

Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Olgu uv -tasandi mingis **lahtises piirkonnas** $\mathcal{G}'$ defineeritud funktsioonid

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad \mathbf{U} = (u, v) \in \mathcal{G}'.$$

Tähistame $\mathbf{X} = T(\mathbf{U})$. Olgu $\mathcal{G} = T(\mathcal{G}') = \{T(\mathbf{U}) : \mathbf{U} \in \mathcal{G}'\}$.

Def. Kujutust $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ nim. **regulaarseks teisenduseks**, kui

- 1) T on bijektiivne, s.t. $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{G} \exists! \mathbf{U} \in \mathcal{G}' : T(\mathbf{U}) = \mathbf{X}$,
- 2) leiduvad osatuletised $\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \eta}{\partial v}$, mis on pidevad hulgas $\mathcal{G}'$,
- 3) $J(\mathbf{U}) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial v}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial v}(\mathbf{U}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{G}'.$

T bijektiivne $\Rightarrow$ saab avaldada $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$,
 $\mathbf{X} = (x, y) \in \mathcal{G}$.

Regulaarse teisenduse omadused

- ▶ Regulaarse teisenduse $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ poolt määratud funktsioonidel $u: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ leiduvad pidevad osatuletised mõlema muutuja x ja y järgi hulgas $\mathcal{G}$.
- ▶ Liitfunktsiooni jakobiaan võrdub välimise ja sisemise funktsiooni jakobiaanide korrutisega:

$$\frac{D(X, Y)}{D(t, \tau)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(t, \tau)}.$$

- ▶ Regulaarse teisenduse pöördteisendus on regulaarne.
- ▶ Regulaarne teisendus teisendab lahtise hulga lahtiseks hulgaks ja kinnise hulga kinniseks hulgaks.
- ▶ Regulaarne teisendus teisendab tükiti sileda joone tükiti siledaks jooneks ning kinnise joone kinniseks jooneks.

Olgu $\mathcal{G}'$ lahtine ühelisidus hulk. Olgu $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ regulaarne teisendus. Olgu Λ lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}'$, $\partial\Delta = \Lambda$ ning tähistame $D = T(\Delta)$ ja $L = T(\Lambda)$. Olgu vähemalt üks paar segaosatuletisi $\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}$ ja $\frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u}$ või $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}$ ja $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u}$ pidevad hulgas $\mathcal{G}'$. Siis

$$\mu(D) = \iint_{\Delta} |J| \, du \, dv.$$

Greeni valem: $\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\partial D} F \, dx + G \, dy.$

Lause

Olgu $\mathcal{G}'$ lahtine ühelisidus hulk. Olgu $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ regulaarne teisendus. Olgu Λ lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}'$, $\partial\Delta = \Lambda$ ning tähistame $D = T(\Delta)$ ja $L = T(\Lambda)$. Olgu vähemalt üks paar segaosatuletisi $\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}$ ja $\frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u}$ või $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}$ ja $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u}$ pidevad hulgas $\mathcal{G}'$. Siis

$$\mu(D) = \iint_{\Delta} |J| \, du \, dv.$$

Greeni valem:
$$\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\partial D} F \, dx + G \, dy.$$

Teoreem

Kehtigu lause eeldused ning olgu f integreeruv hulgas D . Siis kehtib muutujavahetuse valem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f(\xi(u, v), \eta(u, v)) |J| \, du \, dv.$$

Märkus. Mitmete tavaliste muutujate vahetuste korral pole kõik regulaarsuse tingimused täidetud (näiteks polaarkoordinaadid).

Järeldus

Eeldame, et $\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \subset D : \mu(D_\varepsilon) < \varepsilon, \mu(T^{-1}(D_\varepsilon)) < \varepsilon$ ja

Teoreemi eeldused on täidetud hulgas $D \setminus D_\varepsilon$. Kui jakobiaan

$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ on tõkestatud hulgas $\Delta = T^{-1}(D)$, siis kehtib

muutujavahetuse valem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(\xi(u, v), \eta(u, v)) |J| du dv.$$

Märkus. Mitmete tavaliste muutujate vahetuste korral pole kõik regulaarsuse tingimused täidetud (näiteks polaarkoordinaadid).

Järeldus

Eeldame, et $\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \subset D : \mu(D_\varepsilon) < \varepsilon, \mu(T^{-1}(D_\varepsilon)) < \varepsilon$ ja Teoreemi eeldused on täidetud hulgas $D \setminus D_\varepsilon$. Kui jakobiaan

$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ on tõkestatud hulgas $\Delta = T^{-1}(D)$, siis kehtib muutujavahetuse valem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(\xi(u, v), \eta(u, v)) |J| du dv.$$

Näide. Polaarkoordinaadid. Olgu kujutus

$$T : \{(r, \theta) : r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

määratud võrranditega $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

Olgu $\Delta = [0, R] \times [0, 2\pi]$ ja $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Kolmekordne integraal

Olgu $R := [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$.

Olgu $[x_0, \dots, x_n]$, $[y_0, \dots, y_r]$ ja $[z_0, \dots, z_s]$ vastavalt lõikude $[a, b]$, $[c, d]$ ja $[u, v]$ alajaotused.

Siis risttahukas R jaotub *osaristtahukateks*

$$R_{klp} := [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \times [z_{p-1}, z_p], \\ k = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, r; \quad p = 1, \dots, s.$$

Tähistame saadud alajaotuse $T = T[R_{klp}]$, selle diameeter on

$$\lambda(T) := \max_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq r, 1 \leq p \leq s} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2 + (\Delta z_p)^2}.$$

Olgu $f: R \rightarrow \mathbb{R}$. Moodustame integraalsumma

$$\sigma(T) := \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{p=1}^s f(\xi_k, \eta_l, \zeta_p) \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p,$$

kus $\mathbf{x}_{klp} = (\xi_k, \eta_l, \zeta_p) \in R_{klp}$.

Def. Arvu I nim. funktsiooni f kolmekordseks Riemanni integraaliks üle risttahuka R , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $\delta > 0$, et mistahes alajaotuse $T[R_{klp}]$ korral, mille diameeter $\lambda(T)$ on väiksem kui δ , kehtib punktide $\mathbf{X}_{klp} = (\xi_k, \eta_l, \zeta_p) \in R_{klp}$ suvalise valiku korral võrratus

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{p=1}^s f(\xi_k, \eta_l, \zeta_p) \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p - I \right| < \varepsilon.$$

Kirjutatakse $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T) = I$, kolmekordset integraali tähistatakse

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz \text{ ehk } \iiint_R f d\mu.$$

Kui see integraal eksisteerib, siis ütleme, et funktsioon f on (Riemanni mõttes) integreeruv risttahukas R .

Lause

Iga risttahukas R integreeruv funktsioon f on selles hulgas tõkestatud.

Olgu $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, siis antud alajaotuse $T = T[R_{klp}]$ puhul eksisteerivad

$$M_{klp} := \sup_{\mathbf{X} \in R_{klp}} f(\mathbf{X}) \quad \text{ja} \quad m_{klp} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{klp}} f(\mathbf{X})$$

suvaliste $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, r$ ja $p = 1, \dots, s$ korral.

Moodustame Darboux' ülem- ja alamsumma

$$S(T) := \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{p=1}^s M_{klp} \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p$$

$$s(T) := \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{p=1}^s m_{klp} \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p,$$

seejuures

$$s(T) \leq \sigma(T) \leq S(T).$$

Tegelikult fikseeritud alajaotuse T puhul

$$S(T) = \sup \sigma(T) \quad \text{ja} \quad s(T) = \inf \sigma(T),$$

kus rajad on võetud üle kõikvõimalike valikute $\mathbf{X}_{klp} \in R_{klp}$ ($k = 1, \dots, n$; $l = 1, \dots, r$; $p = 1, \dots, s$).

Darboux' summade omadusi

1. Alajaotuse peenendamisel ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.
2. Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.
3. $\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ on ülalt tõkestatud ja $\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ on alt tõkestatud.

Darboux' summade omadusi

1. Alajaotuse peenendamisel ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.
2. Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.
3. $\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ on ülalt tõkestatud ja $\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ on alt tõkestatud.

Teoreem (Integreeruvuse kriteerium)

Tõkestatud funktsioon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ on risttahukas R integreeruv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub risttahuka R selline alajaotus $T = T[R_{klp}]$, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$, s.t.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathfrak{T} : S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Teoreem

Kui funktsioon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ on risttahukas R pidev, siis on ta integreeruv.

Integraal üle suvalise tõkestatud hulga ruumis $\mathbb{R}^3$

Olgu $\Xi \subset \mathbb{R}^3$ tõkestatud hulk, milles on määratud funktsioon f .
Valime risttahuka $R = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ nii, et $\Xi \subset R$.
Defineerime uue funktsiooni $F: R \rightarrow \mathbb{R}$ seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } X \in \Xi, \\ 0, & \text{kui } X \in R \setminus \Xi. \end{cases}$$

Def. Funktsiooni $f: \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ nimetame **integreeruvaks hulgas D** , kui funktsioon F on risttahukas R integreeruv. Sel juhul

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_R F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Def. Tõkestatud alamhulka $\Xi \subset \mathbb{R}^3$ nim. (Jordani mõttes) mõõtuvaks, kui eksisteerib integraal

$$\iiint_{\Xi} \chi_{\Xi}(\mathbf{X}) \, dx \, dy \, dz = \mu(\Xi),$$

kus

$$\chi_{\Xi}(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in \Xi, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin \Xi, \end{cases}$$

on hulga Ξ karakteristlik funktsioon. Arvu $\mu(\Xi)$ nimetatakse sel juhul hulga Ξ ruumalaks ehk Jordani mõõduks.

Kui Ξ on risttahukas $R := [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, siis suvalise alajaotuse $T = T[R_{klp}]$ korral

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{p=1}^s \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p = (b-a)(d-c)(v-u),$$

seega on $\mu(R) = (b-a)(d-c)(v-u)$.

Muutujate vahetus kolmekordses integraalis

Olgu Π kinnine hulk ruumis $\mathbb{R}^3$, milles on defineeritud funktsioonid

$$x = \xi(u, v, w), \quad y = \eta(u, v, w), \quad z = \zeta(u, v, w).$$

Tähistame $\mathbf{X} = T(\mathbf{U})$, $\mathbf{U} \in \Pi$. Olgu $\Xi = T(\Pi)$. Seost $T : \Pi \rightarrow \Xi$ nim. regulaarseks, kui on täidetud järgmised tingimused:

- 1) T on bijektsioon,
- 2) funktsioonid ξ, η, ζ on pidevalt diferentseeruvad hulgas Π ,

$$3) J(\mathbf{U}) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial v}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial w}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial v}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial w}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \zeta}{\partial v}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \zeta}{\partial w}(\mathbf{U}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall \mathbf{U} \in \Pi.$$

Teoreem

Olgu Ξ kinnine mõõtuv hulk ning $\Pi = T^{-1}(\Xi)$, kus T on regulaarne teisendus. Kui $w = f(x, y, z)$ on pidev hulgas Ξ , siis

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Pi} \Phi(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw,$$

kus $\Phi(u, v, w) := f(\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w))$.

Märkus. Olgu $L \subset \Xi$ nende punktide hulk, kus teisendus T ei ole regulaarne, eeldame, et $\mu(L) = 0$. Siis leiduvad mõõtuvad hulgad W_n , et $L \subset W_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ja $\lim_n \mu(W_n) = 0$. Kui eeldada, et

1) $\lim_n \mu(\Gamma_n) = 0$, kus $\Gamma_n := T^{-1}(W_n)$, ja

2) jakobiaan $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ on tõkestatud hulgas Π ,
siis kehtib muutujavahetuse valem.

Silindrilised koordinaadid

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Kuna

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

siis on T regulaarne igas hulgas Ξ , mis ei sisalda z -telge, seega

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr \, d\theta \, dz,$$

kui $f: \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev funktsioon. Tegelikult kehtib see valem ka nende hulkade Ξ puhul, mis sisaldavad z -telge.

Sfäärilised koordinaadid

$$x = r \sin \gamma \cos \theta, \quad y = r \sin \gamma \sin \theta, \quad z = r \cos \gamma, \\ r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi,$$

sel juhul

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \gamma)} = \begin{vmatrix} \sin \gamma \cos \theta & \sin \gamma \sin \theta & \cos \gamma \\ r \cos \gamma \cos \theta & r \cos \gamma \sin \theta & -r \sin \gamma \\ -r \sin \gamma \sin \theta & r \sin \gamma \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \gamma \geq 0.$$

Teisendus T ei ole regulaarne z -teljel, kuid saab näidata, et valem

$$\begin{aligned} \iiint_{\Xi} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{\Pi} f(r \sin \gamma \cos \theta, r \sin \gamma \sin \theta, r \cos \gamma) r^2 \sin \gamma \, dr \, d\theta \, d\gamma \end{aligned}$$

kehtib suvalise mõõtuva hulga Ξ korral.

Kolmekordse integraali arvutamine

1. Olgu R risttahukas kujul

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$$

tähistame $D_1 := [c, d] \times [u, v]$ ja $D_3 := [a, b] \times [c, d]$, need on risttahuka R projektsioonid vastavalt yz - ning xy -tasandil. Kui funktsioon $w = f(x, y, z)$ on risttahukas R integreeruv, siis kehtivad valemid

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dx \iint_{D_1} f(x, y, z) dy dz, \\ \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_3} dx dy \int_u^v f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

eeldusel, et kahekordne integraal $\iint_{D_1} f(x, y, z) dy dz$ eksisteerib iga $x \in [a, b]$ korral ja ühekordne integraal $\int_u^v f(x, y, z) dz$ iga $(x, y) \in D_3$ korral.

2. Vaatleme nüüd üldisemat situatsiooni. Olgu Ξ kahe x -teljega ristuva tasandi $x = a$ ja $x = b$ vahel. Eeldame, et hulga Ξ lõikamisel suvalise tasandiga $x = c$, mis on nende kahe tasandiga paralleelne ja asub nende vahel, tekib kujund, mille projektsioon D_c yz -tasandil on mõõtu v . Sel juhul

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz.$$

3. Olgu hulgak Ξ veelgi üldisem kõversilinder, mis ülalt ja alt on piiratud pindadega $z = \varphi(x, y)$ ja $z = \psi(x, y)$, kus $\psi(x, y) \leq \varphi(x, y)$ iga (x, y) korral hulgast D , milleks projekteerub xy -tasandile kõversilinder Ξ . Seejuures eeldatakse, et iga $(x, y) \in D$ korral eksisteerib ühekordne integraal $\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z) dz$. Siis

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Erijuhul, kui D on kõvertrapets, mis on piiratud joontega $x = a$, $x = b$, $y = \alpha(x)$ ja $y = \beta(x)$, kus $\beta(x) \leq \alpha(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, saame kolmekordse integraali arvutamiseks valemi

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Pindintegraalid

Kuidas defineerida pinnatüki pindala?

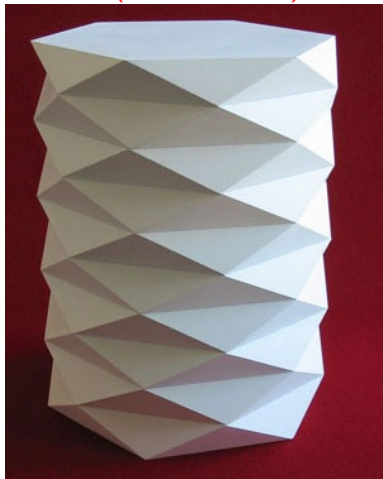
Idee: valime pinnal punktid, moodustame neist kolmnurgad ning võtame piirväärtuse, kui kolmnurkade diameeter läheneb nullile.

Pindintegraalid

Kuidas defineerida pinnatüki pindala?

Idee: valime pinnal punktid, moodustame neist kolmnurgad ning võtame piirväärtuse, kui kolmnurkade diameeter läheneb nullile.

Ei tööta (Schwarz 1883)! Silinder raadiusega R , kõrgusega H .

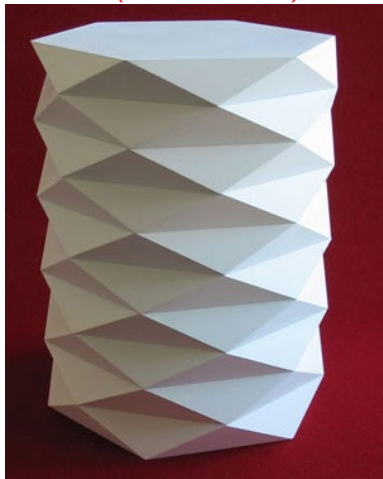


Pindintegraalid

Kuidas defineerida pinnatüki pindala?

Idee: valime pinnal punktid, moodustame neist kolmnurgad ning võtame piirväärtuse, kui kolmnurkade diameeter läheneb nullile.

Ei tööta (Schwarz 1883)! Silinder raadiusega R , kõrgusega H .



$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} \\ \lim_{m,n \rightarrow \infty} 2mn S_{\Delta} &= \\ &= 2\pi R \sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4} \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{m^2}{n^4} + H^2}. \end{aligned}$$

Pinna puutujatasand

Olgu pind $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad \mathbf{U} = (u, v) \in \Delta,$$

kus Δ on mingi ühelisidus piirkond uv -tasandil. Eeldame, et

1) hulkade Δ ja Ω punktide vahel on bijektiivne vastavus,

2) Δ ja Ω on tõkestatud vastavalt ruumis $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$.

Eeldame, et φ, ψ ja χ on pidevalt diferentseeruvad hulgas Δ .

Def. Pinna Ω punkti $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ puhul, mis vastab piirkonna Δ punktile $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ nim. **pinna harilikuks punktiks**, kui kõik teist järku determinandid

$$A(\mathbf{U}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial \psi(\mathbf{U}_0)} & \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial \chi(\mathbf{U}_0)} \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B(\mathbf{U}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial \chi(\mathbf{U}_0)} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)} \\ \frac{\partial \chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix},$$
$$C(\mathbf{U}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)} & \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial \psi(\mathbf{U}_0)} \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ei ole korraka nullid. Kui $A(\mathbf{U}_0) = B(\mathbf{U}_0) = C(\mathbf{U}_0) = 0$, siis punkti $\mathbf{X}_0$ nim. **pinna iseäraseks punktiks**.

Def. Parameetriliste võrranditega määratud pinda Ω nimetatakse **siledaks**, kui funktsioonid φ, ψ ning χ on hulgas Δ pidevalt diferentseeruvad ja pinnal ei ole iseäraseid punkte.

Olgu Ω sile pind ja olgu $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pinna harilik punkt. Pinna **puutujatasandi võrrand punktis $\mathbf{X}_0$** on

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0) = 0.$$

Siledal pinnal on igas tema punktis $\mathbf{X}_0$ olemas pidevalt muutuv puutujatasand, seega ka pidevalt muutuv normaal (s.o. puutujatasandiga risti olev sirge läbi punkti $\mathbf{X}_0$), mille sihi määrab ära vektor (A, B, C) .

Pindade klassifikatsioon

Kahe ja ühe poolega pinnad

Olgu pinnal Ω igas punktis olemas pidevalt muutuv normaal. Olgu sellel pinnal antud mingi **kinnine pidev** joon Γ . Olgu $\mathbf{A} \in \Gamma$, fikseerime selles punktis konkreetse normaali suuna. Liikugu punkt $\mathbf{X}$ mööda joont Γ , alustades punktist $\mathbf{A}$. Igas joone punktis $\mathbf{X}$ valime normaali suuna nii, et normaal jääks pidevaks punkti liikumisel piki kaart AX .

Pindade klassifikatsioon

Kahe ja ühe poolega pinnad

Olgu pinnal Ω igas punktis olemas pidevalt muutuv normaal. Olgu sellel pinnal antud mingi **kinnine pidev** joon Γ . Olgu $\mathbf{A} \in \Gamma$, fikseerime selles punktis konkreetse normaali suuna. Liikugu punkt $\mathbf{X}$ mööda joont Γ , alustades punktist $\mathbf{A}$. Igas joone punktis $\mathbf{X}$ valime normaali suuna nii, et normaal jääks pidevaks punkti liikumisel piki kaart AX .

Def. Pinda, kus mistahes (pinna rajajoont mittelõikava) kinnise joone läbimisel normaali suund ei muutu, nimetame **kahe poolega pinnaks**, teisi pindu aga **ühe poolega pindadeks**.

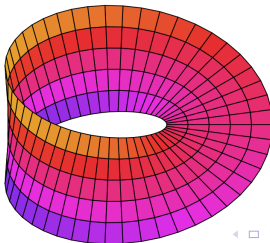
Pindade klassifikatsioon

Kahe ja ühe poolega pinnad

Olgu pinnal Ω igas punktis olemas pidevalt muutuv normaal. Olgu sellel pinnal antud mingi **kinnine pidev** joon Γ . Olgu $\mathbf{A} \in \Gamma$, fikseerime selles punktis konkreetse normaali suuna. Liikugu punkt $\mathbf{X}$ mööda joont Γ , alustades punktist $\mathbf{A}$. Igas joone punktis $\mathbf{X}$ valime normaali suuna nii, et normaal jääks pidevaks punkti liikumisel piki kaart AX .

Def. Pinda, kus mistahes (pinna rajajoont mittelõikava) kinnise joone läbimisel normaali suund ei muutu, nimetame **kahe poolega pinnaks**, teisi pindu aga **ühe poolega pindadeks**.

Näide. Möbiuse pind.



1. Kahe poolega pinnal on normaali suund üheselt määratud, kui normaali suund fikseerida mingis punktis **A**.
2. Iga sile kordsete punktideta pind Ω on kahe poolega. Valime $\mathbf{n} = (A, B, C)$, seda pinna poolt, kuhu normaal on suunatud, nim. **pinna positiivseks pooleks**.
3. Kui pind Ω on antud võrrandiga $z = \Phi(x, y)$, siis $C = 1$.
Normaal moodustab z -telje positiivse suunaga teravnurga. Sel juhul pinna positiivset poolt nim. **ülemiseks** pooleks.
4. Kui pind Ω on mingi tõkestatud ühelisidusa ruumilise piirkonna Ξ rajapind, siis ütleme, et pind Ω on **kinnine**. Sel juhul on pinnal kaks poolt, **välimine** ja **sisemine pool**.
5. Olgu Ω kahe poolega pind rajajoonega Γ . Kui pinnal on valitud positiivne pool, siis **rajajoonel liikumise positiivseks suunaks** loetakse suunda, milles pinna positiivsel poolel mööda rajajoont liikuva vaatleja suhtes piirkond Ω jääb vasakule.
6. Olgu pind Ω jaotatud lõplikuks arvuks osadeks $\Omega_1, \dots, \Omega_n$. Igal pinnatükil on määratud positiivne pool. Kui kahel pinnatükil on ühine rajajoone osa, siis sellel on kummagi tüki järgi määratud erinev positiivne suund.

Pinnatüki pindala

Olgu Ω parameetriliste võrranditega määratud kordsete punktidega sile tõkestatud pind. Jaotame piirkonna Δ tükiti siledade joontega n kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte. Tähistame alajaotuse $\tilde{T} = \tilde{T}[\Delta_1, \dots, \Delta_n]$.

Olgu $\lambda(\tilde{T})$ osapiirkondade $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ suurim diameeter.

Igale piirkonnale $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ vastab punktihulk pinnal, märgime need $\Omega_1, \dots, \Omega_n$. Valime igas pinnaosas Ω_i punkti X_i , moodustame pinnale Ω punktis X_i puutujatasandi, projekteerime pinnatüki Ω_i sellele tasandile ning tähistame projektsiooni tähega Ω'_i . Saab näidata, et kuna osapiirkonnad on $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ on mõõtuvad ning Ω on sile pind, siis on ka projektsioonid $\Omega'_1, \dots, \Omega'_n$ mõõtuvad.

Def. Pinnatüki Ω pindalaks nim. piirväärtust

$$\mu(\Omega) := \lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\Omega'_i).$$

Lõpliku pindalaga pinnatükki nim. **mõõtuvaks**.

Lause (Pinnatüki pindala arvutamine)

Tehtud eeldustel kehtib valem

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv.$$

Kui pind Ω on antud ilmutatud kujul võrrandiga $z = \Phi(x, y)$, siis saame $A = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $B = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ja $C = 1$ ning

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$