

Pinna puutujatasand

Olgu pind $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad \mathbf{U} = (u, v) \in \Delta.$$

Def. Pinna Ω punkti $\mathbf{X}_0$, mis vastab piirkonna Δ punktile $\mathbf{U}_0$ nim. **pinna harilikuks punktiks**, kui kõik teist järku determinandid

$$A(\mathbf{U}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B(\mathbf{U}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix},$$
$$C(\mathbf{U}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ei ole korruga nullid. Kui $A(\mathbf{U}_0) = B(\mathbf{U}_0) = C(\mathbf{U}_0) = 0$, või mõni funktsioonidest φ, ψ, χ pole pidevalt diferentseeruv punktis $\mathbf{U}_0$, siis punkti $\mathbf{X}_0$ nim. **pinna iseäraseks punktiks**.

Kui tähistada $\vec{r}(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$, $(u, v) \in \Delta$, siis $\vec{r}_u(\mathbf{U}_0)$ ja $\vec{r}_v(\mathbf{U}_0)$ on pinna Ω puutujavektorid punktis $\mathbf{U}_0$ ning

$$\vec{n}(\mathbf{U}_0) = (A(\mathbf{U}_0), B(\mathbf{U}_0), C(\mathbf{U}_0)) = \vec{r}_u(\mathbf{U}_0) \times \vec{r}_v(\mathbf{U}_0).$$

Def. Parameetriliste võrranditega määratud pinda Ω nimetatakse **siledaks**, kui funktsioonid φ, ψ ning χ on hulgas Δ pidevalt diferentseeruvad ja pinnal ei ole iseäraseid punkte.

Olgu Ω sile pind ja olgu $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pinna harilik punkt. Pinna **puutujatasandi võrrand punktis $\mathbf{X}_0$** on

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0) = 0.$$

Siledal pinnal on igas tema punktis X olemas pidevalt muutuv puutujatasand, seega ka pidevalt muutuv normaal (s.o. puutujatasandiga risti olev sirge läbi punkti $\mathbf{X}$), mille sihi määrab ära vektor $\vec{n} = (A, B, C) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Def. Pinda, kus mistahes (pinna rajajoont mittelõikava) kinnise joone läbimisel normaali suund ei muutu, nimetame **kahe poolega pinnaks**, teisi pindu aga **ühe poolega pindadeks**.

Pinnatüki pindala

Olgu Ω parameetriliste võrranditega $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$ määratud kordsete punktideta sile tõkestatud pind. Jaotame piirkonna Δ tükiti siledade joontega n kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte. Tähistame alajaotuse $\tilde{T} = \tilde{T}[\Delta_1, \dots, \Delta_n]$. Olgu $\lambda(\tilde{T})$ osapiirkondade $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ suurim diameeter. Olgu piirkonnale Δ_i vastav punktihulk pinnal Ω_i , $i = 1, \dots, n$. Valime igas pinnaosas Ω_i punkti $\mathbf{X}_i$, moodustame pinnale Ω punktis $\mathbf{X}_i$ puutujatasandi, projekteerime pinnatüki Ω_i sellele tasandile ning tähistame projektsiooni tähega Ω'_i . Saab näidata, et kuna osapiirkonnad on $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ on mõõtuvad ning Ω on sile pind, siis on ka projektsioonid $\Omega'_1, \dots, \Omega'_n$ mõõtuvad.

Def. Pinnatüki Ω pindalaks nim. piirväärtust

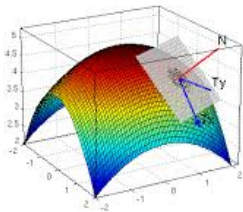
$$\mu(\Omega) := \lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\Omega'_i).$$

Lõpliku pindalaga pinnatükki nim. **mõõtuvaks**.

Lause (Pinnatüki pindala arvutamise)

Tehtud eeldustel kehtib valem

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv = \iint_{\Delta} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv.$$



$$\xi = \xi(u, v), \eta = \eta(u, v), \zeta = \zeta(u, v), \\ (u, v) \in \Delta_i$$

$$\mu(\Omega'_i) = \iint_{\Omega'_i} d\xi \, d\eta = \iint_{\Delta_i} |J(u, v)| \, du \, dv$$

Tähistame

$$E := \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2 = |\vec{r}_u|^2,$$

$$F := \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v,$$

$$G := \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2 = |\vec{r}_v|^2.$$

Siis kehtib

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

Järeldus

Pinna Ω pindala saab arvutada ka valemiga

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Järeldus

Kui pind Ω on antud ilmutatud kujul võrrandiga $z = \Phi(x, y)$, siis

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

Pindintegraalid: I liiki pindintegraal

Olgu Ω parameetriliste võrranditega $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$ määratud kordsete punktidega sile pind. Olgu vastavus Ω ja Δ vahel bijektiivne. Jaotame piirkonna Δ tükiti siledate joontega n kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte. Tähistame alajaotuse $\tilde{T}$, olgu $\lambda(\tilde{T})$ osapiirkondade $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ suurim diameeter. Olgu $w = f(x, y, z)$ pinnal Ω määratud kolme muutuja funktsioon. Valime igas pinnatükis Ω_i suvaliselt punkti $\mathbf{X}_i$ ($i = 1, \dots, n$) ja moodustame integraalsumma
$$\sigma(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i) \mu(\Omega_i),$$
 kus $\mu(\Omega_i)$ on pinnatüki Ω_i pindala.

Def. Kui leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sigma(\tilde{T}) = \iint_{\Omega} f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} f d\mu,$$

siis seda nim. funktsiooni f esimest liiki pindintegraaliks e. pindintegraaliks pindala järgi üle pinna Ω .

Lause (I liiki pindintegraali arvutamine)

Olgu funktsioon $w = f(x, y, z)$ pidev siledal kordsete punktidega pinnal Ω , mis on määratud parameetriliste võrranditega. Sel juhul esimest liiki pindintegraal $\iint_{\Omega} f(x, y, z) dS$ eksisteerib ning

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x, y, z) dS &= \\&= \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \\&= \iint_{\Delta} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv.\end{aligned}$$

II liiki pindintegraal

Pinnatüki projektsiooni pindala märk. Olgu siledal pinnal määratud pinna positiivne pool. Olgu $\Omega_i \subset \Omega$ selline, et tema normaal kogu pinnatüki Ω_i ulatuses moodustab z -teljega kas tervanurga või nürinurga. Projekteerime Ω_i xy -tasandile ja tähistame projektsiooni Ω'_i . Loeme projektsiooni Ω'_i pindala S'_i positiivseks, kui pinnatüki Ω_i normaal moodustab tema igas punktis z -teljega teravnurga, ja negatiivseks, kui see nurk on nürinurk:

$$S'_i = \begin{cases} \mu(\Omega'_i), & \text{kui } \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ -\mu(\Omega'_i), & \text{kui } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi. \end{cases}$$

Esimesel juhul $C > 0$, teisel juhul $C < 0$. Siis

$$S'_i = \iint_{\Delta_i} C \, du \, dv.$$

Selle valemiga defineerime projektsiooni Ω'_i pindala ka siis, kui pinnatüki Ω_i normaal moodustab oma ühes osas z -teljega teravnurga ja mingis teises osas nürinurga.

Analoogiliselt tähistame pinnatüki Ω_i projektsiooni Ω_i'' ja Ω_i''' vastavalt yz - ja zx -tasandil, ning defineerime nende pindalad vastavalt valemitega

$$S_i'' = \iint_{\Delta_i} A \, du \, dv \quad \text{ning} \quad S_i''' = \iint_{\Delta_i} B \, du \, dv.$$

Tähistame

$$\sigma_1(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) S_i', \quad \sigma_2(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) S_i'', \quad \sigma_3(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) S_i''.$$

Def. Piirväärtusi

$$\lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sigma_1(\tilde{T}) = \iint_{\Omega} f \, dx \, dy, \quad \lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sigma_2(\tilde{T}) = \iint_{\Omega} f \, dy \, dz,$$

$$\lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sigma_3(\tilde{T}) = \iint_{\Omega} f \, dz \, dx$$

nim. funktsiooni f **teist liiki pindintegraalideks** e. **pindintegraalideks projektsioonide järgi** üle pinna Ω .

Lause (II liiki pindintegraali arvutamine)

Olgu Ω sile pind ja olgu kolme muutuja funktsioon $w = f(x, y, z)$ pidev pinnal Ω . Siis eksisteerivad kõik teist liiki pindintegraalid ning kehtivad valemid

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} \Phi(u, v) \, C \, du \, dv,$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) \, dy \, dz = \iint_{\Delta} \Phi(u, v) \, A \, du \, dv,$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) \, dz \, dx = \iint_{\Delta} \Phi(u, v) \, B \, du \, dv,$$

kus $\Phi(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$.

Märkus. 1. Nii esimest kui ka teist liiki pindintegraalidel on aditiivsed ja lineaarsed.

2. Esimest liiki pindintegraal ei sõltu pinna positiivse poole valikust; teist liiki pindintegraal muudab märki pinna poole muutmisel.

3. Esimest liiki pindintegraal on monotoonne ning tema jaoks kehtivad sändvitšiteoreem ja keskväärtusteoreem. Teist liiki pindintegraalil pole neid omadusi.

Tavaliselt vaadeldakse teist liiki pindintegraali kolme integraali summa kujul:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} F \, dx \, dy + G \, dy \, dz + H \, dz \, dx \\ = \iint_{\Omega} F \, dx \, dy + \iint_{\Omega} G \, dy \, dz + \iint_{\Omega} H \, dz \, dx, \end{aligned}$$

seejuures eeldame, et F , G ja H on pinnal Ω pidevad funktsioonid.

Väljateooria elemente

Olgu Ω tükiti sile mõõtuva ruumilise keha E rajapind ning olgu $\vec{n}$ selle pinna välisnormaal pikkusega 1. Vektorvälja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ **voog** W_Ω läbi pinna Ω (kehast E välja) on

$$W_\Omega = \iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Omega} F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy.$$

Def. Voo suhet ruumalasse $\frac{W_\Omega}{V_E}$, kus V_E on keha E ruumala, nimetatakse kehas E sisalduvate allikate **keskmiseks erivõimsuseks**. Piirväärtust $\lim_{E \rightarrow \mathbf{M}} \frac{W_\Omega}{V_E}$, kus $E \rightarrow \mathbf{M}$ tähendab

$\sup\{\|\mathbf{Q} - \mathbf{M}\| : \mathbf{Q}, \mathbf{M} \in E, E \text{ on mõõtuva}\} \rightarrow 0$, nim. vektorvälja $\vec{F}$ **divergentsiks** punktis $\mathbf{M}$ ning tähistatakse $\operatorname{div} \vec{F}(\mathbf{M})$.

Lause

Kui $\vec{F}$ on pidevalt diferentseeruv punkti $\mathbf{M}$ mingis ümbruses, siis

$$\operatorname{div} \vec{F}(\mathbf{M}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{M}) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{M}) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\mathbf{M}).$$

Olgu antud lihtne kinnine joon Γ ning selle defineeritud vektorväli $\vec{F}$.

Def. Vektorvälja $\vec{F}$ tsirkulatsiooniks piki kontuuri Γ nim. I liiki joon-integraali $\int_{\Gamma} F_{\ell} ds$, kus F_{ℓ} on vektori $\vec{F}$ tangentsiaalne komponent.

Vaatleme kõikvõimalikke mõõtuvaid tükiti sileda rajajoonega Γ tasandilisi pindu D nii, et $\mathbf{M} \in D$ ning pinna normaal punktis $\mathbf{M}$ on $\vec{n}$. Olgu C_{Γ} vektorvälja $\vec{F}$ tsirkulatsioon piki D rajajoont Γ .

Def. Vektorvälja $\vec{F}$ rootoriks (curl) punktis $\mathbf{M}$ nimetatakse vektorit $\text{rot } \vec{F}$, mille projektsioon kontuuri Γ poolt piiratud pinna (fikseeritud) positiivsele normaale $\vec{n}$ on

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \lim_{D \rightarrow \mathbf{M}} \frac{C_{\Gamma}}{\mu(D)}.$$

Valides pinnad D järjest kõigi koordinaattasandite rihis, saame rootori koordinaadid. Stokesi valemist järeldeb, et

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Kui punktis $\mathbf{M}$ asuks väike kõva kerake, siis $\text{rot } \vec{F}(\mathbf{M})$ iseloomustab kerakese pöörlemist kui talle mõjub jõuväli $\vec{F}$. Rootori siht määrab pöörlemistelje ning suund on määratud kruvireeglga.