

Mõõtuvad hulgad tasandil

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ning olgu $\chi_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hulga D karakteristlik funktsioon:

$$\chi_D(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin D. \end{cases}$$

Def. Tõkestatud alamhulka $D \subset \mathbb{R}^2$, mille karakteristlik funktsioon on integreeruv, nim. (Jordani mõttes) mõõtuvaks hulgaks. Arvu $\mu(D) = \iint_D dx dy$ nim. hulga D pindalaks ehk tema Jordani mõõduks.

Def. Mõõtuvat hulka, mille Jordani mõõt on null, nim. nullmõõduga hulgaks e. hüljatavaks hulgaks.

Karakteristliku funktsiooni Darboux summade omadusi:

1. $S(T) = \sum_{k,l: D \cap R_{kl} \neq \emptyset} \Delta x_k \Delta y_l.$
2. Kui $\mu(D) = 0$, siis $0 \leq s(T) \leq \mu(D) = 0$, s.t. $s(T) = 0$.
3. Kui $\mu(D) = 0$, siis $S(T) - s(T) = S(T) = S^*(T)$ iga alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral.

Lemma

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu K selline ristkülik, et $D \subset K$. Vördus $\mu(D) = 0$ kehtib parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T = T[R_{kl}] \in \mathfrak{T} : S^*(T) < \varepsilon.$$

Järeldus

1. Kui D on nullmõõduga hulk ning $D_1 \subset D$, siis $\mu(D_1) = 0$.
2. Lõpliku arvu nullmõõduga hulkade ühend on nullmõõduga hulk.

Lause

Olgu sile joon L antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Siis L on nullmõõduga hulk.

Lause

Olgu sile joon L antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Siis L on nullmõõduga hulk.

Järeldus

Tükiti sile joon on nullmõõduga hulk.

Lause

Lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ graafik ruumis $\mathbb{R}^2$ on nullmõõduga hulk.

Lemma

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \in D$ ja $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Siis leidub selline punkt $\mathbf{Z} \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, et $\mathbf{Z} \in \partial D$.

Teoreem

Tõkestatud alamhulk $D \subset \mathbb{R}^2$ on mõõtuv parajasti siis, kui tema rajajoon ∂D on nullmõõduga hulk.

Lemma

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \in D$ ja $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Siis leidub selline punkt $\mathbf{Z} \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, et $\mathbf{Z} \in \partial D$.

Teoreem

Tõkestatud alamhulk $D \subset \mathbb{R}^2$ on mõõtuv parajasti siis, kui tema rajajoon ∂D on nullmõõduga hulk.

Järeldus

Tõkestatud hulk $D \subset \mathbb{R}^2$, mille rajajoon on tükiti sile, on mõõtuv.

Järeldus

Kui hulgad D_1 ja D_2 on mõõtuvad, siis on ka hulgad $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ ja $D_1 \setminus D_2$ mõõtuvad.

Katkevate funktsioonide integreerimine

Teoreem (Lebesgue'i integreeruvuskriteerium)

Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.

Katkevate funktsioonide integreerimine

Teoreem (Lebesgue'i integreeruvuskriteerium)

Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.

Tõestame ainult piisavuse.

Lemma 9.1. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu K selline ristkülik, et $D \subset K$. Siis $\mu(D) = 0$ parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T = T[R_{kl}] \in \mathfrak{T} : S^*(T) < \varepsilon.$$

Integreeruvuse kriteerium. Tõk.-d f-n $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ on ristkülikus K int.-v parajasti siis, kui $\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathfrak{T} : S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Katkevate funktsioonide integreerimine

Teoreem (Lebesgue'i integreeruvuskriteerium)

Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.

Lause (S)

Mõõtuvas hulgas tõkestatud funktsiooni integreeruvus ja integraali väärtus selles hulgas ei sõltu funktsiooni väärtustest hulga rajajoonel.

Lause (S)

Kui funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ integreeruv ja D_1 on hulga D mõõtuv alamhulk, siis funktsioon f on ka hulgas D_1 integreeruv.