

MTMM.00.182 Matemaatiline analüüs IV

Urve Kangro urve.kangro@ut.ee, ruum 613a

Aine koduleht: <https://courses.ms.ut.ee/2019/ma4/spring>

Kirjandus:

1. T. Leiger, Matemaatiline analüüs IV. Elektrooniline loegukonspekt.
2. G. Kangro, Matemaatiline analüüs II, Valgus, Tallinn, 1968.

Urve Kangro urve.kangro@ut.ee, ruum 613a

Aine koduleht: <https://courses.ms.ut.ee/2019/ma4/spring>

Kirjandus:

1. T. Leiger, Matemaatiline analüüs IV. Elektrooniline loegukonspekt.
2. G. Kangro, Matemaatiline analüüs II, Valgus, Tallinn, 1968.

Hindamine:

2 kontrolltööd, 2×15 punkti,

2 ettekannet, 2×10 punkti,

5 kodutööd, 5×2 punkti.

Lisaks antakse praktikumides tärnülesandeid.

Eksamile pääsemiseks on vaja saada kontrolltööde eest kokku vähemalt 15 punkti ning teha 2 seminariettekanne.

Eksam on suuline, 40 punkti.

Kokku on võimalik saada 100 punkti (+ võimalikud lisapunktid).

Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m := \{\mathbf{X} := (x_1, \dots, x_m) \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m)$ – $\mathbb{R}^m$ punktid,
 $x_1, \dots, x_m$ – vektori $\mathbf{X}$ koordinaadid.

Vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud koordinaaditi.

Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m := \{\mathbf{X} := (x_1, \dots, x_m) \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m)$ – $\mathbb{R}^m$ punktid,
 $x_1, \dots, x_m$ – vektori $\mathbf{X}$ koordinaadid.

Vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud koordinaaditi.

Vektorruumi aksioomid:

- 1⁰ $\mathbf{X} + \mathbf{X}' = \mathbf{X}' + \mathbf{X}$ (liitmise kommutatiivsus),
- 2⁰ $\mathbf{X} + (\mathbf{X}' + \mathbf{X}'') = (\mathbf{X} + \mathbf{X}') + \mathbf{X}''$ (liitmise assotsiatiivsus),
- 3⁰ $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m: \mathbf{X} + \mathbf{0} = \mathbf{X} \ \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ (nullelemendi olemasolu),
- 4⁰ $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \exists \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^m: \mathbf{X} + \mathbf{X}' = \mathbf{0}$ (vastandelemendi olemasolu),
- 5⁰ $1\mathbf{X} = \mathbf{X}$,
- 6⁰ $\lambda(\mu\mathbf{X}) = (\lambda\mu)\mathbf{X}$ (skalaariga korrutamise assotsiatiivsus),
- 7⁰ $(\lambda + \mu)\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} + \mu\mathbf{X}$ (distributiivsus),
- 8⁰ $\lambda(\mathbf{X} + \mathbf{X}') = \lambda\mathbf{X} + \lambda\mathbf{X}'$ (distributiivsus).

Skalaarkorrutis ruumis $\mathbb{R}^m$: $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle := \sum_{k=1}^m x_k x'_k$.

Vektori $\mathbf{X}$ pikkus ehk norm: $\|\mathbf{X}\| := \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$.

Skalaarkorrutis ruumis $\mathbb{R}^m$: $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle := \sum_{k=1}^m x_k x'_k$.

Vektori $\mathbf{X}$ pikkus ehk norm: $\|\mathbf{X}\| := \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$.

Lemma (Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratus)

Iga kahe vektori $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ korral kehtib võrratus

$$|\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle| \leq \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|.$$

Seejuures kehtib võrdus parajasti siis, kui üks vektor on teise kordne.

Skalaarkorrutis ruumis $\mathbb{R}^m$: $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle := \sum_{k=1}^m x_k x'_k$.

Vektori $\mathbf{X}$ pikkus ehk norm: $\|\mathbf{X}\| := \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$.

Lemma (Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratus)

Iga kahe vektori $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ korral kehtib võrratus

$$|\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle| \leq \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|.$$

Seejuures kehtib võrdus parajasti siis, kui üks vektor on teise kordne.

Normi aksioomid:

(N1) $\|\mathbf{X}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$,

(N2) $\|\lambda \mathbf{X}\| = |\lambda| \|\mathbf{X}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(N3) $\|\mathbf{X} + \mathbf{X}'\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}'\|$ (kolmnurga võrratus).

$\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ vaheline kaugus: $d(\mathbf{X}, \mathbf{X}') := \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - x'_k)^2}$.

Ruumi $\mathbb{R}^m$ topoloogia

Punkti **A** **lahtine** ε -ümbrus e. lahtine kera:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \varepsilon\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Punkti **A** **kinnine** ε -ümbrus e. kinnine kera:

$$\begin{aligned} \overline{U}_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leq \varepsilon\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

Ruumi $\mathbb{R}^m$ topoloogia

Punkti **A** **lahtine** ε -ümbrus e. lahtine kera:

$$\begin{aligned}U_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \varepsilon\} \\&= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon \right\}.\end{aligned}$$

Punkti **A** **kinnine** ε -ümbrus e. kinnine kera:

$$\begin{aligned}\overline{U}_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leq \varepsilon\} \\&= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \leq \varepsilon \right\}\end{aligned}$$

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$.

Punkti $\mathbf{A} \in D$ nim. hulga D **sisepunktiks**, kui $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset D$.

Punkti $\mathbf{A} \in D$ nim. hulga D **rajapunktiks**, kui $\forall \varepsilon > 0$

$D \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ & $(\mathbb{R}^m \setminus D) \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \emptyset$.

Hulga D kõigi sisepunktide hulka nim. selle hulga **sisemuseks** ja tähistatakse D° . Hulga D kõigi rajapunktide hulka nim. selle hulga **rajaks**, tähistatakse ∂D .

Hulka $\overline{D} := D \cup \partial D$ nim. hulga D **sulundi**ks.

Hulka D nim. **lahtiseks hulgaks**, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja **kinniseks hulgaks**, kui $\partial D \subset D$.

Punkti $\mathbf{A}$ nim. hulga D **kuhjumispunktiks**, kui $\forall \varepsilon > 0$
 $(U_\varepsilon(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}) \cap D \neq \emptyset$.

Hulka D nim. **tõkestatud hulgaks**, kui ta sisaldub mingis keras, s.t.
 $\exists \mathbf{A} \in \mathbb{R}^m, R > 0: D \subset U_R(\mathbf{A})$. Kui hulk pole tõkestatud, siis nim.
seda **tõkestamata hulgaks**.

Hulka $\overline{D} := D \cup \partial D$ nim. hulga D **sulundi**.

Hulka D nim. **lahtiseks hulgaks**, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja **kinniseks hulgaks**, kui $\partial D \subset D$.

Punkti $\mathbf{A}$ nim. hulga D **kuhjumispunktiks**, kui $\forall \varepsilon > 0$
 $(U_\varepsilon(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}) \cap D \neq \emptyset$.

Hulka D nim. **tõkestatud hulgaks**, kui ta sisaldub mingis keras, s.t.
 $\exists \mathbf{A} \in \mathbb{R}^m, R > 0: D \subset U_R(\mathbf{A})$. Kui hulk pole tõkestatud, siis nim.
seda **tõkestamata hulgaks**.

Lause

Iga lahtine kera $U_r(\mathbf{A})$ on lahtine hulk.

Hulka $\overline{D} := D \cup \partial D$ nim. hulga D **sulundi**ks.

Hulka D nim. **lahtiseks hulgaks**, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja **kinniseks hulgaks**, kui $\partial D \subset D$.

Punkti $\mathbf{A}$ nim. hulga D **kuhjumispunktiks**, kui $\forall \varepsilon > 0$
 $(U_\varepsilon(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}) \cap D \neq \emptyset$.

Hulka D nim. **tõkestatud hulgaks**, kui ta sisaldub mingis keras, s.t.
 $\exists \mathbf{A} \in \mathbb{R}^m, R > 0: D \subset U_R(\mathbf{A})$. Kui hulk pole tõkestatud, siis nim.
seda **tõkestamata hulgaks**.

Lause

Iga lahtine kera $U_r(\mathbf{A})$ on lahtine hulk.

Piirkonnaks nim. lahtist hulka koos mingi osaga tema rajast.

Iga lahtine hulk on piirkond (lahtine piirkond).

Piirkonda koos oma rajaga nim. kinniseks piirkonnaks.

Risttahukad

Olgu $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ ja $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$.

Lahtine risttahukas keskpunktiga $\mathbf{A}$ on

$$K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| < \varepsilon_k \quad (k = 1, \dots, m)\}$$

ja kinnine risttahukas keskpunktiga $\mathbf{A}$ on

$$\overline{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| \leq \varepsilon_k \quad (k = 1, \dots, m)\}.$$

Lause

- (a) Iga risttahuka $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(\mathbf{A})$ korral leidub kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$, mis sisaldub selles risttahukas, s.t. $U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(\mathbf{A})$
- (b) Iga kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ korral leidub selline risttahukas $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(\mathbf{A})$, mis sisaldub selles kera, s.t. $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(\mathbf{A}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$.

Mitme muutuja funktsioonid

Def. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Kui igale elemendile $\mathbf{X} \in D$ on teatava eeskirja järgi seatud vastavusse (üheselt määratud) reaalarv

$$w =: f(\mathbf{X}) =: f(x_1, \dots, x_m),$$

siis öeldakse, et hulgas D on määratud **m muutuja funktsioon f** .

Hulka D nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**, muutujaid $x_1, \dots, x_m$ tema **argumentideks**. Funktsiooni f **muutumispiirkond** on kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, **väärtuste hulk** on $f(D) = \{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$.

Mitme muutuja funktsioonid

Def. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Kui igale elemendile $\mathbf{X} \in D$ on teatava eeskirja järgi seatud vastavusse (üheselt määratud) reaalarv

$$w =: f(\mathbf{X}) =: f(x_1, \dots, x_m),$$

siis öeldakse, et hulgas D on määratud m muutuja funktsioon f .

Hulka D nimetatakse funktsiooni f määramispiirkonnaks, muutujaid $x_1, \dots, x_m$ tema argumentideks. Funktsiooni f muutumispiirkond on kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, väärtuste hulk on $f(D) = \{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$.

Näide. $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Näide. $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$.

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Arvu b nimetatakse m muutuja funktsiooni f piirväärtuseks punktis $\mathbf{A}$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \ \& \ 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon.$$

Tähistame $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$.

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Arvu b nimetatakse m muutuja funktsiooni f piirväärtuseks punktis $\mathbf{A}$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \ \& \ 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon.$$

Tähistame $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$.

Ümbruste keeles: $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$ parajasti siis, kui

$$\forall U_\varepsilon(b) \exists U_\delta(\mathbf{A}) : f\left(D \cap U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}\right) \subset U_\varepsilon(b).$$

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Arvu b nimetatakse m muutuja funktsiooni f piirväärtuseks punktis $\mathbf{A}$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \ \& \ 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon.$$

Tähistame $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$.

Ümbruste keeles: $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$ parajasti siis, kui

$$\forall U_\varepsilon(b) \exists U_\delta(\mathbf{A}) : f\left(D \cap U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}\right) \subset U_\varepsilon(b).$$

Näide. Tõestada piirväärtuse definitsioonist lähtudes, et

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow (1,2)} x^2 + 3y = 7.$$

Lõpmatud piirväärtused.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Öeldakse, et $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = \infty$, kui

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \text{ \& } 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{X}) > M.$$

Analoogiliselt $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = -\infty$.

Lõpmatud piirväärtused.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Öeldakse, et $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = \infty$, kui

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \text{ \& } 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{X}) > M.$$

Analoogiliselt $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = -\infty$.

Olgu funktsiooni $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ määramispiirkond D tõkestamata hulk.

Kirjutame $\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{X}) = b$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \mathbf{X} \in D \text{ \& } \|\mathbf{X}\| \geq K \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon.$$

Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu $\mathbf{A}$ m muutuja funktsiooni $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ määramispiirkonnas D selline punkt, mis samal ajal on hulga D kuhjumispunkt.

Def. Öeldakse, et f on pidev punktis $\mathbf{A} \in D$, kui

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}).$$

Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu $\mathbf{A}$ m muutuja funktsiooni $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ määramispiirkonnas D selline punkt, mis samal ajal on hulga D kuhjumispunkt.

Def. Öeldakse, et f on **pidev punktis** $\mathbf{A} \in D$, kui

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}).$$

$\varepsilon - \delta$ keeles:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \ \& \ \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| < \varepsilon$$

ümbruste keeles

$$\forall U_\varepsilon(b) \exists U_\delta(\mathbf{A}) : f(U_\delta(\mathbf{A}) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(\mathbf{A}))$$

Kui f on pidev hulga $Q \subset D$ igas punktis, siis öeldakse, et f on **pidev hulgas** Q .

Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu $\mathbf{A}$ m muutuja funktsiooni $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ määramispiirkonna D selline punkt, mis samal ajal on hulga D kuhjumispunkt.

Def. Öeldakse, et f on **pidev punktis** $\mathbf{A} \in D$, kui

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}).$$

$\varepsilon - \delta$ keeles:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X} \in D \ \& \ \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| < \varepsilon$$

ümbruste keeles

$$\forall U_\varepsilon(f(\mathbf{A})) \exists U_\delta(\mathbf{A}) : f(U_\delta(\mathbf{A}) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(\mathbf{A}))$$

Kui f on pidev hulga $Q \subset D$ igas punktis, siis öeldakse, et f on **pidev hulgas** Q .

Tehted. Kui f ja g on pidevad punktis $\mathbf{A} \in D$, siis ka funktsioonid $f + g$, fg ja $\frac{f}{g}$ on selles punktis pidevad (jagatise puhul tuleb lisaks eeldada, et $g(\mathbf{A}) \neq 0$).

Liitfunktsioon, tema pidevus.

Olgu $w = f(u_1, \dots, u_l)$ / muutuja funktsioon määramispiirkonnaga Q , kus argumendid $u_1, \dots, u_l$ on omakorda m muutuja funktsioonid:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m),$$

$$u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_m),$$

...

$$u_l = \varphi_l(x_1, \dots, x_m).$$

Eeldame, et funktsioonidel $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ on ühine määramispiirkond D ning iga $\mathbf{X} \in D$ korral $(\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_l(\mathbf{X})) \in Q$. Siis saab defineerida m muutuja funktsiooni $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$\begin{aligned} F(\mathbf{X}) &:= F(x_1, \dots, x_m) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_l(\mathbf{X})) \\ &= f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_l(x_1, \dots, x_m)). \end{aligned}$$

Funktsiooni F nimetame funktsioonide $f, \varphi_1, \dots, \varphi_l$ **kompositsiooniks** ehk **liitfunktsiooniks**.

$$F(\mathbf{X}) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_I(x_1, \dots, x_m)).$$

Lause

Kui funktsioonid $\varphi_1, \dots, \varphi_I$ on pidevad punktis $\mathbf{A} \in D$ ja funktsioon f on pidev punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_I(\mathbf{A}))$, siis kompositsioon F on pidev punktis $\mathbf{A}$.

$$F(\mathbf{X}) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_l(x_1, \dots, x_m)).$$

Lause

Kui funktsioonid $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ on pidevad punktis $\mathbf{A} \in D$ ja funktsioon f on pidev punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_l(\mathbf{A}))$, siis kompositsioon F on pidev punktis $\mathbf{A}$.

Funktsiooni ühtlane pidevus

Def. Hulgas $D \subset \mathbb{R}$ määratud funktsiooni nimetatakse **ühtlaselt pidevaks** hulgas D , kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbf{X}, \mathbf{X}' \in D \ \& \ \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')| < \varepsilon$$