

Fourier' read

Idee: esitada funktsioon kujul $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, ku φ_k on
“lihtsamad” funktsioonid.

Def. Rida kujul $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, kus a_k, b_k on

konstandid, nim. **trigonomeetriliseks reaks**, tema osasummasid aga **trigonomeetrilisteks polünoomideks**.

Fourier' read

Idee: esitada funktsioon kujul $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, ku φ_k on “lihtsamad” funktsioonid.

Def. Rida kujul $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, kus a_k, b_k on

konstandid, nim. **trigonomeetriliseks reaks**, tema osasummasid aga **trigonomeetrilisteks polünoomideks**.

Olgu f lõigus $[-\pi, \pi]$ määratud integreeruv funktsioon.

Def. Trigonomeetrilist rida, kus

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

nim. funktsiooni f **Fourier reaks lõigus $[-\pi, \pi]$** , kirjutatakse

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Kas see rida koondub? Kas rea summa on $f(x)$?

Lause

Kui trigonomeetriline rida koondub lõigus $[-\pi, \pi]$, siis koondub ta igas punktis $x \in (-\infty, \infty)$ ning tema summa on 2π -perioodiline funktsioon.

Kas see rida koondub? Kas rea summa on $f(x)$?

Lause

Kui trigonomeetriline rida koondub lõigus $[-\pi, \pi]$, siis koondub ta igas punktis $x \in (-\infty, \infty)$ ning tema summa on 2π -perioodiline funktsioon.

Lause

Kui ψ on 2π -perioodiline lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruv funktsioon, siis suvalise arvu a korral kehtib võrdus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \, dx = \int_a^{a+2\pi} \psi(x) \, dx.$$

Teoreem (Riemann-Lebesgue'i lemma)

Kui funktsioon f on tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel, siis

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Teoreem (Riemann-Lebesgue'i lemma)

Kui funktsioon f on tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel, siis

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Tõestus. Näitame ainult esimese integraali jaoks. Olgu $\varepsilon > 0$ antud.

Valime $R > 0$ nii, et $\left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Siis $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \leq \left| \int_{-R}^R f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4}$.

Teoreem (Riemann-Lebesgue'i lemma)

Kui funktsioon f on tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel, siis

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Tõestus. Näitame ainult esimese integraali jaoks. Olgu $\varepsilon > 0$ antud.

Valime $R > 0$ nii, et $\left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Siis $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \leq \left| \int_{-R}^R f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4}$.

Olgu $a_1, \dots, a_n$ funktsiooni f katkevuspunktid vahemikus $(-R, R)$, olgu $a_0 = -R$ ja $a_{n+1} = R$. Siis f on ühtlaselt pidev lõikudes $[a_j, a_{j+1}]$.

$\exists \delta > 0$: $x_1, x_2 \in [a_j, a_{j+1}]$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{8R}$.

Valime $a_j = b_{j,0} < b_{j,1} < \dots < b_{j,m_j} = a_{j+1}$: $b_{j,k+1} - b_{j,k} < \delta$,
 $k = 0, \dots, m_j - 1$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| &\leq \left| \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\
&\leq \left| \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} f(b_{j,k}) \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} \cos \lambda x \, dx \right| + \\
&\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} |f(x) - f(b_{j,k})| |\cos \lambda x| \, dx + \frac{\varepsilon}{4} < \\
&< \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} |f(b_{j,k})| \left| \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \right|_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} + \frac{\varepsilon}{8R} \cdot 2R + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\
&\leq N \max_{j=0, \dots, n, k=0, \dots, m_j-1} |f(b_{j,k})| \frac{2}{|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kui $|\lambda| > N \max_{x \in [-R, R]} |f(x)| 4/\varepsilon$ (siin N on punktide $b_{j,k}$ arv).

Järeldus

Kui funktsioon f on lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev, siis tema Fourier' kordajad rahuldavad tingimusi

$$\lim_k a_k = \lim_k b_k = 0.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dirichlet' integraal

Olgu f tükiti pidev lõigul $[-\pi, \pi]$ ning olgu s_n funktsiooni f Fourier' rea osasumma:

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Lause (Dirichlet' integraal)

Funktsiooni f osasumma avaldub integraalina

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) D_n(u) du,$$

kus

$$D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

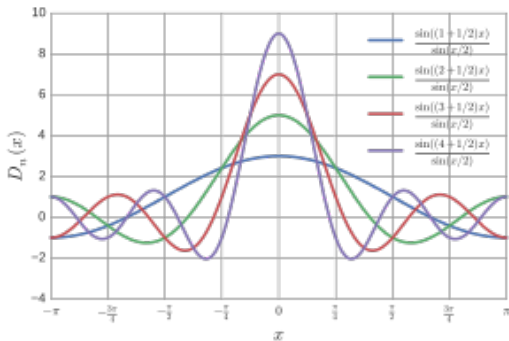
Def. Funktsiooni $D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$ nim. Dirichlet' tuumaks.

Omadusi:

1) $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(u) du = 1;$

2) $\lim_{u \rightarrow 0} D_n(u) = n + \frac{1}{2};$

3) D_n on 2π -perioodiline.



Fourier' rea koonduvus

Teoreem (Fourier' rea koonduvus)

Olgu f lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev 2π -perioodiline funktsioon. Kui punktis $x \in (-\infty, \infty)$ on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \text{ ja } f'_-(x) = \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x summaks
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Fourier' rea koonduvus

Teoreem (Fourier' rea koonduvus)

Olgu f lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev 2π -perioodiline funktsioon. Kui punktis $x \in (-\infty, \infty)$ on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \text{ ja } f'_-(x) = \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x summaks
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Järeldus

Olgu 2π -perioodiline funktsioon f lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev. Kui ta on punktis x pidev ja tal on selles punktis lõplikud ühepoolsed tuletised, siis tema Fourier' rida koondub selles punktis summaks $f(x)$.

Funktsioonide arendamine Fourier' reaks

1. Kui f on paarisfunktsioon, s.t. $f(-x) = f(x)$, siis $b_k = 0$ iga $k = 1, 2, \dots$ korral ja $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$.

Kui f on paaritu funktsioon, siis $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

2. Kui f pole perioodiline, siis defineerime $g(x) := f(x)$ iga $x \in (-\pi, \pi]$ korral, ning $g(x + 2\pi) = g(x)$ iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral. Siis f ja g Fourier' read on samad ning Fourier' rea koonduvusteoreemi saame kasutada g jaoks.
3. Olgu f määratud lõigus $[0, \pi]$. Kui defineerime $f(x) = f(-x)$, kui $x \in [-\pi, 0)$, siis saame lõigus $[-\pi, \pi]$ paarisfunktsiooni, mille Fourier' rida koosneb vaid koosinusliikmetest. Kui defineerime $f(x) := -f(-x)$ ($x \in [-\pi, 0)$), siis saame lõigus $[-\pi, \pi]$ paaritu funktsiooni, mille Fourier' rida sisaldab vaid siinusliikmeid. Neid ridu nim. vastavalt funktsiooni f **koosinus-** ja **siinusreaks**.

4. Olgu funktsioon f määratud mingis lõigus $[-l, l]$, kus $l > 0$.
Tähistame $t := \frac{\pi x}{l}$ ja $F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$. Arendame F Fourier' ritta ning läheme tagasi esialgsele muutujale x , saame

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{\pi}{l} x + b_k \sin k \frac{\pi}{l} x,$$

$$\text{kus } a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos k \frac{\pi}{l} x \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ ja}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin k \frac{\pi}{l} x \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Fejéri teoreem

Saab näidata, et iga punkti $x \in [-\pi, \pi]$ puhul saab leida sellise pideva 2π -perioodilise funktsiooni f , mille Fourier' rida selles punktis hajub.

Fejéri teoreem

Saab näidata, et iga punkti $x \in [-\pi, \pi]$ puhul saab leida sellise pideva 2π -perioodilise funktsiooni f , mille Fourier' rida selles punktis hajub.

Teoreem (Fejér)

Iga pideva 2π -perioodilise funktsiooni f Fourier' rea osasummade

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

aritmeetiliste keskmiste

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} (s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

jada (σ_n) koondub piirväärtuseks f ühtlaselt kogu arvteljel $(-\infty, \infty)$.

Lause (Fejéri tuum)

Funktsiooni f osasummade aritmeetilised keskmised avalduvad integraalina

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) F_n(u) du,$$

kus

$$F_n(u) = \frac{1}{2n} \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2.$$

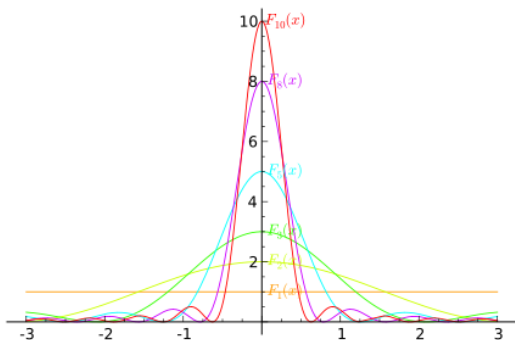
Def. Funktsiooni $F_n(u) = \frac{1}{2n} \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2$ nim. Fejéri tuumaks.

Omadusi:

1) $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(u) du = 1;$

2) $\lim_{u \rightarrow 0} F_n(u) = \frac{n}{2};$

3) F_n on 2π -perioodiline.



Teoreem (Weierstrassi teine lähendusteoreem)

Kui lõigus $[-\pi, \pi]$ pidev funktsioon f on omadusega $f(-\pi) = f(\pi)$, siis iga positiivse arvu ε korral leidub selline trigonomeetrilise polünoomi T , et

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \text{ iga } x \in [-\pi, \pi] \text{ puhul.}$$

Fourier' rea komplekskuju

Def. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Olgu f lõigus $[-\pi, \pi]$ määratud tükiti pidev funktsioon, mis võib olla nii reaals- kui ka kompleksväärtustega.

Def. Rida $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, kus

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

nim. funktsiooni f **Fourier reaks komplekskujul lõigus $[-\pi, \pi]$** , kirjutatakse

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k \geq 0$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx + i \sin kx) dx = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \geq 0.$$