

Joone kaare pikkus

Olgu $I \subset \mathbb{R}$ intervall. Olgu $\varphi_1, \dots, \varphi_m : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Kujutust $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ nim. reaalse argumendiga (ehk parameetriga) **vektorfunktsiooniks**, punktide hulka $\gamma(I) = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \mid t \in I\}$ nim. (vektorfunktsiooniga γ määratud) **jooneks** ruumis $\mathbb{R}^m$.

Joont nimetatakse

- ▶ **pidevaks**, kui $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ on pidevad intervallis I ;
- ▶ **siledaks**, kui $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ on intervallis I pidevalt dif.-vad ja tuletised ei ole korraga nullid ühegi punktis $t \in I$ korral;
- ▶ **kaareks**, kui I on lõik;
- ▶ **tükiti siledaks**, kui joon koosneb lõplikust arvust siledatest kaartest;
- ▶ **lihtsaks**, kui γ on üksühene (puuduvad kordsed punktid: kui $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, siis $t_1 = t_2$, v.a. algus- ja lõpp-punkt);
- ▶ **kinniseks**, kui I on lõik $[\alpha, \beta]$ ning $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Olgu L pidev lihtne kaar tasandil,

$$L: x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]). \quad (1)$$

Olgu $T[t_0, \dots, t_n]$ lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotus,

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Olgu $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, $i = 0, \dots, n$. Olgu $p(T)$ kõõlmurdjoone $\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_{n-1}\mathbf{X}_n$ pikkus.

Olgu L pidev lihtne kaar tasandil,

$$L: x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]). \quad (1)$$

Olgu $T[t_0, \dots, t_n]$ lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotus,

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Olgu $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, $i = 0, \dots, n$. Olgu $p(T)$ kõõlmurdjoone $\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_{n-1}\mathbf{X}_n$ pikkus.

Def. Kui leidub $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} p(T)$, siis seda piirväärtust nimetatakse

kaare L pikkuseks. Kui kaarel on olemas lõplik pikkus, siis nimetatakse teda sirgestuvaks. Kaare L pikkust tähistame sümboliga $|L|$ või $|AB|$, kus A ja B on kaare algus- ja lõpp-punkt.

Lause

Lihtne kaar on sirgestuv parajasti siis, kui tema kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud.

Kaare pikkuse omadusi

1. **Kaare pikkuse monotoonsus.** Sirgestuva kaare AB iga osakaar $A'B'$ on sirgestuv, seejuures osakaare pikkus ei ületa kogu kaare pikkust.
2. **Kaare pikkuse aditiivsus.** Kui kaar AB on sirgestuv, siis tema pikkus on võrdne kaarte AC ja CB pikkuste summaga, kus C on suvaline punkt kaarel AB .
3. **Kaare pikkuse funktsiooni pidevus.** Olgu $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ pidev sirgestuv joon. Tähistame $s(t) = |\{\gamma(u): u \in [a, t]\}|$. Siis s on pidev lõigus $[a, b]$.

Lause (S)

Olgu lihtne kaar AB antud võrranditega (1), kus funktsioonid φ_1 ja φ_2 on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevalt diferentseeruvad. Siis joon AB on sirgestuv ning iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral eksisteerib $s(t) := |AX|$, kus $X = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Funktsioon $s : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja

$$s'(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}.$$

Järeldus (S)

Iga tükiti siledal joonel on lõplik pikkus. Lause eeldustel saab joone AB pikkuse arvutada valemist

$$|AB| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Esimest liiki joonintegraal

Olgu lihtne sirgestuv kaar L antud võrranditega (1). Olgu sellel joonel määratud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$. Olgu $T[t_0, \dots, t_n]$ lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotus. Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, $i = 0, \dots, n$. Valime suvaliselt $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, olgu $\mathbf{Q}_i := (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$. Moodustame summa

$$\sigma(T) := \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i) s_i,$$

kus s_i on kaare $X_{i-1}X_i$ pikkus. Olgu $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Def. Kui leidub $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T)$, siis seda piirväärtust nim. funktsiooni f esimest liiki joonintegraaliks ehk joonintegraaliks kaare pikkuse järgi üle kaare L .

Tähistatakse $\int_L f(x, y) ds$ või $\int_L f ds$.

Lause

Olgu võrranditega (1) antud sile joon L , millel on määratud pidev funktsioon $w = f(x, y)$. Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal $\int_L f \, ds$, seejuures kehtib võrdus

$$\int_L f \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Esimest liiki joonintegraali omadusi

1. **Aditiivsus:** kui $AB = AC \cup CB$, siis

$$\int_{AB} f \, ds = \int_{AC} f \, ds + \int_{CB} f \, ds.$$

2. **Lineaarsus:** $\int_{AB} (\alpha f + \beta g) \, ds = \alpha \int_{AB} f \, ds + \beta \int_{AB} g \, ds.$

3. **Sõltumatus joone suunast:** $\int_{AB} f \, ds = \int_{BA} f \, ds.$

4. **Monotoonsus:** kui $f(x, y) \leq g(x, y)$ joonel AB , siis

$$\int_{AB} f \, ds \leq \int_{AB} g \, ds.$$

5. **Keskväertusteoreem:** kui f on pidev joonel AB , siis leidub

$$C \in AB \text{ nii, et } \int_{AB} f \, ds = f(C)|AB|.$$

Füüsikaline tähendus. Olgu joonel L määratud joontihedus $\rho(x, y)$.

Siis joone mass on $m = \int_L \rho(x, y) ds$. Joone masskeskme

koordinaadid on $x_C = \frac{1}{m} \int_L x \rho(x, y) ds$, $y_C = \frac{1}{m} \int_L y \rho(x, y) ds$.

Geomeetiline tähendus. Olgu Σ vertikaalne silindripind, mille alumine serv paineb xy -tasandil joonel L ning ülemine serv on funktsiooni $z = f(x, y)$, $(x, y) \in L$ graafik. Siis selle silindripinna pindala on $S_\Sigma = \int_L f(x, y) ds$.

Teist liiki joonintegraal

Olgu lihtne kaar L antud võrranditega (1). Olgu sellel joonel määratud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$. Olgu $T[t_0, \dots, t_n]$ lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotus. Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, $i = 0, \dots, n$. Valime suvaliselt $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, olgu $\mathbf{Q}_i := (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$. Moodustame summad

$$\sigma_1(T) := \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i) \Delta x_i, \quad \sigma_2(T) := \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i) \Delta y_i,$$

kus $\Delta x_i = \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$ ja $\Delta y_i = \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})$. Olgu $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Def. Kui leiduvad $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_1(T)$ ja $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_2(T)$, siis neid piirväärtusi nim. funktsiooni f **teist liiki joonintegraalideks** ehk **joonintegraalideks koordinaatide järgi** üle kaare L .

Tähistatakse $\int_L f(x, y) dx$ ja $\int_L f(x, y) dy$ või $\int_L f dx$ ja $\int_L f dy$.

Tihti esineb summa $\int_L f \, dx + \int_L g \, dy$, seda tähistatakse lühidalt $\int_L f \, dx + g \, dy$.

Lause

Olgu võrranditega (1) antud sile joon L , millel on määratud pidev funktsioon $w = f(x, y)$. Siis eksisteerivad teist liiki joonintegraalid $\int_L f \, dx$ ja $\int_L f \, dy$, seejuures kehtivad võrdused

$$\int_L f \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) \, dt,$$

$$\int_L f \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \, dt.$$

Teist liiki joonintegraali omadusi

1. **Aditiivsus:** kui $AB = AC \cup CB$, siis

$$\int_{AB} f \, dx = \int_{AC} f \, dx + \int_{CB} f \, dx.$$

2. **Lineaarsus:** $\int_{AB} (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_{AB} f \, dx + \beta \int_{AB} g \, dx.$

3. **Sõltuvus joone suunast:** $\int_{AB} f \, dx = - \int_{BA} f \, dx.$

Monotoonsus ega keskväärtusteoreem ei kehti!

Kinnise joone korral teist liiki joonintegraal sõltub joone suuna valikust. Kinnise joone **positiivseks suunaks** loetakse suund, milles liikumisel joonega piiratud piirkond jääb vasakule.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Funktsiooni $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ nim. **vektorväljaks**, $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$. Kui vektorvälja komponendid on pidevad/diferentseeruvad, siis vektorvälja nim. pidevaks/diferentseeruvaks.

Näide. Tuule kiirus igas ruumi punktis;
voolava vedeliku kiirus igas ruumi punktis.

Näide. Jõuväljad: gravitatsiooniväli $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\gamma M}{|\vec{R}|^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$;

elektriväli $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$.

Näide. Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Siis ∇f on hulgal D määratud vektorväli.

Vektorvälja joonintegraal

Joonel L määratud vektorvälja (teist liiki) joonintegraaliks nim. joonintegraali

$$\int_L F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_m dx_m,$$

tähistatakse ka $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$, $\int_L \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$, kus $d\vec{s} = (dx_1, \dots, dx_m)$.

Füüsikaline rakendus. Olgu $\vec{F}$ mingile kehale mõjuv jõud (võib sõltuda keha asukohast). Selle jõu töö keha liigutamisel mööda joont L on $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Esimest liiki joonintegraali füüsikaline rakendus. Olgu $\vec{v}(\mathbf{x})$ vedeliku voolamise kiirus tasandil. Siis selle vedeliku **voog läbi joone L** ehk vedeliku hulk, mis ajaühikus voolab läbi joone L , on $\int_L \varrho \vec{v} \cdot \vec{n} ds$, kus $\vec{n}$ on joone L normaal.