

**Ühe muutuja juht.** Olgu  $F$  punktis  $a$   $n$  korda diferentseeruv. Siis

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)h^n + \alpha_n,$$

kus  $\alpha_n = o(h^n)$  protsessis  $h \rightarrow 0$  (jääkliikme Peano kuju).

Kui  $F$  on  $n+1$  korda diferentseeruv punkti  $a$  mingis ümbruses, siis

$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$  mingi  $\theta \in (0,1)$  korral (jääkliikme Lagrange'i kuju).

**Ühe muutuja juht.** Olgu  $F$  punktis  $a$   $n$  korda diferentseeruv. Siis

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)h^n + \alpha_n,$$

kus  $\alpha_n = o(h^n)$  protsessis  $h \rightarrow 0$  (jääkliikme Peano kuju).

Kui  $F$  on  $n+1$  korda diferentseeruv punkti  $a$  mingis ümbruses, siis

$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$  mingi  $\theta \in (0,1)$  korral (jääkliikme Lagrange'i kuju).

Sama valem diferentsiaalide abil kirjutanduna:

$$F(a+h) = F(a) + d_a F(h) + \cdots + \frac{1}{n!}d_a^n F(h) + \alpha_n,$$

kus  $\alpha_n = o(h^n)$  protsessis  $h \rightarrow 0$  (Peano kuju);

$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}d_{a+\theta h}^{n+1}F(h)$  mingi  $\theta \in (0,1)$  korral (Lagrange'i kuju).

Olgu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ning olgu  $\mathbf{A}$  hulga  $D$  sisepunkt.

### Teoreem (Taylori valem, jääkliige Lagrange'i kujul)

*Olgu  $f$  punkti  $\mathbf{A}$  mingis ümbruses  $n + 1$  korda diferentseeruv. Siis*

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{n!}d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h}) + \frac{1}{(n+1)!}d_{\mathbf{A}+\theta\mathbf{h}}^{n+1}f(\mathbf{h})$$

*mingi  $\theta \in (0, 1)$  korral.*

Juhul  $n = 0$  saame siit Lagrange'i valemi (keskväärtusteoreemi).

Olgu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ning olgu  $\mathbf{A}$  hulga  $D$  sisepunkt.

## Teoreem (Taylori valem, jääkliige Peano kujul)

*Olgu  $f$  punktis  $\mathbf{A}$   $n$  korda diferentseeruv. Siis*

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{n!}d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h}) + \alpha_n(\mathbf{h}),$$

*kus  $\alpha_n(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^n)$  protsessis  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .*

Olgu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ning olgu  $\mathbf{A}$  hulga  $D$  sisepunkt.

## Teoreem (Taylori valem, jääkliige Peano kujul)

Olgu  $f$  punktis  $\mathbf{A}$   $n$  korda diferentseeruv. Siis

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{n!}d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h}) + \alpha_n(\mathbf{h}),$$

kus  $\alpha_n(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^n)$  protsessis  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

**Tõestuse skeem:** 1) Juht  $n = 1$  on  $f$  dif-vuse def.

2) Kehtigu teoreem juhul  $n = k$ , olgu  $n = k + 1$ . Tähistame

$$g(\mathbf{h}) = f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{A}) - d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) - \cdots - \frac{1}{n!}d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h}).$$

3)  $g(\mathbf{0}) = 0$ ,  $g$  on dif.-v punkti  $\mathbf{0}$  mingis ümbruses. Lagrange'i keskväärtusteoreemist  $g(\mathbf{h}) - g(\mathbf{0}) = d_{\xi}g(\mathbf{h})$ , kus  $\xi \in (\mathbf{0}, \mathbf{h})$ .

$$\begin{aligned} 4) \quad d_{\xi}g(\mathbf{l}) &= d_{\mathbf{A}+\xi}f(\mathbf{l}) - d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{l}) - d_{\mathbf{A}}(d_{(\cdot)}f(\mathbf{l}))(\xi) - \\ &\quad \cdots - \frac{1}{(n-1)!}d_{\mathbf{A}}^{n-1}(d_{(\cdot)}f(\mathbf{l}))(\xi). \end{aligned}$$

5) Paremal pool on funktsiooni  $\mathbf{X} \mapsto d_{\mathbf{X}}f(\mathbf{l})$   $(n-1)$  järku jääkliige, seega  $d_{\xi}g(\mathbf{l}) = o(\|\xi\|^{n-1})$

# Konstantsuse kriteerium

## Lemma

*Sidusat hulka  $D \subset \mathbb{R}^m$  ei saa esitada kahe mittetühja lõikumatu lahtise hulga (ruumi  $D$  topoloogias) ühendina.*

## Lemma

*Mittetühja lahtise sidusa hulga  $D$  iga kahte punkti saab ühendada hulka  $D$  kuuluva murdjoonega.*

## Lause (Konstantsuse kriteerium)

*Olgu  $f$  diferentseeruv lahtises sidusas hulgas  $D$ . Funktsioon  $f$  on konstantne parajasti siis, kui tema kõik esimest järku osatuletised on nullid hulgas  $D$ .*

# Ühe muutuja ilmutamata funktsioon

Üldine  $xy$ -tasandil asuva joone võrrand:  $F(x, y) = 0$ .

Näide.  $ax + by + c = 0$

Näide.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$

Näide.  $x^2 - y^2 = 1$ .

Kas ja millal saab võrrandiga määratud joont esitada kujul  $y = f(x)$ ?

# Ühe muutuja ilmutamata funktsioon

Üldine  $xy$ -tasandil asuva joone võrrand:  $F(x, y) = 0$ .

Näide.  $ax + by + c = 0$

Näide.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$

Näide.  $x^2 - y^2 = 1$ .

Kas ja millal saab võrrandiga määratud joont esitada kujul  $y = f(x)$ ?

Olgu  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Olgu  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X = \{x \mid \exists y : (x, y) \in D\}$ .

**Def.** Kui iga  $x \in X$  korral leidub täpselt üks  $y \in \mathbb{R}$  nii, et  $(x, y) \in D$  ja  $F(x, y) = 0$ , siis öeldakse, et võrrand  $F(x, y) = 0$  määrab piirkonnas  $D$  ilmutamata kujul funktsiooni  $y = f(x)$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Näide.  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $D_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  
 $D_2 = [-1, 1] \times [0, 1]$ .

## Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)

Olgu kahe muutuja funktsioon  $F$  ja tema osatuletis  $\frac{\partial F}{\partial y}$  pidevad punkti  $\mathbf{A} = (a, b)$  mingis ümbruses  $U_\theta(\mathbf{A})$ . Olgu  $F(\mathbf{A}) = 0$  ning  $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) \neq 0$ . Siis leiduvad  $\delta, \sigma > 0$  nii, et võrrand  $F(x, y) = 0$  määrab ristkülikus  $K_{\delta, \sigma}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$  ilmutamata funktsiooni  $y = f(x)$ , mis on pidev vahemikus  $(x - \delta, x + \delta)$ .

Kui lisaks on funktsioonil  $F$  punkti  $(\mathbf{A})$  ümbruses  $U_\theta(\mathbf{A})$  ka pidev osatuletis  $\frac{\partial F}{\partial x}$ , siis on funktsioon  $f$  vahemikus  $(a - \delta, a + \delta)$  pidevalt diferentseeruv ning

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Märkus. Teoreemis võib vahetada  $x$  ja  $y$  rolli.

# Joone puutuja ja iseärsed punktid

**Def.** Võrrandiga  $y = f(x)$  määratud joont nim. **siledaks**, kui funktsioon  $f$  on pidevalt diferentseeruv.

Joone  $y = f(x)$  puutuja punktis  $(a, b)$  on

$$y - b = f'(a)(x - a).$$

Üldisemalt, joont nim. **siledaks**, kui tal on igas punktis olemas pidevalt muutuv puutuja.

Olgu võrrandi  $F(x, y) = 0$  ja punkti  $\mathbf{A} = (a, b)$  jaoks täidetud eelmise teoreemi eeldused (leiduvad  $F_x(\mathbf{A})$  ja  $F_y(\mathbf{A})$ , mis pole korraga nullid). Siis selles punktis joonele tõmmatud puutuja võrrand on

$$F_x(\mathbf{A})(x - a) + F_y(\mathbf{A})(y - b) = 0.$$