\infty, -1)$ ja $[1, \infty)$ on f graafik nõgus ning intervallis $[-1, 1]$ on f graafik kumer. Püstasümptoodid puuduvad, kaldasümptoot on $y = 0$.

```
f(x) := if x < -1 then exp(x+2) else x**3-3*x**2;
plot2d([f(x), [parametric,0,t,[t,-30,30]], 0], [x,-5,5], [y,-5,5]);
```



94. a) $\int \tan x \,\mathrm{d}x$ on funktsioon, mille tuletis on $\tan x$. Seega $\left(\int \tan x \,\mathrm{d}x\right)' = \tan x$.

b) $\int 2^{x+1}\,\mathrm{d}x$ on funktsioon, mille tuletis on 2^{x+1}. Seega $\left(\int 2^{x+1}\,\mathrm{d}x\right)' = 2^{x+1}$.

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int \arctan x \,\mathrm{d}x = \arctan x$;

95. a) $\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + C$;
b) $\int (3\sqrt{x} - 4)\,\mathrm{d}x = 2x\sqrt{x} - 4x + C$;
c) $\int 5x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2x^2\sqrt{x} + C$;
d) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \sqrt{x} + C$;
e) $\int (x^3-1)^2\,\mathrm{d}x = \int (x^6 - 2x^3 + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x + C$;
f) $\int 10^x\,\mathrm{d}x = \frac{10^x}{\ln 10} + C$;
g) $\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^5)^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{\ln \mathrm{e}^5} + C = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{5} + C$;
h) $\int 5^x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int (5\mathrm{e})^x\,\mathrm{d}x = \frac{5^x\mathrm{e}^x}{\ln 5\mathrm{e}} + C = \frac{5^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 5} + C$;
i) $\int (1+\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = \int (1 + 2\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^2)^x)\,\mathrm{d}x = x + 2\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln \mathrm{e}^2} + C = x + 2\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$;
j) $\int (2^x - 3^x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(4^x - 2\cdot 6^x + 9^x\right)\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C = \frac{4^x}{2\ln 2} - \frac{2\cdot 6^x}{\ln 2 + \ln 3} + \frac{9^x}{2\ln 3} + C$;
k) $\int (2^x\mathrm{e}^x + \ln 2)\,\mathrm{d}x = \frac{2^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 2} + x\ln 2 + C$;
l) $\int \sin\alpha\,\mathrm{d}x = x\sin\alpha + C$;
m) $\int (\cos x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x = \sin x + 3\cos x + C$;
n) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) + C$;
o) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int (1+\cos x)\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C$;
p) $\int \left(2\sin^2\frac{x}{2} - \sin^2 2\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos x - \sin^2 2\right)\mathrm{d}x = x - \sin x - x\sin^2 2 + C$;
q) $\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = -\cot x - \tan x + C$;
r) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$;
s) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x + \frac{x}{2} + C$;
t) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C$;
u) $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x - x + C$;
v) $\int (\tan x - \cot x)^2\,\mathrm{d}x = \int (\tan^2 x - 2 + \cot^2 x)\,\mathrm{d}x = \tan x - \cot x - 4x + C$;
w) $\int (\arcsin x + \arccos x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot x + C$;
x) $\int \frac{\arctan x + \operatorname{arccot} x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\arcsin x + C$;

y) $\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-4x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
z) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = x - \arctan x + C$;
aa) $\int \frac{(1+x)^2\,\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = \ln|x| + 2\arctan x + C$;
ab) $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$;
ac) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = x - 2\arctan x + C$;
ad) $\int (\operatorname{sh} 2 - \operatorname{sh} x)\,\mathrm{d}x = x \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} x + C$;
ae) $\int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$;
af) $\int 2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{ch} x + 1)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + x + C$;
ag) $\int \operatorname{th}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \mathrm{d}x = x - \text{þ} x + C$;
ah) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \mathrm{d}x = -\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x + C$;
ai) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh}^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;
aj) $\int \frac{\operatorname{ch} 2x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \mathrm{d}x = -\operatorname{cth} x + \operatorname{th} x + C$.

96. a) $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sin 2x\,(2x)'\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$,
alternatiiv: $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \int 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x = 2\int \sin x\,(\sin x)'\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$,
alternatiiv: $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \int 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x = -2\int \cos x\,(\cos x)'\,\mathrm{d}x = -\cos^2 x + C$;
b) $\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{\cos^2 4x} = \int \frac{(4x)'\,\mathrm{d}x}{\cos^2 4x} = \tan 4x + C$;
c) $\int (x-3)^5\,\mathrm{d}x = \int (x-3)^5\,(x-3)'\,\mathrm{d}x = \frac{(x-3)^6}{6} + C$;
d) $\int (3x+5)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int (3x+5)^4\,(3x+5)'\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+5)^5}{15} + C$;
e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int \frac{(x+1)'\,\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1| + C$;
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-7} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-7)'}{2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln|2x-7|}{2} + C$;
g) $\int (4-x)^6\,\mathrm{d}x = -\int (4-x)^6\,(4-x)'\,\mathrm{d}x = -\frac{(4-x)^7}{7} + C = \frac{(x-4)^7}{7} + C$;
h) $\int \sqrt[3]{7-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int (7-2x)^{\frac{1}{3}}\,(7-2x)'\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{8}(7-2x)^{\frac{4}{3}} + C$;
i) $\int \sin(x-4)\,\mathrm{d}x = \int \sin(x-4)\,(x-4)'\,\mathrm{d}x = -\cos(x-4) + C$;
j) $\int \cos(1-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \cos(1-2x)\,(1-2x)'\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(1-2x)}{2} + C = \frac{\sin(2x-1)}{2} + C$;
k) $\int \mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{-2x+3}\,(-2x+3)'\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-2x+3}}{2} + C$;
l) $\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-16x^2}} = \int \frac{(4x)'\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \arcsin 4x + C$;
m) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \int \frac{\left(\frac{2x}{3}\right)'\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C$;
n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \frac{1}{6} \int \frac{\left(\frac{2x}{3}\right)'\,\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C$;
o) $\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{1+(5x+1)^2} = \int \frac{(5x+1)'\,\mathrm{d}x}{1+(5x+1)^2} = \arctan(5x+1) + C$.

97. a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$;
b) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}(x^3+1)}{x^3+1} = \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C$;
c) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{4} \int (x^4+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x^4+1) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + C$;
d) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$;

e) $\int \frac{(2x-5)\,\mathrm{d}x}{x^2-5x+2} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2-5x+2)}{x^2-5x+2} = \ln|x^2-5x+2| + C$;
f) $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\ln 3} = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+\ln 3)}{\mathrm{e}^x+\ln 3} = \ln|\mathrm{e}^x+\ln 3| + C$;
g) $\int \mathrm{e}^x \cos \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int \cos \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \sin \mathrm{e}^x + C$;
h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x + C$;
i) $\int \frac{(1+x)^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} = x + \ln|1+x^2| + C = x + \ln(1+x^2) + C$;
j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C$;
k) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x+1} = \int (x-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$;
l) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2) = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$;
m) $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{1+(\mathrm{e}^x)^2} = \arctan \mathrm{e}^x + C$;
n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x \ln\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln|\ln\ln x| + C$;
o) $\int \frac{\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{7+\operatorname{ch} x}} = \int \frac{\mathrm{d}(7+\operatorname{ch} x)}{\sqrt{7+\operatorname{ch} x}} = 2\sqrt{7+\operatorname{ch} x} + C$;
p) $\int \frac{(1+\operatorname{th} x)^3\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \int (1+\operatorname{th} x)^3\,\mathrm{d}(1+\operatorname{th} x) = \frac{(1+\operatorname{th} x)^4}{4} + C$;
q) $\int \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$;
r) $\int \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \tan x\,\mathrm{d}(\tan x) = \frac{\tan^2 x}{2} + C$;
s) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cot x)\sin^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}(1+\cot x)}{1+\cot x} = -\ln|1+\cot x| + C$;
t) $\int \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt{2+3\tan x}\,\mathrm{d}(2+3\tan x) = \frac{2(2+3\tan x)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$;
u) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int (\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}(\sin x) = -\frac{1}{\sin x} + C$;
v) $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 2\int \sin x\,\mathrm{d}(\sin x) = \sin^2 x + C$,
alternatiiv: $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$,
alternatiiv: $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = -2\int \cos x\,\mathrm{d}(\cos x) = -\cos^2 x + C$, kusjuures $-\frac{\cos 2x}{2} = \sin^2 x - \frac{1}{2} = -\cos^2 x + \frac{1}{2}$;
w) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\arctan\cos x + C$;
x) $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$;
y) $\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$;
z) $\int \cos^2 x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \int 2\sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = -2\int (\cos x)^3\,\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{2} + C$;
aa) $\int \frac{\arctan^3 x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int (\arctan x)^3\,\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{\arctan^4 x}{4} + C$;
ab) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln|\arcsin x| + C$;
ac) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$;
ad) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$;
ae) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$;
af) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$;
ag) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\cot\frac{x}{2} + C$,
alternatiiv: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \int \frac{(1+\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x} = \cot x - \frac{1}{\sin x} + C$,
alternatiiv: olgu $\tan\frac{x}{2} = t$, siis $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2 - 2\cos^2\frac{x}{2} = 2 - \frac{2}{1+t^2} = \frac{2t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, seega

$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\cot\frac{x}{2} + C$, kusjuures $-\cot\frac{x}{2} = -\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{-2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$;
ah) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int (\cos x)^{-2}\,\mathrm{d}(\cos x) = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$,
alternatiiv: olgu $\tan\frac{x}{2} = t$, siis $\sin x = (\operatorname{sgn} t)\sqrt{1-\cos^2 x} = (\operatorname{sgn} t)\sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, millest $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{2(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$, kusjuures $\frac{\sin x - 1}{\cos x} = -\frac{(1-\tan\frac{x}{2})^2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} : \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+1} = 1 - \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}$;
ai) $\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x} = \int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x} = \int \frac{\mathrm{d}(1+\frac{1}{2}\sin 2x)}{1+\frac{1}{2}\sin 2x} = \ln|1+\frac{1}{2}\sin 2x| + C = \ln|1+\sin x\cos x| + C$;
aj) $\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int |\operatorname{sgn}\cos x| \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = |\operatorname{sgn}\cos x| \tan x + C$;
ak) $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\,\mathrm{d}x = \int \tan^2 x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \tan^2 x\,\mathrm{d}(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + C$;
al) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}(\tan x) = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$;
am) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cot x)}{\sin^2 x} = -\int (1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}(\cot x) = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$;
an) $\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^3 x} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$;
ao) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^4 x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^4 x\,\mathrm{d}(\tan x)}{\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}(\tan x) = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\cos^2 x} - 2\int \mathrm{d}(\tan x) + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}(\tan x) =$ $\int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}(\tan x) - 2\tan x + \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+(\tan x)^2} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - 2\tan x + \arctan\tan x + C = -\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + x + C$;
ap) $\int (\sin x + \cos x)^2\,\mathrm{d}x = \int (1+\sin 2x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{\cos 2x}{2} + C$.

98. a) Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} \cdot (x+1)'\,\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$. (Siin $\varphi(x) = x+1$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.) Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t + C$, $t \in \mathbb{R}$, siis $\int \frac{1}{(x+1)^2+1} \cdot (x+1)'\,\mathrm{d}x = \arctan(x+1) + C$.
b) Saame, et $\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int (-2)(1-(\sqrt{1-x})^2)\left(\sqrt{1-x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)'\,\mathrm{d}x$, $x \leqslant 1$. (Siin $\varphi(x) = \sqrt{1-x}$, $\varphi\colon (-\infty,1] \to [0,\infty)$.) Kuna $\int 2(t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + C$ koguni piirkonnas $t \in \mathbb{R}$, siis
$\int (-2)(1-(\sqrt{1-x})^2)\left(\sqrt{1-x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)'\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{1-x}\right)^5}{5} - \frac{2\left(\sqrt{1-x}\right)^3}{3} + C$.
c) Saame, et $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (-1)(1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,\mathrm{d}x$. (Siin $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\varphi\colon [-1,1] \to [0,1]$.) Kuna $\int (t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C$ koguni piirkonnas $t \in \mathbb{R}$, siis
$\int (-1)(1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,\mathrm{d}x = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3} + C$.
d) Peab kehtima $x \in (0,1)$, vastasel korral puudub integrandil mõte. Teostame asenduse $x = \sin^2 t$ ehk $t = \arcsin\sqrt{x}$ (siis $\varphi(x) = \arcsin\sqrt{x}$, $\varphi\colon (0,1) \to (0,\frac{\pi}{2})$). Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int 2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int 2\,\mathrm{d}t = 2t + C$ koguni piirkonnas $t \in \mathbb{R}$, siis $\int 2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'\,\mathrm{d}x = 2\arcsin\sqrt{x} + C$.
e) Peab kehtima $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, vastasel korral puudub integrandil mõte. Teostame asenduse $x = \frac{1}{\cos t}$ ehk $t = \arccos\frac{1}{x}$ (siis $\varphi(x) = \arccos\frac{1}{x}$, $\varphi\colon (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \to \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \operatorname{sgn} x \cdot \left(\arccos\frac{1}{x}\right)'\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn} x \int \left(\arccos\frac{1}{x}\right)'\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \mathrm{d}t = t + C$ koguni piirkonnas $t \in \mathbb{R}$, siis
$\operatorname{sgn} x \int \left(\arccos\frac{1}{x}\right)'\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn} x \arccos\frac{1}{x} + C = -\operatorname{sgn} x \arcsin\frac{1}{x} + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C$.
f) Teostame asenduse $t = x - \frac{1}{x}$, siis saame määramata integraali juhul $x \neq 0$. Asenduses $\varphi(x) = x - \frac{1}{x}$, kus $\varphi\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Kuna $\varphi'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, siis $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^4+1}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kasutame abiseost $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 =$

$\frac{x^4+1}{x^2}-2$, millest saame, et $\int \frac{x^2}{x^4+1}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\varphi(x)^2+2}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}\right)'\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u + C$ koguni piirkonnas $u\in\mathbb{R}$, siis $\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$.

99. a) Peab kehtima $x\in(0,\infty)$, vastasel korral puudub integrandil mõte. Teostame asenduse $\sqrt{x}=t$, siis $\varphi(x)=\sqrt{x}$, kus $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$. Saame, et $\int\frac{\exp\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int\exp\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)'\mathrm{d}x$. Kuna $\int\exp t\,\mathrm{d}t = \exp t+C$, koguni piirkonnas $t\in\mathbb{R}$, siis $2\int\exp\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)'\mathrm{d}x = 2\exp\sqrt{x}+C$.

b) Peab kehtima $\mathrm{e}^x-1\in(0,\infty)$ ehk $x\in(0,\infty)$. Teostame asenduse $\mathrm{e}^x-1=t$, siis $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-1$, kus $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$. Saame, et $\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\cdot(\mathrm{e}^x-1)'\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C$ piirkonnas $t\in(0,\infty)$, siis $\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\cdot(\mathrm{e}^x-1)'\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$.

Alternatiiv: teostame asenduse $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$, siis $\varphi(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$. Saame, et $\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \int\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right)'\mathrm{d}x$. Kuna $\int\mathrm{d}t = t+C$ koguni piirkonnas $t\in\mathbb{R}$, siis $\int\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right)'\mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$.

c) Peab kehtima $x\in[-1,1]$. Valime $x=\sin t$, siis $t=\arcsin x$, kus $\varphi(x)=\arcsin x$, $\varphi\colon[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Saame, et
$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int(1-x^2)(\arcsin x)'\,\mathrm{d}x = \int(1-(\sin\arcsin x)^2)\cdot(\arcsin x)'\,\mathrm{d}x = \int(\cos\arcsin x)^2(\arcsin x)'\,\mathrm{d}x$.
Kuna $\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$, siis $\int(\cos\arcsin x)^2(\arcsin x)'\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2}+\frac{\sin 2\arcsin x}{4}+C = \frac{\arcsin x}{2}+\frac{2\sin\arcsin x\cdot\cos\arcsin x}{4}+C = \frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\cos\arcsin x}{2}+C$. Kuna $\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, siis $\cos\arcsin x\geqslant 0$, mistõttu $\cos\arcsin x = \sqrt{\cos^2\arcsin x} = \sqrt{1-\sin^2\arcsin x} = \sqrt{1-x^2}$. Lõppvastuseks saame niisiis $\frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$.

d) Peab kehtima $|x|\geqslant 1$. Valime $t=\sqrt{x^2-1}$, siis $\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}$, $\varphi\colon(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to[0,\infty)$. Saame, et $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\mathrm{d}x = \int\frac{\varphi(x)^2}{1+\varphi(x)^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = t-\arctan t+C$ koguni piirkonnas $t\in\mathbb{R}$, siis $\int\frac{\varphi(x)^2}{1+\varphi(x)^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1}-\arctan\sqrt{x^2-1}+C$.

Alternatiiv: valime $x=\frac{1}{\cos t}$, siis $t=\arccos\frac{1}{x}$, seega $\varphi(x)=\arccos\frac{1}{x}$, $\varphi\colon(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$. Kuna $\varphi'(x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, siis saame, et $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}x\int(x^2-1)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$
$=\operatorname{sgn}x\int\left(\frac{1}{(\cos\varphi(x))^2}-1\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)\mathrm{d}t = \tan t-t+C$ piirkonnas $t\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$, siis $\operatorname{sgn}x\int\left(\frac{1}{(\cos\varphi(x))^2}-1\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}x\cdot\left(\tan\arccos\frac{1}{x}-\arccos\frac{1}{x}\right)+C$.

Sealjuures näeme, et $\tan^2\arccos\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2\arccos\frac{1}{x}}-1 = x^2-1$, millest $\operatorname{sgn}x\tan\arccos\frac{1}{x} = +\sqrt{x^2-1}$. Samuti $\operatorname{sgn}x\arccos\frac{1}{x} = \arctan\left(\tan\arccos\frac{1}{x}\right) = \arctan\sqrt{x^2-1}$. Lõppvastus tuleb sama, mis eelmisel juhul: $\sqrt{x^2-1}-\arctan\sqrt{x^2-1}+C$.

e) Kui $a=0$, siis $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\operatorname{sgn}x}{2x^2}+C = -\frac{1}{2x|x|}+C$.

Edasises eeldame, et $a\neq 0$. Peab kehtima $x\neq 0$. Valime $x=|a|\tan t$, siis $t=\arctan\frac{x}{|a|}$, seega $\varphi(x)=\arctan\frac{x}{|a|}$, $\varphi\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Kuna $\varphi'(x)=\frac{|a|}{x^2+a^2}$, siis saame, et $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{|a|}\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int\frac{|a|\sqrt{1+\tan^2\varphi(x)}}{a^2\tan^2\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\frac{1}{|\cos\varphi(x)|\tan^2\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\cos\varphi(x)\tan^2\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\frac{\cos\varphi(x)}{\sin^2\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, kuna $\varphi(x)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Et $\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$ piirkonnas $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, siis $\frac{1}{a^2}\int \frac{\cos\varphi(x)}{\sin^2\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2\sin\varphi(x)} + C = -\frac{1}{a^2 \sin\arctan\frac{x}{|a|}} + C$.

Sealjuures $\sin^2\arctan\frac{x}{|a|} = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\arctan\frac{x}{|a|}} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = 1 - \frac{a^2}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2}$, $\sin\arctan\frac{x}{|a|} =$
$= \operatorname{sgn} x \left|\sin\arctan\frac{x}{|a|}\right| = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, järelikult $-\frac{1}{a^2\sin\arctan\frac{x}{|a|}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$.

Alternatiiv: valime $x = \frac{1}{t}$, siis $t = \frac{1}{x}$, seega $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{1+a^2\varphi(x)^2}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{|t|\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+a^2t^2}} = \frac{\operatorname{sgn} t}{2a^2}\int (1+a^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+a^2t^2) = \frac{\operatorname{sgn} t}{a^2} \cdot \sqrt{1+a^2t^2} + C$ juhul, kui $t \neq 0$, siis $-\int \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{1+a^2\varphi(x)^2}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sgn} x}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$.

f) Kui $a = 0$, siis $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{x} + C = -\frac{1}{|x|} + C$.

Edasises eeldame, et $a \neq 0$. Peab kehtima $x \in (-\infty, -|a|) \cup (|a|, \infty)$, vastasel korral puudub integrandil mõte. Valime $x = \frac{|a|}{\cos t}$ ehk $t = \arccos\frac{|a|}{x}$, siis $\varphi(x) = \arccos\frac{|a|}{x}$, $\varphi\colon (-\infty, -|a|) \cup (|a|, \infty) \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Kuna $\varphi'(x) = \frac{|a|}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$, siis saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{|a|}\int \operatorname{sgn} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sgn} x}{|a|}\int \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \mathrm{d}t = t + C$ koguni piirkonnas $t \in \mathbb{R}$, siis $\frac{\operatorname{sgn} x}{|a|}\int \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sgn} x}{|a|}\arccos\frac{|a|}{x} + C = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|} + C$.

Alternatiiv: valime $x = \frac{1}{t}$, siis $t = \frac{1}{x}$, seega $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi\colon (-\infty, -|a|) \cup (|a|, \infty) \to \left(-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right)$. Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sgn} x \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2\varphi(x)^2}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-a^2t^2}} = \frac{1}{a}\arcsin at + C$ iga $t \in \left(-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right)$ korral, siis $-\operatorname{sgn} x \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2\varphi(x)^2}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sgn} x}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|} + C$.

g) Peab kehtima $x \in [0, \infty)$. Valime $t = x^{\frac{3}{4}}$, siis $\varphi(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$. Saame, et $\int \frac{3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[4]{x^3}} = 4\int \frac{\varphi(x)}{1+\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + C$ koguni kõigi $t \neq -1$ korral, siis $4\int \frac{\varphi(x)}{1+\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 4x^{\frac{3}{4}} - 4\ln|1+x^{\frac{3}{4}}| + C$.

h) Peab kehtima $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}) =: X$. Valime $t = \ln\tan x$, siis $\varphi(x) = \ln\tan x$, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. Kuna $\varphi'(x) = \frac{1}{\sin x\cos x}$, siis $\int \frac{\ln\tan x\,\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \int \varphi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Et $\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C$ hulgas $\mathbb{R}$, siis $\int \varphi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$.

i) Peab kehtima $|x| > 1$. Valime $t = \arcsin\frac{1}{x}$, siis $\varphi(x) = \arcsin\frac{1}{x}$, $\varphi\colon (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Kuna $\varphi'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, siis $\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\int \varphi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Et $\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C$ koguni terves hulgas $\mathbb{R}$, siis $-\int \varphi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\arcsin\frac{1}{x})^2 + C$.

Alternatiiv: valime $x = \frac{1}{\cos t}$, seega $t = \arccos\frac{1}{x}$, siis $\varphi(x) = \arccos\frac{1}{x}$, $\varphi\colon (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Kuna $\varphi'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ja $\arcsin\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \varphi(x)$, siis $\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \int \left(\frac{\pi}{2} - \varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}t - \frac{t^2}{2} + C$ koguni terves hulgas $\mathbb{R}$, siis $\int \left(\frac{\pi}{2} - \varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{(\arccos\frac{1}{x})^2}{2} + C = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{x}) - \frac{(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{x})^2}{2} + C = -\frac{1}{2}(\arcsin\frac{1}{x})^2 + C$.

j) Erineb eelmisest ainult kordaja $\operatorname{sgn} x$ poolest. Vastus: $-\operatorname{sgn} x\frac{1}{2}(\arcsin\frac{1}{x})^2 + C$.

k) Peab kehtima $x \neq 0$. Valime $t = x + \frac{1}{x}$, siis $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$, $\varphi\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus \pm\sqrt{2}$, kuna kehtib seos $\varphi(x)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \frac{x^4+1}{x^2} + 2$ ning seega pole kunagi võimalik, et $\varphi(x)^2 = 2$ (selleks peaks $x^4 + 1 = 0$).

Seega $\int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{x(x^4+1)} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^4+1} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)^2-2} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2-2} = \frac{1}{2}\ln|t^2-2|+C$ kogu piirkonnas $t \neq \pm\sqrt{2}$, siis $\int \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)^2-2} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right| + C = \frac{1}{2}\ln(x^4+1) - \ln|x| + C$.

Alternatiiv: algmurdudeks lahutades saame, et $\frac{x^4-1}{x(x^4+1)} = \frac{2x+\sqrt{2}}{2(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{2x-\sqrt{2}}{2(x^2-\sqrt{2}x+1)} - \frac{1}{x}$. Seega $\int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+\sqrt{2}}{2(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x-\sqrt{2}}{2(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1| - \ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln(x^4+1) - \ln|x| + C$.

102. a) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$;

b) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$;

c) $\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} + C$;

d) $\int xa^x\,\mathrm{d}x = \frac{xa^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a}\,\mathrm{d}x = \frac{xa^x}{\ln a} - \frac{a^x}{\ln^2 a} + C$;

e) $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C$;

f) $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$;

g) $\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = x(\tan x - x) - \int(\tan x - x)\,\mathrm{d}x = x\tan x - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C = x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$;

h) $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$;

i) $\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}(2x^2+2x+1) + C$;

j) $\int x^3\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = x^3\operatorname{ch} x - 3\int x^2\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = x^3\operatorname{ch} x - 3x^2\operatorname{sh} x + 6\int x\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = x^3\operatorname{ch} x - 3x^2\operatorname{sh} x + 6x\operatorname{ch} x - 6\operatorname{sh} x + C$;

k) $\int x^4\cos x\,\mathrm{d}x = x^4\sin x - 4\int x^3\sin x\,\mathrm{d}x = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x + 24\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x - 24x\cos x + 24\sin x + C$.

103. a) Saame, et $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$, millest $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$.

b) Saame, et $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x + \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$, millest $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

c) Saame, et $\int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - x\cos\ln x - \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x$, millest $\int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.

d) Saame, et $\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x$, millest $\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$.

e) Saame, et $\int \operatorname{ch} x\sin x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x\sin x - \int \operatorname{sh} x\cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x\sin x - \operatorname{ch} x\cos x - \int \operatorname{ch} x\sin x\,\mathrm{d}x$, millest $\int \operatorname{ch} x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x\sin x - \operatorname{ch} x\cos x) + C$.

104. a) $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1)$;

b) $\int \frac{x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \frac{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C$;

c) $\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} + C$;

d) $\int x^2\ln(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x-1) - \int \frac{x^3}{3(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x-1) - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$;

e) $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin 2x}{4} - \int\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C$;

f) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^{\sin x}\sin x\,\mathrm{d}(\sin x) = 2\mathrm{e}^{\sin x}(\sin x - 1) + C$;

g) $\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$;

h) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$;

i) $\int x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$;

j) $\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int(\sqrt{x})^3\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = -2(\sqrt{x})^3\cos\sqrt{x} + 6\int(\sqrt{x})^2\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = -2(\sqrt{x})^3\cos\sqrt{x} + 6\int(\sqrt{x})^2\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = -2(\sqrt{x})^3\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C$;

k) $\int x\sin\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin\ln x - \frac{1}{2}\int x\cos\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin\ln x - \frac{x^2}{4}\cos\ln x - \frac{1}{4}\int x\sin\ln x\,\mathrm{d}x$, millest $\int x\sin\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{5}(2\sin\ln x - \cos\ln x) + C$;

l) $\int x^2\cos\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\cos\ln x + \frac{1}{3}\int x^2\sin\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\cos\ln x + \frac{1}{9}x^3\sin\ln x - \frac{1}{9}\int x^2\cos\ln x\,\mathrm{d}x$, millest $\int x^2\cos\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{10}(3\cos\ln x + \sin\ln x) + C$;

m) $\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}(\arctan x)$, tehes asenduse $t = \arctan x$, saame $x = \tan t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ning integraal läheb kujule $\int \frac{\mathrm{e}^t\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t\tan t\cos t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - \cos t) + C =$
$= \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{2}(\sin\arctan x - \cos\arctan x) + C = \frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

105. a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$;
b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$;
c) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$;
d) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$;
e) $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$;
f) $x^2 + 2 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$.

108. a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x+5| + \ln|x-2| + C$;
b) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)} = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$;
c) $\int \frac{x^3+2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 1 + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x+2| + \ln|x-1| + C$;
d) $\int \frac{(x+2)^2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2 x} = \int\left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = 4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C$;
e) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = x - \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$;
f) $\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2(x+1)^2} = \int\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - 3\ln|x| - \frac{2}{x} + C$;
g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$;
h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \int\left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C$;
i) $\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+2)} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x+2}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C$;
j) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \int\left(x - 4 + \frac{8x+32}{x^2+4x+8}\right)\mathrm{d}x = x^2 - 4x + 8\int\frac{x+2}{(x+2)^2+4}\,\mathrm{d}x + 8\int\frac{2}{(x+2)^2+4}\,\mathrm{d}x = x^2 - 4x + 4\ln((x+2)^2+4) + 2\int\frac{x+4}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = x^2 - 4x + 4\ln(x^2+4x+4) + 8\arctan\frac{x+2}{2} + C.$

109. a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}} = \int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} + C$;

alternatiiv: $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int\frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x} = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C$, kusjuures $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$;

alternatiiv: valime $t = \tan\frac{x}{2}$, siis $\varphi(x) = \tan\frac{x}{2}$, kus $\varphi : \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, kusjuures $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1+\varphi(x)^2}$ ning $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\varphi(x)^2}{2}$, mistõttu saame, et $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int\frac{1+\varphi(x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \int\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int\mathrm{d}t = t + C$ koguni iga $t\in\mathbb{R}$ korral, siis $2\int\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x) + C = \tan\frac{x}{2} + C$, $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{(1+\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int (\cos x)^{-2}\,\mathrm{d}(\cos x) = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C$;
alternatiiv: valime $t = \tan\frac{x}{2}$, siis $\varphi(x) = \tan\frac{x}{2}$, $\varphi : \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, kusjuures $\varphi'(x) = \frac{1+\varphi(x)^2}{2}$ ja $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2}$. Seega $1-\sin x = \frac{(1-\varphi(x))^2}{1+\varphi(x)^2}$, mistõttu $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{1+\varphi(x)^2}{(1-\varphi(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(1-\varphi(x))^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C$ kõigi $t \neq 1$ korral, siis $\int \frac{2}{(1-\varphi(x))^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} + C$, kusjuures $\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \frac{2(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{\cos x+1+\sin x}{\cos x} = \tan x + \frac{1}{\cos x} + 1$.
c) Valime $t = \tan\frac{x}{2}$, siis $\varphi(x) = \tan\frac{x}{2}$, $\varphi : \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, kusjuures $\varphi'(x) = \frac{1+\varphi(x)^2}{2}$ ja $1+\sin x+\cos x = 1 + \frac{2\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} + \frac{1-\varphi(x)^2}{1+\varphi(x)^2} = 2\cdot\frac{1+\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2}$. Seega $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|1+t| + C$ koguni kõigi $t \neq -1$ korral, siis $\int \frac{1}{1+\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \ln|1+\varphi(x)| + C = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| + C$.
d) Saame, et $\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$.
e) Saame, et $\int \cos^3 2x\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \cos^3 2x\,\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{\cos^4 2x}{8} + C$;
alternatiiv: $\int \cos^3 2x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\sin 2x\,\mathrm{d}(\sin 2x) = \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}(\sin 2x) = \frac{\sin^2 2x}{4} - \frac{\sin^4 2x}{8} + C$, kusjuures $\frac{\sin^2 2x}{4} - \frac{\sin^4 2x}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{1-2\sin^2 2x+\sin^4 2x}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{(1-\sin^2 2x)^2}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{\cos^4 2x}{8}$.
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos x-1} - \frac{1}{\cos x+1}\right)\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2}\ln|\cos x-1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x+1| + C$;
alternatiiv: valime $t = \tan\frac{x}{2}$, siis $\varphi(x) = \tan\frac{x}{2}$, $\varphi : \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, kusjuures $\varphi'(x) = \frac{1+\varphi(x)^2}{2}$ ja $\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2}$, millest $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C$ iga $t \neq 0$ korral, siis $\int \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$, kusjuures $\frac{1}{2}\ln|\cos x+1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x+1| = \frac{1}{2}\ln\frac{|\cos x-1|}{|\cos x+1|} = \frac{1}{2}\ln\tan^2\frac{x}{2} = \ln|\tan\frac{x}{2}|$.
g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x) = -\frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + C$;
alternatiiv: valime $t = \tan\frac{x}{2}$, siis $\varphi(x) = \tan\frac{x}{2}$, $\varphi : \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, kusjuures $\varphi'(x) = \frac{1+\varphi(x)^2}{2}$ ja $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-\varphi(x)^2}{1+\varphi(x)^2}$, millest $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{2}{1-\varphi(x)^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t = \ln|1+t| - \ln|1-t| + C$ iga $t \neq \pm 1$ korral, siis $\int \frac{2}{1-\varphi(x)^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| - \ln|1-\tan\frac{x}{2}| + C$, kusjuures $-\frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+\sin x|}{|1-\sin x|} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2 = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| - \ln|1-\tan\frac{x}{2}|$.
110. a) $\int \sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$;
b) $\int \cos x\sin 3x = \frac{1}{2}\int (\sin 2x + \sin 4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} + C$;
c) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\cos\frac{x}{6} + \cos\frac{5x}{6}\right)\mathrm{d}x = 3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + C$;
d) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(\cos 2x) + \frac{1}{4}\int (2\cos^2 2x - 1)\,\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{\cos^2 2x}{8} + \frac{\cos^3 2x}{6} - \frac{1}{4}\cos 2x + C$;
e) $\int \sin x\sin^2 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 4x\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (\sin x + \sin 5x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int (\sin(-x) + \sin 7x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{28}\cos 7x + C$;
f) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 2b + \cos 2ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\cos 2b + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$.
111. a) Valime $t = \sqrt{x}$, siis $\varphi(x) = \sqrt{x}$, kus $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{2\varphi(x)}{2+\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2+t} = 2\int \mathrm{d}t - \int \frac{4\,\mathrm{d}t}{t+2} = 2t - 4\ln|t+2| + C$ koguni mistahes $t \neq -2$ korral, siis $\int \frac{2\varphi(x)}{2+\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$

$= 2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+2) + C$.
b) Valime $t = \sqrt{x}$, siis $\varphi(x) = \sqrt{x}$, kus $\varphi: (0,\infty) \to (0,\infty)$. Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{2}{\varphi(x)^2+1} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t + C$ koguni kõigi $t \in \mathbb{R}$ korral, siis $\int \frac{2}{\varphi(x)^2+1} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2\arctan\sqrt{x} + C$.
c) Valime $t = \sqrt{x-1}$, siis $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$, kus $\varphi: [1,\infty) \to [0,\infty)$. Saame, et $\int \frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\varphi(x)^4+4\varphi(x)^2}{\varphi(x)^2+1} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{2t^4+4t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int \left(2t^2+2-\frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{2t^3}{3} + 2t - 2\arctan t + C$ koguni kõigi $t \in \mathbb{R}$ korral, siis $\int \frac{2\varphi(x)^4+4\varphi(x)^2}{\varphi(x)^2+1} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C$.
d) Valime $t = \sqrt{2x-1}$, siis $\varphi(x) = \sqrt{2x-1}$, kus $\varphi: (\frac{1}{2},\infty) \to (0,\infty)$. Saame, et $\varphi(x)^2 + 1 = 2x$, mistõttu $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\varphi(x)^2+3}{(\varphi(x)^2+1)^2} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Leiame $\int \frac{t^2+3}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t == 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$, millest $\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{t}{2(1+t^2)} + C$, siis $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = 2\arctan t + 2\arctan t + \frac{2t}{1+t^2} + C = 4\arctan t + \frac{2t}{1+t^2} + C$ koguni iga $t \in \mathbb{R}$ korral. Niisiis saame lõppvastuseks $4\arctan\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + C$.
e) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}} = \int x\cdot(x+\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{x^2-1})^3 + C = \frac{x^3}{3} + \frac{(\sqrt{x^2-1})^3}{3} + C$.
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\int(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} - \int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Valime $x = \tan t$, $t = \arctan x$, siis $\varphi(x) = \arctan x$, $\varphi: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sealjuures $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos\varphi(x)}$ ning $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2\varphi(x)$. Saame, et $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^3\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} == \int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^4 t} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$, millest tähistades $\sin t = u$, saame $\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} = \int \left(\frac{1}{4(u+1)} + \frac{1}{4(u+1)^2} - \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln|u+1| - \frac{1}{4}\ln|u-1| - \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{u}{2(u^2-1)} + C$, kus $|u| \neq 1$, siis $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right| + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + C$, kus $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Et $\sin^2\varphi(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$, siis $\sin\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, millest $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| - \frac{x(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} + C = -\frac{x^2}{2} - \frac{\operatorname{arsh} x}{2} - \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C$.
Alternatiiv: valime $x = \operatorname{sh} t$, siis $t = \operatorname{arsh} x$, seega $\varphi(x) = \operatorname{arsh} x$, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Saame, et $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Seega $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2}{2} - \int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} - \int(1+x^2)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} - \int(1+\operatorname{sh}^2\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int(1+\operatorname{sh}^2 t)\,\mathrm{d}t = \int \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^{2t}+2+\mathrm{e}^{-2t}}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t} + C = \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + \frac{t}{2} + C = \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{2} + \frac{t}{2} + C$ kõigi $t \in \mathbb{R}$ korral, siis $-\frac{x^2}{2} - \int(1+\operatorname{sh}^2\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} - \frac{\operatorname{arsh} x}{2} - \frac{x \operatorname{ch}\operatorname{arsh} x}{2} + C$. Sealjuures $\operatorname{ch}^2\operatorname{arsh} x = 1 + \operatorname{sh}^2\operatorname{arsh} x = 1 + x^2$, millest $\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x = \sqrt{1+x^2}$.
g) Valime $\sqrt{1-x^2} = t$, siis $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\varphi: (-1,1) \to (0,1]$. Sealjuures $\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Saame, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{1}{(1-\varphi(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Ositi integreerides leiame, et $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$, millest $\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + C$, $|t| < 1$. Kokkuvõttes $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$.
Alternatiiv: valime $x = \sin t$, siis $t = \arcsin x$, $\varphi(x) = \arcsin x$, kus $\varphi: (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Saame, et $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Seega $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{x^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\cot t + C$ koguni iga $t \notin \pi\mathbb{Z}$ korral, kusjuures $\cot^2 t = \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}$, siis $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$.
h). Valime $x = 3\tan t$, siis $t = \arctan\frac{x}{3}$, $\varphi(x) = \arctan\frac{x}{3}$, kus $\varphi: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Saame, et $\varphi'(x) = \frac{3}{x^2+9}$.

Seega $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1-(\sin t)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1-\sin t} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t} = -\frac{1}{2}\ln(1-\sin t)+\frac{1}{2}\ln(1+\sin t)+C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C$ iga $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ korral, siis $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\arctan\frac{x}{3}}{1-\sin\arctan\frac{x}{3}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}-x}+C = \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)^2}{9}+C = \ln\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}+C = \operatorname{arsh}\frac{x}{3}+C$.

Alternatiiv: Valime $x = 3\operatorname{sh} t$, siis $t = \operatorname{arsh}\frac{x}{3}$, $\varphi(x) = \operatorname{arsh}\frac{x}{3}$, kus $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Saame, et $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$. Seega $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}} = \int \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x)+C = \operatorname{arsh}\frac{x}{3}+C$.

114. a) $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \dfrac{n}{n+1} = 1$;

b) $S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3}$;

c) $S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{11}{18}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n\left(\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right) = \dfrac{11}{18}$;

d) $S_n = \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3} = 1-\frac{1}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \dfrac{2n+2}{2n+3} = 1$;

e) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$;

f) $S_n = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$;

g) $S_n = 1+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty$;

h) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}-\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$;

i) $S_n = \sqrt{2}-2\sqrt{1}+\sqrt{0}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1}+\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = -1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n\left(-1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right) = -1+\lim_n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = -1$;

j) $S_n = 2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = \dfrac{2\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$, $S = \lim_n S_n = \lim_n \dfrac{4}{3}\cdot\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \dfrac{4}{3}$;

k) lahutame punktide a) ja e) tulemused ning saame, et $S_n = \frac{n}{n+1}-1+\frac{1}{(n+1)^2} = -1+\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$, $S = \lim_n S_n = \lim_n\left(-1+\dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\right) = -1+1 = 0$;

l) $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{3^k+2^k}{6^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $S = \lim_n S_n = \lim_n\left(\dfrac{7}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = \dfrac{7}{2}$.

115. a) $a_1 = S_1 = \ln 3$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \ln(n+2)-\ln(n+1) = \ln\frac{n+2}{n+1}$;

b) $a_1 = S_1 = 2$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n}$;
c) $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$;
d) $a_1 = S_1 = 2$, $a_n = S_n - S_{n-1} = 1$;
e) $a_1 = S_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2}{n^2+2} - \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2+2}$;
f) $a_1 = S_1 = 1$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2(n+1)^2-(n-1)^2n^2}{4} = n^3$.
116. a) $\lim_n (-1)^n = 0$ ei kehti, sest jadal $\big((-1)^n\big) = (-1,1,-1,1,\ldots)$ on osajada, mis koondub arvuks -1 ja osajada, mis koondub arvuks 1, seega jada ise ei koondu.
Alternatiiv: kasutame samaväärsust $\lim_n a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_n |a_n| = 0$. Saame, et $\lim_n \big|(-1)^n\big| = 1$.
Alternatiiv: leiame vahetult, et $S_m = 1$, kui m on paarisarv, ja $S_m = 0$, kui m on paaritu arv. Jada $(1,0,1,0,\ldots)$ hajub, seega ka uuritav rida hajub. (Selle lahendusvariandi juures me tarvilikku tingimust $\lim_n a_n = 0$ ei kasutanudki.)
b) $\lim_n \dfrac{1}{\sqrt[n]{10}} = 1$.
c) $\lim_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
d) $|S_{2m} - S_m| = \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} \geqslant \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$; kui rida koonduks, siis $\lim_m S_{2m} = \lim_m S_m =: S \in \mathbb{R}$, millest $0 = |S - S| \geqslant \frac{1}{2}$, vastuolu.
e) $|S_{2m-1} - S_{m-1}| = \tan\frac{\pi}{m+1} + \ldots + \tan\frac{\pi}{2m} \geqslant \pi \cdot \left(\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) \geqslant \pi \cdot \frac{m}{2m} = \frac{\pi}{2}$, kui rida koonduks, siis $\lim_m S_{2m} = \lim_m S_m =: S \in \mathbb{R}$, millest $0 = |S - S| \geqslant \frac{\pi}{2}$, vastuolu.
f) $\lim_n \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.
g) $\lim_n \dfrac{1}{\sqrt[n]{2n}} = \lim_n \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \lim_n \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.
h) $|S_{2m} - S_m| = \frac{1}{\ln(m+1)} + \ldots + \frac{1}{\ln(2m)} \geqslant \frac{m}{\ln 2m} \geqslant \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$; kui rida koonduks, siis $\lim_m S_{2m} = \lim_m S_m =: S \in \mathbb{R}$, millest $0 = |S - S| \geqslant \frac{1}{2}$, vastuolu.
117. a) Kuna $\frac{1}{(n+2)\cdot 3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{3^n}$ koondub, siis koondub ka uuritav rida.
b) Kuna $\frac{1}{n\cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{2^n}$ koondub, siis koondub ka uuritav rida.
c) Kuna $\lim_n \dfrac{\frac{(2n-1)(n-1)}{n^2(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \dfrac{2n^4 - 3n^3 + n^2}{n^4 + 2n^3 + n^2} = 2$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka uuritav rida.
d) Kuna $\lim_n \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n+3}} = 1$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{n}$ hajub (harmooniline rida), siis hajub ka uuritav rida.
e) Kuna $\lim_n \dfrac{\frac{1}{n^2+n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \dfrac{n^2}{n^2+n-1} = 1$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka uuritav rida.
f) Kuna $\lim_n \dfrac{\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \dfrac{n^6 + 2n^4 + n^2}{n^6 + 2n^3 + 1} = 1$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka uuritav rida.

g) Kuna $\lim_n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$ ning rida $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ hajub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha \leqslant 1$), siis hajub ka uuritav rida.

h) Kuna $2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \leqslant \pi \cdot \frac{2^n}{3^n}$ ning rida $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ koondub (geomeetriline rida, $|q| < 1$), siis koondub ka rida $\sum_n \pi \cdot \frac{2^n}{3^n}$, mistõttu koondub ka uuritav rida.

Alternatiiv: kuna $\lim_n \frac{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \pi$ ning rida $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ koondub (geomeetriline rida, $|q| < 1$), siis koondub ka uuritav rida.

i) Kuna $\lim_n \frac{2^n \tan \frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \pi$ ning rida $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ koondub (geomeetriline rida, $|q| < 1$), siis koondub ka uuritav rida.

120. a) Kuna $\lim_n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{\pi}{n}$ hajub (harmooniline rida), siis hajub ka uuritav rida.

b) Saame, et $1-\cos \frac{a}{n} = 2\sin^2 \frac{a}{2n}$. Kuna $\lim_n \frac{\sin^2 \frac{a}{2n}}{\left(\frac{a}{2n}\right)^2}$ ning rida $\sum_n \frac{a^2}{4n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka uuritav rida.

c) Kuna $\lim_n \frac{\arcsin \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{\sqrt{n}}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ hajub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha \leqslant 1$), siis hajub ka uuritav rida.

d) Kuna $\lim_n \frac{\arctan \frac{1}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{1}{n \cdot 2^n}$ koondub (kuna $\frac{1}{n\cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ ning juba geomeetriline rida $\sum_n \frac{1}{2^n}$ koondub), siis koondub ka uuritav rida.

e) Kuna $\lim_n \frac{\ln\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ hajub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha < 1$), siis hajub ka uuritav rida.

f) Kuna $\lim_n \frac{\ln^3\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{2\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka uuritav rida.

Alternatiiv: võtame võrratuse $\ln\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right) \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}$ pooled kuupi ning kasutame esimest võrdluslauset.

g) Antud rea liikmed on kõik negatiivsed. Saame, et $\ln\cos\frac{\pi}{n} = \ln(1-(1-\cos\pi n)) = \ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)$. Näitame, et rida $\sum_n \left|\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right|$ koondub; sellest järeldub antud rea koonduvus.

Kuna $\lim_n \frac{\left|\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right|}{\left|-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right|} = 1$, siis read $\sum_n \left|\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right|$ ja $\sum_n 2\sin^2\frac{\pi}{2n}$ koonduvad ja hajuvad samaaegselt. Et aga $\lim_n \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{2}$ ning rida $\sum_n \frac{1}{n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka rida $\sum_n 2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}$, järelikult koondub ka uuritav rida.

h) Kuna $\frac{\ln n}{n^3} \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ ning rida $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$), siis koondub ka uuritav rida.

121. a) Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \dfrac{1}{(n+1)!} : \dfrac{1}{n!} = \lim_n \dfrac{1}{n+1} = 0$, mistõttu uuritav rida koondub.

b) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+1)^n}} = \lim_n \dfrac{1}{n+1} = 0$, mistõttu uuritav rida koondub.

c) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{\dfrac{1}{\ln^n n}} = \lim_n \dfrac{1}{\ln n} = 0$, mistõttu uuritav rida koondub.

d) Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \dfrac{3^n n!}{n^n} = \lim_n \dfrac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n 3\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{3}{\mathrm{e}} > 1$, mistõttu uuritav rida hajub.

e) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n}{3n-1}\right)^n} = \lim_n \dfrac{2n}{3n-1} = \dfrac{2}{3} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

f) Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \dfrac{n+1}{(2n+3)!} : \dfrac{n}{(2n+1)!} = \lim_n \dfrac{n+1}{2n(n+1)(2n+3)} = \lim_n \dfrac{1}{2n(2n+3)}$ 0, mistõttu uuritav rida koondub.

g) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

h) Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \dfrac{1{,}1^{n+1}}{n+1} : \dfrac{1{,}1^n}{n} = 1{,}1 > 1$, mistõttu uuritav rida hajub.

i) Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{3}\right)^n = \lim_n \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3n^n} =$
$= \frac{1}{3}\lim_n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

j) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{2^{-n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \dfrac{1}{2}\lim_n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{\mathrm{e}}{2} > 1$, mistõttu uuritav rida hajub.

k) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{3^{-n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \dfrac{1}{3}\lim_n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{\mathrm{e}}{3} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

l) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = 2\lim_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

m) Teine võrdluslause annab, et uuritav rida $\sum_n \alpha^n \arcsin\dfrac{\pi}{n}$ koondub ja hajub samaaegselt reaga $\sum_n \alpha^n\cdot\dfrac{\pi}{n}$ (selle põhjendab koondumine $\lim_n \dfrac{\alpha^n \arcsin\frac{\pi}{n}}{\alpha^n\cdot\frac{\pi}{n}} = 1$). Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \alpha^{n+1}\dfrac{\pi}{n+1} : \alpha^n\dfrac{\pi}{n} = \alpha$. Niisiis, kui $\alpha < 1$, siis uuritav rida koondub ja kui $\alpha > 1$, siis uuritav rida hajub. Kui aga $\alpha = 1$, siis on rea $\sum_n \alpha^n\cdot\dfrac{\pi}{n}$ näol tegemist harmoonilise reaga, mis samuti hajub. Kokkuvõttes uuritav rida hajub parajasti juhul, kui $\alpha \geqslant 1$.

n) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}} = \lim_n \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

o) Kasutame Cauchy tunnust: saame, et $\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_n \frac{2}{n} = 0$, mistõttu uuritav rida koondub.

p) Kasutame d'Alembert'i tunnust: saame, et $\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \lim_n \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

122. a) Näitame, et positiivne rida $\sum_n \frac{(-1)^n+1}{n^2}$ koondub. Saame, et $\frac{(-1)^n+1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$ ning rida $\sum_n \frac{2}{n^2}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$). Seega ka uuritav rida koondub.

b) Näitame, et positiivne rida $\sum_n \frac{3+(-1)^n}{2^n}$ koondub. Saame, et $\frac{3+(-1)^n}{2^n} \leqslant \frac{4}{2^n}$ ning rida $\sum_n \frac{4}{2^n}$ koondub (geomeetriline rida). Seega uuritav rida koondub.

c) Kuna $\lim_n \frac{n\tan\frac{\pi}{2^n}}{n\cdot\frac{\pi}{2^n}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{n\pi}{2^n}$ koondub (selles veendume näiteks d'Alembert'i tunnuse abil: $\lim_n \frac{(n+1)\pi}{2^{n+1}} : \frac{n\pi}{2^n} = \frac{1}{2}$), siis koondub ka uuritav rida.

d) Kuna $\lim_n \frac{n^2\sin\frac{\pi}{3^n}}{n^2\cdot\frac{\pi}{3^n}} = 1$ ning rida $\sum_n \frac{n^2\pi}{3^n}$ koondub (selles veendume näiteks d'Alembert'i tunnuse abil: $\lim_n \frac{(n+1)^2\pi}{3^{n+1}} : \frac{n^2\pi}{3^n} = \frac{1}{3}$), siis koondub ka uuritav rida.

e) Kuna $\lim_n \sqrt[n]{\mathrm{e}}\cos\frac{\pi}{n} = 1$, siis uuritav rida hajub.

f) Kasutame d'Alembert'i tunnust. Saame, et $\lim_n \frac{(n+1)^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{n+1}} : \frac{n^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, mistõttu uuritav rida koondub.

g) Uuritav rida on $\sum_n \left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)^\alpha = \sum_n \left(-\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right)^\alpha$. Kuna $\lim_n \left(-\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right)^\alpha : \left(2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha = 1$, siis uuritav rida ja rida $\sum_n \left(2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha$ koonduvad ja hajuvad samaaegselt. Viimane rida aga koondub ja hajub samaaegselt reaga $\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}}$, kuna $\lim_n \left(2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha : \frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{2\pi^{2\alpha}}{4^a\alpha}$. Niisiis uuritav rida koondub parajasti juhul, kui $\alpha > \frac{1}{2}$.

125. a) Rida $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ koondub d'Alembert'i tunnuse põhjal: $\lim_n \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$. Seega uuritav rida koondub absoluutselt.

b) Uuritav rida on $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{-1}{n}$. Kuna $\frac{-1}{n} \leqslant \frac{-1}{n+1}$ iga n korral ning $\lim_n \left(\frac{-1}{n}\right) = 0$, siis Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub.

Rida $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajub, sest tegemist on harmoonilise reaga. Seega uuritav rida koondub tingimisi.

c) Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^n}$ koondub Cauchy tunnuse põhjal: $\lim\limits_n \sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+1)^n}} = \lim\limits_n \dfrac{1}{n+1} = 0$. Seega uuritav rida koondub absoluutselt.

d) Uuritav rida on $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{-1}{2n-1}$. Kuna $\frac{-1}{2n-1} \leqslant \frac{-1}{2n+1}$ iga n korral ning $\lim\limits_n\left(\dfrac{-1}{2n-1}\right) = 0$, siis Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub.

Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ hajub. Nimelt ei täida see rida Cauchy kriteeriumit: $|S_{2m} - S_m| = \sum\limits_{n=m+1}^{2m}\dfrac{1}{2n-1} > \sum\limits_{n=m+1}^{2m}\dfrac{1}{4m} = m\cdot\dfrac{1}{4m} = \dfrac{1}{4}$. Järelikult uuritav rida koondub tingimisi.

e) Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ koondub. Nimelt saame, et $\lim\limits_n \dfrac{1}{(2n-1)^2} : \dfrac{1}{4n^2} = 1$, aga rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2}$ koondub, kuna on üldistatud harmooniline rida ($\alpha > 1$). Seega uuritav rida koondub absoluutselt.

f) Kuna $\frac{1}{\ln(n+2)} \geqslant \frac{1}{\ln(n+3)}$ iga n korral ning $\lim\limits_n \dfrac{1}{\ln(n+2)} = 0$, siis Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub.

Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+2)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+2)}$ hajub, sest $\frac{1}{\ln(n+2)} \geqslant \frac{1}{n}$ iga n korral ning harmooniline rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ hajub. Seega uuritav rida koondub tingimisi.

g) Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\cos na}{n\sqrt{n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos na|}{n^{\frac{3}{2}}}$ koondub, sest $\frac{|\cos na|}{n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ning rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ koondub (üldistatud harmooniline rida, $\alpha > 1$). Järelikult uuritav rida koondub absoluutselt.

h) Uuritav rida on $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Kuna $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ iga n korral ning $\lim\limits_n \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, siis Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub.

Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ hajub, sest tegemist on üldistatud harmoonilise reaga, $\alpha \leqslant 1$. Seega uuritav rida koondub tingimisi.

i) Kuna $\sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) = \sin\pi n\cos\frac{1}{n} + \cos\pi n\sin\frac{1}{n} = (-1)^n\sin\frac{1}{n}$, siis uuritav rida on $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$. Kuna siinusfunktsioon on piirkonnas $[0,\frac{1}{2}]$ kasvav, siis $\sin\frac{1}{n} \geqslant \sin\frac{1}{n+1}$ iga n korral. Samuti $\lim\limits_n\sin\dfrac{1}{n} = 0$. Seega Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub.

Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ hajub, sest $\lim\limits_n\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ ning harmooniline rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ hajub. Seega uuritav rida koondub tingimisi.

j) Uuritav rida hajub, sest $\lim\limits_n(-1)^n\dfrac{n}{n+1} = 0$ ei kehti. Nimelt on see tingimus samaväärne tingimusega $\lim\limits_n\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right| = 0$; arvutades leiame, et $\lim\limits_n\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right| = \lim\limits_n\dfrac{n}{n+1} = 1$.

k) Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n3^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n3^n}$ koondub. Nimelt saame, et $\frac{1}{n3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$, aga rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ koondub, kuna on geomeetriline rida ($|q| < 1$). Seega uuritav rida koondub absoluutselt.

l) Uuritava rea liikmed on 0, 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$ jne. Olgu (S_n) uuritava rea osasummade jada. Siis (S_{2n}) on harmoonilise rea osasummade jada, mistõttu $\lim_n S_{2n} = \infty$. Järelikult $\lim_n S_n$ ei saa olla reaalarv, mistõttu uuritav rida hajub.

m) Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} n^2}{\mathrm{e}^n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\mathrm{e}^n}$ koondub. Nimelt saame, et $\lim\limits_n \frac{(n+1)^2}{\mathrm{e}^{n+1}} : \frac{n^2}{\mathrm{e}^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim\limits_n \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, mis Cauchy tunnuse põhjal annab rea koonduvuse. Seega uuritav rida koondub absoluutselt.

n) Vaatleme kõigepealt juhtumit $a \in [-1,1]$. Saame, et $\left|\frac{1+a^n}{n!}\right| \leqslant \frac{2}{n!}$. Kuna rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$ koondub (nimelt $\lim\limits_n \frac{2}{(n+1)!} : \frac{2}{n!} = 0$, kasutame d'Alembert'i tunnust), siis uuritav rida koondub absoluutselt.

Vaatleme nüüd juhtumit $a > 1$. Saame, et $\lim\limits_n \frac{1+a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{1+a^n}{n!} = \lim\limits_n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{a^n} + a}{\frac{1}{a^n} + 1} = 0$. Seega sel juhul d'Alembert'i tunnuse põhjal uuritav rida koondub (absoluutselt).

Vaatleme lõpuks juhtumit $a < -1$. Siis võime kirjutada $a = -b$, kus $b > 1$. Uuritav rida on niisiis kujul $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n b^n}{n!}$. Saame, et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1+(-1)^n b^n}{n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b^n + (-1)^n}{n!}$, kusjuures $\lim\limits_n \frac{b^{n+1} + (-1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{b^n + (-1)^n}{n!} = \lim\limits_n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{b - \frac{(-1)^n}{b^n}}{1 + \frac{(-1)^n}{b^n}} = 0$. Seega d'Alembert'i tunnuse põhjal uuritav rida koondub absoluutselt.

o) Uuritav rida hajub, sest $\lim\limits_n \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 0$ ei kehti. Nimelt on see tingimus samaväärne tingimusega $\lim\limits_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right| = 0$; arvutades leiame, et $\lim\limits_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right| = \lim\limits_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

p) Juhul $a \in (-1,1)$ saame, et $\left|a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}\right| \leqslant |a|^n \cdot \frac{\pi}{2}$ ning rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a|^n$ koondub. Järelikult sel juhul uuritav rida koondub absoluutselt.

Juhul $a = 1$ on uuritav rida kujul $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi}{4n}$ Et $\lim\limits_n \frac{\arcsin \frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} = 1$ ning harmooniline rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n}$ hajub, siis uuritav rida hajub.

Juhul $a = -1$ on uuritav rida kujul $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$. Kuna $\arcsin \frac{\pi}{4(n+1)} \leqslant \arcsin \frac{\pi}{4n}$ iga n korral ning $\lim\limits_n \arcsin \frac{\pi}{4n} = 0$, siis Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub. Eelmise lõigu põhjal selgub, et uuritav rida absoluutselt ei koondu, mis tähendab, et ta koondub tingimisi.

Juhul $|a| > 1$ uuritav rida hajub, sest $\lim\limits_n a^n \arcsin \frac{\pi}{4n} = 0$ ei kehti. Nimelt on see tingimus samaväärne tingimusega $\lim\limits_n \left|a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}\right| = 0$; arvutades leiame, et $\lim\limits_n \left|a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}\right| = \frac{\pi}{4} \lim\limits_n \frac{|a|^n}{n} = \infty$.

126. a) $C = \lim\limits_n \frac{1}{n+3} : \frac{1}{n+2} = \lim\limits_n \frac{n+2}{n+3} = 1$, seega $R = \frac{1}{C} = 1$. Punktis $x = -1$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$, mis koondub Leibnizi tunnuse põhjal. Punktis $x = 1$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$, mis hajub (harmooniline rida). Niisiis $X = [-1,1)$ ja $A = (-1,1)$.

b) $C = \lim\limits_n \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$, seega $R = \frac{1}{C} = \frac{1}{3}$. Punktis $x = -\frac{1}{3}$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ning punktis $x = 1$ saame rea

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

c) $C = \lim\limits_n \dfrac{n+2}{n+1} : \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_n \dfrac{(n+2)n}{(n+1)^2} = 1$, seega $R = \frac{1}{C} = 1$. Punktis $x = -1$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n} \cdot (-1)^n$ ning punktis $x = 1$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n}$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = (-1, 1)$.

d) $C = \lim\limits_n \dfrac{1}{5^{n+1}} : \dfrac{1}{5^n} = \dfrac{1}{5}$, seega $R = \frac{1}{C} = 5$. Punktis $x = -5$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ning punktis $x = 5$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = (-5, 5)$.

e) $C = \lim\limits_n \dfrac{|(-2)^{n+1}|}{|(-2)^n|} = 2$, seega $R = \frac{1}{C} = \frac{1}{2}$. Punktis $x = -\frac{1}{2}$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ ning punktis $x = \frac{1}{2}$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

f) $C = \lim\limits_n \dfrac{n+1}{(n+2)4^{n+1}} : \dfrac{n}{(n+1)4^n} = \lim\limits_n \dfrac{(n+1)^2}{4n(n+2)} = \dfrac{1}{4}$, seega $R = \frac{1}{C} = 4$. Punktis $x = -4$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$ ning punktis $x = 4$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = (-4, 4)$.

g) $C = \lim\limits_n \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$, seega $R = \frac{1}{C} = \frac{1}{2}$. Punktis $x = -\frac{5}{2}$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ning punktis $x = -\frac{3}{2}$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

h) $C = \lim\limits_n \dfrac{1}{10^{n+1}} : \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{10}$, seega $R = \frac{1}{C} = 10$. Punktis $x = -7$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ning punktis $x = 13$ saame rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$. Mõlemad read hajuvad, sest üldliige ei hääbu. Niisiis $A = X = (-7, 13)$.

i) $C = \lim\limits_n \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_n (n+1) = \infty$, seega $R = \frac{1}{C} = 0$. Niisiis $A = X = \{0\}$.

j) $C = \lim\limits_n \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} : \dfrac{1}{n(n+1)} = \lim\limits_n \dfrac{n}{n+2} = 1$, seega $R = \frac{1}{C} = 1$. Punktis $x = -1$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ ja punktis $x = 1$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Mõlemad read koonduvad, sest viimane neist koondub. Nimelt $\lim\limits_n \dfrac{1}{n(n+1)} : \dfrac{1}{n^2} = 1$ ning rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ koondub, mis annabki rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ koonduvuse. Niisiis $A = X = [-1, 1]$.

k) $C = \lim\limits_n \dfrac{1}{(n+1)!} : \dfrac{1}{n!} = \lim\limits_n \dfrac{1}{n+1} = 0$, seega $R = \frac{1}{C} = \infty$. Niisiis $A = X = \mathbb{R}$.

l) $C = \lim\limits_n \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} : \dfrac{1}{n^\alpha} = \lim\limits_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$, seega $R = \frac{1}{C} = 1$. Punktis $x = -1$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, mis Leibnizi tunnuse põhjal koondub juhul $\alpha > 0$. (Juhul $\alpha \leqslant 0$ üldliige ei hääbu.) Punktis $x = 1$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, mis on üldistatud harmooniline rida ja koondub parajasti juhul $\alpha > 1$. Kokkuvõttes: kui $\alpha \leqslant 0$,

siis $A = X = (-1,1)$, kui $0 < \alpha \leqslant 1$, siis $X = [-1,1)$ ja $A = (-1,1)$, kui aga $\alpha > 1$, siis $A = X = [-1,1]$.
m) $C = \lim\limits_n \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{n^n}{n!} = \lim\limits_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, seega $R = \frac{1}{C} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Punktis $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$. Osutub, et $\frac{n^n}{n!e^n} \geqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}$ (see võrratus on samaväärne võrratusega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$). Stirlingi valemi põhjal saame, et $\lim\limits_n \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n} = \lim\limits_n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$. Seega Leibnizi tunnuse põhjal uuritav rida koondub.
Punktis $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$. Jällegi Stirlingi valemi põhjal $\lim\limits_n \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n} : \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 1$. Seega uuritav rida koondub ja hajub samaaegselt reaga $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Tegemist on üldistatud harmoonilise reaga, $\alpha \leqslant 1$, mis hajub.
Oleme saanud, et $X = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ ja $A = \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
n) $C = \lim\limits_n \sqrt[n]{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, seega $R = \frac{1}{C} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Punktis $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\dfrac{(n+1)^n}{\mathrm{e}n^n}\right)^n$ ja punktis $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(n+1)^n}{\mathrm{e}n^n}\right)^n$. Mõlemad read hajuvad, sest $\lim\limits_n \left(\dfrac{(n+1)^n}{\mathrm{e}n^n}\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. Viimase koondumise põhjendab asjaolu, et

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\ln\left(\frac{(n+1)^n}{\mathrm{e}n^n}\right)}{\frac{1}{n}} &= \lim_n \frac{\mathrm{e}n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot ((n+1)\ln(n+1) - (n+1)\ln n - 1)}{\mathrm{e}n^n(n+1)} : \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \\
&= -\lim_n n^2 \left(\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}\right) = -\lim_n \frac{\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \\
&= -\lim_n \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}{-\frac{2}{n^3}} = -\lim \frac{n^2}{2(n+1)^2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes $A = X = \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
o) Teeme muutujavahetuse $x^2 = t$, siis saame astmerea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!}$. Saame, et $C = \lim\limits_n \dfrac{1}{(2n+3)!} : \dfrac{1}{(2n+1)!} = \lim\limits_n \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0$, millest $R = \frac{1}{C} = \infty$. Oleme saanud, et astmerida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!}$ koondub mistahes $t \in \mathbb{R}$ korral, järelikult astmerida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ koondub mistahes x korral, mis annab, et $A = X = \mathbb{R}$.
p) $C = \lim\limits_n \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \dfrac{n!}{n^n} = \lim\limits_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, seega $R = \frac{1}{C} = \mathrm{e}$.
Punktis $x = -\mathrm{e}$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$ ja punktis $x = \mathrm{e}$ saame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$. Mõlemad read hajuvad, sest Stirlingi valemi põhjal $\lim\limits_n \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n} = \lim\limits_n \sqrt{2\pi n} = \infty$.

Oleme saanud, et $A = X = (-\mathrm{e}, \mathrm{e})$.
q) $C = \lim\limits_{n} \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n} n = \infty$, seega $R = \frac{1}{C} = 0$. Niisiis $A = X = \{3\}$.
r) See ülesanne on analoogiline ülesandega n). Saame, et $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$ ning $A = X = \left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

127. a) Saame, et $X = (-1, 1)$. Kuna tegemist on geomeetrilise reaga, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + \ldots$, siis $S(x) = \frac{x}{1-x}$, kui $x \in X$.
b) Saame, et $X = (-1, 1)$. Kuna tegemist on geomeetrilise reaga, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+\ldots$, siis $S(x) = \frac{1}{1-x}$, kui $x \in X$.
c) Saame, et $X = (-1, 1)$. Kuna tegemist on geomeetrilise reaga, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots$, siis $S(x) = \frac{1}{1+x}$, kui $x \in X$.
d) Saame, et $X = (1, 3)$. Kuna tegemist on geomeetrilise reaga, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \ldots$, siis $S(x) = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$, kui $x \in X$.
e) Saame, et $X = [-1, 1)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1, 1)$ liikmeti diferentseerida, mistõttu $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, kui $x \in (-1, 1)$. Seega $S(x) = -\ln|1-x| + C$, kui $x \in (-1, 1)$. Konstandi C määrame, valides näiteks $x = 0$. Saame, et $0 = S(0) = -\ln|1-0| + C = C$. Niisiis $S(x) = -\ln|1-x|$, kui $x \in (-1, 1)$. Abeli lemma põhjal kehtib $S(x) = -\ln|1-x|$, kui $x \in X$.
f) Saame, et $X = (-1, 1)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(-1, 1)$ liikmeti integreerida, mistõttu $\displaystyle\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, kui $x \in (-1, 1)$. Seega $S(x) = \left(\displaystyle\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, kui $x \in X$.
g) Saame, et $X = (2, 4)$. Teame, et astmerida võib oma koonduvusvahemikus $(2, 4)$ liikmeti integreerida, mistõttu $\displaystyle\int_3^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_3^x (-1)^n (n+1)(t-3)^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-3)^{n+1} = \frac{x-3}{1+(x-3)} = \frac{x-3}{x-2}$, kui $x \in (2, 4)$. Seega $S(x) = \left(\displaystyle\int_3^x S(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)' = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, kui $x \in X$.
h) Saame, et $X = [-2, 0)$. Vaatleme astmerida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$, mille summa $T(x) = (x+1)S(x)$. Viimase astmerea summa on leitud ülesandes e), kus saime, et $T(x) = -\ln|x|$, kui $x \in (-2, 0)$. Järelikult $S(x) = -\frac{\ln|x|}{x+1}$, kui $x \in (-2, 0) \setminus \{-1\}$, ning $S(-1) = 0$ (see on näha algsest astmereast). Kasutades ka Abeli lemmat $x = -2+$ jaoks, leiame kokkuvõttes, et $S(x) = \begin{cases} -\frac{\ln|x|}{x+1}, & x \in X \setminus \{-1\}, \\ 0, & x = -1. \end{cases}$

130. a) pidev funktsioon;
b) lõplik arv katkevuskohti;
c) lõplik arv katkevuskohti;
d) loenduv arv katkevuskohti;
e) lõplik arv katkevuskohti.

131. a) Kuna funktsioonid $f(x) = \mathrm{e}^x$ ja $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ on pidevad lõigus $[0, 1]$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{x^2}$, kui $x \in [0, 1]$, kusjuures näiteks $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$, siis $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Kuna funktsioonid $f(x)=\sin x^2$ ja $g(x)=x^2$ on pidevad lõigus $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x^2 \leqslant x^2$, kui $x \geqslant 0$, kusjuures näiteks $\sin\frac{\pi^2}{4} < 1 < \frac{\pi^2}{4}$, siis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x$.

c) Kuna funktsioonid $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ ja $g(x)=\mathrm{e}^x$ on pidevad lõigus $[1,2]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{x^2}$, kui $x \geqslant 1$, kusjuures näiteks $e^2 < e^4 = e^{2^2}$, siis $\int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x < \int_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

d) Kuna funktsioonid $f(x)=\ln x$ ja $g(x)=\ln^3 x$ on pidevad lõigus $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$, kehtib $\ln x \in [-1,0]$ lõigus $x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$, mistõttu $\ln x \leqslant \ln^3 x$, kusjuures näiteks $\ln\frac{2}{\mathrm{e}} = \ln 2 - 1 < (\ln 2-1)^3 = \ln^3\frac{2}{\mathrm{e}}$, siis $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x < \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \ln^3 x\,\mathrm{d}x$.

e) Kuna $\cos^2 x \geqslant 0$ mistahes x korral, kusjuures $\cos^2 x$ on pidev lõigus $[0,2\pi]$ ning näiteks $\cos^2\pi = 1 > 0$, siis $\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

f) Saame, et $\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$, sest $x\sin x \leqslant 0$, kui $x \in [\pi,2\pi]$, kusjuures näiteks $\frac{3}{2}\pi\cdot\sin\frac{3}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi < 0$ ja siinus on pidev funktsioon.

132. a) Saame, et $F'(x) = \frac{1}{1+x}$.

b) Saame, et $F'(x)=\sin x$.

c) Saame, et $F(x)=G(2x)$, kus $G(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Niisiis $F'(x) = 2G'(2x) = 2\cdot\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2x}{x}$.

d) Saame, et $F(x)=G(\mathrm{e}^x)$, kus $G(x)=\int_2^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Niisiis $F'(x) = G'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x = \frac{\ln\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\cdot\mathrm{e}^x = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

e) Saame, et $F(x)=-G(x)$, kus $G(x)=\int_3^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Niisiis $F'(x) = -G'(x) = -\sqrt{1+x^2}$.

f) Saame, et $F(x)=-G(x^2)$, kus $G(x)=\int_1^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Niisiis $F'(x) = -2xG'(x^2) = -2x\cdot\frac{1}{\ln x^2} = -\frac{x}{\ln|x|}$.

g) Kuna $F(x)=0$ iga x korral, siis $F'(x)=0$ iga x korral.

h) Saame, et $F(x)=G(2x)-G(x)$, kus $G(x)=\int_1^x \ln^2 t\,\mathrm{d}t$. Niisiis $F'(x) = 2G'(2x)-G'(x) = 2\ln^2 2x - \ln^2 x$.

i) Saame, et $F(x)=G(\cos x)-G(\sin x)$, kus $G(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Niisiis $F'(x) = -G'(\cos x)\sin x - G'(\sin x)\cos x = -\mathrm{e}^{\cos^2 x}\sin x - \mathrm{e}^{\sin^2 x}\cos x$.

j) Saame, et $F'(x)=\mathrm{e}^x\sin x$. (Ülesande mittesoovitavat kirjapilti tuleb mõista kui $F(x)=\int_2^x \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$.)

133. a) $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4} = 4-\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$;

c) $\int_1^{\ln 3}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_1^{\ln 3} = 3-e$;

d) $\int_1^4\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \left(x^2+2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 = 16+4-1-2 = 17$;

e) $\int_{-5}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_{-5}^{-1} = -\ln 5$;

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

g) $\int_1^4\frac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}+\ln|x|\right)\Big|_1^4 = -\frac{1}{4}+\ln 4+1 = \frac{3}{4}+\ln 4$;

h) $\int_{-1}^3(2^x+1)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2^x}{\ln 2}+x\right)\Big|_{-1}^3 = \frac{8}{\ln 2}+3-\frac{1}{2\ln 2}-1 = \frac{7\frac{1}{2}}{\ln 2}+2$;

i) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 4\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$;

j) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{5\,\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = 5\,\mathrm{th}\,x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = 5\,\mathrm{th}\ln 3 - 5\,\mathrm{th}\ln 2 = 5\cdot\frac{\mathrm{e}^{\ln 3}-\mathrm{e}^{-\ln 3}}{\mathrm{e}^{\ln 3}+\mathrm{e}^{\ln 3}} - 5\cdot\frac{\mathrm{e}^{\ln 2}-\mathrm{e}^{-\ln 2}}{\mathrm{e}^{\ln 2}+\mathrm{e}^{\ln 2}} = 5\cdot\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}} - 5\cdot\frac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = 5\cdot\frac{4}{5}-5\cdot\frac{3}{5} = 1$;

k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = (x-\arctan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-\arctan\frac{\pi}{4}$;

l) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left(x^3 + \arctan x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{\pi^3}{64} + \arctan\frac{\pi}{4}$.

134. a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2$;

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \mathrm{e}^x\Big|_1^4 = 1 + 1 - \frac{1}{3} + \mathrm{e}^4 - \mathrm{e} = 1\frac{2}{3} + \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$.

135. a) Vaja leida ξ nii, et $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \xi\cdot(2-0)$, millest $2 = 2\xi$ ehk $\xi = 1$.

b) Vaja leida ξ nii, et $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \xi^2\cdot(3-2)$, millest $9 - \frac{8}{3} = \xi^2$ ehk $\xi = \pm\sqrt{6\frac{1}{3}}$.

c) Vaja leida ξ nii, et $\int_0^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\xi}(3-0)$, millest $\mathrm{e}^3 - 1 = 3\mathrm{e}^{\xi}$ ehk $\xi = \ln\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$.

d) Vaja leida ξ nii, et $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{\xi}\cdot(2-1)$, millest $\ln 2 = \frac{1}{\xi}$ ehk $\xi = \frac{1}{\ln 2}$.

136. a) $\int_{-1}^{2} |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$;

b) $\int_0^4 |x-2|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x = 2 + 2 = 4$;

c) $\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,\mathrm{d}x = 1 + 1 = 2$;

d) $\int_{-1}^{3} |x(x-2)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^2-2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-2x)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} + 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = 4$;

e) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{|x|}}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{0} \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x\Big|_{-\ln 2}^{0} = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$.

138. a) $f(x) = \sin^3 x$ on paaritu, seega $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = 0$;

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on paaris, seega $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\arctan x\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

c) $f(x) = \sin^2\frac{x}{2}$ on paaris, seega $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$;

d) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ on paaritu, kuna $\ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\frac{(1+x^2)-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, mistõttu $\int_{-\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = 0$;

e) kuna $f(x) = \tan\frac{x}{3}$ on paaritu ja $f(x) = \cos x$ on paaris, siis $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos x + \tan\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$;

f) kuna $f(x) = x^5 + 15x^3$ on paaritu ja $f(x) = x^4 + 4$ on paaris, siis $\int_{-2}^{2}(x^5 + x^4 + 15x^3 + 4)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 (x^4 + 4)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left(\frac{32}{5} + 8\right) = 28\frac{4}{5}$;

g) kuna $f(x) = \sin x$ on paaritu, siis $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}$;

h) kuna $f(x) = \sin|x|$ ja $f(x) = |\sin x|$ on mõlemad paaris, siis $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin|x| + |\sin x|)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} 2\sin x = 8$.

139. a) kuna $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C$, siis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$;

b) kuna $\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln|t+1| + C$, siis $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$;

c) kuna $\int (2x+3)^3\,\mathrm{d}x = \frac{(2x+3)^4}{8} + C$, siis $\int_{-1}^{0}(2x+3)^3\,\mathrm{d}x = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = 10$;

d) kuna $\int \cos(2x+\pi)\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(2x+\pi)}{2} + C$, siis $\int_0^{\pi} \cos(2x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0$;

e) kuna $\int (4-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, siis $\int_0^4 (4-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} = 5\frac{1}{3}$;

f) kuna $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4} + C$, siis $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3}\sqrt{16} - \frac{2}{3}\sqrt{4} = \frac{4}{3}$;

g) kuna $\int \mathrm{e}^{5-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{5-x} + C$, siis $\int_{-2}^{5} \mathrm{e}^{5-x}\,\mathrm{d}x = -1 + \mathrm{e}^7$;

h) kuna $\int \frac{8\,\mathrm{d}x}{1+4x^2} = 4\arctan 2x + C$, siis $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8\,\mathrm{d}x}{1+4x^2} = 4\cdot\arctan 1 = \pi$;

i) kuna $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+9x^2} = \frac{1}{6}\arctan\frac{3x}{2} + C$, siis $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{4+9x^2} = \frac{1}{6}\arctan 1 = \frac{\pi}{24}$;

j) kuna $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$, siis $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;
k) kuna $\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{1}{5}\arcsin 5x + C$, siis $\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{30}$;
l) kuna $\int \frac{\ln x\, dx}{x} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$, siis $\int_1^{e} \frac{\ln x\, dx}{x} = \frac{1}{2}$;
m) kuna $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$, siis $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln 2$;
n) kuna $\int x\sqrt{x^2+9}\, dx = \frac{(\sqrt{x^2+9})^3}{3} + C$, siis $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, dx = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = 32\frac{2}{3}$;
o) kuna $\int (e^x-1)^4 e^x\, dx = \frac{(e^x-1)^5}{5} + C$, siis $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\, dx = \frac{(e-1)^5}{5}$;
p) kuna $\int \sin^2 x\cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$, siis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{1}{3}$;
q) kuna $\int \sin^3 x\, dx = \int (\cos^2 x - 1)\, d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$, siis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$;
r) kuna $\int \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx = \int |\sin x|\sqrt{\cos x}\, dx = -\operatorname{sgn}\sin x \int \sqrt{\cos x}\, d(\cos x) = -\operatorname{sgn}\sin x \cdot \frac{2(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, siis $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$;
s) kuna $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \arctan \operatorname{sh} x + C$, siis $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \arctan\frac{e-e^{-1}}{2}$.

140. a) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t\, dt}{1+t} = (2t - 2\ln|1+t|)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$;
b) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t\cdot 2t\, dt}{1+t^2} = (2t - 2\arctan t)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$;
c) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}} = \int_1^3 \frac{t\, dt}{1+t} = (t - \ln|1+t|)\Big|_1^3 = 2 - \ln 2$;
d) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2+1} = \arctan 3 - \arctan 2 = \arctan\frac{1}{7}$;
e) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}$;
f) $\int_{-0{,}5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int_{-1{,}5}^0 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}\Big|_{-1{,}5}^0 = \frac{\pi}{6}$;
g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^1 \frac{2\, dt}{(1+t^2)\cdot\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{2\, dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}\Big|_0^1 = 1$;
h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{5}\, dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{5}\, dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{5}\, dt}{5+t^2} = 2\arctan\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{5}}$.

141. a) $\int_0^{\pi} x\cos x\, dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -2$;
b) $\int_0^1 xe^x\, dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - (e-1) = 1$;
c) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\, dx = 2\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = -2x\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 2\pi$;
d) $\int_0^1 x\arctan x\, dx = \frac{x^2\arctan x}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2+2x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$;
e) $\int_0^3 \ln(x+3)\, dx = \int_3^6 \ln t\, dt = t\ln t\Big|_3^6 - \int_3^6 dt = 6\ln 6 - 3\ln 3 - 3$;
f) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\, dx = x^2\sin x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = -2\int_0^{\pi} x\sin x = 2x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos x\, dx = -2\pi$;
g) $\int_0^1 x^3e^x\, dx = x^3e^x\Big|_0^1 - 3\int_0^1 x^2e^x\, dx = e - 3x^2e^x\Big|_0^1 + 6\int_0^1 xe^x\, dx = e - 3e + 6xe^x\Big|_0^1 - 6\int_0^1 e^x\, dx = 4e - 6e + 6 = 6 - 2e$;
h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\, dx = -e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx = 1 + e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\, dx = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\, dx$, millest $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\, dx = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$;

i) $\int_1^{\exp\pi} \sin\ln x \,\mathrm{d}x = x\sin\ln x\Big|_1^{\exp\pi} - \int_1^{\exp\pi} \cos\ln x\,\mathrm{d}x = -x\cos\ln x\Big|_1^{\exp\pi} - \int_1^{\exp\pi} \sin\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi}+1-\int_1^{\exp\pi} \sin\ln x\,\mathrm{d}x$, millest $\int_1^{\exp\pi} \sin\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{2}$;

j) $\int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$.

142. a) Valime $x = \frac{1}{\cos t}$, siis $t = \arccos\frac{1}{x}$, seega $\varphi(x) = \arccos\frac{1}{x}$, kus $\varphi : (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \to (0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$. Siis $\varphi'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. Järelikult $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn} x\int x^3(x^2-1)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn} x\int \frac{\sin^2\varphi(x)}{\cos^5\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Arvutame $\int\frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\cos^5 t} = \int\frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^6 t} = \int\frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^3}$. Valime siin $\psi(t) = \sin t$, $\psi : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \to (-1,1)$. Kuna $\int\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)^3} = \int\left(\frac{1}{16(u-1)} - \frac{1}{16(u+1)} - \frac{1}{16(u-1)^2} - \frac{1}{16(u+1)^2} + \frac{1}{8(u+1)^3} - \frac{1}{8(u-1)^3}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{1}{16(u-1)} + \frac{1}{16(u+1)} - \frac{1}{16(u+1)^2} + \frac{1}{16(u-1)^2} + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{u}{8(u^2-1)} + \frac{u}{4(u^2-1)^2} + C$ mistahes $u\in(-1,1)$ korral, siis $\int\frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\cos^5 t} = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right| + \frac{\sin t}{8\cos^2 t} + \frac{\sin t}{4\cos^4 t} + C$ mistahes $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, korral. Lisaks, kui $\cos t = \frac{1}{x}$ ($t\in(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$), siis $\sin t = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Kokkuvõttes $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sgn} x}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right| + \frac{|x|\sqrt{x^2-1}}{8} + \frac{|x|^3\sqrt{x^2-1}}{4} + C$.

b) Valime $x = \tan t$, siis $t = \arctan x$, seega $\varphi(x) = \arctan x$, $\varphi : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$. Siis $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ning $1+x^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi(x)}$. Saame, et $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{x^2}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \int\frac{1}{\sin^2\varphi(x)\cos\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Arvutame $\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos t} = \int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^2 t\cos^2 t}$. Võtame $\psi(t) = \sin t$, $\psi : \mathbb{R}\setminus\{k\cdot\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\} \to (-1,1)\setminus\{0\}$. Kuna $\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2(1-u^2)} = \int\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2(u+1)} - \frac{1}{2(u-1)}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{u} + \frac{\ln|u+1|}{2} - \frac{\ln|u-1|}{2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{u} + C$ mistahes $u\in(-1,1)\setminus\{0\}$ korral, siis $\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right| - \frac{1}{\sin t} + C$, kus $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$. Sealjuures antud piirkonnas $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}\tan t = \operatorname{sgn}\sin t$, mistõttu $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Järelikult $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

c) Integreerime ositi: $\int\sqrt{(x^2-1)^3}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{(x^2-1)^3} - 3\int x^2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Kasutades ülesannet 5a), saame, et $\int\sqrt{(x^2-1)^3}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{(x^2-1)^3} - \frac{3\operatorname{sgn} x}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right| - \frac{3|x|\sqrt{x^2-1}}{8} - \frac{3|x|^3\sqrt{x^2-1}}{4} + C$.

d) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x - 9\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}} = \int\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x - 9\operatorname{arctan}\frac{x}{3}$. Esimeses liidetavas valime $x = 3\tan t$, siis $\varphi(x) = \arctan\frac{x}{3}$, $\varphi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Siis $\varphi'(x) = \frac{3}{x^2+9}$, kusjuures $9+x^2 = \frac{9}{\cos^2\varphi(x)}$. Saame, et $\int\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 9\int\frac{1}{\cos^3\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Arvutame $\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = \int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2)^2}$. Valime $\psi(t) = \sin t$, $\psi : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \to (-1,1)$ ning leiame $\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{(u-1)^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{u}{2(u^2-1)} + C$. Seega $\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right| + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + C$, $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Kokkuvõttes $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{x-\sqrt{x^2+9}}\right| + \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - 9\arctan\frac{x}{3} + C$.

e) Saame, et $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{(x-3)^2-16}\,\mathrm{d}x$. Valime $x-3 = \frac{4}{\cos t}$, siis $\varphi(x) = \arccos\frac{4}{x-3}$, $\varphi : (-\infty,-7]\cup[1,\infty) \to [0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$. Siis $\varphi'(x) = \frac{1}{|x-3|\sqrt{(x-3)^2-16}}$. Saame, et $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,\mathrm{d}x = \int|x-3|((x-3)^2-16)\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}(x-3)\int\frac{4}{\cos\varphi(x)}\cdot\left(\frac{16}{\cos^2\varphi(x)} - 16\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 64\operatorname{sgn}(x-3)\int\frac{1-\cos^2\varphi(x)}{\cos^3\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Niisiis leiame $\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t$, $t\in[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$. Saame, et $\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = \int\frac{\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}(\sin t) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right| + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + C$, koguni $t\in\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$. Sealjuures piirkonnas $t\in[0,\pi]$ kehtib $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$, mistõttu

$\sin\arccos\frac{4}{x-3}=\frac{\sqrt{(x-3)^2-16}}{|x-3|}$. Järelikult $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,\mathrm{d}x=$
$=64\operatorname{sgn}(x-3)\cdot\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{(x-3)^2-4}-|x-3|}{\sqrt{(x-3)^2-4}+|x-3|}\right|+\frac{|x-3|\sqrt{(x-3)^2-16}}{32}\right)+C=$
$=16\operatorname{sgn}(x-3)\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{(x-3)^2-4}-|x-3|}{\sqrt{(x-3)^2-4}+|x-3|}\right|+2(x-3)\sqrt{(x-3)^2-16}+C.$

f) Saame, et $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{4-(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. Valime $x=-1+2\cos t$, siis $\varphi(x)=\arccos\frac{x+1}{2}$, $\varphi:[-3,1]\to[0,\pi]$. Sealjuures $\varphi'(x)=-\frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$. Saame, et $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x=-\int(4-(x+1)^2)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=-4\int\sin^2\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Kuna $\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+C$ iga $t\in\mathbb{R}$ korral, siis $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$
$=-2\arccos\frac{x+1}{2}+\sin 2\arccos\frac{x+1}{2}+C=-2\arccos\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}}{2}+C.$

145. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$;
b) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,\mathrm{d}t=2t\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t=\pi-2$;
c) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=\frac{\pi}{12}-1+\sqrt{\frac{3}{4}}$;
d) $\int_0^1 2^{4x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4\ln 2}2^{4x+5}\Big|_0^1=\frac{1}{4\ln 2}\cdot(2^9-2^5)=\frac{120}{\ln 2}$;
e) $\int_0^4 3^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^2 t3^t\,\mathrm{d}t=2\cdot\frac{t3^t}{\ln 3}\Big|_0^2-\frac{1}{2\ln 3}\int 3^t\,\mathrm{d}t=2\cdot\left(\frac{9}{\ln 3}-\frac{9-1}{2\ln^2 3}\right)=\frac{36}{\ln 3}-\frac{16}{\ln^2 3}$;
f) $\int_{\pi^2}^{\frac{\pi^2}{16}}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int_\pi^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,\mathrm{d}t=2\sin t\Big|_\pi^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$;
g) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\int_0^1\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2t\sqrt{t}}{3}\Big|_1^2-\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_0^1=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$;
h) $\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}=\int_1^2\frac{3(t-1)^2}{t}\,\mathrm{d}t=3\int_1^2 t\,\mathrm{d}t-6\int_1^2\mathrm{d}t+3\int 1_2\frac{\mathrm{d}t}{t}=3\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_1^2-6t\Big|_1^2+3\ln|t|\Big|_1^2=\ln 8-\frac{3}{2}$;
i) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 t\cdot\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=2-2\arctan t\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$;
j) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$;
k) kuna $f(x)=x\arctan^2 x$ on paaritu, siis $\int_{-2\pi}^{2\pi}x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x=0$;
l) $\int_1^5(x-3)^5\mathrm{e}^{|x-3|}\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^2 t\mathrm{e}^{|t|}\,\mathrm{d}t=0$, sest integrand on paaritu funktsioon;
m) $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln(1+\mathrm{e}^x)\Big|_0^1=\ln(1+\mathrm{e})-\ln 2$;
n) $\int_0^{\ln 3}\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int_2^4\frac{2-t}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t=\ln 3-2\ln 4+2\ln 2$;
o) $\int_0^\pi\mathrm{e}^{2x}\sin 3x=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}\cos 3x\Big|_0^\pi+\frac{2}{3}\int_0^\pi\mathrm{e}^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{3}+\frac{2}{9}\mathrm{e}^{2x}\sin 3x\Big|_0^\pi-\frac{4}{9}\int_0^\pi\mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{3}-\frac{4}{9}\int_0^\pi\mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$, millest $\int_0^\pi\mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{9}{13}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{3}=\frac{3}{13}\cdot(\mathrm{e}^{2\pi}+1)$;
p) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^3\sin t\,\mathrm{d}t=-2t^3\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+6\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,\mathrm{d}t=6t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi^2}{2}+12t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-12\int_0^{\frac{\pi}{\cos}}t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi^2}{2}-12$;
q) $\int_1^5\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x}}=\int_3^5\frac{t^2-5}{4t}\cdot\frac{t\,\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{t^3}{3}-5t\right)\Big|_3^5=\frac{1}{8}\cdot\frac{98}{3}-\frac{1}{8}\cdot 10=2\frac{5}{6}$;
r) $\int_1^{\exp\frac{\pi}{2}}x\cos\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cos\ln x\Big|_1^{\exp\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{+}\frac{1}{2}\int_1^{\exp\frac{\pi}{2}}x\sin\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}\sin\ln x\Big|_1^{\exp\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_1^{\exp\frac{\pi}{2}}x\cos\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^\pi}{4}-\frac{1}{4}\int_1^{\exp\frac{\pi}{2}}x\cos\ln x\,\mathrm{d}x$, millest $\int_1^{\exp\frac{\pi}{2}}x\cos\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^\pi}{4}\right)$;

s) $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = x^2\cdot\frac{3\sqrt[3]{x^2+1}}{2}\Big|_0^{\sqrt{7}} - \int_0^{\sqrt{7}} 2x\cdot\frac{3\sqrt[3]{x^2+1}}{2}\,\mathrm{d}x = 21-\frac{3}{2}\int_1^8 \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t = 21-\frac{9}{8}\cdot(16-1) = 4\frac{1}{8}$;

t) $\int_0^1 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{16}$;

u) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$;

v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-t^2)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}-\frac{2}{7}$;

w) $\int_0^{\pi} |\cos^3 x|\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^3\,\mathrm{d}t - \int_0^{-1} t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;

x) $\int_0^{\pi} |1-2\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} |1-2\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-2\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x-1)\,\mathrm{d}x\right) =$
$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{6}-2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}-4-\frac{\pi}{3}$.

146. a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{l\to 0+}\int_l^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{l\to 0+}\left(2-2\sqrt{l}\right) = 2$.

b) $\int_0^2 \sqrt[3]{\frac{2}{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to 0+}\int_l^2 \sqrt[3]{\frac{2}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt[3]{2}\cdot\frac{3}{2}\lim\limits_{l\to 0+}\left(2^{\frac{2}{3}}-l^{\frac{2}{3}}\right) = 3$.

c) $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{l\to 0-}\int_{-1}^l \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{l\to 0-}\ln|l| = -\infty$, seega päratu integraal hajub.

d) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{l\to 1-}\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{l\to 1-}\arcsin l = \frac{\pi}{2}$.

e) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{l\to -1+}\int_l^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{l\to -1+}(-\arcsin l)+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \int_{-\pi}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$, leiame $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = -\cot\frac{x}{2}+C$, millest järeldub, et esimene liidetav on $\lim\limits_{l\to 0-}\left(-\cot\frac{l}{2}\right) = \infty$; sellest juba järeldub, et kogu päratu integraal $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$ hajub.

g) $\int_{-\infty}^0 \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to -\infty}\int_l^0 \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to -\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_l^0 = -\lim\limits_{l\to -\infty}\left(\frac{l}{2}+\frac{\sin 2l}{4}\right) = -\infty$, sest $\frac{l}{2}+\frac{\sin 2l}{4} \leqslant \frac{l}{2}+\frac{1}{4}$ ning juba $\lim\limits_{l\to -\infty}\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{4}\right) = -\infty$, seega uuritav päratu integraal hajub.

h) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{l\to 0+}\int_l^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{l\to 0+}\left(-1+\frac{1}{l}\right) = \infty$, seega päratu integraal hajub.

i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{l\to 0+}\int_l^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{l\to 0+}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_l^{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{l\to 0+}\left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}+\frac{1}{\ln l}\right) = \frac{1}{\ln 2}$.

j) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}(-\mathrm{e}^{-l}+1) = 1$.

k) $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{l\to\infty}\int_1^l \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{l\to\infty}\ln l = \infty$, seega päratu integraal hajub.

l) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{l\to -\infty}\int_l^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{l\to -\infty}\left(1+\frac{1}{l}\right) = 1$.

m) $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \lim\limits_{l\to\infty}\int_1^l \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$. Juhul, kui $k\neq 1$, saame, et $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{l^{-k+1}}{-k+1}-\frac{1}{-k+1}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{kui } k<1, \\ \frac{1}{k-1}, & \text{kui } k>1. \end{cases}$
Juhtu $k=1$ on juba vaadeldud ülesandes j).

n) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{l\to -\infty}\int_l^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{l\to -\infty}(-\arctan l) + \lim\limits_{l\to\infty}\arctan l = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.

o) $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\int_1^l \frac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\left(\ln|l|-\frac{1}{l^3}+1\right) = \infty$, seega päratu integraal hajub.

p) $\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-l^2}}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

q) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}$, mida on juba vaadeldud ülesandes m).

r) $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{l\to\infty} \int_2^l \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{l\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln l} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$.

s) Kuna $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x - \sin x + C$, siis $\int_0^\infty x\sin x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l x\sin x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}(-l\cos l - \sin l + 0) = \lim\limits_{l\to\infty}(-l\cos l - \sin l)$. Näitame, et piirväärtust $\lim\limits_{l\to\infty}(-l\cos l - \sin l)$ ei leidu. Oletame, et $\lim\limits_{l\to\infty}(-l\cos l - \sin l) = A$. Valides $(l_n) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots\right)$, kehtib $\lim\limits_n l_n = \infty$ ning piirväärtuse Heine kriteeriumi tõttu $A = \lim\limits_n(-l_n\cos l_n + \sin l_n) = \lim\limits_n(-1) = -1$. Valides aga $(l_n) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\right)$, kehtib samuti $\lim\limits_n l_n = \infty$ ning $A = \lim\limits_n(-l_n\cos l_n + \sin l_n) = \lim\limits_n 1 = 1$. Kuna funktsiooni piirväärtus peab olema üheselt määratud, siis $\lim\limits_{l\to\infty}(-l\cos l - \sin l)$ ei leidu. Järelikult päratu integraal $\int_0^\infty x\sin x\,\mathrm{d}x$ hajub.

t) $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\left(-(l+1)\mathrm{e}^{-l} + 1\right) = 1$.

u) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim\limits_{l\to-\infty}\int_l^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{l\to-\infty}(-\ln(l^2+1)) + \frac{1}{2}\lim\limits_{l\to\infty}\ln(l^2+1)$. Mõlemad integraalid hajuvad, järelikult uuritav päratu integraal samuti hajub.

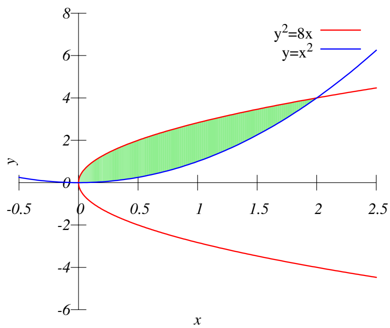
v) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+5} = \int_{-2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\lim\limits_{l\to-\infty}(-\arctan\frac{l+2}{\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}}\lim\limits_{l\to\infty}(\arctan\frac{l+2}{\sqrt{5}}) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

w) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to-\infty}\int_l^{-2} \frac{\ln(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to-\infty}\int_l^{-2} \frac{\ln(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to-\infty}\frac{t^2}{2}\Big|_{\ln(-l)}^{\ln 2} = \lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{\ln^2 2}{2} - \frac{\ln^2 l}{2}\right) = -\infty$, seega päratu integraal hajub.

x) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{e^{-l}}{2}\cdot(\sin l - \cos l) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

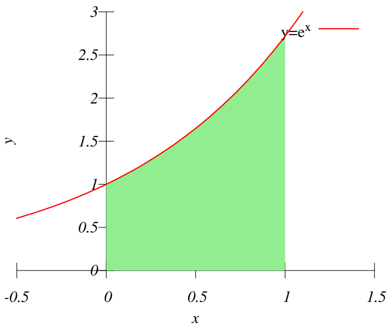
149. a) Lõikepunktid leiame võrrandist $x^4 = 8x$, seega $(0,0)$ ja $(2,4)$. Niisiis otsitav pindala
$S = \int_0^2 \left(2\sqrt{2}\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{4x\sqrt{2x}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$.

```
plot2d([x**2, sqrt(8*x),-sqrt(8*x)], [x,-0.5,2.5]);
```



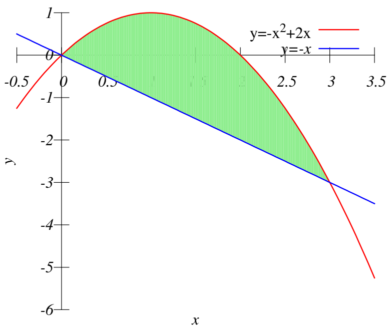
b) $S = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$.

```
plot2d([exp(x), [parametric,1,t,[t,0,3]]], [x,-0.5,1.5], [y,0,3]);
```



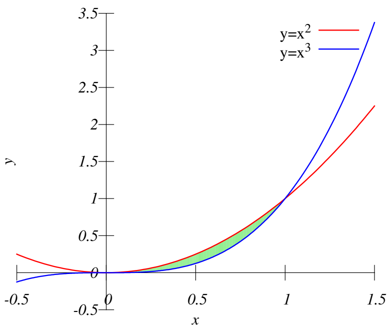
c) $S=\int_0^3 (2x-x^2-(-x))\,\mathrm{d}x = \left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2}-9 = 4\frac{1}{2}$.

```
plot2d([2*x-x**2, -x], [x,-0.5,3.5]);
```



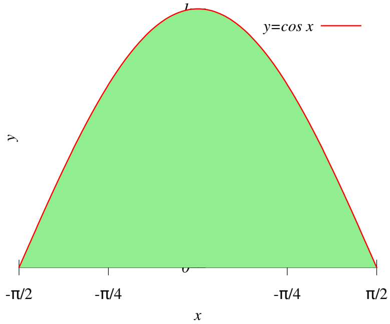
d) $S=\int_0^1 (x^2-x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

```
plot2d([x**2, x**3], [x,-0.5,1.5]);
```



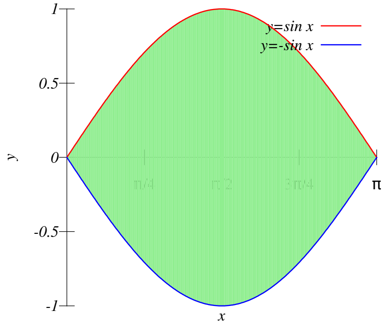
e) $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

```
plot2d(cos(x), [x,-%pi/2,%pi/2]);
```



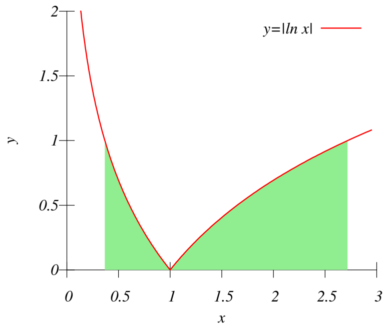
f) $S=\int_0^{\pi}(\sin x-(-\sin x))\,\mathrm{d}x=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=4.$

```
plot2d([sin(x), -sin(x)], [x,0,%pi]);
```



g) $S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{e}\ln x\,\mathrm{d}x=(x-x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_1^{e}=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+e-e+1=2-\frac{2}{e}.$

```
plot2d([abs(log(x)), [parametric,1/%e,t,[t,-5,5]], [parametric,%e,t,[t,-5,5]]],
[x,0,3], [y,0,2]);
```

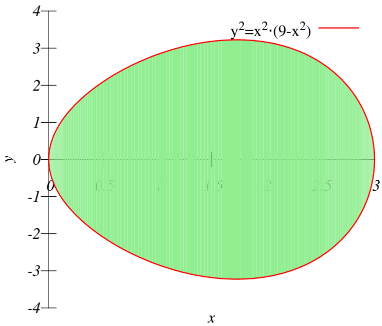


h) Saame, et ellipsit piiravad jooned $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ja $y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. (Eeldame, et $a,b>0$.) Seega $S=\int_{-a}^{a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\right)\mathrm{d}x=2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$. Kuna integrand on paarisfunktsioon, siis vaatleme ainult lõiku $[0,a]$ ning teeme samas asenduse $x=a\sin t$, millest $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$. Saame, et $S=$

$4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 4ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4ab\cdot\frac{\pi}{4} = \pi ab.$

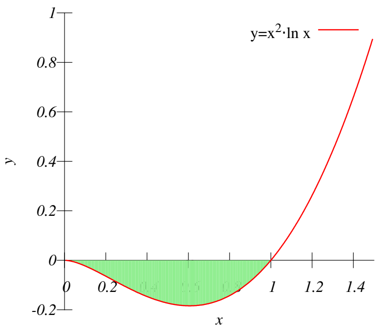
i) Kujund on sümmeetriline y-telje suhtes ning piirkonnas $x \in [0,a]$ piiravad kujundit jooned $y = x\sqrt{a^2-x^2}$ ja $y=-x\sqrt{a^2-x^2}$ (eeldame, et $a>0$). Niisiis $\frac{S}{2} = \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} - \left(-x\sqrt{a^2-x^2}\right)\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3$. Järelikult kogupindala $S = \frac{4a^3}{3}$.

```
plot2d([sqrt(x*(3**2-x**2)), -sqrt(x*(3**2-x**2))], [x,0,3]);
```



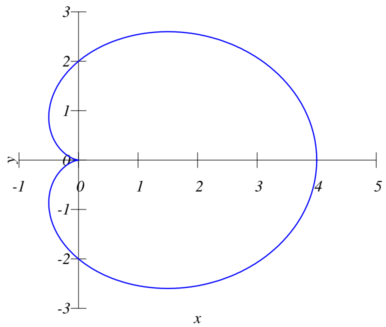
j) $S = \int_0^1 (0 - x^2\ln x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$. Kuna $\lim_{x\to 0+} x^2\ln x = 0$, siis integrand on pidev kogu lõigul $[0,1]$ ning $S = -\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}$.

```
plot2d([x**2*log(x)], [x,0,1.5]);
```



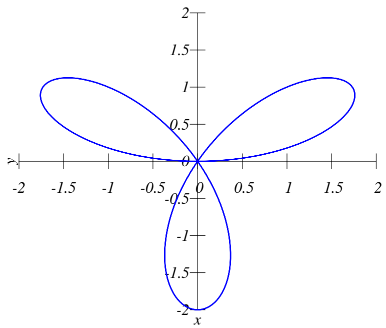
k) Kasutame polaarkoordinaatides pindala arvutamise valemit. Kujund on sümmeetriline x-telje suhtes. Seega saame, et $\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2$. Järelikult kogupindala $S = \frac{3}{2}\pi a^2$.

```
plot2d([parametric, 2*(1+cos(f))*cos(f), 2*(1+cos(f))*sin(f), [f,0,2*%pi]],
[x,-1,4], [y,-3,3]);
```



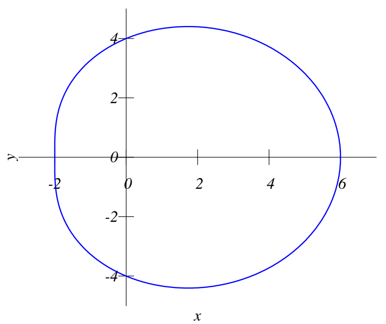
l) Ühe lehe pindala on kolmandik kujundi pindalast. Saame, et $\frac{S}{3} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi} \sin^2\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\psi}{2}\,\mathrm{d}\psi = \frac{a^2}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{12}$. Järelikult kogupindala $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

```
plot2d([parametric, 2*sin(3*f)*cos(f), 2*sin(3*f)*sin(f), [f,0,2*%pi]], [x,-2,2],
[y,-2,2]);
```



m) $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$
$= 2a^2\cdot\left(8\pi + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi\right) = 2a^2\cdot 9\pi = 18a^2\pi.$

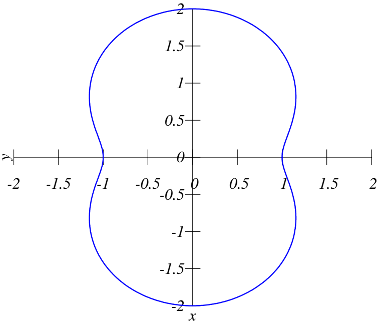
```
plot2d([parametric,2*(2+cos(f))*cos(f), 2*(2+cos(f))*sin(f), [f,0,2*%pi]], [x,-3,7],
[y,-5,5]);
```



n) Teisendame võrrandi polaarkoordinaatidesse: saame, et $r^4 - a^2 r^2\cos^2\varphi - b^2 r^2\sin^2\varphi = 0$, millest

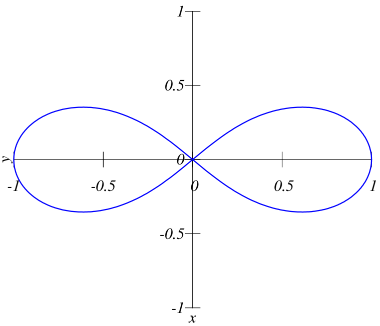
$r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$. Saame, et $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$
$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}$.

```
plot2d([parametric, sqrt(cos(f)**2+4*sin(f)**2)*cos(f),
sqrt(cos(f)**2+4*sin(f)**2)*sin(f), [f,0,2*%pi]], [x,-2,2], [y,-2,2]);
```

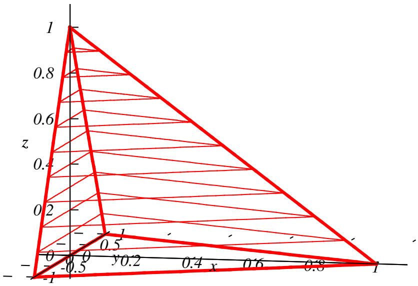


o) Teisendame võrrandi polaarkoordinaatidesse: saame, et $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a^2r^2\cos 2\varphi$, millest $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, kusjuures $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Leiame poole kujundi pindalast. Saame, et $\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}$. Järelikult kogupindala $S = a^2$.

```
plot2d([parametric, sqrt(cos(2*f))*cos(f), sqrt(cos(2*f))*sin(f),
[f,0,2*%pi],[nticks,1000]], [x,-1,1], [y,-1,1]);
```



150. a) Lõigates antud keha fikseeritud tasandiga $z = z_0$, saame lõikeks joonte $y = -x + (1 - z_0)$, $y = x + (z_0 - 1)$ ja $x = 0$ poolt piiratud kolmnurga, mille pindala on $S(z_0) = (1 - z_0)^2$. Niisiis $V = \int_0^1 S(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-z)^2\,\mathrm{d}z = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.



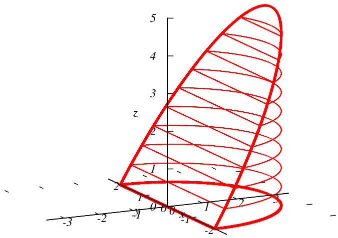
b) Lõigates antud keha fikseeritud tasandiga $z = z_0$, saame lõikeks joonte $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $y = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ja $x = \frac{az_0}{c}$ poolt piiratud kujundi, mille pindala on $S(z_0) = \int_{\frac{az_0}{c}}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = 2b\int_{\frac{az_0}{c}}^{a} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$. Teeme muutuja vahetuse $x = a\sin t$, siis $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$ ning $S(z_0) = 2b\int_{\arcsin\frac{z_0}{c}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 t\,\mathrm{d}t =$

$= 2ab\int_{\arcsin\frac{z_0}{c}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 2ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\arcsin\frac{z_0}{c}}^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{z_0}{c}-\frac{1}{4}\sin 2\arcsin\frac{z_0}{c}\right) =$

$= 2ab\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{z_0}{c}-\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{z_0}{c}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}\right)$. Niisiis $V = \displaystyle\int_0^c 2ab\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{z}{c}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{c}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\right)\mathrm{d}z =$

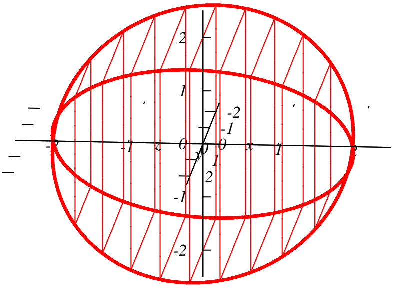
$= 2ab\cdot\left(\frac{\pi c}{4}-\frac{1}{2}\int_0^c \arcsin\frac{z}{c}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2c^2}\int_0^c z\sqrt{c^2-z^2}\,\mathrm{d}z\right) =$

$= \frac{\pi abc}{2} - ab\left(z\arcsin\frac{z}{c}+c\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)\Big|_0^c - \frac{ab}{c^2}\left(-\frac{(c^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_0^c = \frac{\pi abc}{2}-\frac{\pi abc}{2}+abc-\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{c^3}{3} = \frac{2abc}{3}.$



c) Lõigates antud keha fikseeritud tasandiga $z = z_0$, saame lõikeks joone $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}$ poolt piiratud kujundi. Selle joone võrrandi võime esitada kujul $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1$. Näeme, et tegemist on ellipsiga, mille pindala on ül. 1h) põhjal $S(z_0) = \pi ab \cdot \left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)$. Niisiis $V = \int_{-c}^{c} S(z)\,\mathrm{d}z = 2\int_0^c \pi ab \cdot \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}z = 2\pi ab\left(c - \frac{c}{3}\right) = \frac{4\pi abc}{3}$.

d) Antud keha kujutab endast kahe silindri ühisosa. Lõigates seda keha fikseeritud tasandiga $y = y_0$, saame kujundi, mis on piiratud joontega $x = \sqrt{a^2 - y_0^2}$, $x = -\sqrt{a^2 - y_0^2}$, $z = \sqrt{a^2 - y_0^2}$ ja $z = -\sqrt{a^2 - y_0^2}$. Tegemist on ruuduga, mille pindala on $S(y_0) = 4(a^2 - y_0^2)$. Niisiis $V = \int_{-a}^{a} S(y)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^a 4(a^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 8a^3 - \frac{8a^3}{3} = \frac{16a^3}{3}$.



151. a) Saame, et $V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$.

b) Saame, et $V=\pi\int_1^4 \frac{16}{x^2}\,\mathrm{d}x=-16\pi\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^4=12\pi$.

c) Saame, et $V=\pi\int_0^1 (x-x^4)\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$.

d) Saame, et

$V=\pi\int_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos^2 2x}{4}\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{8}\right)\mathrm{d}x=\frac{3\pi^2}{8}$.

e) Saame, et $V=\pi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\pi\lim\limits_{l\to\infty}\int_0^l \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\pi\lim\limits_{l\to\infty}(-\mathrm{e}^{-2l}+\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{2}$.

f) Saame, et $V=\pi\int_{-a}^a\left(a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\right)^2\mathrm{d}x=\pi a^2\pi\int_{-a}^a\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{a^2\pi}{4}\int_{-a}^a\left(\mathrm{e}^{\frac{2x}{a}}+2+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a^3\pi}{4}\cdot(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2})$.

g) Saame, et $V=\pi\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

h) Saame, et $V=\pi\int_a^{2a}\left(x^2-a^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4\pi a^3}{3}$.

152. Võime endale ette kujutada, et joon $x^2+y^2=r^2$ pöörleb ümber x-telje. Segmendi ruumala on niisiis $\pi\int_{r-h}^r (r^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{r-h}^r=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-r^2(r-h)+\frac{(r-h)^3}{3}\right)=$
$=\pi\left(-\frac{r^3}{3}+r^2h+\frac{r^3}{3}-rh(r-h)-\frac{h^3}{3}\right)=\pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\pi h^2}{3}\cdot(3r-h)$.

153. a) Saame, et $l=\int_0^3\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^3=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

b) Saame, et $l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctan\frac{1}{\sqrt{8}}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t}\sin^2 t}$. Kuna olukorras, kus $\cos t>0$, kehtib $\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t}\sin^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^2 t\sin^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)\sin^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^2 t}+\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{2(1+\sin t)}+\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1-\sin t)}=-\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{2}\ln|1+\sin t|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin t|+C$, ning $\sin\arctan\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{3}$, siis $l=1-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3$.

Alternatiiv: kasutame asendust $\frac{1}{x} = \operatorname{sh} t$, siis $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{cth}^2 t\,\mathrm{d}t = -\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{arsh}\frac{1}{x} + \operatorname{cth}\operatorname{arsh}\frac{1}{x} + C$. Kuna $\operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{8}} = \ln\sqrt{2}$ ja $\operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3}$, siis $l = -\operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{8}} + \operatorname{cth}\operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{8}} + \operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{cth}\operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \operatorname{cth}\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln 3 - \operatorname{cth}\ln\sqrt{3} = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3$.

c) Saame, et $l = \int_0^a \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a}$.

d) Saame, et $y'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}$, millest $l = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}} = \lim_{l\to 0+}\int_l^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}$. Teeme asenduse $\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}} = t$, siis $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C = \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}+1| - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}-1| + C$, millest $l = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}) - \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}})$.

e) Saame, et $y'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sqrt{x^2-1}$, millest $1+(y')^2 = x^2$. Niisiis $l = \int_1^{1+a}\sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{1+a} x\,\mathrm{d}x = \frac{(1+a)^2-1}{2} = \frac{2a+a^2}{2}$.

f) Saame, et $y'(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$ ning $1+(y')^2 = 1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a} = \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}$. Niisiis $l = \int_{-a}^a \operatorname{ch}\frac{x}{a} = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-a}^a = 2a\operatorname{sh}1 = a(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}})$.

154. a) Saame, et $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y'(t) = a\sin t$, millest $x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2 - 2a^2\cos t + a^2 = 2a^2(1-\cos t)$. Niisiis $l = \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{4a^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 4a\int_0^{\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u = 8a$.

b) Saame, et $x'(t) = -\frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t$ ja $y'(t) = \frac{3c^2}{b}\sin^2 t\cos t$. Ilmselt $t\in[0,2\pi]$ ning saadav joon on sümmeetriline x- ja y-telje suhtes. Seega $l = 4\cdot\frac{3c^2}{a^2b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)}\,\mathrm{d}t$. Kuna $\int\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)}\,\mathrm{d}t = \int \sin t\sqrt{b^2+c^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}(\sin t) = \frac{1}{3c^2}\left(b^2+c^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}$, siis $l = 12c^2\cdot\frac{a^2b^2}{3c^2}\cdot\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{a^3}\right) = 4\cdot\frac{a^3-b^3}{ab}$.

c) Saame, et $x'(t) = 2a(-\sin t+\sin 2t)$, $y'(t) = 2a(\cos t-\cos 2t)$, mistõttu $l = 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t = 16a$. (Kasutada saab näiteks valemit $2-2\cos t = 4\sin^2\frac{t}{2}$.)

d) Parameetrilisel kujul on joon $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, kus $t\in[0,2\pi]$. Joon on sümmeetriline mõlema telje suhtes. Saame, et $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$, millest $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$. Niisiis $l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 6a$.

e) Parametriseerime: $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$. Saame, et $l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4bE\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$, kus $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ on täielik teist liiki elliptiline integraal. (Väljend „täielik“ on kasutusel selles mõttes, et „mittetäielik“ sisaldaks ka teist parameetrit φ, kus integraal võetaks $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ asemel rajades $\int_0^{\varphi}$.) Suurus $E(k)$ ei avaldu üldiselt elementaarfunktsioonina. Küll saab selle funktsiooni arendada astmeritta:

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2\frac{1}{1-2n}\cdot k^{2n}.$$

f) Parameetrilisel kujul on joon $x(\varphi) = a\varphi\cos\varphi$, $y(\varphi) = a\varphi\sin\varphi$, kus $\varphi\in[0,2\pi]$. Seega $x'(\varphi) = a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi$, $y'(\varphi) = a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi$ ning $l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a}{2}\operatorname{arsh}2\pi + a\pi\sqrt{4\pi^2+1}$.

g) Parameetrilisel kujul on joon $x(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\varphi}$, $y(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$, kus $\varphi\in[\frac{1}{2},2]$, seega $x'(\varphi) = \frac{-\varphi\sin\varphi+\cos\varphi}{\varphi^2}$, $y'(\varphi) = \frac{\varphi\cos\varphi+\sin\varphi}{\varphi^2}$, millest $l = \int_{\frac{1}{2}}^2\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}\,\mathrm{d}\varphi = \operatorname{arsh}2 + \frac{\operatorname{arsh}5}{2} - \operatorname{arsh}\frac{1}{2}$.

h) Parameetrilisel kujul on joon $x(\varphi)=\varphi^2\cos\varphi$, $y(\varphi)=\varphi^2\sin\varphi$, kus $\varphi\in[0,\sqrt{5}]$. Saame, et $x'(\varphi)=2\varphi\cos\varphi-\varphi^2\sin\varphi$, $y'(\varphi)=2\varphi\sin\varphi+\varphi^2\cos\varphi$, millest $x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2=4\varphi^2\cos^2\varphi-4\varphi^3\sin\varphi\cos\varphi+\varphi^4\sin^2\varphi+4\varphi^2\sin^2\varphi+4\varphi^3\sin\varphi\cos\varphi+\varphi^4\cos^2\varphi=4\varphi^2+\varphi^4$. Niisiis $l=\int_0^{\sqrt{5}}\varphi\sqrt{4+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{(\varphi^2+4)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^{\sqrt{5}}=\frac{27}{3}-\frac{8}{3}=6\frac{1}{3}$.

i) Parameetrilisel kujul on joon $x(\varphi)=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi)=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, kus $\varphi\in[0,2\pi]$. Saame, et $x'(\varphi)=-a\sin\varphi-a\sin2\varphi$ ning $y'(\varphi)=a\cos\varphi+a\cos2\varphi$, millest $x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2=a^2(\sin^2\varphi+2\sin\varphi\sin2\varphi+\sin^2 2\varphi+\cos^2\varphi+2\cos\varphi\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi)=a^2(2+2\cos\varphi)=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. Niisiis
$l=\int_0^{2\pi}2a|\cos\frac{\varphi}{2}|\,\mathrm{d}\varphi=4a\int_0^{\pi}|\cos\psi|\,\mathrm{d}\psi=8a$.

j) Parameetrilisel kujul on joon $x(r)=r\cos\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $y(r)=r\sin\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, kus $r\in[1,3]$. Saame, et $x'(r)=\cos\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $y'(r)=\sin\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, millest $l=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{4r^4}}\,\mathrm{d}r=\frac{\arctan 2}{2}+\sqrt{11}-\frac{\arctan\sqrt{11}}{2}-1$.