# Peatükk 1

# Arvuteooria

## I Täisarvu esitus positsioonilises arvusüsteemis

### Põhimõisted

1) Arvu esitamisel positsioonilises arvusüsteemis, mille aluseks on valitud ühest suurem positiivne täisarv $k$, kasutatakse $k$ erinevat numbrimärki.
2) Igal arvul on ainult üks esitus $k$-ndsüsteemis.
3) Arvu tähistab numbrite järjend, kus iga numbri väärtus sõltub selle asukohast järjendis.

Näiteks järjend

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}$$

tähistab $k$-ndsüsteemis arvu

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k^1 + a_0 k^0.$$

Igapäevases elus ja koolimatemaatikas kasutatakse 10-ndsüsteemi.

### Ülesanded

**1.** Arvud alates arvust 2 kuni 43 kirjutatakse ühte ritta $23456\ldots40414243$. Leia

a) mitmekohaline arv saadakse;
b) mitmendal kohal rea algusest (vasakult) asub esimene kord number 8;
c) mitmendal kohal rea lõpust (paremalt) asub esimene kord number 8;
d) mitu korda esineb selles arvus number 5;
e) milline numbritest esineb kõige sagedamini;
f) kas on kõrvuti kolm (neli, viis jne) ühesugust numbrit?

Korda sama arvudega 1 kuni 100.

**2.** Kirjuta suurim (vähim) täisarv, milles esinevad kõik kümme numbrit täpselt üks kord.

**3.** Kui palju on kolmekohalisi arve, mille kümnendesituses võivad esineda ainult numbrid a) 1 ja 2; b) 0 ja 5; c) 1, 2 ja 3; d) 0, 1 ja 2?

**4.** Kui palju leidub arvust 2020 väiksemaid positiivseid täisarve, mille kümnendesituses võivad esineda ainult numbrid 0 ja 2?

**5.** Kahekohalise arvu numbrite ruutude summa on 10. Kui sellest arvust lahutada 18, tekib arv, milles on esialgse arvuga võrreldes numbrite järjekord vastupidine. Leia see arv.

**6.** Milline kahekohalistest arvudest on 4 korda suurem oma numbrite summast ja 3 korda suurem numbrite korrutisest?

**7.** Kahe positiivse täisarvu summa on 1244. Kui ühele neist lisada lõppu number 3 ja teisest kustutada viimane number 2, siis saadakse kaks võrdset arvu. Leia need kaks esialgset arvu.

**8.** Kolmekohaline arv lõpeb numbriga 3. Kui see number kanda arvu esimeseks numbriks, siis tekib arv, mis on ühe võrra suurem esialgse arvu kolmekordsest. Leia see arv.

**9.** Kuuekohalise arvu esimeseks numbriks on 2. Kui see number kanda arvus esimeselt kohalt viimasele säilitades teiste numbrite järjekorra, siis tekib arv, mis on kolm korda suurem esialgsest arvust. Leia see arv.

**10.** Kolmekohalise arvu liitmisel selle numbrite järjekorra vahetamisel saadud kolmekohalise arvuga saadakse 1252. Millised on need arvud, kui ühe ristsumma on 14 ning numbrite ruutude summa on 84?

**11.** Tõesta, et kahekohalise arvu, mille numbrite summa on väiksem kümnest, korrutamise asemel arvuga 11 võime lihtsalt antud arvu kümneliste ja üheliste numbri vahele kirjutada selle arvu ristsumma.

**12.** Tõesta, et kahekohalise arvu korrutamise asemel arvuga 99 võime järjest kirjutada esialgsest arvust ühe võrra väiksema arvu ja arvu, mis on saadud esialgse arvu lahutamisel arvust 100.

**13.** Kolmekohalise arvu numbrid on järjestikused naturaalarvud. Moodustatakse uus kolmekohaline arv, kirjutades esialgse arvu numbrid vastupidises järjekorras. Tõesta, et suurema ja väiksema arvu vahe on 198.

### Harjutamiseks (vt `www.math.olympiaadid.ut.ee`)

MO 1998 2v 8t-2; MO 1995 2v 9-3; MO 1997 2v 8-1; MO 1998 2v 8-1; MO 1999 2v 8-3; MO 1998 2v 7-2; LV 2000 sügis N-1

## II Arvu kümnendesituse viimased numbrid

### Põhimõisted

Tõesta, et

1) kahe samamärgilise täisarvu summa üheliste number on nende arvude üheliste numbrite summa üheliste number;

2) kahe täisarvu korrutise üheliste number on nende arvude üheliste numbrite korrutise üheliste number.

### Ülesanded

**1.** Millise numbriga lõpeb

a) summa $13 + 13 + \ldots + 13$, milles on 123456789 liidetavat;
b) summa $25 + 25 + \ldots + 25$, milles on 123456789 liidetavat;
c) summa $37 + 37 + \ldots + 37$, milles on 123456789 liidetavat;
d) korrutis $5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5$, milles on 50 tegurit;
e) korrutis $22 \cdot 25 \cdot 32 \cdot 35 \cdot 42 \cdot 45 \cdot 52 \cdot 55$;
f) korrutiste summa $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5$?

**2.** Millise numbriga lõpeb

a) kõigi kahekohaliste arvude summa;
b) kõigi kahekohaliste paarisarvude summa;
c) kõigi kahekohaliste paaritute arvude summa;
d) kõigi kahekohaliste paaritute arvude korrutis?

**3.** Mitme nulliga lõpeb korrutis

a) $22 \cdot 25 \cdot 32 \cdot 35 \cdot 42 \cdot 45 \cdot 52 \cdot 55$;
b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 54 \cdot 55$?

**4.** Olgu $a$ kõigi kolmekohaliste paarisarvude summa ja $b$ kõigi kolmekohaliste paaritute arvude summa. Millised on arvu $a - b$ kaks viimast numbrit?

**5.** Mitme nulliga lõpevad faktoriaalid 3!, 4!, 5!, 6!, 10!, 14!, 21!, 27!, 78!, 2018! ?

**6.** Milline on arvu $1! + 2! + 3! + \ldots + 1999!$ viimane number?

**7.** Leia arvu $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9$ viimane number.

**8.** Leia arvu $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ viimane number sõltuvalt täisarvu $n > 0$ väärtusest.

**9.** Millise numbriga lõpeb arv

a) $19^{19} + 12^{12}$;
b) $1996^{1997} + 1997^{1998} + 1998^{1999} + 1999^{2000}$?

### Harjutamiseks

MO 1994 2v 8t-1; MO 1995 2v 7t-2; MO 1996 2v 7t-1, 9t-2; MO 1998 3v 9-1; MO 1999 2v 7t-5; LV 2000 sügis N-2

## III Täisarvude jaguvus

### Põhimõisted

1) Kui täisarvude $a$ ja $b$ korral leidub täisarv $c$ nii, et $a = b \cdot c$, siis öeldakse, et täisarv

i) $a$ jagub täisarvuga $b$ ning tähistatakse $a \,\vdots\, b$;
ii) $b$ jagab täisarvu $a$ ning tähistatakse $b \mid a$;
iii) $b$ on täisarvu $a$ jagaja (tegur).

2) Tõesta järgmised jaguvuse omadused.

*Lause 1.* Kui $a \,\vdots\, b$ ja $c \,\vdots\, b$, siis ka $(a \pm c) \,\vdots\, b$.

*Lause 2.* Kui $a + c = d$ ja $a \,\vdots\, b$, siis $d \,\vdots\, b$ parajasti siis, kui $c \,\vdots\, b$.

*Lause 3.* Kui $a \,\vdots\, b$ ja $b \,\vdots\, c$, siis ka $a \,\vdots\, c$.

*Lause 4.* Kui $a \,\vdots\, b$, siis ka $k \cdot a \,\vdots\, b$ mistahes täisarvu $k$ korral.

*Lause 5.* Kui $a \,\vdots\, b$ ja $c \,\vdots\, d$, siis ka $a \cdot c \,\vdots\, b \cdot d$.

*Lause 6.* Kui $a \,\vdots\, b$ ja $b \,\vdots\, a$, siis $a = \pm b$.

3) Tõesta täisarvude jaguvuse tunnused 2-ga, 3-ga, 4-ga, 5-ga, 8-ga, 9-ga.

## Ülesanded

**1.** Tõesta, et vahe $\overline{ab} - \overline{ba}$ jagub 9-ga mistahes kahekohalise arvu $\overline{ab}$ korral.

**2.** Tõesta, et neljakohaline arv $\overline{abcd}$ jagub 101-ga siis ja ainult siis, kui $\overline{ab} - \overline{cd} = 0$.

**3.** Tõesta, et kuuekohaline arv $\overline{abcabc}$ jagub arvudega 7, 11 ja 13.

**4.** Tõesta, et neljakohaline arv $\overline{abba}$ jagub 11-ga.

**5.** Tõesta, et täisarv jagub 11-ga, kui selle arvu paarisarvulistel kohtades olevate numbrite summa ja paarituarvulistel kohtadel olevate numbrite summa vahe jagub 11-ga.

**6.** Täisarvud $a$ ja $b$ on sellised, et $11 \mid (a^2 + 9ab + b^2)$. Näita, et $11 \mid (a^2 - b^2)$.

**7.** Arv $a$ jagub 7-ga. Näita, et ka $a^2 + 3a + 7b - 21$ jagub 7-ga.

**8.** On teada, et $n \mid a$ ja $n \mid (5a + b)$. Tõesta, et $n \mid b$.

**9.** On teada, et $n \mid (5a + 3b)$ ja $n \mid (3a + 2b)$. Tõesta, et $n \mid a$ ja $n \mid b$.

**10.** Milline number tuleks kirjutada $\otimes$ asemele arvus $\overline{1234\otimes}$, et saadud arv jaguks a) 2-ga; b) 3-ga; c) 4-ga; d) 5-ga; e) 8-ga; f) 9-ga; g) 11-ga?

**11.** Milline number tuleks kirjutada $\otimes$ asemele arvus $\overline{19 \otimes 94}$, et saadud arv jaguks a) 9-ga; b) 11-ga?

**12.** Milline number tuleks kirjutada kahe $\otimes$ asemele arvus $\overline{15 \otimes \otimes 15}$, et saadud arv jaguks 99-ga? (Kumbki $\otimes$ võib tähistada erinevat numbrit.)

**13.** Milised arvudest 31416, 271828, 222222, 123456 jaguvad a) 2-ga; b) 3-ga; c) 4-ga; d) 5-ga; e) 8-ga; f) 9-ga; g) 11-ga?

**14.** Tõesta, et summa $1^3 + 2^3 + \ldots + 999^3$ jagub 1000-ga.

**15.** Tõesta, et summa $2^9 + 2^{99}$ jagub 100-ga.

**16.** Tõesta, et kui täisarvus mingil suvalisel viisil vahetada numbrite asukohti, siis esialgse arvu ja saadud arvu vahe jagub 9-ga.

**17.** Tõesta, et $2n+1$ järjestikuse täisarvu summa jagub arvuga $2n+1$ iga naturaalarvu $n$ korral.

### Harjutamiseks

MO 1999 2v 7t-3; MO 1998 2v 7t-5; MO 1995 2v 7t-5; MO 1994 2v 7-2; MO 1997 2v 7t-2; MO 1993 3v 9-2

## IV Alg- ja kordarvud

### Põhimõisted

1) Igal naturaalarvul $n > 1$ on vähemalt kaks jagajat 1 ja $n$.
2) Naturaalarvu $p > 1$, millel on täpselt kaks positiivset jagajat 1 ja $p$, nimetatakse *algarvuks*.
3) Täisarvu, millel on enam kui kaks positiivset jagajat, nimetatakse *kordarvuks*.
4) Arv 1 ei ole alg- ega kordarv.
5) **Aritmeetika põhiteoreem.** Iga ühest suurem naturaalarv $n$ on ühesel viisil esitatav kanoonilisel kujul, st oma algtegurite (astmete) korrutisena
$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}.$$
6) Kordarvu $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ kõigi positiivsete jagajate arv on
$$d(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1).$$
7) Algarvude hulk on lõpmatu.
8) Algarvude seal on vaid üks paarisarv so 2.
9) Kui algarv $p$ jagab kahe täisarvu $a$ ja $b$ korrutist $ab$, siis jagab $p$ vähemalt ühte tegureist $a$ ja $b$.
10) Igal kordarvul $n$ leidub jagaja $m$ nii, et $2 \leqslant m \leqslant \sqrt{n}$.

### Ülesanded

**1.** Millised arvud esimese viiekümne positiivse täisarvu seas on algarvud?

**2.** Millised järgmistest arvudest on kordarvud?
a) $\underbrace{22\cdots2}_{1998\text{ numbrit}}3$; b) $11111111$; c) $17^{14} + 21^{30}$; d) $2^{15} + 424$; e) $1517^2 - 1516^2$;
f) $4^{15} - 1$; g) $100^{100} - 1$; h) $10^6 - 5^7$; i) $10^{13} - 7$; j) $10^{140} - 4$; k) $55^{37} - 71^{17}$;
l) $126^{2000} - 51^{2001}$.

**3.** Millised arvudest 141, 143, 155, 161, 163 on algarvud?

**4.** Leia kõik algarvud, mis on suuremad kui 100, aga väiksemad kui 120.

**5.** Leia kõik naturaalarvud $n$, mille korral kõik arvud $n+1$, $n+2$ ja $n+4$ on algarvud.

**6.** Milliste naturaalarvu $n$ väärtuste korral on arv $n^2 - 1$ algarv?

**7.** Milliste naturaalarvu $n$ väärtuste korral on arv $n^3 - 1$ algarv?

**8.** Milliste naturaalarvu $n$ väärtuste korral on arv $n^2 + 5n + 6$ algarv?

**9.** Milliste naturaalarvude $n$ ja $m$ väärtuste korral on arv $(n - m)(n^2 + m - 1)$ algarv?

**10.** Leia kõik algarvude paarid $(p; q)$, mille korral $p^2 - 2q^2 = 1$.

**11.** Leia kõik sellised naturaalarvud, mille numbrite korrutis on 1986.

**12.** Leia kõik sellised algarvud, mida ei saa esitada kahe (positiivse) kordarvu summana.

**13.** Leia tegurite $2^k$ ja $5^m$ astendajad $k$ ja $m$ arvude 125, 170, 1024, 23!, 42! ja 2000! kanoonilises kujus.

### Harjutamiseks

MO 1993 2v 9-3; MO 1995 3v 9-2; MO 1996 2v 7t-?, 8t-4, 9t-1?; MO 1997 2v 7t-4, 8t-5; MO 1998 2v 7t-3, 9-2; MO 1999 2v 8t-1, 3v 9-1

## V Jääkide aritmeetika

### Põhimõisted

1) *Jagada jäägiga* täisarv $a$ positiivse täisarvuga $m$ tähendab täisarvu $a$ esitamist kujul

$$a = qm + r,$$

kus *mittetäielik jagatis* $q$ on täisarv ja *jääk* $r$ rahuldab tingimust $0 \leqslant r < m$. Antud tingimustel saadud esitus on ühene.

2) Täisarvu jagamisel teatava kindla naturaalarvuga $m > 0$ tekkinud jääk on üks arvudest $0, 1, 2, \ldots, m - 1$.

3) Täisarvude $a$ ja $b$, mis jagamisel teatava kindla naturaalarvuga $m > 0$ (*mooduliga*) annavad ühesuguse jäägi, nimetatakse *kongruentseteks mooduli $m$ järgi* (ehk jäägivõrdseteks arvudeks) ja kirjutatakse

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

4) Tõesta, et täisarvud $a$ ja $b$ on kongruentsed mooduli $m$ järgi parajasti siis, kui $m \mid a - b$.

5) Tõesta järgmised olulised omadused.

*Lause 1.* Kui $a = q_1 m + r_1$ ja $b = q_2 m + r_2$, siis

i) $a \pm b \equiv r_1 \pm r_2 \pmod{m}$;
ii) $a \cdot b \equiv r_1 \cdot r_2 \pmod{m}$.

*Lause 2.* Täisarvude $a$ ja $b$ vahe $a - b$ jagub naturaalarvuga $m > 0$ parajasti siis, kui $a \equiv b \pmod{m}$.

*Lause 3.* Kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis iga positiivse täisarvu $k$ korral

i) $a^k \equiv b^k \pmod{m}$;
ii) $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

*Lause 4.* Kui $a \equiv b \pmod{m}$ ning $a$, $b$ ja $m$ jaguvad positiivse täisarvuga $k$, siis

$$\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{k}}.$$

*Lause 5.* Kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $b \equiv c \pmod{m}$, siis $a \equiv c \pmod{m}$.

*Lause 6.* Kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, siis

i) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;
ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$.

## Ülesanded

**1.** Tõesta, et $n$ järjestikusest naturaalarvust täpselt üks jagub arvuga $n$.

**2.** Tõesta, et suvaliste täisarvude $a$ ja $b$ korral vähemalt üks arvudest $a$, $b$, $a+b$ ja $a-b$ jagub kolmega.

**3.** Naturaalarvu $a$ jagamisel arvuga 8 tekkis jääk 7. Miline jääk tekib arvu $a^3$ jagamisel arvuga 8?

**4.** Naturaalarvu $a$ jagamisel arvuga 5 tekkis jääk 4. Tõesta, et $a^2 + a^3$ jagub arvuga 5.

**5.** Tõesta, et mistahes täisarvu $a$ korral $a \equiv a^3 \pmod{6}$.

**6.** Tõesta, et mistahes algarvu $p \geqslant 5$ jagamisel arvuga 6 tekkiv jääk saab olla vaid 1 või 5.

**7.** Tõesta, et mistahes algarvu $p \geqslant 5$ ruudu jagamisel arvuga 24 tekkiv jääk saab olla vaid 1.

**8.** Tõesta, et mistahes täisarvu ruudu jagamisel arvuga 3 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1.

**9.** Tõesta, et ükski arv kujul $3k+2$, kus $k$ on naturaalarv, ei saa olla täisruut.

**10.** Tõesta, et mistahes täisarvu ruudu jagamisel arvuga 4 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1.

**11.** Tõesta, et mistahes täisarvu ruudu jagamisel arvuga 8 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1 või 4.

**12.** Tõesta, et mistahes täisarvu kuubi jagamisel arvuga 7 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1 või 6.

**13.** Tõesta, et arv kujul $5 \cdot 2^k + 2$ ei saa ühegi naturaalarvu $k$ korral olla mingi täisarvu ruuduks.

**14.** Tõesta, et täpselt üks arvudest $n-1$, $n$, $n+1$, $n^2+1$ jagub arvuga 5 suvalise positiivse täisarvu $n$ korral.

**15.** Tõesta, et suvalise naturaalarvu $n$ korral arv $n^3 + 3n^2 + 2n$ jagub 6-ga.

**16.** Arvude 2077 ja 100 jagamisel naturaalarvuga $m$ saadi ühesugused jäägid. Milliseid väärtusi võib omada arv $m$?

**17.** Milliseid väärtusi võib omada naturaalarv $m$, kui arvu 1987 jagamisel selle arvuga $m$ saadi jääk 9?

**18.** Täisarvu $a$ jagamisel arvuga 1981 saadi jääk 35, jagamisel arvuga 1982 aga jääk 13. Milline jääk tekib arvu $a$ jagamisel arvuga 14?

**19.** Leia vähim ühest suurem naturaalarv, mis annab jagamisel nii arvudega 2, 3, 4, 5 kui ka 6 jäägi 1.

**20.** Leia vähim naturaalarv, mis annab jagamisel arvuga 2 jäägi 1, jagamisel arvuga 3 jäägi 2, jagamisel arvuga 4 jäägi 3, jagamisel arvuga 5 jäägi 4 ja jagamisel arvuga 6 jäägi 5.

**21.** Leia vähim naturaalarv, mis annab jagamisel arvuga 2 jäägi 1, jagamisel arvuga 3 jäägi 1, jagamisel arvuga 4 jäägi 3, jagamisel arvuga 5 jäägi 2 ja jagamisel arvuga 7 jäägi 4.

# VI Krüptogrammid

**1.** Taasta puuduvad numbrid korrutises.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 6 & * \\
\cdot & & * & * & * \\
\hline
 & & & * & * \\
 & & * & * & \\
 & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & 6
\end{array}
$$

**2.** Taasta puuduvad numbrid jagatises.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
6 & * & * & 3 & 0 & : & * & * & = & 3 & * & * & 5 \\
5 & 4 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 7 & 8 & & & & & & & & & & \\
 & * & * & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & * & * & & & & & & & & & \\
 & & 5 & 4 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & * & * & & & & & & & & \\
 & & & * & * & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

**3.** Taasta puuduvad numbrid korrutises.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
\cdot & & & * & * & * \\
\hline
 & & * & 0 & * & * \\
 & & * & * & 5 & \\
* & 3 & * & * & & \\
\hline
* & * & * & * & * & 8
\end{array}
$$

**4.** Taasta puuduvad numbrid korrutises.

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & * & 8 \\ \cdot & & 3 & * \\ \hline & * & 1 & 6 \\ 6 & 2 & * & \\ \hline 6 & * & * & * \end{array}$$

**5.** Korrutamistehtes tähistab erinev täht erinevat numbrit. Leia need nii, et arvutus oleks õige.

$$\begin{array}{rrrrr} & & E & I & N \\ \cdot & & E & I & N \\ \hline & O & K & K & O \\ M & O & K & & \\ \hline M & A & R & K & O \end{array}$$

# Peatükk 2

# Diskreetne matemaatika

## I Dirichlet' printsiip

**Dirichlet'[1] printsiip (lihtvariant).** Kui $n$ puuris istub kokku vähemalt $n+1$ küülikut, siis leidub puur, milles istub vähemalt kaks küülikut.

**1.** Tuginedes antropoloogiale, võib öelda, et ei leidu inimest, kellel oleks rohkem kui 500 000 juuksekarva. Tõesta, et Eestis leidub kaks võrdse juuksekarvade arvuga inimest.

**2.** Korratul õpilasel on sahtlis viit eri värvi sokke (igast värvist vähemalt kaks). Mitu sokki tuleks sahtlist võtta, et võetud sokkide seas oleks kaks sama värvi?

**3.** Tõesta, et mistahes kümne naturaalarvu seas leidub alati kaks arvu, mis algavad ühe ja sama numbriga. Kas võib väita, et leiduvad kaks sellist, mille lõpunumbrid on võrdsed?

**4.** Viskame kaht täringut. Mitu korda on tarvis visata, et kindlasti saada kaks viset, mille silmade summad on võrdsed?

**Dirichlet' printsiip (üldvariant).** Kui $n$ puuris istub kokku vähemalt $kn+1$ küülikut, siis leidub puur, milles istub vähemalt $k+1$ küülikut.

**5.** Koolis on 36 õpilast. Kas järgnevad väited on tõesed? a) Vähemalt kahel õpilasel on sünnipäev samal kuupäeval (kuu võib erineda). b) Vähemalt neljal õpilasel on sünnipäev ühel ja samal kuul. Mitu õpilast peaks selles koolis vähemalt olema, et kindlasti leiduks vähemalt 3 last, kes tähistaksid oma sünnipäeva ühel ja samal päeval aastas? (Vaatleme ainult lihtaastaid.)

**6.** Konverentsist võttis osa 40 delegaati 13 riigist. Tõesta, et vähemalt ühe riigi delegatsioonis oli rohkem kui 3 liiget.

**7.** Mitu korda on tarvis visata kolme täringut, et kindlasti olla teinud vähemalt neli viset, mille silmade summad on võrdsed?

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), saksa matemaatik

**8.** Mitu korda on tarvis visata kahte täringut, et saada kolm korda samad silmad mõlemal täringul? Lahendada ülesanne a) juhul, kui täringud on ühesugused, st. silmade paarid $(2,1)$ ja $(1,2)$ loeme võrdseteks; b) juhul, kui täringud on erinevad (näiteks eri värvi), st. näiteks silmade paarid $(2,1)$ ja $(1,2)$ loeme erinevateks.

**9.** Konverentsist võttis osa 70 delegaati, kes kõnelesid 11 erinevat keelt. Iga delegaat kõneles ainult üht keelt. Üht keelt kõneles ülimalt 15 delegaati. Otsustati valida ametlikuks keeleks iga selline keel, mida kõneles vähemalt 5 delegaati. Tõesta, et konverentsil oli vähemalt 3 ametlikku keelt.

**10.** Seitseteist matemaatikut erinevatest riikidest on omavahel kirjavahetuses. Iga kaks matemaatikut kirjutavad ühes kolmest keelest: inglise, prantsuse või vene. Tõesta, et leiduvad kolm, kes kirjutavad ühes ja sellessamas keeles.

**11.** Lõpmatul malelaual paiknevad 7991 maleratsut. Tõesta, et nende hulgast on võimalik välja valida 1997 sellist, millest ükski pole teise tule all.

## Rakendusi geomeetrias

**12.** Aias mõõtmetega 35 m $\times$ 42 m on 100 puud. Kas saab leida sellise 3 m $\times$ 5 m ristküliku, et selles kasvaks vähemalt kaks puud?

**13.** Aianduses kehtivate reeglite kohaselt peab kahe puu vaheline kaugus olema mitte väiksem kui 5 meetrit. Tõesta, et ristkülikukujulises aias mõõtmetega 20 m $\times$ 15 peab seetõttu olema vähem kui 26 puud.

**14.** Ruudus mõõtmetega $10 \times 10$ asetsevad 101 punkti. Näidake, et selles ruudus võib leida kolmnurga pindalaga 1 cm$^2$, milles asub vähemalt kaks antud punkti.

**15.** Ruudus küljepikkusega 1 on märgitud 51 punkti. Tõesta, et leiduvad kolm märgitud punkti, mis asuvad: a) ruudus küljepikkusega 0,2; b) ringis raadiusega $\frac{1}{7}$.

**16.** Ringis diameetriga 5 on valitud 10 punkti. Tõesta, et nende seas leidub 2 punkti, mille vaheline kaugus on vähem kui 2.

## Rakendusi arvuteoorias

**17.** Tõesta, et kolme suvalise naturaalarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu, mille summa ja vahe jaguvad arvuga 2.

**18.** Tõesta, et viie suvalise naturaalarvu seast on alati võimalik välja valida kolm arvu, mille summa jagub kolmega.

**19.** Tõesta, et mistahes $n+1$ naturaalarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu nii, et nende vahe jagub arvuga $n$.

**20.** Tõesta, et viie mistahes naturaalarvu ruudu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu, mille vahe jagub seitsmega.

**21.** Tõesta, et iga naturaalarvu $n$ jaoks leidub arv kujul $11\ldots100\ldots0$, mis jagub $n$-ga.

**22.** Esimese klassi õpilane Peeter tunneb vaid numbrit 1. Tõesta, et ta võib kirjutada arvu, mis jagub arvuga 1989.

**23.** Tõesta, et $n$ arvu seast saab valida mõned selliselt, et nende summa jagub arvuga $n$.

**24.** Tõesta, et arvu 37 mingi aste lõpeb numbrite rühmaga 00001.

**25.** Olgu arv $p$ ühistegurita arvuga 100000. Tõesta, et arvu $p$ mingi astme kümnendesitus lõpeb numbrite rühmaga 00001. Tõesta veel, et iga naturaalarvu $n$ korral leidub selline naturaalarv $k$, et $p^k$ kümnendesituse lõpus on $n$ nulli ja number 1.

**26.** Koordinaattasandil on märgistatud 5 täisarvuliste koordinaatidega punkti ning ühendatud paarikaupa lõikudega. Tõesta, et nende lõikude keskpunktide seas leidub vähemalt üks, mille koordinaadid on samuti täisarvud.

# II Matemaatiline induktsioon

**Näide.** Tõesta, et

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Lahendus.** Kontrollime kõigepealt võrduse kehtivust juhul $n = 1$. Sel juhul on vasakul pool 1 ja paremal pool $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Järelikult juhul $n = 1$ väide kehtib.

Eeldame nüüd, et võrdus kehtib mingi arvu $n = k$ korral ja näitame, et sellest järeldub võrduse kehtivus $n = k + 1$ jaoks. Olgu siis $n = k + 1$; teisendades saame

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + (n-1) + n &= 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \overset{(*)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\
&= \frac{n(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

kusjuures märgiga (*) tähistatud kohas kasutasime eeldust. Tuleb välja, et võrduse kehtivusest mingi arvu $n = k$ jaoks järeldub võrduse kehtivus järgmise arvu $n = k + 1$ jaoks. Matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt kehtib võrratus iga arvu $n \in \mathbb{N}$ korral. $\square$

**1.** Tõesta järgmised väited:

a) $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ jagub 19-ga iga täisarvu $n \geqslant 0$ korral;

b) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jagub 133-ga iga naturaalarvu $n$ korral;

c) kui $n > 1$, siis $2^{2^n} + 1$ lõpeb 7-ga.

**2.** Tõesta võrdused:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$;

d) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$;

e) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

**3.** Tõesta, et kui $n$ positiivse reaalarvu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korral $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \frac{1}{2}$, siis $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant \frac{1}{2}$.

**4.** Tõesta induktsiooniga, et kumera $n$-nurga sisenurkade summa $S_n$ avaldub valemiga $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

**5.** Tõesta, et tasandil asuvad $n$ sirget tekitavad ülimalt $\frac{n^2+n+2}{2}$ piirkonda.

**6.** Läbi ühe punkti pannakse $n$ tasandit nii, et ükski kolm neist ei lõiku mööda sama sirget. Tõesta, et need tasandid jaotavad ruumi $n^2 - n + 2$ osaks.

**7.** Loeme, et kogum tasandeid on üldasendis siis, kui igal kahel tasandil leidub ühine lõikesirge ja igal kolmel tasandil leidub ühine lõikepunkt, kusjuures need lõikesirged ja lõikepunktid on kõik erinevad. Tõesta, et $n$ üldasendis tasandit jaotavad ruumi $\frac{n^3+5n+6}{6}$ osaks.

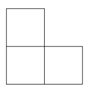
**8.** Ringmaanteel, mille pikkus on 100 km, seisab $n$ autot. Neil on ühtekokku nii palju bensiini, et katta 101 km. Tõesta, et leidub üks auto, mis, alustades oma bensiiniga ja kogudes teel bensiini ülejäänud autodelt, võib läbida täisringi. (Bensiini tohib võtta ainult siis, kui autod on kõrvuti; autot lükata ei tohi.

**9.** Naturaalarvudest koostatakse rombid küljepikkusega 1, 2, 3, ... allnäidatud viisil. Leia $n$-nda rombi arvude summa ja tõesta saadud valemi õigsus induktsiooniga.

$$
1 \qquad
\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array} \qquad
\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array} \qquad
\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}
$$

**10.** Linnas elab $n$ latatara, kusjuures $n \geqslant 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada mingi uudise. Tõesta, et on võimalik organiseerida telefonikõned niiviisi, et pärast $2n-4$ kõnet teab iga latatara iga ülejäänu uudist.

**11.** Malelaual mõõtmetega $2^n \times 2^n$ ruutu värvitakse üks vabalt valitud ruut punaseks. Tõesta, et malelaua saab katta kolmeruuduliste $L$-kujuliste tükkidega nii, et nähtavale jääb ainult punane ruut.



Leia viga järgmises kahes „tõestuses”.

**12.** Kõik linnud on ühte värvi.

**Baas.** Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

**Samm.** Eeldame, et väide kehtib $k$ linnu korral. Vaatleme $k+1$ lindu $L_1, \ldots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \ldots, L_k$ on ühte värvi. Jättes välja esimese linnu, näeme, et ka linnud $L_2, \ldots, L_{k+1}$

on ühte värvi. Siit järeldub, et lind $L_{k+1}$ on sama värvi nagu linnud $L_1$, ..., $L_k$, seega on kõik $k+1$ lindu ühte värvi.

**13.** Kõik positiivsed täisarvud on omavahel võrdsed. Märkigu tähis $\max(x, y)$ arvude $x$ ja $y$ seast suurimat. Tõestame väite induktsiooniga arvu $\max(x, y)$ väärtuse järgi.

**Baas.** Kui $\max(x, y) = 1$, siis peab olema $x = y = 1$, sest tegemist on positiivsete täisarvudega.

**Samm.** Eeldame, et väide kehtib arvude puhul, mille maksimum on $k$. Olgu nüüd arvud $x$ ja $y$ sellised, et $\max(x, y) = k+1$. Viimane võrdus on samaväärne võrdusega $\max(x-1, y-1) = k$. Induktsiooni eelduse põhjal $x - 1 = y - 1$, millest $x = y$.

# III Graafid

Graaf $\mathsf{G} = \langle V, E\rangle$ koosneb **tippude** hulgast $V$ ja tippusid kahekaupa ühendavate **servade** hulgast $E$. Tippude hulk ei tohi olla tühi. Graafi, milles ei leidu *silmuseid* (servi tipust tema endani) ning *kordseid servi* (kahe tipu vahel rohkem kui üks serv), nimetatakse **lihtgraafiks**.

Graafina võime vaadelda näiteks:

1) punkte ja nendevahelisi jooni tasandil või ruumis, kui pole oluline punktide paigutus, joonte kuju ja lõikumine väljaspool punkte;
2) linnu ja nendevahelisi maanteid, lennu- või rongiliine;
3) ristmikke ja nendevahelisi tänavalõike linnas;
4) tube ja nendevahelisi uksi majas;
5) inimesi ja nendevahelisi tutvus-, sõprus- vm. suhteid;
6) mingi mängu seise ja ühest seisust teise viivaid käike.

Graafi tipu **valentsiks** nimetatakse sellest lähtuvate servade arvu.

**Teeks** graafi tipust $x$ tippu $y$ nimetatakse lõplikku servade järjendit $xa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_n, a_ny$. Teed, mis ei sisalda ühtegi serva rohkem kui üks kord, nimetatakse **ahelaks**. Mittetühja ahelat, mille algus- ja lõpptipp langevad kokku, nimetatakse **tsükliks**.

Graafi nimetatakse **sidusaks**, kui selle mistahes kahe tipu jaoks leidub neid ühendav tee.

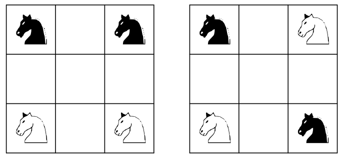
Graafi, mille kõik servad on varustatud suunaga, nimetatakse **orienteeritud** graafiks. Kui kõik servad on ilma suunata, räägitakse **orienteerimata** graafist.

Tsüklit, mis sisaldab graafi iga serva täpselt ühe korra ja läbib iga tippu, nimetatakse **Euleri**[2] **tsükliks**. Ahelat, mis sisaldab graafi iga serva täpselt ühe korra ja läbib iga tippu, nimetatakse **Euleri ahelaks**.

Sidusat tsükliteta lihtgraafi nimetatakse **puuks**. Igal sidusal lihtgraafil leidub *aluspuu*, st. niisugune puu, mille tipud langevad kokku esialgse graafi tippudega ning mille servade hulk on antud graafi servade hulga alamhulk.

[2]Leonhard Euler (1707–1783), šveitsi matemaatik.

**1.** $3 \times 3$ laual on kaks valget ja kaks musta ratsut. Kas on võimalik ratsudel malekäikude abil saada olukorrast a) olukorda b)?



a) b)

**2.** Tõesta, et igas graafis on valentside summa paarisarv.

**3.** Tõesta, et igas graafis on paaritu valentsiga tippe paarisarv.

**4.** Tõesta, et igal peol leidub kaks inimest, kes tunnevad sama arvu teisi peolisi.

**5.** Tõesta, et 51 inimesega peol leidub alati inimene, kes tunneb paarisarvu teisi inimesi.

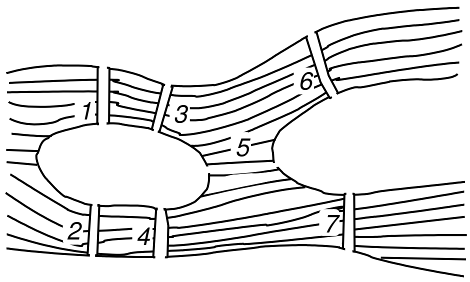
**6.** Olgu $\mathsf{T}$ lihtgraaf, millel on $n$ tippu. Tõesta, et järgmised väited on kõik üksteisega samaväärsed.

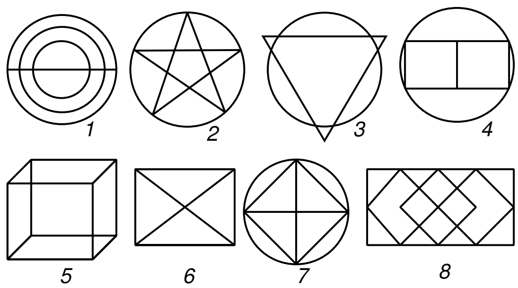
a) $\mathsf{T}$ on puu (st. sidus ja tsükliteta).
b) $\mathsf{T}$ on tsükliteta graaf, millel on $n-1$ serva.
c) $\mathsf{T}$ on sidus graaf, millel on $n-1$ serva.
d) $\mathsf{T}$ on sidus ning iga tema serv on *sild* (selline serv, mille kustutamisel graafi sidusus kaob).
e) $\mathsf{T}$ suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks *lihtahel* (ahel, milles ükski tipp ei esine korduvalt).
f) $\mathsf{T}$ on tsükliteta, aga mistahes uue serva lisamisel tekib tsükkel.

**7.** Linnas $M$ võib mistahes metroojaamast mistahes teise sõita (võib-olla ümberistumisega). Tõesta, et leidub jaam, mille võib remondiks sulgeda, nii et kõigist teistest jaamadest saab kõigisse teistesse sõita nagu ennegi.

**8.** (Euler, 1736) Königsbergis (praegu Kaliningrad) oli Euleri ajal 7 silda, mis ühendasid Pregeli jõe kaldaid saartega. Kas võib jalutuskäigul linnas läbida kõik seitse silda, ületamata ühtki neist kahte korda?

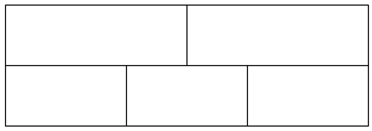
**9.** Milliseid kujunditest 1–8 on võimalik joonistada pliiatsit paberilt tõstmata ja juba tõmmatud joont üle joonistamata?




**10.** Tõesta **Euleri teoreem**: Lõplikus rohkem kui ühe tipuga sidusas graafis $\mathsf{G}$ leidub Euleri tsükkel parajasti siis, kui $\mathsf{G}$ kõigi tippude valentsid on paarisarvud.

**11.** (NL 1961, 8. klass) On antud 16 lõigust koosnev kujund. Tõesta, et ei leidu kõverat, mis lõikaks kõiki lõike täpselt üks kord. Kõver ei tarvitse olla kinnine, võib ennast lõigata, kuid ei tohi lõike puutuda ega läbida lõikude otspunkte.



**12.** Matemaatikaringi kogunemisele tuli 10 õpilast, kellele esitati 10 ülesannet. Iga ülesande lahendas ära kaks õpilast ning iga õpilane lahendas ära kaks ülesannet. Tõesta, et võib korraldada lahenduste ettekandmise sel viisil, et iga õpilane räägiks ühe oma lahenduse ning kõigi ülesannete lahendused saaksid ette kantud.

**13.** Tõesta, et mistahes kuue inimese seas leiduvad kolm sellist, kes paarikaupa tunnevad üksteist, või kolm sellist, kes paarikaupa üksteist ei tunne.

**14.** (Austraalia, 1998) Härra ja proua Mäger läksid piknikule, kus peale nende osales veel 4 abielupaari. Kohale jõudes tervitasid mõned neist oma paremaid sõpru kättpidi, kuid keegi ei surunud seejuures kätt oma abikaasal. Peo edenedes tekkis hr. Mägral huvi, kui paljudega keegi neist oli kätelnud, ning ta küsis seda kõigilt teistelt (sh. ka oma abikaasalt). Kui mitme piknikul viibijaga kätles hr. Mäger, kui kõik 9 küsitletut andsid hr. Mägrale erinevad vastused?

**15.** (Lõuna-Aafrika Vabariik, 1997) Klassi poisid korraldasid maadlusvõistluse, kus iga poiss maadles ühe korra igaühega ülejäänutest ning iga kohtumine lõppes ühe maadleja võiduga. Tüdrukud otsustasid anda auhinna igale poisile, kes võidab igaüht ülejäänutest kas omavahelises kohtumises või kaudselt (ütleme, et poiss $A$ võidab kaudselt poissi $B$, kui leiduvad poisid $C_1, \ldots, C_k$, nii et $A$ võidab $C_1$, $C_1$ võidab $C_2$, $\ldots$, $C_k$ võidab $B$-d).

a) Kui palju võis $n$ poisi korral maksimaalselt olla auhinnasaajaid?

b) Kas on võimalik, et ükski poistest ei saanud auhinda?

c) Tõesta, et kui auhinna sai ainult üks poiss, siis ta võitis kõik kohtumised.

# IV Invariandid ja värvimised

Olgu meil objekt $\mathcal{O}$. **Invariandiks** nimetatakse objektiga $\mathcal{O}$ tehtava teisenduse sellist omadust, mis jääb teisenduse käigus muutumatuks.

Näiteks kui ruumis on alguses 58 inimest ja neid tuleb sinna juurde või läheb ära alati 7-kaupa, siis on invariandiks inimeste arvu jääk 7 järgi. Kas saab mingil ajahetkel ruumis olla 1000 inimest?

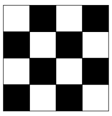
Invariandiülesannete tüüpiliseks sõnastuseks on: „Kas on võimalik … [mingi teisendus] abil saada … [mingi lõppolek]?“

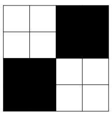
Sellisel ülesandel saab olla kaht sorti lahendusi. Kui vastus küsimusele on jaatav, siis tuleb ära näidata teisenduste tegemise järjekord ning veenduda, et saavutati soovitud lõppolek. Kui aga vastus on eitav, tuleb leida teisendusele sobiv invariant, ning põhjendada, et algolekus ja lõppolekus on invariandi väärtused erinevad.

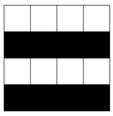
Ülalesitatud ülesandes on vastus eitav, kuna 58 (algolek) jääk 7 järgi on 2, aga 1000 (lõppolek) jääk 7 järgi on 6.

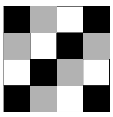
Levinud invariante ja värvimisi:

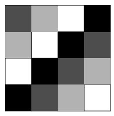
1) arvude summa või korrutis;
2) arvu jääk mingi mooduli järgi;
3) arvu ruudu vm. astme jääk mingi mooduli järgi (mooduliks sobivad hästi 3, 5, 7, 8 jne.)
4) arvu täisarvulisus;
5) malendite käikude invariandid (diagonaalid, ruutude värvid jne.);

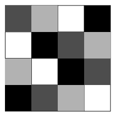
6) 

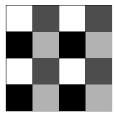
7) 

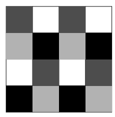
8) 

9) 

10) 

11) 

12) 

13) 

**1.** Rahaautomaat annab raha peeneks vahetades iga mündi asemele alati viis münti. Kas selle automaadi abil on võimalik ühte metallmünti vahetada 26-ks mündiks?

**2.** Malelauast lõigatakse välja üks nurgaruut. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada $2 \times 1$ tükkideks?

**3.** Malelauast lõigatakse välja kaks teineteise vastas asuvat nurgaruutu. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada $2 \times 1$ tükkideks? Kuidas on juhul, kui lõigatakse kaks sama servaga piirnevat nurgaruutu.

**4.** $12 \times 12$ ruudust, mis koosnes 144 ühikruudust, lõigati kolmest nurgast ära üks ruut mõõtmetega $1 \times 1$. Kas järelejäänud kujundit, mis koosnes 141-st ühikruudust on võimalik katta 47 ristkülikuga, millede mõõtmed on $1 \times 3$, nii et iga ristkülik kataks täpselt kolme ühikruutu?

**5.** Olgu meil malelaual ratsu asemel „sõjaratsu“, kes liigub kolm sammu mingis suunas ja ühe sammu kõrvale. Kas sõjaratsu saab mingist ruudust alustades kõik malelaua ruudud läbi käia?

**6.** Tahvlil on arvud 1, 2, ..., 2000. Tahvlilt kustutatakse samm-sammult kaks arvu ja kummagi asemel kirjutatakse nende arvude aritmeetiline keskmine. Kas mingi lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud 1000, 1000, ..., 1000?

**7.** Tahvlile kirjutatakse ritta arvud 1, 2, ..., 1996. Edasi tegutsetakse nii, et igal sammul kustutatakse rea algusest kaks arvu ära ja kirjutatakse nende korrutis rea lõppu juurde. Milline arv jääb lõpuks ainsana tahvlile?

**8.** Tünnis on 2008 õuna. Mari ja Jüri võtavad vaheldumisi tünnist õunu, kusjuures korraga võib võtta ühe kuni kolm õuna ning esimesena võtab õunu Mari. Tõesta, et Jüri saab alati tagada endale võimaluse võtta tünnist viimane õun.

**9.** Nummerdame korrapärase viisnurga küljed ja diagonaalid arvudega 1, 2, ..., 10 ja vaatleme kõikvõimalikke kolmnurki, mille tippudeks on esialgse viisnurga tipud. Kas on võimalik, et kõigi selliste kolmnurkade külgede arvude summad osutuvad võrdseks?

**10.** Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades a) kahte b) kolme värvi. Tõesta, et alati leidub kaks sama värvi punkti, mille vaheline kaugus on 1 ühik.

**11.** Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi (sealjuures mõlemat värvi punkte esineb). Tõesta, et alati leidub kaks eri värvi punkti, mille vaheline kaugus on 1 ühik.

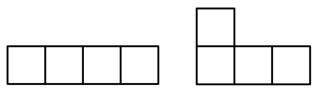
**12.** Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi. Tõesta, et sel tasandil leidub võrdhaarne kolmnurk, mille kõik tipud on sama värvi.

**13.** Tasandil on osa täisarvuliste koordinaatidega punkte värvitud valgeks ja kõik ülejäänud mustaks. Tõesta, et leidub võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja ühte värvi.

**14.** Korrapärase seitsenurga tipud on värvitud kahte värvi – valgeks ja mustaks. Tõesta, et nende seas leidub kindlasti kolm sama värvi tippu, mis on tippudeks võrdhaarsele kolmnurgale. Kas analoogne väide kehtib ka korrapärase kaheksanurga korral?

**15.** Hiir hakkab sööma juustust kuubikut, mille serva pikkus on 3 ja mis on jaotatud 27-ks ühikkuubiks. Kui hiir on ära söönud mingi ühikkuubi, hakkab ta sööma järgmist ühikkuupi, millel oli eelnevaga ühine tahk. Kas hiir saab ära süüa kõik ühikkuubid peale keskmise?

**16.** Tõesta, et $8 \times 8$ ruudustikku ei saa tükeldada 15-ks joonisel näidatud tükiks $A$ ja üheks tükiks $B$.



**17.** Tõesta, et $102 \times 102$ ruudustikku ei saa tükeldada ainult ristkülikuteks mõõtmetega $1 \times 4$.

**18.** Ruudukujuline põrand mõõtmetega $100 \times 100$, välja arvatud $2 \times 2$ tükk, tuleb katta $1 \times 3$ plaatidega. Kas see on võimalik, kui $2 \times 2$ põrandatükk asub a) täpselt põranda keskel; b) põranda ühes nurgas?

**19.** Ruudustiku $5 \times 5$ igal ruudul istub üks konn. Teatud ühel ja samal hetkel hüppab iga konn naaberruudule, mis omas esialgsega ühist serva. Tõesta, et pärast hüppamist jääb ruudustikku vähemalt üks tühi ruut.

**20.** Ristkülikukujulise karbi põhi täideti tükkidega $2 \times 2$ ja $1 \times 4$ ruutu. Tükid võeti karbist välja ja üks $2 \times 2$ tükk kaotati ära. Selle asemel leiti üks $1 \times 4$ tükk. Tõesta, et nüüd ei saa karbi põhja nende tükkidega katta.

**21.** Kas $7 \times 7$ ruudustikust on võimalik välja lõigata üks ruut selliselt, et järelejäänud ruudustikku ei saa katta 15 $1 \times 3$ ruudust koosneva kujundiga ning ühe kolmest ruudust koosneva L-kujulise kujundiga?

**22.** $8 \times 8$ malelaud on tükeldatud 1 ühikruuduks ja 21 ristkülikuks kujuga $1 \times 3$. Millised on ühikruudu võimalikud asukohad?

# V Loogika

### Sisulised loogika ülesanded (hulkadevahelise vastavuse leidmine)

Neid ülesandeid on võimalik lahendada võimaluste läbivaatamisega, seejuures sobivalt valitud skeemid ja tabelid lihtsustavad ülesande lahendamist.

**1.** Kokku said kolm sõpra, kelle perenimed olid Valge, Hall ja Must. Ühel neist oli valge särk, teisel oli hall ja kolmandal must särk. Valges särgis sõber ütles Mustale: „Huvitav, ühelgi meist ei ühti särgi värvus tema perenimega". Millist värvi särki kandis iga sõber?

**2.** Kolm klassiõde Viire, Iiris ja Sirje on õpetajad ja nad õpetavad matemaatikat, füüsikat ja kirjandust Tartu, Räpina ja Kuressaare koolides. Viire ei tööta Räpinas, Iiris ei tööta Tartus, tartlane õpetab kirjandust, Räpinas töötav õpetaja ei õpeta füüsikat, Iiris ei õpeta matemaatikat. Millist ainet ja millises linnas õpetab iga kolmest klassiõest?

Mõnikord on võimaluste vaatlemisel kasulik kõrvale heita võimatud sündmused.

**3.** Majas elab $A$, tema naine $B$ ja kolm last $C$, $D$ ja $E$. Järgmised väited nende kohta on õiged:

a) Kui $A$ vaatab telerit, siis ka $B$ vaatab telerit.
b) Vähemalt üks lastest $D$ ja $E$ vaatab telerit.
c) Täpselt üks elanikest $B$ ja $C$ vaatab telerit.
d) Lapsed $C$ ja $D$ kas vaatavad korraga või ei vaata kumbki telerit.
e) Kui $E$ vaatab telerit, siis vaatavad ka $A$ ja $D$.

Kes vaatab ja kes ei vaata telerit?

**4.** Valitseja andis kummalegi oma kahest targast ühe kaardi nii, et nad teise kaarti ei näinud ja lausus: „Kummalgi kaardil on üks positiivne täisarv, kusjuures need arvud erinevad ühe võrra". Valitseja küsis esimeselt targalt: „Milline arv on teise targa kaardil?" ja sai vastuseks. „Ei tea". Seejärel küsis ta teiselt targalt, kas see teab, milline arv on esimese targa kaardil. Ka teine vastas: „Ei tea". Taas küsis valitseja sama küsimuse esimeselt targalt ja sai ikka täpselt sama vastuse. Kui ta nüüd küsis teist korda teiselt targalt, siis see ütles, milline arv oli esimese targa kaardil. Millised arvud olid kaartidel ja kuidas arutles teine tark?

### Tõesed ja valed väited. Tõerääkijad (rüütlid), valetajad ja kavalpead

**5.** Mitu raamatut võib Margusel olla, kui ainult üks järgmistest väidetest on tõene?

a) Raamatuid on rohkem kui 1000.
b) Raamatuid on vähem kui 1000.
c) Üks raamat on tal kindlasti olemas.

**6.** Viie võistleja lõpptulemuste kohta saadi viis järgmist kaheosalist väidet:

a) Kalju sai I koha, Valeri aga IV koha;
b) Siim sai II koha, aga Valeri sai IV koha;
c) Siim sai II koha, aga Kalju jäi III kohale;
d) Tiit sai I koha, Meelis aga II koha;
e) Meelis sai III koha, Tiit aga V koha.

Koosta võistlejate paremusjärjestus, kui on teada, et igas väites on üks osa tõene, teine aga väär.

**7.** Kohus arutab Brauni, Johansoni ja Simsoni süüasja. Üks neist sooritas kuriteo. Ülekuulamisel tegi igaüks neist kaks avaldust.
Braun: „Mina seda ei teinud. Simson tegi seda."
Johanson: „Simson ei ole süüdi. Braun tegi seda."
Simson: „Mina seda ei teinud. Johanson ei teinud seda."
Kohus tegi kindlaks, et üks süüalustest valetas mõlemal korral, teine rääkis mõlemal korral tõtt, kolmanda üks väidetest oli õige, teine aga vale. Kes sooritas kuriteo?

**8.** Olgu $x$ naturaalarv. Järgmistest väidetest $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$ ja $x > 5$ on kaks õiget ja kolm vale. Millega on võrdne $x$?

**9.** Nelja saareelaniku vahel toimus järgmine vestlus:

a) Vähemalt üks meist on valetaja.
b) Vähemalt kaks meist on valetajad.
c) Vähemalt kolm meist on valetajad.
d) Meie seas pole valetajaid.

Kes neljast rääkis tõtt, kes valetas?

## Kallamisülesanded

**10.** Meie käsutuses olevate anumate mahtuvus on 3 liitrit ja 5 liitrit. Vett saame kraanist ja seda ära kallata saame kraanikaussi. Kuidas saada 1 liiter vett?

**11.** Laual on kaks liivakella, millega saab mõõta vastavalt 7 minutit ja 11 minutit. Muna keetmiseks kulub 15 minutit. Kuidas keeta muna nii, et kellade ümber pööramisi oleks võimalikult vähe?

**12.** Kolmes hunnikus on 22, 14 ja 12 pähklit. Kolme ümbertõstmise abil võrdsusta pähklite arvud kuhjades. Seejuures võib ühe ümbertõstmisega ühest kuhjast võtta ja lisada teise kuhja täpselt nii palju pähkleid, kui on teises kuhjas sel hetkel juba olemas.

**13.** On antud kaks pudelit lahustega, mille kontsentratsioonid on erinevad. Ühes pudelis on 0,5 liitrit lahust, teises aga 0,3 liitrit. Võeti kaks ühesugust klaasi ja täideti ääreni (kumbki erinevast pudelist) ning seejärel kallati mõlemad klaasid tühjaks klaasis olevast lahusest erineva lahusega pudelisse. Tulemusena saadi mõlemas pudelis ühesuguse kontsentratsiooniga lahus. Milline oli klaaside mahtuvus?

### Kaalumisülesanded

**14.** On $n$ väliselt ühesugust münti, millede seas on üks teistest kergem valemünt. Kuidas on võimalik kangkaaludel ilma kaaluvihtideta määrata valemünt vähima kaalumiste arvuga juhul kui a) $n = 3$; b) $n = 9$; c) $n = 27$; d) $n$ on suvaline naturaalarv? (Saab näidata, et kui müntide arv rahuldab tingimust $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$, siis vähim kaalumiste arv on $k$.)

**15.** Nelja mündi seas on üks valemünt, mis erineb teistest kaalu poolest. Kuidas oleks seda münti võimalik kindlaks teha kahe kaalumisega kangkaaludel ilma kaaluvihtideta? Kas on võimalik kindlaks määrata ka seda, kas valemünt on kergem või raskem normist?

**16.** On 10 kotti müntidega. Üheksas kotis on õiged mündid (massiga 10 g igaüks), ühes kotis aga valemündid (massiga 11 g). Kuidas ühe kaalumisega osutiga kaaludel määrata kindlaks valemüntide kott?

**17.** Kuidas oleks võimalik teada saada koorma massi, kui meil on kangkaalud, mis ei ole õiged, aga vajalikul arvul kaaluvihte, mis on õiged?

# Peatükk 3

# Geomeetria

## I Nurgad

**Nurk** – tasandi osa, mille eraldavad kaks ühise alguspunktiga kiirt, enamasti „väiksem“ osa tasandist; tähis $\angle ABC$, kus $B$ on nurga tipp, $BA$ ja $BC$ nurga haarad
**Sirgnurk** – nurk, mille haarad on teineteise pikendid (haarad asetsevad ühel sirgel); kraadimõõdus $180°$
**Kõrvunurgad** – nurgad, millel on üks ühine haar ning kaks ülejäänud haara moodustavad sirgnurga; kõrvunurkade summa $180°$
**Tippnurgad** – kahe sirge lõikumisel tekkivad võrdsed nurgad, millest ühe haarad on teise haarade pikendid
Kolmnurga nurkade summa $180°$ (tõestuses kasutame sirgete paralleelsuse tunnuseid)
Kolmnurga **välisnurk** on võrdne temaga mitte kõrvuti olevate sisenurkade summaga.
Kolmnurga pikima külje vastas asub suurim nurk, suurima nurga vastas asub pikim külg.
**Nurgapoolitaja omadus**: Punkt asub nurgapoolitajal parajasti siis, kui ta asub nurga haaradest võrdsel kaugusel.
Sellest tulenev **puutuja omadus**: Mingist punktist ringjoonele tõmmatud puutujalõigud on võrdsed.

## II Kahe paralleelse sirge lõikamine kolmandaga

Kaht sirget tasandil nimetatakse paralleelseiks, kui neil ei ole ühiseid punkte. (St sirge ei ole paralleelne iseendaga.)
Kaks sirget on paralleelsed, kui nende sirgete lõikamise kolmanda sirgega tekkinud **kaasnurgad** on võrdsed (**põiknurgad** on võrdsed, **lähisnurkade** summa on $180°$)

## III Kolmnurk ja selle liigid

Kolmnurkade liigitus nurkade järgi – teravnurkne, täisnurkne, nürinurkne.
Kolmnurkade liigitus külgede järgi – võrdkülgne, võrdhaarne, erikülgne.

**Kolmnurga võrratus.** Positiivsed reaalarvud $a, b, c$ on mingi kolmnurga küljepikkused parajasti siis, kui $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$.

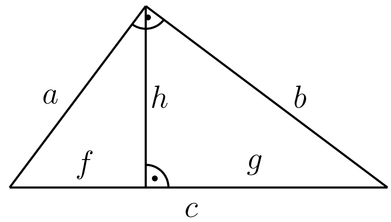
**Sarnasus.** Kaks $n$-nurka on sarnased, kui nende vastavad küljed on võrdelised ja vastavad nurgad on võrdsed. Kolmnurkade sarnasuseks piisab kas vastavate külgede võrdelisusest või vastavate nurkade võrdsusest.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui

- ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega **(KKK)**;
- ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga **(NN)**;
- ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ning nende külgede vahelised nurgad on võrdsed **(KNK)**;
- ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ning nurk, mis asub ühes kolmnurgas nimetatud küljepaari pikema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas **(KKN)**.

Täisnurkses kolmnurgas kehtivad järgmised seosed:

- Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab kolmnurga kaheks esialgse kolmnurgaga sarnaseks kolmnurgaks.
- $h^2 = fg$ (kõrguse teoreem)
- $a^2 = fc$, $b^2 = gc$ (Eukleidese teoreem)
- $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagorase teoreem)




# IV Lõigud kolmnurgas

Kolmnurga **mediaanid** lõikuvad ühes punktis – kolmnurga masskeskmes. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes 2:1 tipust alates.

Kolmnurga **nurgapoolitajad** lõikuvad ühes punktis – kolmnurga siseringjoone keskpunktis. Kolmnurga nurgapoolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mis suhtuvad nagu poolitatava nurga lähisküljed.

Kolmnurga **kõrgused** lõikuvad ühes punktis.

Kolmnurga külgede **keskristsirged** lõikuvad ühes punktis – kolmnurga ümberringjoone keskpunktis.

# V Ülesanded

1. Tõesta, et kolmnurga võrratus on samaväärne ahelvõrratusega $a + b > c > |a - b|$.
2. Tõesta, et kui $c$ on kolmnurga pikim külg, on kolmnurga võrratus antav ainult ühe võrratusega $a + b > c$.
3. Tõesta, et mistahes kinnise murdjoone $ABCD$ korral $|AD| > |AB| - |BC| - |CD|$.

**4.** Võrdkülgse kolmnurga $ABC$ sees valitakse suvaliselt punkt $P$. Tõestage, et lõikudest $PA$, $PB$ ja $PC$ saab uuesti konstrueerida kolmnurga.

**5.** Tõesta, et kolmnurga tippu ja selle vastaskülje mingit punkti ühendav sirglõik (nn. *tseviaan*) on lühem kolmnurga poolest ümbermõõdust.

**6.** Tõesta, et nelinurga mistahes sisepunkti kauguste summa selle nelinurga tippudest on suurem nelinurga poolest ümbermõõdust. (Veendu, et tulemus on õige ka mittekumera nelinurga korral.)

**7.** Punktid $K$, $L$ ja $M$ on kolmnurga $ABC$ sisepunktid, mis ei asetse ühel sirgel. Tõesta, et kolmnurga $KLM$ ümbermõõt on väiksem kolmnurga $ABC$ ümbermõõdust.

**8.** Tõesta, et teravnurkse kolmnurga kõrguste pikkuste summa on suurem kolmnurga poolest ümbermõõdust, kuid väiksem selle ümbermõõdust. Too näide, et väide ei tarvitse kehtida nürinurkse kolmnurga puhul.

**9.** Tõesta, et trapetsi diagonaali pikkuste summa on väiksem trapetsi ümbermõõdust.

**10.** Tõesta, et kahe erineva, kuid ühel tasandil asuva ning vähemalt üht ühist punkti omava ringjoone keskpunktide $O_1$ ja $O_2$ vaheline kaugus $|O_1O_2|$ ei ületa nende ringjoonte raadiuste $r_1$ ja $r_2$ summat $r_1 + r_2$. Millal kehtivad võrdused $|O_1O_2| = r_1 + r_2$ või $|O_1O_2| = |r_2 - r_1|$?

**11.** Täisnurkse kolmnurga $ABC$ täisnurga tipust $A$ tõmmatud kõrguse aluspunkt $D$ asub kaatetist $AB$ kaugusel $m$ ja kaatetist $AC$ kaugusel $n$. Tõesta, et:
1) $\triangle CDA \sim \triangle ADB$ ja leia sarnasustegur;
2) $|AB| : |BC| = m : (m^2 + n^2)$;
3) $|AC| : |BC| = n : (m^2 + n^2)$.

**12.** Tõesta, et ringjoonele samast punktist tõmmatud puutujalõigud on võrdsed.

**13.** Tõesta, et kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui kokku langevad kaks kolmest lõigust: kõrgus, nurgapoolitaja, mediaan.

**14.** Punkt $D$ on kolmnurga $ABC$ nurgapoolitaja $CD$ aluspunkt küljel $AB$. Tõesta, et $|AC| : |CB| = |AD| : |DB|$.

**15.** Võrdhaarse kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid paiknevad sümmeetriliselt kolmnurga aluse suhtes. Tõesta, et selle kolmnurga alusnurk on $36°$.

**16.** Tõesta, et täisnurkse kolmnurga siseringjoone diameeter $2r$ avaldub kaatetite $a$ ja $b$ ning hüpotenuusi $c$ kaudu kujul $2r = a + b - c$.

**17.** Tõesta, et kolmnurga pindala $S$ avaldub siseringjoone raadiuse $r$ ja poole ümbermõõdu $p$ kaudu kujul $S = pr$.

**18.** Kolmnurga $ABC$ siseringjoon puutub küljega $AC$ punktis $M$ ja küljega $BC$ punktis $L$ nii, et $|AM| : |MC| = 2 : 3$ ja $|BL| : |LC| = 5 : 6$. Tõesta, et selle kolmnurga pindala $S$ avaldub kujul $S = 1{,}5|AC| \cdot r$, kus $r$ on kolmnurga $ABC$ siseringjoone raadius.

**19.** Täisnurkse kolmnurga $ABC$ siseringjoone raadius on $r$ ja ümberringjoone raadius $R$. Kolmnurga $ABC$ täisnurga tipust tõmmatud kõrgus $h$ jaotab kolmnurga $ABC$ kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille siseringjoonte raadiused, täisnurga tipust tõmmatud kõrgused ja ümberringjoonte raadiused olgu vastavalt $r_1$ ja $r_2$, $h_1$ ja $h_2$ ning $R_1$ ja $R_2$. Tõesta, et

1) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$;
2) $h^2 = h_1^2 + h_2^2$;
3) $R^2 = R_1^2 + R_2^2$.

**20.** Tõesta, et trapetsi diagonaalide lõikepunkt poolitab seda punkti läbiva ja alustega paralleelse lõigu trapetsi haarade vahel.

**21.** Tõesta, et trapetsi diagonaalide lõikepunkti läbiva ja alustega paralleelse lõigu pikkus võrdub aluste pikkuste korrutise ja kesklõigu pikkuse jagatisega.

**22.** Trapetsi diagonaalide pikkused on $d_1$ ja $d_2$, kõrguse pikkus aga $h$. Tõesta, et selle trapetsi kesklõigu pikkus $k$ avaldub kujul

$$k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2}\right).$$

**23.** Rööpküliku $ABCD$ küljele $AD$ on märgitud punkt $P$ nii, et $|AP| : |AD| = 1 : n$. Lõikude $AC$ ja $BP$ lõikumiskoht on tähistatud $Q$. Tõesta, et $|AQ| : |AC| = 1 : (n+1)$.

**24.** Punktid $A$ ja $B$ eraldavad ringjoonest keskpunktiga $O$ välja kaare pikkusega $60°$. Sellel kaarel on võetud punkt $M$. Tõesta, et sirge, mis läbib lõikude $MA$ ja $OB$ keskpunkte, on risti sirgega, mis läbib $MB$ ja $OA$ keskpunkte.

# VI Hulknurk

Hulknurka nimetatakse **kõõlhulknurgaks**, kui kõik tema tipud asuvad ühel ringjoonel. Hulknurka nimetatakse **puutujahulknurgaks**, kui kõik tema küljed puutuvad ühte ringjoont.

**Teoreem 1.** Kõõlnelinurga vastasnurkade summa on $180°$.

**Teoreem 2.** Kui nelinurga vastasnurkade summa on $180°$, on tegemist kõõlnelinurgaga.

**Teoreem 3.** Puutujanelinurga vastaskülgede pikkuste summad on võrdsed.

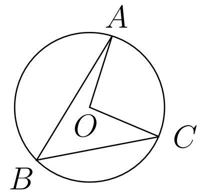
**Teoreem 4.** Kui kumera nelinurga vastaskülgede pikkuste summad on võrdsed, on tegu puutujanelinurgaga.

Millistel nelinurkadel leidub ümberringjoon/siseringjoon?

| | ümberringjoon | siseringjoon |
|---|---|---|
| ruut | | |
| ristkülik | | |
| romb | | |
| rööpkülik | | |
| suvaline kumer 4-nurk | | |
| trapets | | |

# VII Ringjoonega seotud nurgad

**Teoreem 1.** Kaarele toetuv kesknurk on kaks korda suurem samale kaarele toetuvast piirdenurgast, st $\angle AOC = 2\angle ABC$.

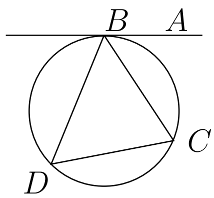



1. Tõesta, et kõik samale kaarele (võrdse pikkusega kõõlule) toetuvad piirdenurgad on võrdsed.
2. Tõesta, et võrdse suurusega piirdenurgad toetuvad sama pikkadele kõõludele (sama suurtele kaartele).
3. Tõesta, et ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.
4. Tõesta, et kolmnurgas $ABC$ kehtib seos
$$\frac{|BC|}{\sin\angle BAC} = 2R,$$
kus $R$ tähistab kolmnurga $ABC$ ümberringjoone raadiust.
5. Tõesta, et kõõlnelinurgas $ABCD$ kehtib võrdus $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.
6. Olgu tasandil antud kaks erinevat punkti $A$ ja $C$ ning nurgasuurus $\alpha$. Leia kõigi selliste tasandi punktide $B$ hulk, et kehtiks võrdus $\angle ABC = \alpha$.
7. Tõesta, et kui kumeras nelinurgas $ABCD$ kehtib võrdus $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, siis saab läbi punktide $A$, $B$, $C$ ja $D$ joonestada ringjoone (st nelinurk $ABCD$ on kõõlnelinurk).
8. Olgu tasandil antud neli erinevat punkti $A$, $B$, $C$ ja $D$, kusjuures $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Tõesta, et läbi punktide $A$, $B$, $C$ ja $D$ saab joonestada ringjoone.
9. Tasandil on antud sirged $s$, $t$, $u$, ja $v$, kusjuures $s \perp u$, $t \perp v$, nurk sirgete $s$ ja $t$ vahel on $\alpha$ ning nurk sirgete $u$ ja $v$ vahel on $\beta$. Tõesta, et $\alpha = \beta$ või $\alpha + \beta = 180°$.
10. Tõestage, et igas puutujahulknurgas leidub kolm külge, millest saab teha kolmnurga.
11. Kaks võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad punktides $A$ ja $B$. Läbi punkti $A$ tõmmatud sirge lõikab antud ringjooni teistkordselt vastavalt punktides $C$ ja $D$. Tõesta, et kolmnurk $BCD$ on võrdhaarne.
12. Ringjoonele keskpunktiga $O$ on joonestatud kõõl $AB$ ning sellel kõõlul on valitud punkt $C$. Ringjoon läbi punktide $A$, $C$ ja $O$ lõikub esialgse ringjoonega teistkordselt punktis $D$. Tõesta, et kolmnurk $BCD$ on võrdhaarne.
13. Rööpküliku $ABCD$ külgedele $BC$ ja $CD$ (või nende pikendustele) on tõmmatud ristlõigud $AM$ ja $AN$. Tõestage, et $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
14. Punktist $M$, mis asub antud nurga (mille tipp on $A$) sisepiirkonnas, on tõmmatud ristsirged $MP$ ja $MQ$ nurga haaradele. Punktist $A$ on tõmmatud ristsirge $AK$ lõigule $PQ$. Tõesta, et $\angle PAK = \angle MAQ$.
15. Punktid $M$ ja $N$ on kolmnurga $ABC$ kõrguste $AM$ ja $BN$ aluspunktid. Tõesta, et $\triangle ABC \sim \triangle MNC$.
16. Trapetsi lühemale alusele kui diameetrile on joonestatud ringjoon, mis puudutab trapetsi teist alust ning läbib trapetsi diagonaalide keskpunkte. Tõesta, et trapets on võrdhaarne ning selle haar on kaks korda pikem kõrgusest.

**17.** Tõesta, et kolmnurgas, mille küljed on $a$, $b$ ja $c$ ning nende vastasnurgad $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$, ümberringjoone raadius $R$ ja pindala $S$, on tõesed võrdused

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \qquad S = \frac{abc}{4R}.$$

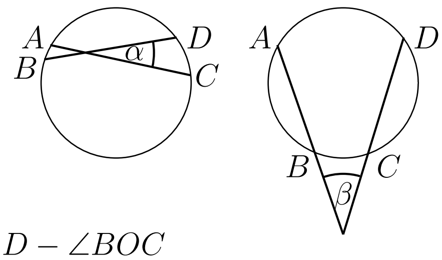
**Teoreem 2.** (Teoreem lõikajast ja puutujast.) Ringjoonele on tõmmatud kõõl $BC$ ning punktis $B$ puutuja $AB$. Kaarel $BC$ on võetud punkt $D$ (vt joonist). Siis kehtib võrdus $\angle ABC = \angle BDC$.




**18.** Kaks ringjoont lõikuvad punktides $P$ ja $Q$. Ühel ringjoonel võetakse punkt $A$; kiir $AP$ lõikab teist ringjoont teistkordselt punktis $B$, kiir $AQ$ aga lõikab teist ringjoont teistkordselt punktis $C$. Tõesta, et sirge $BC$ on paralleelne esimesele ringjoonele punktis $A$ tõmmatud puutujaga.

**19.** Ringjooned $S_1$ ja $S_2$ lõikuvad punktides $A$ ja $P$. Läbi punkti $A$ on tõmmatud ringjoonele $S_1$ puutuja $AB$, läbi punkti $P$ aga sirge $CD$, mis on paralleelne sirgega $AB$ (punktid $B$ ja $C$ paiknevad ringjoonel $S_2$, punkt $D$ ringjoonel $S_1$). Tõestage, et $ABCD$ on rööpkülik.

**Teoreem 3.** (Kahe kõõlu vaheline nurk.) Olgu antud ringjoon keskpunktiga $O$ ning punktid $A$, $B$, $D$ ja $D$ asetsegu sellel ringjoonel. Kõõlude $AC$ ja $BD$ vaheline nurk $\alpha$ ning kõõlude $AB$ ja $CD$ vaheline nurk $\beta$ (vt joonist) avalduvad kujul




$$\alpha = \frac{\angle AOB + \angle COD}{2}, \qquad \beta = \frac{\angle AOD - \angle BOC}{2}.$$

**20.** Punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ paiknevad ringjoonel antud järjekorras. Olgu $M$ kaare $AB$ keskpunkt. Tähistame kõõlude $MC$ ja $MD$ lõikepunktid kõõluga $AB$ vastavalt $E$ ja $K$. Tõestage, et $KECD$ on kõõlnelinurk.

**21.** Punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ paiknevad ringjoonel antud järjekorras. Punktid $A_1$, $B_1$, $C_1$ ja $D_1$ on vastavalt kaarte $AB$, $BC$, $CD$ ja $DA$ keskpunktid. Tõestage, et $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

**22.** Kolmnurga $ABC$ sees on võetud punkt $P$ nii, et $\angle BPC = \angle A + 60°$, $\angle APC = \angle B + 60°$ ja $\angle APB = \angle C + 60°$. Sirged $AP$, $BP$ ja $CP$ lõikavad kolmnurga $ABC$ ümberringjoont punktides $A'$, $B'$ ja $C'$. Tõestage, et kolmnurk $A'B'C'$ on võrdkülgne.

# VIII Lõigud ringjoones

**Teoreem 4.** (Teoreem lõikuvatest kõõludest.) Kui kõõlud $AB$ ja $CD$ lõikuvad punktis $O$, siis $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$.

**Teoreem 5.** (Lõikuvate kõõlude teoreemi pöördteoreem.) Kui lõigud $AB$ ja $CD$ lõikuvad punktis $O$ nii, et $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$, siis asuvad punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ ühel ringjoonel.

**Teoreem 6.** (Teoreem lõikajalõikudest.) Kui ringjoonele on punktist $S$ tõmmatud lõikajad, mis lõikavad seda ringjoont vastavalt punktides $A$ ja $B$ ning $C$ ja $D$, siis $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$.

**Teoreem 7.** (Teoreem puutujalõigust ja lõikajalõikudest.) Kui ringjoonele on punktist $O$ tõmmatud lõikaja, mis lõikab seda ringjoont punktides $A$ ja $B$ ning puutuja, mis puutub ringjoont punktis $C$, siis $|AO| \cdot |BO| = |CO|^2$.

Kehtivad ka Teoreemide 6 ja 7 pöördteoreemid. Teoreemide 4–7 koosseisus esinevat korrutist nimetatakse punkti $O$ *potentsiks*. Kui on antud kaks ringjoont, siis selliste punktide geomeetriline koht, mille potentsid mõlema ringjoone suhtes on võrdsed, on sirge. Kõnealust sirget nimetatakse nende ringjoonte *radikaalteljeks*. (Lõikuvate ringjoonte korral läbib radikaaltelg ringjoonte lõikepunkte.)

**23.** Kaks ringjoont lõikuvad punktides $X$ ja $Y$. Lõigul $XY$ võetakse punkt $P$. Esimesel ringjoonel võetakse kõõl $AB$ ja teisel ringjoonel kõõl $CD$ nii, et nad lõikuvad punktis $P$. Tõesta, et punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ asuvad ühel ringjoonel.

**24.** Tõesta, et kolmnurgas külgedega $a$, $b$, $c$ ja nurkadega $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ kehtib *koosinuslause*: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

**25.** Tõesta *Stewarti teoreem*: kolmnurga tseviaan $d$ rahuldab võrdust $a^2b' + a'b^2 = c(d^2 + a'b')$, kus $a'$ ja $b'$ on vastavate lõikude pikkused, milleks jagab tseviaan $d$ kolmnurga külje $c$.

# IX Mitmesuguseid ülesandeid

**26.** Kolmnurga $ABC$ ümberringjoonel võetakse punkt $P$. Punktist $P$ tõmmatakse ristlõigud sirgetele $AB$, $BC$, $CA$. Tõesta, et nende ristlõikude aluspunktid asuvad ühel sirgel (nn Simpsoni sirge).

**27.** Ringjoon keskpunktiga $O$ puudutab nurga haarasid punktides $A$ ja $B$. Lõigul $AB$ valitakse punkt $M$. Sirgele $OM$ punktis $M$ joonestatud ristsirge lõikab nurga haarasid punktides $X$ ja $Y$. Tõesta, et $|MX| = |MY|$.

**28.** Kõõlnelinurga $ABCD$ külgede $AB$ ja $CD$ pikendused lõikuvad punktis $P$, külgede $BC$ ja $AD$ pikendused punktis $Q$. Tõestage, et nurkade $AQB$ ja $BPC$ poolitajate lõikepunktid nelinurga külgedega osutuvad rombi tippudeks.

**29.** Viisnurk $ABCDE$ on kõõlviisnurk. Punkti $E$ kaugused sirgetest $AB$, $BC$ ja $CD$ on vastavalt $a$, $b$ ja $c$. Leidke punkti $E$ kaugus sirgest $AD$.

**30.** Kolmnurga $ABC$ külgedele, kolmnurgast väljapoole on joonestatud kolmnurgad $ABC'$, $AB'C$ ja $A'BC$, kusjuures tippude $A'$, $B'$ ja $C'$ juures olevate nurkade summa on $180^\circ$. Tõestage, et konstrueeritud kolmnurkade ümberringjooned lõikuvad ühes punktis.

**31.** Tasandile on joonestatud kumer nelinurk $ABCD$ ning ringjooned $K_A$, $K_B$, $K_C$ ja $K_D$ keskpunktidega vastavalt $A$, $B$, $C$ ja $D$ ning sama raadiusega $R$. Ringjoonepaaridele on tõmmatud neli välist puutujat, mis lõikuvad punktides $M$, $N$, $O$ ja $P$, nagu näidatud joonisel. Tõesta, et kui punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ asuvad ühel ringjoonel, siis asuvad ühel ringjoonel ka punktid $M$, $N$, $O$ ja $P$.

**32.** Tasandil on antud kaks (mitte tingimata võrdse raadiusega) ringjoont keskpunktidega $O_1$ ja $O_2$. Tõesta, et nende punktide $P$ hulk tasandil, kust tõmmatud puutujalõigud neile ringjoontele on võrdsed, moodustab sirge, mis on risti sirgega $O_1O_2$. (Seda sirget nimetatakse teatavasti nende ringjoonte radikaalteljeks.)

# X Koordinaatide meetod

Põhimõtteliselt on võimalik kõiki geomeetriaülesandeid lahendada järgmisel viisil. Fikseerime ristkoordinaadistiku, esitame ülesande tingimused koordinaatide keeles (sirgete ja ringjoonte võrrandid, lõikepunktid kui võrrandisüsteemide lahendid jne) ning tuletame ülesande tingimustest väite samuti koordinaatide keeles.

Rõhuval enamikul juhtudest on vajaminevad teisendused vaevarikkad (eriti ringjoonte ja nurkade korral). Teisendusvaeva võib vähendada koordinaatide alguspunkti otstarbekas valik (nt. mõne ringjoone keskpunktis, kolmnurga kõrguse aluspunktis vmt.). Mõnikord on otstarbekas kasutada ka muid koordinaadistikke (polaarkoordinaadid, komplekstasand).

Matemaatika olümpiaadidel on geomeetriaülesannete hindamisskeemid koostatud reeglina nii, et koordinaatide meetodil lahendades saab punkte ainult täislahenduse korral, kuna osalise lahenduse puhul on keeruline ette näha, kui mahukaks võivad lõpuks teisendused minna ning kas need on üldse inimvõimete piires tehtavad antud aja jooksul.

# Peatükk 4

# Algebra

## I Võrratuste tõestamise võtteid

1) Kasutatakse reaalarvude hinnanguid

$$a^2 \geqslant 0, \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant 0$$

2) Vahe hindamise meetod

$$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leqslant 0$$

Näide. $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$ (1)

3) Tugivõrratuste või varemtõestatud võrratuste kasutamine.
Näide 1. Tõesta, et kahe mittenegatiivse arvu aritmeetiline keskmine ei ole väiksem nende geomeetrilisest keskmisest.

Lähtume seosest (1) ja valime $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), siis $x + y \geqslant 2\sqrt{2y} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

Näide 2. Tõestada, et $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$, kui $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$
$a^2 + c^2 \geqslant 2ac \ \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + ac + bc) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$
$b^2 + c^2 \geqslant 2bc$

Näide 3. Tõestada, et $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \geqslant 8xyz$

$1 + x^2 \geqslant 2|x| \ 1 + y^2 \geqslant 2|y| \ \Rightarrow (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \geqslant 8|xyz| \geqslant xyz \ 1 + z^2 \geqslant 2|z|$

Näide 4. Tõestada, et $x^4 + y^4 + 32 \geqslant 16xy$

$x^4 + y^4 \geqslant 2\sqrt{x^4y^4} = 2x^2y^2$
$2x^2y^2 + 32 = 2(x^2y^2 + 16) \geqslant 2 \cdot 2\sqrt{16x^2y^2} = 4|xy| \geqslant 4xy$

4) Tugivõrratused. Keskmisi siduvad võrratused.

Tähistame reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeetilise keskmise

$$A(n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

mittenegatiivsete arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geomeetrilise keskmise

$$G(n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

positiivsete reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ harmoonilise keskmise

$$H(n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right)^{-1},$$

reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ruutkeskmise

$$R_2(n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ p-järku astmekeskmise $(p \neq 0)$

$$R_p(n) = \sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Erijuhtudel, kui $p = -1$, $p = 1$ ja $p = 2$, saame vastavalt keskmised $H(n)$, $A(n)$ ja $R_2(n)$. Piirprotsessis $p \to 0$ saame keskmise $G(n)$.

Mistahes positiivsete reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korral kehtivad järgmised võrratused

i) $H(n) \leqslant G(n) \leqslant A(n) \leqslant R_2(n)$,
ii) $R_p(n) \leqslant R_q(n)$, kui $p < q$,
iii) $\min a_i \leqslant R_p(n) \leqslant \max a_i$.

Võrdus leiab aset üksnes juhul, kui $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Järelikult, kui arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seas on kaks erinevat arvu, siis kehtivad ranged võrratused.

Rahvusvahelistel olümpiaadidel on kasutusel ka mitmed nimelised võrratused, nt Cauchy–Schwarzi (ka Bunjakovski) võrratus, Tšebõšovi võratus, Bernoulli, Jenseni ja Ptolemaiose võrratused.

5) Vastuväiteline tõestus

Näide. Tõestada, et $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ (aritmeetilise ja ruutkeskmise vaheline võrratus juhul $n = 3$).

Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad $a, b, c \geqslant 0$ nii, et $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, see on samaväärne võrratusega $(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc > 0 \Leftrightarrow -\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right] > 0$, mis on aga vastuolu.

6) Liikmeti võrdlemine (summa või korrutise igat liiget hinnatakse eraldi)

Näide. Tõestada, et $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$.

$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}<\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\ldots$

$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$

7) Matemaatilise induktsiooni printsiibi rakendamine

Näide. Tõestada, et $n\geqslant 3$ korral $2^n>2n+1$.

Kui $n=3$, siis $2^3>2\cdot 3+1$. Oletame, et $2^k>2k+1$. On teada, et $k\geqslant 1$ korral $2^k\geqslant 2$. Liites võrratused saame $2^k+2^k>2k+3\Leftrightarrow 2^{k+1}>2(k+1)+1$.

## Ülesanded

**1.** Võrrelge arve a) $2^{30}$ $3^{20}$; b) $2^{35}$ $3^{24}$; c) $2^{33}$ $3^{17}$; d) $6^{15}$ $9^{10}$.

**2.** Leidke suurim täisarv $x$, mille korral
a) $\log_5(3-8x)>0$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-3x)\geqslant 0$; c) $\log_3(3x-1)<\log_3(2x+3)$;
d) $3^{3-x}\geqslant 9$; e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}>9$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; g) $(0{,}6)^{x^2+3x}\geqslant 1$.

**3.** Milliste täisarvude $m$ korral on tõesed võrratused a) $2^m>8$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^m<9$; c) $4^m\geqslant 2^{2m}$; d) $3^m>9^m$; e) $(-5)^m<-125$?

**4.** Näidake, et aritmeetilises jadas mistahes kolme järjestikuse liikme korral keskmine liige on kahe äärmise liikme aritmeetiline keskmine.

**5.** Näidake, et geomeetrilises jadas mistahes kolme järjestikuse liikme korral keskmine liige on kahe äärmise liikme gomeetriline keskmine.

**6.** Näidake, et harmoonilises jadas $\left(\frac{1}{n}\right)$ mistahes kolme järjestikuse liikme korral keskmine liige on kahe äärmise liikme harmooniline keskmine.

**7.** Olgu $a,b,c>0$. Kehtigu $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$. Näidake, et $b$ on $a$ ja $c$ harmooniline keskmine.

**8.** Näidake, et kahe positiivse arvu geomeetriline keskmine on nende arvude aritmeetilise keskmise ja harmoonilise keskmise geomeetriline keskmine.

**9.** Tõestage tugivõrratused a) $x^2+y^2\geqslant 2xy$; b) $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, $a>0$, $b>0$; d) $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, $a>0$.

**10.** Tõestage võrratused a) $x^2+4y^2 \geqslant 2xy$; b) $x^2+y^2 \geqslant xy$; c) $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$; d) $2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz \geqslant 0$.

**11.** Tõestage võrratused a) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$; b) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geqslant 0$; c) $a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b$; d) $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geqslant 8abc$, kui $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

**12.** Tõestage võrratused

a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$, $n \geqslant 2$;

b) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$;

c) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2n-1}{n}$, $n \geqslant 1$;

d) $\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{149}+\frac{1}{150} > \frac{2}{3}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$;

f) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} < 2$.

**13.** Tõestage võrratus $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, kui $a,b,c,d \geqslant 0$.

**14.** Tõestage võrratused

a) $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$, $x,y,z \geqslant 0$;

b) $\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2} \geqslant 3$, $x,y,z > 0$;

c) $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) > 81abcd$, kus $s=a+b+c+d$ ja positiivsete arvude $a$, $b$, $c$, $d$ seas leidub erinevaid arve;

d) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{2}$, $a,b,c > 0$;

e) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$;

f) $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \leqslant 4(x^2+y^2+z^2)$;

g) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$, $a,b,c > 0$.

**15.** Arv 1987 on esitatud $m$ erineva positiivse paarisarvu ja $n$ erineva positiivse paaritu arvu summana. Leidke avaldise $3m+4n$ võimalik suurim väärtus.

**16.** Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$) sellised positiivsed arvud, et $a_1+a_2+\ldots+a_n = 1$. Tõestage, et kehtib võrratus

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

**17.** Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalarvud. Tõestage, et kaks järgnevat väidet

(A): $a_i+a_j \geqslant 0$ iga $i$ ja $j$ korral, kui $i \neq j$

ja

(B): $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_nx_n^2$

on samaväärsed, kui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on mistahes mittenegatiivsed reaalarvud, millede summa $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$.

**18.** Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mingid etteantud reaalarvud, mis ei ole korraga nullid. Reaalarvud $r_1, r_2, \ldots, r_n$ aga sellised, et mistahes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korral on

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\ldots+r_n(x_n-a_n) \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+n_n^2}.$$

Leidke arvud $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

# II Funktsionaalvõrrandid

Tavaline arvvõrrandi ülesanne tähendab, et tuleb leida kõik antud tingimust rahuldavad arvud. Funktsionaalvõrrandi korral tuleb analoogiliselt leida kõik antud tingimust rahuldavad funktsioonid.

**Näide 1.** Funktsiooni $f(x) = 1 - x$ korral kehtib seos

$$f(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - (1 - x) = x.$$

Seega funktsionaalvõrrandi $f(f(x)) = x$ üheks lahendiks on funktsioon $f(x) = 1 - x$. Mitmed teisedki funktsioonid rahuldavad seda seost, näiteks $f(x) = \frac{1}{x}$, sest $f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ ja ka $f(x) = \frac{1}{1-x} + 1$, sest

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - f(x)} + 1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1-x} + 1\right)} + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{1-x}} + 1 = -(1 - x) + 1 = x.$$

Funktsiooni $f\colon X \to Y$ määramiseks tuleb kirjeldada, kuidas seada hulga $X$ elementidele vastavusse hulga $Y$ elemente. Kuna sama funktsiooni kirjeldamiseks on palju erinevaid võimalusi, esitatakse vastusena lihtsaim neist. Funktsionaalvõrrandi lahendamiseks ei piisa, kui lugeda üles vaid mõni sobiv funktsioon, sest üldjuhul võib vastuseid olla palju. Lisaks tuleb anda ka tõestus, et rohkem lahendeid ei ole ning see on funktsionaalvõrrandi lahendamise juures enamasti kõige raskem osa.

**Näide 2.** Leiame kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille jaoks iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrdus

$$(f(x))^2 = 4x(f(x) - x).$$

Katsetades leiame, et lahendiks sobib funktsioon $f(x) = 2x$, sest $(2x)^2 = 4x(2x - x)$. Miks ükski sellest funktsioonist erinev funktsioon ei sobi? Võtame suvalise $x \in \mathbb{R}$ ja tõestame, et selle $x$ korral $f(x) = 2x$. See tähendab, et kui mõni teine funktsioon ka rahuldaks ülesande tingimust, peaks tema väärtus iga $x \in \mathbb{R}$ korral funktsiooni $f(x) = 2x$ väärtusega kokku langema ning järelikult on need kaks funktsioni võrdsed. Olgu $f(x) = y$, siis ülesande tingimuste kohaselt

$$y^2 = 4x(y - x) \Leftrightarrow y^2 - 4xy + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Seega $f(x) = 2x$ on ainsaks lahendiks.

Funktsionaalvõrrandid ei ole võõrad ka kooliõpilasele – võrrandite $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ ja $f(x + a) = f(x)$ abil defineeritakse vastavalt paaris-, paaritud ja perioodilised funktsioonid.

Rahvusvahelistel matemaatikaolümpiaadidel eeldatakse, et võistlejad teavad mõningate klassikaliste funktsionaalvõrrandite lahendeid ja tunnevad lihtsamaid meetodeid teatud tüüpi võrrandite lahendamiseks. Teadaolevaks loetakse näiteks **Cauchy funktsionaalvõrrandite** lahendid. Nendeks on võrrandid

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ja

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

millede lahendiks reaalarvude hulgal on vastavalt lineaarfunktsioon kujul $f(x) = ax$ ja eksponentfunktsioon $f(x) = a^x$ (viimases $a \geqslant 0$) ning

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ja

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

millede lahenditeks positiivsete reaalarvude hulgal on vastavalt astmefunktsioon $f(x) = x^a$ ning logaritmfunktsioon $f(x) = a \ln x$, kus $a$ on suvaline reaalarv.

**Näide 3.** Lahendame Cauchy funktsionaalvõrrandi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pidevate reaalsete funktsioonide hulgal.

a) Leiame $f(0)$ kõikvõimalikud väärtused.
Võttes $x = y = 0$, saame $f(0) = 2f(0)$, milest $f(0) = 0$.

b) Näitame, et $f$ on paaritu funktsioon.
Valime $y = -x$, siis $f(x-x) = f(x) + f(-x)$, millest $0 = f(x) + f(-x)$ ning $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

c) Näitame, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(nx) = nf(x)$.
Kui $n = 0$, siis võrdus kehtib. Kui $n = 1$, pole midagi tõestada. Kui $n = 2$, saame $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$. Eeldame, et $n = k$ korral $f(kx) = kf(x)$, siis $n = k+1$ korral $f((k+1)x) = f(kx+x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$.

d) Näitame, et iga $m \in \mathbb{Z}$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(mx) = mf(x)$.
Et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $0 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx)$, siis $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$.

e) Näitame, et iga $q \in \mathbb{Q}$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(qx) = qf(x)$.
Olgu $q = \dfrac{m}{n}$, kus $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis $nf\left(\dfrac{m}{n}x\right) = f\left(n \cdot \dfrac{m}{n}x\right) = f(mx) = mf(x)$ ning $f\left(\dfrac{m}{n}x\right) = \dfrac{m}{n}f(x)$, st $f(qx) = qf(x)$ iga $q \in \mathbb{Q}$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

f) Oleme näidanud, et iga $q \in \mathbb{Q}$ korral $f(q) = f(q \cdot 1) = qf(1)$, st ratsionaalarvuliste argumentide $x$ korral $f(x) = ax$, kus $a = f(1)$. Väärtust $f(1)$ ei ole võimalik ülesande andmete abil määrata, seega selle võib valida vabalt. Üleminekul ratsionaalarvulistelt argumentidelt reaalarvulistele kasutame funktsiooni $f$ pidevust. Iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks leidub jada $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ nii, et $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Seega $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n f(1) = f(1) \lim\limits_{n\to\infty} q_n = f(1)x = ax$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

Vastus: $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, kus $a \in \mathbb{R}$ on suvaline.

**Näide 4.** Leida $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtiks $(f(x+y))^2 = (f(x))^2 + (f(y))^2$.

a) Kui $x = y = 0$, siis $(f(0))^2 = 2(f(0))^2$, millest $(f(0))^2 = 0$ ning $f(0) = 0$.

b) Juhul $y = -x$ saame $(f(x-x))^2 = (f(x))^2 + (f(-x))^2$ ehk $0 = (f(x))^2 + (f(-x))^2$, millest saame, et $(f(x))^2 = 0$ ja $(f(-x))^2 = 0$ ehk $f(x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

Vastus: $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Võistlusülesannetes esinevate funktsionaalvõrrandite lahendamisel kasutatakse peamiselt

1) väärtuste omistamist (võrrandis esinevatele muutujatele omistatakse mingeid kindlaid väärtusi; Näide 4);
2) asendusmeetodit (võrrandis esinevad muutujad asendatakse sobivalt valitud uute muutujatega);
3) matemaatilise analüüsi põhimõisteid (piirväärtus, pidevus, monotoonsus, tõkestatus; Näide 3, osa f);
4) Cauchy meetodit (funktsioon määratakse naturaalarvude hulgal, seejärel täisarvude, ratsionaalarvude ja lõpuks reaalarvude hulgal, viimase sammu korral eeldatakse funktsiooni pidevust; Näide 3);
5) antud võrrandi teisendamist üheks Cauchy võrrandiks.

## Ülesanded

**1.** Leidke $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, kui iga nullist erineva reaalarvu $x$ korral

$$f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

**2.** Olgu $a$ selline reaalarv, mille korral $|a| \neq 1$. Leidke $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, kui iga positiivse reaalarvu $x$ korral

$$ax^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

**3.** Leidke $f$, kui iga reaalarvu $x \neq 1$ korral

$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 3x^2 - 1.$$

**4.** Leidke $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, kui iga reaalarvu $x$ korral, kus $x \neq -1$, kehtib

$$f\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = x.$$

**5.** Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Näidake, et Cauchy funktsionaalvõrrandi

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

lahendid esituvad parajasti kujul $f(x) = a^x$, kus $a \geqslant 0$.

**6.** Olgu $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Näidake, et Cauchy funktsionaalvõrrandi

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

lahendid esituvad parajasti kujul $f(x) = x^a$, kus $a \in \mathbb{R}$.

**7.** Olgu $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Näidake, et Cauchy funktsionaalvõrrandi

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

lahendid esituvad parajasti kujul $f(x) = a \ln x$, kus $a \in \mathbb{R}$.

**8.** Leidke $f$ ja $g$, kui iga reaalarvu $x$ korral

$$\begin{cases} f(2x+1) + g(x-1) &= x \\ f(2x+1) - 2g(x-1) &= 2x^2 \end{cases}$$

**9.** Leidke $f$ ja $g$, kui iga reaalarvu $x \neq 1$ korral

$$\begin{cases} f(2x+1) + 2g(2x+1) &= 2x \\ f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x}{x-1}\right) &= x \end{cases}$$

**10.** Olgu $f$ funktsioon, mis iga reaalarvu $x$ korral rahuldab tingimust

$$4f(f(x)) - 2f(x) - 3x = 0.$$

Näidake, et $f(x) = 0$ parajasti siis, kui $x = 0$.

**11.** Leidke $f$, kui kõigi selliste reaalarvude $x$ ja $y$ korral, kus $x + y \neq 0$, kehtib võrdus

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}.$$

**12.** Leidke $f$, kui kõigi reaalarvude $x$ ja $y$ korral

$$xf(y) - yf(x) = (x - y)f(x)f(y).$$

**13.** Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lahendage funktsionaalvõrrand $f(xf(y)) = xy$.

# Peatükk 5

# Kirjandusviited


**1.** Ülesanded lasteaiale, algkoolile, põhikooli nooremale osale

- „110 mõtlemisülesannet“, koost. P. Kees, Tallinn : Eesti Raamat, 1978. On ka kursuse kodulehel.
- U. Anderssoo, A. Lints „Tere, matemaatika! : tööraamat 6-a. lastele“, Tallinn : Valgus, 1985 (ja varasemad trükid). On ka kursuse kodulehel.
- „Matemaatika järelkasvu olümpiaadid Tartumaal 1979-1997 : 1000 nuputamisülesannet põhikooli õpilastele“, koost. A. Tootsi, Tartu : Vöödis, 1997.

**2.** Õpikute seeriad

- Tõnu Tõnso, Allar Veelmaa (kõige põhjalikum)

**3.** Nuputamine

- A. Lind „Nupula“, Tallinn : Valgus, 1988.
- A. Lind „Nupula jälgedes“, Tallinn : Valgus, 1988.
- A. Lind „Teel teadmisteni“, Tallinn : Avita, 2001.
- J. Perelman „Elav matemaatika“, Tallinn : Valgus, 1989.
- F. Nagibin „Huvitav matemaatika“, Tallinn : Valgus, 1969.

**4.** Keerdülesanded

- Ü. Kaasik „Lihtsaid ja keerulisi“, Tallinn : Valgus, 1970.
- Ü. Kaasik „Lihtsaid ja keerulisi : 2“, Tallinn : Valgus, 1975.
- G. Niese „100 kolumbuse muna“, Tallinn : Valgus, 1985.
- K. Freyer, R. Gaebler, W. Möckel „Julge pealehakkamine on pool võitu : 200 nuputamisülesannet“, Tallinn : Valgus, 1989.

**5.** Olümpiaadimaterjal: üldist

- `http://www.teaduskool.ut.ee`

- http://www.math.olympiaadid.ut.ee
- http://www.mccme.ru

**6.** Olümpiaadimaterjal: arvuteooria

- „Arvuteooria elemendid. I", koost. E. Abel, R. Vilt, Tartu : Atlex, 2013.
- „Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks (ülemaste) : Arvuteooria I", koost. M. Ivanov. On ka kursuse kodulehel.
- „Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks (ülemaste) : Arvuteooria II", koost. M. Ivanov. On ka kursuse kodulehel.

**7.** Olümpiaadimaterjal: diskreetne matemaatika

- „Diskreetse matemaatika elemendid. I", koost. E. Abel, I. Zolk, Tartu : Atlex, 2012.
- R. Palm „Diskreetse matemaatika elemendid", Tartu : Tartu Ülikool, 2003. On ka kursuse kodulehel.
- N. Vilenkin „Kombinatoorika", Tallinn : Valgus, 1975.
- A. Kolman, O. Zich „Huvitav loogika", Tallinn : Valgus, 1970.
- A. Andžāns, B. Johannesson „Dirichlet principle : part I", Rīga, 2005. On ka kursuse kodulehel (inglise k.).
- L. Bukovský, I. Kluvánek „Dirichletov princíp", Praha 1970. On ka kursuse kodulehel (eesti k.).

**8.** Olümpiaadimaterjal: geomeetria

- I. Šarõgin „Tasandi geomeetria", Tallinn : Avita, 2000.
- В. Прасолов, „Задачи по планиметрии", Москва : МЦНМО, 2006. On ka kursuse kodulehel (vene k.).

**9.** Olümpiaadimaterjal: algebra

- H. Keerutaja, K. Kruse, L. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX-XI klassile", Tallinn : Valgus, 1983. On ka kursuse kodulehel.
- J. Willemson, I. Zolk „Võrratused", Tartu : Tartu Ülikool, 2003. On ka kursuse kodulehel.
- E. Abel, M. Abel, „Funktsionaalvõrrandite lahendamisvõtteid", „Koolimatemaatika XXV", Tartu, 1998, 70–76.
- J. Willemson, I. Zolk, „Funktsioonid" http://www.math.olympiaadid.ut.ee/arhiiv/oppemat/indrek/fneq.pdf. On ka kursuse kodulehel.

**10.** Põnev lugemine

- H. M. Enzensberger „Arvukratt", Tallinn : Avita, 1999.

- V. Ljovšin „Hajameelse Magistri väitekiri“, Tallinn : Valgus, 1978.
- V. Ljovšin „Hajameelse Magistri reisimärkmed“, Tallinn : Valgus, 1979.
- V. Ljovšin „Varastatud marki otsimas : matemaatiline kriminull : nooremale koolieale“, Tallinn : Valgus, 1980.

**11.** Perioodika

- „Matemaatika ja kaasaeg“ `http://et.wikipedia.org/wiki/Matemaatika_ja_kaasaeg`

Vt. ka E. Mitt „Kirjandust klassiväliseks tööks matemaatikas“, Tartu : Tartu Riiklik Ülikool, 1989. Osaliselt kursuse kodulehel.