

Ühe muutuja ilmutamata funktsioon

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)

Olgu kahe muutuja funktsioon F ja tema osatuletis $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad punkti $\mathbf{A} = (a, b)$ mingis ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$. Olgu $F(\mathbf{A}) = 0$ ning $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) \neq 0$. Siis leiduvad $\delta, \sigma > 0$ nii, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab ristkülikus $K_{\delta, \sigma}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$ ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$, mis on pidev vahemikus $(x - \delta, x + \delta)$. Kui lisaks on funktsioonil F punkti $(\mathbf{A})$ ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$ ka pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial x}$, siis on funktsioon f vahemikus $(a - \delta, a + \delta)$ pidevalt diferentseeruv ning

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Märkus. Teoreemis võib vahetada x ja y rolli.

Joone puutuja ja iseärsed punktid

Def. Võrrandiga $y = f(x)$ määratud joont nim. **siledaks**, kui funktsioon f on pidevalt diferentseeruv.

Joone $y = f(x)$ puutuja punktis (a, b) on

$$y - b = f'(a)(x - a).$$

Üldisemalt, joont nim. **siledaks**, kui tal on igas punktis olemas pidevalt muutuv puutuja.

Olgu võrrandi $F(x, y) = 0$ ja punkti $\mathbf{A} = (a, b)$ jaoks täidetud eelmise teoreemi eeldused (leiduvad $F_x(\mathbf{A})$ ja $F_y(\mathbf{A})$, mis pole korraga nullid). Siis selles punktis joonele tõmmatud puutuja võrrand on

$$F_x(\mathbf{A})(x - a) + F_y(\mathbf{A})(y - b) = 0.$$

Def. Võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud joone punkte, kus tuletised $F_x(x, y)$ ja $F_y(x, y)$ leiduvad ning pole korraga nullid, nim. selle joone **harilikeks punktideks**. Neid punkte, kus $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$, või mõnda tuletist ei leidu, nim. joone **iseärasteks punktideks**.

Joonel on igas harilikus punktis olemas puutuja.

Näiteid iseärastest punktidest, kus $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$.

1. Sisuliselt harilik punkt: $y^3 - x^3 = 0$.
2. Tagasipöördepunkt: $y^3 - x^2 = 0$
3. Sõlmpunkt: $y^2 - x^2 = 0$.
4. Isoleeritud punkt: $x^2 + y^2 = 0$.

Olgu joon määratud parameetriliselt

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Siis joone puutuja sihiline vektor punktis $(a, b) = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$ on $(\varphi'_1(t_0), \varphi'_2(t_0))$, kui mõlemad tuletised pole korraka nullid.

Puutuja võrrand on

$$\frac{x - a}{\varphi'_1(t_0)} = \frac{y - b}{\varphi'_2(t_0)} \quad \text{ehk} \quad \varphi'_2(t_0)(x - a) = \varphi'_1(t_0)(y - b).$$

Def. Parameetriliselt määratud joone punkte, kus tuletised $\varphi'_1(t)$ ja $\varphi'_2(t)$ leiduvad ning pole korraka nullid, nim. selle joone **harilikeks punktideks**. Neid punkte, kus $\varphi'_1(t) = \varphi'_2(t) = 0$, või mõnda tuletist ei leidu, nim. joone **iseärasteks punktideks**.

Joonel on igas harilikus punktis olemas puutuja.

Näiteid iseärástest punktidest, kus $\varphi_1'(t) = \varphi_2'(t) = 0$.

1. Sisuliselt harilik punkt:

$$\begin{cases} x = \cos t^3, \\ y = \sin t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Nurk:

$$\begin{cases} x = t|t|, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Tagasipöördepunkt:

$$\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = \sin t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid

Olgu $D \subset \mathbb{R}^3$. Olgu $F: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Olgu $K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A}) \subset D$, kus $\mathbf{A} = (a, b, c)$. Olgu $\mathbf{A}' = (a, b)$.

Def. Kui iga $(x, y) \in K_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{A}')$ korral leidub täpselt üks $z \in (c - \delta_3, c + \delta_3)$ nii, et $F(x, y, z) = 0$, siis öeldakse, et võrrand $F(x, y, z) = 0$ määrab risttahukas $K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A})$ ilmutamata kujul funktsiooni $z = f(x, y)$, $f: K_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{A}') \rightarrow \mathbb{R}$.

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)

Olgu kolme muutuja funktsioon F ja tema osatuletis $\frac{\partial F}{\partial z}$ pidevad punkti $\mathbf{A} = (a, b, c)$ mingis ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$. Olgu $F(\mathbf{A}) = 0$ ning $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{A}) \neq 0$. Siis leiduvad $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ nii, et võrrand $F(x, y, z) = 0$ määrab risttahukas $K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$ ilmutamata funktsiooni $z = f(x, y)$, mis on pidev ristkülikus $K_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{A}')$.

Kui lisaks on funktsioonil F punkti $(\mathbf{A})$ ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$ ka pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial x}$, siis on funktsioonil f ristkülikus $K_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}.$$

Ka siin võib muutujaid omavahel vahetada.

Pinna puutujatasand ja iseärased punktid

Def. Pinda nim. **siledaks**, kui tal on igas punktis olemas pidevalt muutuv puutujatasand.

Olgu võrrandi $F(x, y, z) = 0$ ja punkti $\mathbf{A} = (a, b, c)$ jaoks täidetud eelmise teoreemi eeldused (leiduvad $F_x(\mathbf{A})$, $F_y(\mathbf{A})$ ja $F_z(\mathbf{A})$, mis pole korraga nullid). Siis selles punktis pinna puutujatasandi võrrand on

$$F_x(\mathbf{A})(x - a) + F_y(\mathbf{A})(y - b) + F_z(\mathbf{A})(z - c) = 0.$$

Def. Võrrandiga $F(x, y, z) = 0$ määratud pinna punkte, kus tuletised $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ ja $F_z(x, y, z)$ leiduvad ning pole korraga nullid, nim. selle pinna **harilikeks punktideks**. Neid punkte, kus $F_x(x, y, z) = F_y(x, y, z) = F_z(x, y, z) = 0$, või mõnda tuletist ei leidu, nim. pinna **iseäraseks punktideks**.

Pinnal on igas harilikus punktis olemas puutujatasand.

Võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Ruumilise kõvera saab üldjuhul esitada kahe pinna lõikejoonena:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Rahuldagu punkt $\mathbf{A} = (a, b, c)$ seda süsteemi. Olgu $\mathbf{B} = (b, c)$.

Def. Kui iga $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$ korral leidub täpselt üks süsteemi lahend $(y, z) \in K_{\delta_2, \delta_3}(\mathbf{B})$, siis öeldakse, et võrrandisüsteem määrab risttahukas $K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A})$ ilmutamata kujul funktsioonid $y = f(x)$ ja $z = g(x)$, $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$.

Võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Ruumilise kõvera saab üldjuhul esitada kahe pinna lõikejoonena:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Rahuldagu punkt $\mathbf{A} = (a, b, c)$ seda süsteemi. Olgu $\mathbf{B} = (b, c)$.

Def. Kui iga $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$ korral leidub täpselt üks süsteemi lahend $(y, z) \in K_{\delta_2, \delta_3}(\mathbf{B})$, siis öeldakse, et võrrandisüsteem määrab risttahukas $K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A})$ ilmutamata kujul funktsioonid $y = f(x)$ ja $z = g(x)$, $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$.

Tähistame

$$J(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} F_y(\mathbf{A}) & F_z(\mathbf{A}) \\ G_y(\mathbf{A}) & G_z(\mathbf{A}) \end{vmatrix}.$$

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)

Olgu kolme muutuja funktsioonid F , G ja nende osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$ pidevad punkti $\mathbf{A} = (a, b, c)$ mingis ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$. Olgu $F(\mathbf{A}) = 0$, $G(\mathbf{A}) = 0$ ning $J(\mathbf{A}) \neq 0$. Siis leiduvad $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ nii, et võrrandisüsteem määrab risttahukas $K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$ pidevad ilmutamata funktsioonid $y = f(x)$ ja $z = g(x)$. Kui lisaks on funktsioonidel F ja G punkti $\mathbf{A}$ ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$ ka pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$, siis on funktsioonid f ja g diferentseeruvad vahemikus $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ ning

$$f'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{X}) \frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X}) - \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X}) \frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})},$$

$$g'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X}) \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{X}) - \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{X}) \frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})},$$

kus $\mathbf{X} = (x, f(x), g(x)) \in K_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A})$.

Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Rahuldagu punkt $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ seda süsteemi. Olgu $\mathbf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ning $\mathbf{A}' = (a_1, \dots, a_m)$.

Def. Kui iga $x \in K_{\delta_1, \dots, \delta_m}(\mathbf{A}')$ korral leidub täpselt üks süsteemi lahend $(y_1, \dots, y_n) \in K_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\mathbf{B})$, siis öeldakse, et võrrandisüsteem määrab risttahukas $K_{\delta_1, \dots, \delta_m; \sigma_1, \dots, \sigma_n}(\mathbf{A})$ ilmutamata kujul funktsioonid $y_j = f_j(x_1, \dots, x_m)$, $j = 1, \dots, n$, $x \in K_{\delta_1, \dots, \delta_m}(\mathbf{A}')$.

Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Rahuldagu punkt $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ seda süsteemi. Olgu $\mathbf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ning $\mathbf{A}' = (a_1, \dots, a_m)$.

Def. Kui iga $x \in K_{\delta_1, \dots, \delta_m}(\mathbf{A}')$ korral leidub täpselt üks süsteemi lahend $(y_1, \dots, y_n) \in K_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\mathbf{B})$, siis öeldakse, et võrrandsüsteem määrab risttahukas $K_{\delta_1, \dots, \delta_m; \sigma_1, \dots, \sigma_n}(\mathbf{A})$ ilmutamata kujul funktsioonid $y_j = f_j(x_1, \dots, x_m)$, $j = 1, \dots, n$, $x \in K_{\delta_1, \dots, \delta_m}(\mathbf{A}')$.

Tähistame

$$J(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} F_{1,y_1}(\mathbf{A}) & \dots & F_{1,y_n}(\mathbf{A}) \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n,y_1}(\mathbf{A}) & \dots & F_{n,y_n}(\mathbf{A}) \end{vmatrix}.$$

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)

Olgu $m + n$ muutuja funktsioonid F_i , $i = 1, \dots, n$ ja nende osatuletised $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ pidevad punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$. Olgu $F_i(\mathbf{A}) = 0$ ning $J(\mathbf{A}) \neq 0$. Siis leiduvad $\delta_i > 0$ ja $\sigma_j > 0$ nii, et võrrandisüsteem määrab risttahukas $K_{\delta_1, \dots, \delta_m; \sigma_1, \dots, \sigma_n}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$ pidevad ilmutamata funktsioonid $y_j = f_j(x_1, \dots, x_m)$, $j = 1, \dots, n$, $x \in K_{\delta_1, \dots, \delta_m}(\mathbf{A}')$. Kui lisaks on funktsioonidel F_i on punkti $(\mathbf{A})$ ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$ ka pidevad osatuletised $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ siis on funktsioonid f_i pidevad osatuletised $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ punkti $\mathbf{A}'$ mingis ümbruses.