Sisukord

I peatükk.

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

§ 1. Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

1.1. m-mõõtmelise eukleidilise ruumi mõiste

Olgu $m \in \mathbb{N}$. Tähistame

$$\mathbb{R}^m := \big\{(x_1, \dots, x_m)\colon\; x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\big\}$$

(hulga $\mathbb{R}^m$ elemendid on niisiis kõikvõimalikud reaalarvuliste komponentidega m-komponendilised järjendid). Hulga $\mathbb{R}^m$ elemente hakkame nimetama *punktideks.* Me kasutame tähistust $(x_i)_{i=1}^m := (x_1, \dots, x_m)$. Arvusid $x_1, \dots, x_m$ nimetame selle punkti *koordinaatideks.*

Kõneldes edaspidi *tasandist* või lihtsalt *ruumist,* mõistame me selle all vastavalt ruumi $\mathbb{R}^2$ või $\mathbb{R}^3$: tasandi (ja ruumi) igale punktile vastavad (fikseeritud ristkoordinaadistiku puhul) tema üheselt määratud koordinaadid; teiselt poolt, iga tasandi (ja ruumi) punkt on üheselt määratud oma koordinaatidega.

Punktide $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $Q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ vaheline *kaugus* $d(P, Q)$ defineeritakse võrdusega

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i|^2}. \tag{1.1}$$

Hulka $\mathbb{R}^m$ koos temas valemiga (1.1) defineeritud kaugusega nimetatakse *m-mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks* $\mathbb{R}^m$.

Valemi (1.1) poolt antud kaugus ruumides $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ langeb kokku nn. loomuliku kaugusega nendes ruumides: nendes ruumides tuleb punktide P ja Q vaheline valemist (1.1) rehkendatav kaugus $d(P, Q)$ sama, mis lõigu PQ pikkus (rehkendatuna välja elementaargeomeetrilistele argumentidele tuginedes).

Tõepoolest, juhul $m = 1$, tähistades $P = (x) =: x$ ja $Q = (y) =: y$,

$$d(P, Q) = |y - x|;$$

juhul $m = 2$, tähistades $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$,

$$d(P, Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

(selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu PQ pikkus); juhul $m = 3$, tähistades $P = (x_1, y_1, z_1)$ ja $Q = (x_2, y_2, z_2)$,

$$d(P, Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}$$

(ka selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu PQ pikkus).

Loetleme kauguse olulisemad omadused: mis tahes $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ korral

1° $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$;

2° $d(P, Q) = d(Q, P)$;

3° $d(P, Q) \leqslant d(P, R) + d(R, Q)$.

Omadusi 1°–3° nimetatakse *kauguse aksioomideks.* Aksioom 3° väidab sisuliselt, et kolmnurga kahe külje pikkuste summa ei ületa kolmanda külje pikkust. Seepärast nimetatakse aksioomi 3° *kolmnurga võrratuseks.* Aksioomid 1° ja 2° järelduvad vahetult kauguse definitsioonist. Kolmnurga võrratust on kõige lihtsam järeldada *Minkowski võrratusest* (vt. arutelu järgmises punktis teoreemi 1.1 järel), kuid see on tõestatav ka vahetult, nagu me seda järgnevalt teeme.

Kolmnurga võrratuse 3° tõestus. Olgu $P = (x_1, \dots, x_m)$, $Q = (y_1, \dots, y_m)$, $R = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$. Kolmnurga võrratuse tõestuseks peame näitama, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2},$$

milleks, arvestades, et $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \big(|y_i - z_i| + |z_i - x_i|\big)^2}$, piisab näidata, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \big(|y_i - z_i| + |z_i - x_i|\big)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2}$$

ehk, tähistades iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $a_i := |y_i - z_i|$ ja $b_i := |z_i - x_i|$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

ehk (tõstes selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} + \sum_{i=1}^m b_i^2$$

ehk, arvestades, et $\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2\sum_{i=1}^m a_i\,b_i + \sum_{i=1}^m b_i^2$,

$$\sum_{i=1}^m a_i\,b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \tag{1.2}$$

ehk (tõstes jällegi selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\Bigl(\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\Bigr)^2 \leqslant \Bigl(\sum_{i=1}^m a_i^2\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^m b_i^2\Bigr). \tag{1.3}$$

Kuna

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\Bigr)^2 &= \Bigl(\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\Bigr)\Bigl(\sum_{j=1}^m a_j\,b_j\Bigr) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j\\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j = \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{i=1}^m a_i^2\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^m b_i^2\Bigr) &= \Bigl(\sum_{i=1}^m a_i^2\Bigr)\Bigl(\sum_{j=1}^m b_j^2\Bigr) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i^2\,b_j^2\\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i^2\,b_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^m a_i^2\,b_j^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2\,b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i^2\,b_j^2 + a_j^2\,b_i^2),\end{aligned}$$

siis võrratus (1.3) on samaväärne võrratusega

$$2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m a_i\,b_i\,a_j\,b_j \leqslant \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^m (a_i^2\,b_j^2 + a_j^2\,b_i^2),$$

mis kehtib, sest mis tahes $i, j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$a_i^2\,b_j^2 + a_j^2\,b_i^2 - 2a_i\,b_i\,a_j\,b_j = (a_i\,b_j - a_j\,b_i)^2 \geqslant 0.$$

□

Märkus 1.1. Võrratust (1.2) (mis kehtib mis tahes $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \geqslant 0$ korral), nimetatakse *Cauchy võrratuseks.*

Ülesanne 1.1. Tõestada *tagurpidi kolmnurga võrratus:* mis tahes $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ korral

$$d(P, Q) \geqslant \bigl|d(P, R) - d(Q, R)\bigr|.$$

Tagurpidi kolmnurga võrratus väidab sisuliselt, et kolmnurga kahe külje pikkuste vahe ei ületa kolmanda külje pikkust.

NÄPUNÄIDE. Kasutada kauguse aksioome 2° ja 3°.

1.2. Minkowski võrratus

Kõige lihtsam moodus kauguse kolmnurga aksioomi tõestuseks on järeldada ta *Minkowski võrratusest.*

Teoreem 1.1 (Minkowski võrratus)**.** *Olgu $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \geqslant 0$ ning olgu $p > 1$ ($a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ ja p on reaalarvud). Siis*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

Minkowski võrratusest järeldub kauguse kolmnurga aksioom: mis tahes $P = (x_1, \ldots, x_m)$, $Q = (y_1, \ldots, y_m)$, $R = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ korral, võttes Minkowski võrratuses $p = 2$, $a_i = |y_i - z_i|$ ja $b_i = |z_i - x_i|$, saame

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|y_i - x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\big(|y_i - z_i| + |z_i - x_i|\big)^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|z_i - x_i|^2} = d(P,R) + d(R,Q). \end{aligned}$$

Minkowski võrratust on mugav järeldada *Rogers–Hölderi võrratusest.*

Teoreem 1.2 (Rogers–Hölderi võrratus)**.** *Olgu $p, q \in (1, \infty)$ kaaseksponendid, s.t. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mis tahes reaalarvude $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \geqslant 0$ korral*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

Märkus 1.2. Cauchy võrratus (1.2) on erijuht Rogers–Hölderi võrratusest (1.5), kus $p = q = 2$.

Rogers–Hölderi võrratust, omakorda, on mugav järeldada *Youngi võrratusest.*

Teoreem 1.3 (Youngi võrratus)**.** *Olgu $p, q \in (1, \infty)$ kaaseksponendid, s.t., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mis tahes reaalarvude $a, b \geqslant 0$ korral*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{1.6}$$

Märkus 1.3. Youngi võrratus formuleeritakse sageli järgneval (lausega 1.3 samaväärsel) kujul: *kui $p, q \in (1, \infty)$ on kaaseksponendid, siis mis tahes reaalarvude $a, b \geqslant 0$ korral*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Minkowski võrratuse tõestus. Olgu $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \geqslant 0$. Kuna mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)(a_i + b_i)^{p-1} = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1},$$

siis Rogers–Hölderi võrratuse põhjal, valides $q \in (1, \infty)$ selliselt, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (siis $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ ja $q(p-1) = p$),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^{m} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{m} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Kui $a_1 = \cdots = a_m = 0$, siis võrratuse (1.4) kehtivus on ilmne. Kui mingi $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $a_i > 0$, siis järeldub eelnevast võrratuste-võrdusteahelast, et

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

mis, arvestades, et $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, on samaväärne võrratusega (1.4). □

ROGERS–HÖLDERI VÕRRATUSE TÕESTUS. Kui $a_1 = \cdots = a_m = 0$ või $b_1 = \cdots = b_m = 0$, siis on võrratuse (1.5) kehtivus ilmne. (Õigupoolest kehtib niisugusel juhul selles mitteranges võrratuses võrdus.) Vaatleme nüüd juhtu, kus vähemalt üks arvudest $a_1, \ldots, a_m$ ja vähemalt üks arvudest $b_1, \ldots, b_m$ erinevad nullist. Siis iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral, võttes Youngi võrratuses (1.6)

$$a = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^m a_k^p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^m b_k^q},$$

saame

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{k=1}^m a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{a_i^p}{p \sum_{k=1}^m a_k^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{k=1}^m b_k^q}.$$

Seega

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{k=1}^m a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^m a_i^p}{p \sum_{k=1}^m a_k^p} + \frac{\sum_{i=1}^m b_i^q}{q \sum_{k=1}^m b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

millest järeldub võrratus (1.5). □

YOUNGI VÕRRATUSE TÕESTUS. Olgu $a, b \geqslant 0$. Kui $b = 0$, siis võrratus (1.6) ilmselt kehtib; seega võime järgnevas eeldada, et $b > 0$. Tähistades $\lambda := \frac{1}{p}$, omandab võrratus (1.6) kuju

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1 - \lambda) b$$

ehk (jagades selle võrratuse mõlemad pooled läbi arvuga b)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda \leqslant \lambda \frac{a}{b} + 1 - \lambda.$$

Tähistades $t := \frac{a}{b}$, piisab Youngi võrratuse tõestuseks niisiis näidata, et iga $t \in (0, \infty)$ korral

$$t^\lambda - \lambda t \leqslant 1 - \lambda.$$

Selleks vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = t^\lambda - \lambda t$. Kuna

$$\varphi'(t) = \lambda t^{\lambda - 1} - \lambda = \lambda(t^{\lambda-1} - 1),$$

siis $\varphi'(t) > 0$, kui $t \in (0, 1)$, ning $\varphi'(t) < 0$, kui $t \in (1, \infty)$. Niisiis, $\varphi(1)$ on funktsiooni φ maksimaalne väärtus intervallis $(0, \infty)$; seega iga $t \in (0, \infty)$ korral

$$t^\lambda - \lambda t \leqslant \varphi(1) = 1 - \lambda,$$

nagu soovitud. □

1.3. Kerad ja risttahukad. Punkti ümbrused

Definitsioon 1.1. Olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $r > 0$.

Hulka

$$B(P_0, r) := \big\{P \in \mathbb{R}^m \colon\ d(P, P_0) < r\big\}$$

(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide P hulka, mille kaugus punktist P_0 on väiksem kui r) nimetatakse *lahtiseks keraks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Hulka

$$\overline{B}(P_0, r) := \big\{P \in \mathbb{R}^m \colon\ d(P, P_0) \leqslant r\big\}$$

(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide P hulka, mille kaugus punktist P_0 ei ületa arvu r) nimetatakse *kinniseks keraks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Hulka

$$S(P_0, r) := \big\{P \in \mathbb{R}^m \colon\ d(P, P_0) = r\big\}$$

(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide P hulka, mis asuvad punktist P_0 kaugusel r) nimetatakse *sfääriks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Juhul $m = 1$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, on lahtine kera ja kinnine kera vastavalt vahemik ja lõik: tähistades $P_0 = (x_0) =: x_0$,

$$B(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r),$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - x_0| \leqslant r\} = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Juhul $m = 2$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^2$, on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine ring, kinnine ring ja ringjoon: tähistades $P_0 = (x_0, y_0)$,

$$\begin{aligned} B(P_0, r) &= \big\{(x, y) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < r^2\big\}, \\ \overline{B}(P_0, r) &= \big\{(x, y) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leqslant r^2\big\}, \\ S(P_0, r) &= \big\{(x, y) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = r^2\big\}. \end{aligned}$$

Juhul $m = 3$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^3$, on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine kera, kinnine kera ja kerapind (ehk sfäär) selles tähenduses, nagu me neid tunneme analüütilisest geomeetriast: tähistades $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\begin{aligned} B(P_0, r) &= \big\{(x, y, z) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 < r^2\big\}, \\ \overline{B}(P_0, r) &= \big\{(x, y, z) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 \leqslant r^2\big\}, \\ S(P_0, r) &= \big\{(x, y, z) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 = r^2\big\}. \end{aligned}$$

Definitsioon 1.2. Lahtist kera $B(P_0, \varepsilon)$ ruumis $\mathbb{R}^m$ nimetatakse punkti P_0 *ε-ümbruseks* ja tähistatakse ka sümboliga $U_\varepsilon(P_0)$.

Mis tahes hulka ruumis $\mathbb{R}^m$, mis sisaldab punkti P_0 mingi ε-ümbruse, nimetatakse punkti P_0 *ümbruseks.*

Definitsioon 1.3. Olgu $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, m$. Hulka

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m) &= \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ x_i \in (a_i, b_i),\ i = 1, \dots, m\big\} \\ &= \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \dots, m\big\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

nimetatakse *lahtiseks koordinaatristtahukaks.* Hulka

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] &= \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ x_i \in [a_i, b_i],\ i = 1, \dots, m\big\} \\ &= \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, m\big\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

nimetatakse *kinniseks koordinaatristtahukaks.*

Vahemikke $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ ja lõike $[a_1, b_1], \dots, [a_m, b_m]$ nimetatakse vastavalt risttahukate (1.7) ja (1.8) *servadeks.*

Edaspidi, *kõneldes lihtsalt (kinnistest ja lahtistest) risttahukatest, mõistame me nende all (vastavalt kinnisi ja lahtisi) koordinaatristtahukaid.* Risttahukat, mille kõik servad on võrdse pikkusega, nimetatakse *kuubiks.*

Risttahukaid ja kuupe ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse vastavalt *ristkülikuteks* ja *ruutudeks.* Ristkülikute (sealhulgas ruutude) puhul kõneldakse servade asemel *külgedest.*

Punkti $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, kus iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $x_i^0 := \frac{b_i + a_i}{2}$ (s.t. punkti, mille koordinaadid on risttahukate (1.7) ja (1.8) vastavate servade keskpunktid), nimetatakse risttahukate (1.7) ja (1.8) *keskpunktiks.*

Tähistades iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$d_i := \frac{b_i - a_i}{2} = b_i - x_i^0 = x_i^0 - a_i,$$

esituvad risttahukad (1.7) ja (1.8) vastavalt kujul

$$\begin{aligned}
&(x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \dots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m) \\
&\qquad = \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ x_i^0 - d_i < x_i < x_i^0 + d_i,\ i = 1, \dots, m\big\} \\
&\qquad = \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ |x_i - x_i^0| < d_i,\ i = 1, \dots, m\big\}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&[x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1] \times \dots \times [x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m] \\
&\qquad = \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ x_i^0 - d_i \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + d_i,\ i = 1, \dots, m\big\} \\
&\qquad = \big\{(x_1, \dots, x_m) \colon\ |x_i - x_i^0| \leqslant d_i,\ i = 1, \dots, m\big\}
\end{aligned}$$

Lause 1.4. (a) *Iga kera B korral ruumis $\mathbb{R}^m$ leiduvad sama keskpunktiga kuubid C_1 ja C_2 nii, et*

$$C_1 \subset B \subset C_2.$$

(b) *Iga (koordinaat)risttahuka C korral ruumis $\mathbb{R}^m$ leiduvad sama keskpunktiga kerad B_1 ja B_2 nii, et*

$$B_1 \subset C \subset B_2.$$

Muuhulgas järeldub lausest 1.4, (b), et *(koordinaat)risttahukas keskpunktiga P_0 on punkti P_0 ümbrus.* Lahtiseid ja kinniseid (koordinaat)risttahukaid keskpunktiga P_0 nimetatakse vastavalt punkti P_0 *lahtisteks* ja *kinnisteks risttahukakujulisteks ümbrusteks.*

Lause 1.4 tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada üks lemma (mida on mugav kasutada ka näiteks lause 2.1 tõestuses).

Lemma 1.5. *Olgu $P = (x_1, \dots, x_m)$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant d(P, P_0) \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|. \tag{1.9}$$

Tõestus. Arvestades, et $d(P,P_0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|^2}$, sisalduvad võrratused (1.9) järgnevas võrratusteahelas:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|^2} \leqslant \sqrt{m \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0|^2} = \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0|.$$

□

Lause 1.4 tõestus. Lause väited piisab tõestada ainult lahtiste kerade B ja lahtiste (koordinaat)risttahukate C jaoks, sest iga kinnine kera sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist kera ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises keras; samuti, iga kinnine (koordinaat)risttahukas sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist (koordinaat)risttahukat ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises (koordinaat)risttahukas.

Olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

(a). Olgu $r > 0$. Vaatleme lahtist kera $B := B(P_0, r)$. Olgu $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B \quad &\iff \quad d(P,P_0) < r \quad \implies \quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0| < r \\ &\iff \quad P \in (x_1^0 - r, x_1^0 + r) \times \dots \times (x_m^0 - r, x_m^0 + r) =: C_2, \end{aligned}$$

seega $B \subset C_2$; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B \quad &\iff \quad d(P,P_0) < r \\ &\Longleftarrow \quad \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0| < r \quad \iff \quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0| < \frac{r}{\sqrt{m}} \\ &\iff \quad P \in \left(x_1^0 - \tfrac{r}{\sqrt{m}}, x_1^0 + \tfrac{r}{\sqrt{m}}\right) \times \dots \times \left(x_m^0 - \tfrac{r}{\sqrt{m}}, x_m^0 + \tfrac{r}{\sqrt{m}}\right) =: C_1, \end{aligned}$$

niisiis $B \supset C_1$.

(b). Olgu $d_1, \dots, d_m > 0$. Tähistame

$$C := (x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \dots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m).$$

Olgu $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C \quad &\iff \quad |x_i - x_i^0| < d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral} \\ &\implies \quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0| < \max_{1\leqslant i\leqslant m} d_i =: d \\ &\implies \quad d(P,P_0) < \sqrt{m} d \quad \iff \quad P \in B(P_0, \sqrt{m} d) =: B_2, \end{aligned}$$

seega $C \subset B_2$; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C \quad &\iff \quad |x_i - x_i^0| < d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral} \\ &\Longleftarrow \quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i^0| < \min_{1\leqslant i\leqslant m} d_i =: r \\ &\Longleftarrow \quad d(P,P_0) < r \quad \iff \quad P \in B(P_0, r) =: B_1, \end{aligned}$$

niisiis $C \supset B_1$. □

1.4. Lahtised ja kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et punkt $P \in \mathbb{R}^m$ on hulga $\mathcal{D}$

- *sisepunkt,* kui leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset \mathcal{D}$ (s.t. punktil P leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas D);
- *rajapunkt,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral
$$U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$$
(s.t. punkti P iga ümbrus sisaldab nii hulga $\mathcal{D}$ punkte kui ka hulka $\mathcal{D}$ mittekuuluvaid punkte).

Definitsioon 1.5. Hulga $\mathcal{D}$ kõigi sisepunktide hulka nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *sisemuseks* ja tähistatakse sümboliga $\mathcal{D}^\circ$.

Hulga $\mathcal{D}$ kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *rajaks* ja tähistatakse sümboliga $\partial\mathcal{D}$.

Hulga $\mathcal{D}$ ja tema raja ühendit nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *sulundiks* ja tähistatakse sümboliga $\overline{\mathcal{D}}$:
$$\overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}.$$

Järgnev lause, mis toob välja sisemuse, raja ja sulundi lihtsamad omadused, järeldub vahetult vastavatest definitsioonidest.

Lause 1.6. (a) $\mathcal{D}^\circ \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$*;*

(b) $\mathcal{D}^\circ \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$*;*

(c) *hulga $\mathcal{D}$ iga punkt on kas hulga $\mathcal{D}$ sisepunkt või selle hulga rajapunkt, s.t. iga $x \in \mathcal{D}$ korral realiseerub täpselt üks järgmistest teineteist välistavatest võimalustest:*
$$x \in \mathcal{D}^\circ \qquad \text{või} \qquad x \in \partial\mathcal{D};$$

(d) $\partial\mathcal{D} = \partial(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})$*;*

(e) *iga $x \in \mathbb{R}^m$ korral realiseerub täpselt üks järgmistest üksteist välistavatest võimalustest:*
$$x \in \mathcal{D}^\circ, \qquad x \in \partial\mathcal{D} \qquad \text{või} \qquad x \in (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})^\circ.$$

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D}$ on

- *lahtine,* kui $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ$ (s.t. kõik hulga $\mathcal{D}$ punktid on tema sisepunktid);
- *kinnine,* kui $\mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D}$ (s.t. hulk $\mathcal{D}$ sisaldab oma raja).

Vahetult definitsioonist järeldub, et *hulk $\mathcal{D}$ on kinnine parajasti siis, kui $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$.*

Tõepoolest, kui hulk $\mathcal{D}$ on kinnine, s.t. $\mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D}$, siis

$$\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \subset \mathcal{D},$$

s.t. $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$. Teiselt poolt, kui $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$, siis sisalduvuse $\overline{\mathcal{D}} \supset \partial\mathcal{D}$ tõttu $\mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D}$, s.t. hulk $\mathcal{D}$ on kinnine.

Lause 1.7. (a) *Lahtine kera ruumis $\mathbb{R}^m$ on lahtine hulk.*

(b) *Kinnine kera ruumis $\mathbb{R}^m$ on kinnine hulk.*

Väite (b) tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnev lihtne lause.

Lause 1.8. *Hulk $\mathcal{D}$ on lahtine parajasti siis, kui tema täiend $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ on kinnine.*

Tõestus:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \text{ on lahtine} \quad &\iff \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ \quad \iff \quad \mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset \quad \iff \quad \partial\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \\ &\iff \quad \partial(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \quad \iff \quad \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \text{ on kinnine.} \end{aligned}$$

□

Lause 1.7 tõestus. Olgu $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $r > 0$.

(a). Olgu $P \in B(P_0, r)$. Veendumaks kera $B(P_0, r)$ lahtisuses, piisab näidata, et P on selle kera sisepunkt, s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $\varepsilon > 0$ ja $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral (kolmnurga võrratuse põhjal)

$$d(Q, P_0) \leqslant d(Q, P) + d(P, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0);$$

niisiis, kui võtta $\varepsilon := r - d(P, P_0) > 0$, siis mis tahes $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral

$$d(Q, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0) = r - d(P, P_0) + d(P, P_0) = r,$$

s.t. $Q \in B(P_0, r)$ ning seega $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$.

(b). Veendumaks kera $\overline{B}(P_0, r)$ kinnisuses, piisab lause 1.8 põhjal näidata, et täiend $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ on lahtine, milleks, fikseerides vabalt $P \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$, piisab näidata, et P on hulga $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ sisepunkt, s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $\varepsilon > 0$ ja $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral (tagurpidi kolmnurga võrratuse põhjal, vt. ülesannet 1.1)

$$d(Q, P_0) \geqslant d(P, P_0) - d(P, Q) > d(P, P_0) - \varepsilon;$$

niisiis, kui võtta $\varepsilon := d(P, P_0) - r > 0$, siis mis tahes $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral

$$d(Q, P_0) > d(P, P_0) - \varepsilon = d(P, P_0) - \big(d(P, P_0) - r\big) = r,$$

s.t. $Q \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ ning seega $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$. □

Märkus 1.4. Teine võimalus lause 1.7 tõestamiseks on tõestada kõigepealt

Lause 1.9. *Mis tahes $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ning $r > 0$ korral*

$$\partial B(P_0, r) = S(P_0, r) \quad ja \quad \partial \overline{B}(P_0, r) = S(P_0, r).$$

Teisisõnu, kera raja ruumis $\mathbb{R}^m$ on sama keskpunkti ja raadiusega sfäär.

Kinnise kera kinnisus järeldub lausest 1.9 vahetult kinnisuse definitsiooni põhjal. Veendumaks lahtise kera lahtisuses, piisab lause 1.8 põhjal näidata, et tema täiend on kinnine, mis, arvestades, et hulga ja tema täiendi rajad on võrdsed, järeldub jällegi lausest 1.9 vahetult hulga kinnisuse definitsiooni põhjal.

Veel ühte võimalust lause 1.7 tõestuseks on kirjeldatud ülesandes 2.2.

Lause 1.9 tõestus.

Ülesanne 1.2. Tõestada lause 1.9.

□

Märkus 1.5. Ruumi $\mathbb{R}^m$ hulkade korral võivad esineda kõik järgnevad (üksteist välistavad) olukorrad:

(1) hulk on lahtine, kuid mitte kinnine;

(2) hulk on kinnine, kuid mitte lahtine;

(3) hulk pole ei kinnine ega lahtine;

(4) hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine.

Seejuures hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine (s.t. realiseerub olukord (4)) parajasti siis, kui tema raja on tühi hulk. Ainsad niisuguse omadusega hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$ on tühi hulk $\emptyset$ ja kogu hulk $\mathbb{R}^m$ ise.

1.5. Hulga tõkestatus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 1.7. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *tõkestatud,* kui leidub reaalarv $r > 0$ nii, et

$$\mathcal{D} \subset B\big((0, \dots, 0), r\big)$$

(s.t. $\mathcal{D}$ sisaldub mingis keras keskpunktiga $(0, \dots, 0)$).

Ülesanne 1.3. Tõestada, et hulk ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis (mis tahes keskpunktiga) keras.

Arvestades, et lause 1.4 põhjal sisaldub iga kera ruumis $\mathbb{R}^m$ mingis sama keskpunktiga kuubis ning, vastupidi, iga kuup ruumis $\mathbb{R}^m$ sisaldub mingis sama keskpunktiga keras, järeldub vahetult definitsioonist

Lause 1.10. *Hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$\mathcal{D} \subset \underbrace{[-M, M] \times \cdots \times [-M, M]}_{m \text{ tegurit}}.$$

Teisisõnu, hulk $\mathcal{D}$ on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis kuubis keskpunktiga $(0, \dots, 0)$.

Lause 1.10 võime ümber sõnastada ka järgmiselt: *hulk $\mathcal{D}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui tema punktide kõikvõimalike koordinaatide hulk on tõkestatud, s.t. leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|x_i| \leqslant M \quad \textit{iga } P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \textit{ ja iga } i \in \{1, \ldots, m\} \textit{ korral.}$$

1.6. Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 1.8. Olgu $T \subset \mathbb{R}$ mingi intervall ning olgu

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in T, \tag{1.10}$$

pidevad funktsioonid. Siis hulka

$$L := \big\{\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) \colon\ t \in T\big\} \subset \mathbb{R}^m$$

nimetatakse *Jordani jooneks* ehk *pidevaks jooneks* (ruumis $\mathbb{R}^m$). Seejuures öeldakse, et joon L on antud *parameetriliste võrranditega* (1.10). Muutujat t nimetatakse parameetriks. Kõneldes joonest (1.10), mõistame me selle all joont L.

Kõneldes edaspidi lihtsalt *joonest,* mõistame me selle all pidevat joont.

Pidevat joont ruumis $\mathbb{R}^m$ on kõige lihtsam ette kujutada selles ruumis eeskirja (1.10) järgi liikuva punkti jäljena: ajahetkel $t \in T$ on punkti koordinaadid $x_1 = \phi_1(t)$, $\ldots$, $x_m = \phi_m(t)$.

Definitsioon 1.9. Pideva joone osa, mis paikneb selle joone kahe punkti vahel, nimetatakse selle joone *kaareks:* kui joon on antud parameetriliste võrranditega (1.10) ning A ja B on selle joone punktid, kusjuures mingite $\alpha, \beta \in T$, $\alpha < \beta$, korral

$$A = \big(\phi_1(\alpha), \ldots, \phi_m(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(\phi_1(\beta), \ldots, \phi_m(\beta)\big),$$

siis joont

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

nimetatakse *punkte A ja B ühendavaks kaareks.* Punkte A ja B nimetatakse selle kaare *otspunktideks.*

Definitsioon 1.10. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *sidus,* kui tema mis tahes kahe punkti korral leidub neid punkte ühendav pidev kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas $\mathcal{D}$.

§ 2. Jadad ruumis $\mathbb{R}^m$

2.1. Jada koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 2.1. Kui igale naturaalarvule $n \in \mathbb{N}$ on vastavalt mingile eeskirjale seatud vastavusse mingi (üheselt määratud) punkt $P_n \in \mathbb{R}^m$, siis öeldakse, et on antud *jada*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots. \tag{2.1}$$

Jada (2.1) tähistatakse ka sümboliga $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ või lihtsalt (P_n). Kõneldes ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide jadast, ütleme me edaspidi lihtsalt *jada ruumis* $\mathbb{R}^m$.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ *koondub* punktiks $P \in \mathbb{R}^m$, kui

$$d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P) < \varepsilon.$$

Punkti P nimetatakse seejuures jada (P_n) *piirväärtuseks* ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{või} \quad P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P.$$

Ülesanne 2.1. Olgu jadad (P_n) ja (Q_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ ning punktid $P, Q \in \mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ ja $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Tõestada, et

(a) $d(P_n, Q) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(P, Q)$;

(b) $d(P_n, Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(P, Q)$.

NÄPUNÄIDE. Kasutada tagurpidi kolmnurga võrratust (vt. ülesannet 1.1).

Järgnev lause kirjeldab koonduvust ruumis $\mathbb{R}^m$.

Lause 2.1. *Olgu* $P_n = (x_1^n, \ldots, x_m^n), P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \ldots$. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ *ruumis* $\mathbb{R}^m$*;*

(ii) $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ *iga* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *korral.*

Teisisõnu, lause 2.1 ütleb, et *jada* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *ruumis* $\mathbb{R}^m$ *koondub punktiks* $P \in \mathbb{R}^m$ *parajasti siis, kui selle jada punktide vastavate koordinaatide jadad koonduvad punkti P vastavateks koordinaatideks* (niisugusel juhul öeldakse, et jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *koondub koordinaaditi* punktiks P). Niisiis, *koonduvus ruumis* $\mathbb{R}^m$ *on samaväärne koordinaaditi koonduvusega.*

Lause 2.1 tõestus. Lemma 1.5 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$0 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \leqslant d(P_n, P) \leqslant \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i|,$$

järelikult arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal

$$d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \text{ ruumis } \mathbb{R}^m \quad &\Longleftrightarrow \quad d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral.} \end{aligned}$$

□

2.2. Sulundi punkti ja kinnisuse kirjeldus jadade keeles

Lause 2.2. *Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$P \in \overline{\mathcal{D}}$ (s.t. punkt P kuulub hulga $\mathcal{D}$ sulundisse);*

(ii) *iga $\varepsilon > 0$ korral $U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ (s.t. punkti P iga ümbrus lõikab hulda $\mathcal{D}$);*

(iii) *leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \dots$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ (s.t. leidub hulga $\mathcal{D}$ punktide jada, mis koondub punktiks P).*

Tõestus. (i)⇒(ii). Olgu $P \in \overline{\mathcal{D}}$. Siis kehtib vähemalt üks tingimustest $P \in \mathcal{D}$ ja $P \in \partial\mathcal{D}$. Kui $P \in \mathcal{D}$, siis punkti P iga ümbrus sisaldab hulka $\mathcal{D}$ kuuluva punkti P. Kui $P \in \partial\mathcal{D}$, siis rajapunkti definitsiooni põhjal lõikab punkti P iga ümbrus hulka $\mathcal{D}$. Niisiis igal juhul tingimus (ii) kehtib.

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Peame näitama, et $P \in \overline{\mathcal{D}}$. Kui $P \in \mathcal{D}$, siis see sisalduvus ilmselt kehtib (sest $\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$). Vaatleme nüüd juhtu, kus $P \notin \mathcal{D}$. Siis punkti P iga ümbrus sisaldab hulka $\mathcal{D}$ mittekuuluva punkti P. Kuna tingimuse (ii) põhjal sisaldab punkti P iga ümbrus ka hulga $\mathcal{D}$ punkte, siis $P \in \partial\mathcal{D}$, seega $P \in \overline{\mathcal{D}}$ (sest $\partial\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$), nagu soovitud.

(ii)⇒(iii). Kehtigu (ii). Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in U_{\frac{1}{n}}(P) \cap \mathcal{D}$. Punktid P_n rahuldavad tingimusi

$$0 \leqslant d(P_n, P) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

seega jada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal ka $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, s.t. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$. Kuna $P_n \in \mathcal{D}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis tingimus (iii) kehtib.

(iii)⇒(ii). Kehtigu (iii) ning olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ ehk, teisisõnu, $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, siis leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $d(P_n, P) < \varepsilon$. Aga nüüd $P_n \in U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D}$; järelikult (ii) kehtib. □

Lause 2.3. *Hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõik oma elementide koonduvate jadade piirväärtused, s.t. kehtib implikatsioon*

$$\Big[P_n \in \mathcal{D},\, n = 1, 2, \dots, \quad P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P\Big] \quad \Longrightarrow \quad P \in \mathcal{D}. \tag{2.2}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu hulk $\mathcal{D}$ kinnine ning olgu punktid $P_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \dots$, ja $P \in \mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$. Peame näitama, et $P \in \mathcal{D}$. Kuna hulk $\mathcal{D}$ on kinnine, siis $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$, seega piisab näidata, et $P \in \overline{\mathcal{D}}$. See sisalduvus järeldub lause 2.2 samaväärsusest (i)$\Leftrightarrow$(iii).

Piisavus. Kehtigu implikatsioon (2.2) ning olgu $P \in \partial\mathcal{D}$. Hulga $\mathcal{D}$ kinnisuseks piisab näidata, et $P \in \mathcal{D}$. Kuna $P \in \partial\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$, siis lause 2.2 samaväärsuse (i)$\Rightarrow$(iii) põhjal leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \dots$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$. Implikatsiooni (2.2) põhjal järeldub siit, et $P \in \mathcal{D}$, nagu soovitud. □

Ülesanne 2.2. Järeldada lause 1.7 (kinnise kera kinnisus ja lahtise kera lahtisus) lausest 2.3.

Näpunäide. Kasutada ülesannet 2.1. Lahtise kera lahtisuse tõestuseks näidata, et tema täiend on kinnine ja rakendada lauset 1.8.

2.3. Hulga kuhjumispunkt

Definitsioon 2.3. Punkti $P \in \mathbb{R}^m$ nimetatakse hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *kuhjumispunktiks,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral $\big(\mathcal{U}_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D}\big) \setminus \{P\} \neq \emptyset$ (s.t. punkti P iga ümbrus sisaldab temast erinevaid hulga D punkte).

Märkus 2.1. Rõhutame, et ruumis $\mathbb{R}^m$ üldjuhul

- hulgal võib kuhjumispunkte leiduda, aga võib ka mitte leiduda;
- hulga kuhjumispunkt võib kuuluda sellesse hulka, aga võib ka mitte kuuluda.

Ülesanne 2.3. Tõestada, et

(a) ruumi $\mathbb{R}^m$ lõplikul alamhulgal ei ole kuhjumispunkte;

(b) kui $r > 0$, $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, $P_1 := (x_1^0 + r, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, siis P_1 on nii lahtise kera $B(P_0, r)$ kui ka kinnise kera $\overline{B}(P_0, r)$ kuhjumispunkt, kusjuures $P_1 \in \overline{B}(P_0, r)$, kuid $P_1 \notin B(P_0, r)$.

Lause 2.4. *Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *P on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt;*

(ii) *$P \in \overline{\mathcal{D} \setminus \{P\}}$ (s.t. punkt P kuulub hulga $\mathcal{D} \setminus \{P\}$ sulundisse);*

(iii) *leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P\}$, $n = 1, 2, \dots$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ (s.t. leidub hulga $\mathcal{D} \setminus \{P\}$ punktide jada, mis koondub punktiks P).*

Tõestus. (i)$\Leftrightarrow$(ii) järeldub vahetult kuhjumispunkti definitsioonist ja lause 2.2 samaväärsusest (i)$\Leftrightarrow$(ii), sest iga $\varepsilon > 0$ korral $\big(\mathcal{U}_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D}\big) \setminus \{P\} = \mathcal{U}_\varepsilon(P) \cap \big(\mathcal{D} \setminus \{P\}\big)$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) järeldub vahetult lause 2.2 samaväärsusest (i)$\Leftrightarrow$(iii). □

2.4. Bolzano–Weierstrassi teoreem

Definitsioon 2.4. Öeldakse, et jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud, kui tema elementide hulk $\{P_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud.

Ülesanne 2.4. Tõestada, et koonduv jada ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud.

Teoreem 2.5 (Bolzano–Weierstrassi teoreem)**.** *Igast tõkestatud jadast ruumis $\mathbb{R}^m$ saab välja eraldada koonduva osajada.*

TÕESTUS. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty} = \big((x_1^n, \ldots, x_m^n)\big)_{n=1}^{\infty}$ tõkestatud jada ruumis $\mathbb{R}^m$. Lause 1.10 põhjal on ka selle jada punktide vastavate koordinaatide jadad

$$(x_1^n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_2^n)_{n=1}^{\infty}, \quad \ldots\ldots, \quad (x_m^n)_{n=1}^{\infty}$$

tõkestatud. Seega Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal (arvjadade jaoks) leidub jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktide esimeste koordinaatide jadal $(x_1^n)_{n=1}^{\infty}$ koonduv osajada $(x_1^{k_n^1})_{n=1}^{\infty}$, teiste koordinaatide (osa)jadal $(x_2^{k_n^1})_{n=1}^{\infty}$ leidub koonduv osajada $(x_2^{k_n^2})_{n=1}^{\infty}$ jne. Kirjeldatud protseduuri tulemusena me saame (kasvavad) indeksite jadad

$$(k_n^1)_{n=1}^{\infty}, \quad (k_n^2)_{n=1}^{\infty}, \quad \ldots\ldots, \quad (k_n^m)_{n=1}^{\infty}$$

nii, et

- jada $(k_n^{i+1})_{n=1}^{\infty}$ on jada $(k_n^i)_{n=1}^{\infty}$ osajada iga $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ korral;
- jada $(x_i^{k_n^i})_{n=1}^{\infty}$ koondub iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral.

Aga nüüd kõik vastavate koordinaatide (osa)jadad $(x_i^{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, m$, koonduvad (sest iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral on $(x_i^{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$ kooduva jada $(x_i^{k_n^i})_{n=1}^{\infty}$ osajada), seega osajada $(P_{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$ koondub (sest ta koondub koordinaaditi). $\square$

2.5. Cauchy kriteerium jada koonduvuseks

Definitsioon 2.5. Öeldakse, et jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ on *Cauchy jada* ehk *fundamentaaljada,* kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_k, P_n) < \varepsilon.$$

Teoreem 2.6 (Cauchy kriteerium jada koonduvuseks)**.** *Jada ruumis $\mathbb{R}^m$ koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Koondugu jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ punktiks $P \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Veendumaks, et (P_n) on Cauchy jada, peame leidma indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_k, P_n) < \varepsilon.$$

Mis tahes $k, n \in \mathbb{N}$ korral kolmnurga võrratuse põhjal

$$d(P_k, P_n) \leqslant d(P_k, P) + d(P, P_n).$$

Niisiis, kui valida indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P) < \frac{\varepsilon}{2},$$

siis kõikide $k, n \geqslant N$ korral

$$d(P_k, P_n) \leqslant d(P_k, P) + d(P, P_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Piisavusele esitame kaks erinevat tõestust. Neist esimene toetub jada koonduvuse kirjeldusele ruumis $\mathbb{R}^m$ (lausele 2.1) ja Cauchy kriteeriumile arvjadade koonduvuseks, teine aga Bolzano–Weierstrassi teoreemile 2.5.

Piisavuse esimene tõestus. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty} = \big((x_1^n, \ldots, x_m^n)\big)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$. Siis ka selle jada vastavate koordinaatide jadad

$$(x_1^n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_2^n)_{n=1}^{\infty}, \quad \ldots\ldots, \quad (x_m^n)_{n=1}^{\infty} \tag{2.3}$$

on Cauchy jadad, sest mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral lemma 1.5 põhjal

$$|x_i^k - x_i^n| \leqslant d(P_k, P_n) \quad \text{kõikide } k, n \in \mathbb{N} \text{ korral;}$$

seega Cauchy kriteeriumi põhjal arvjada koonduvuseks jadad (2.3) koonduvad, s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub koordinaaditi; järelikult lause 2.1 põhjal jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub.

Piisavuse teine tõestus. Olgu (P_n) Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$. Jada (P_n) koonduvuseks piisab näidata, et

(1) iga Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud;

(2) kui Cauchy jadal ruumis $\mathbb{R}^m$ on olemas koonduv osajada, siis see jada koondub samaks piirväärtuseks, milleks see osajadagi.

Tõepoolest, kui väited (1) ja (2) kehtivad, siis väite (1) ja Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal leidub jadal (P_n) koonduv osajada, seega väite (2) põhjal jada (P_n) koondub.

Ülesanne 2.5. Tõestada väited (1) ja (2).

□

§ 3. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

3.1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste

Definitsioon 3.1. Kujutusi

$$f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{kus } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m, \tag{3.1}$$

nimetatakse m *muutuja funktsioonideks.*

Kõikvõimalikke m muutuja funktsioone, kus $m \geqslant 2$, nimetatakse *mitme muutuja funktsioonideks.*

Funktsiooni (3.1) määramispiirkonna $\mathcal{D}$ iga punkt $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}$ on üheselt määratud oma koordinaatidega $x_1, \ldots, x_m$; teiselt poolt, punktiga $P \in \mathcal{D}$ on üheselt määratud tema koordinaadid $x_1, \ldots, x_m$. Termin "m muutuja funktsioon" on niisiis põhjendatud asjaoluga, et sellise funktsiooni väärtused on määratud määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide koordinaate tähistavate m muutuja $x_1, \ldots, x_m$ väärtustega. Neid muutujaid (nagu ka määramispiirkonna punkte tähistavat muutujat P) nimetatakse funktsiooni (3.1) *argumentideks* ning, kui selle funktsiooni väärtuste märkimiseks kasutada muutujat u, siis selle funktsiooni märkimiseks kasutatakse ka tähistust

$$u = f(x_1, \ldots, x_m) \quad \text{või} \quad u = f(P) \quad \text{või} \quad u = u(x_1, \ldots, x_m) \quad \text{või} \quad u = u(P).$$

3.2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Olgu funktsioon $u = f(P)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et funktsiooni f *piirväärtus* punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on arv c (või et funktsioon f *koondub* arvuks c protsessis $P \to P_0$ (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile P_0)) ja kirjutatakse

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} c,$$

või

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, \ldots, x_m) = c \quad \text{või} \quad f(x_1, \ldots, x_m) \xrightarrow[\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots \\ x_m \to x_m^0}]{} c,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c)| < \varepsilon.$$

Ruumis $\mathbb{R}^m$ kasutame piirprotsessi $(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ märkimisel ka tähistust $x_1, \ldots, x_m \longrightarrow x_1^0, \ldots, x_m^0$; näiteks tähistame funktsiooni $u = f(x, y)$ piirväärtust punktis (x_0, y_0) sümboliga $\lim\limits_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y)$; kui seejuures $x_0 = y_0 =: a$, siis kirjutame $\lim\limits_{x,y \to a,a}$ asemel lihtsalt $\lim\limits_{x,y \to a}$.

Definitsioon 3.3. Kui $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} 0$, siis öeldakse, et funktsioon f on punktis P_0 *lõpmata väike* (või protsessis $P \to P_0$ lõpmata väike või ka, et funktsioon f *hääbub* protsessis $P \to P_0$).

Definitsioon 3.4. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on ∞ (loetakse: lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub realarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\, 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad f(P) > E.$$

Definitsioon 3.5. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on $-\infty$ (loetakse: miinus lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} -\infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub realarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\, 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad f(P) < -E.$$

Definitsioon 3.6. Kui $|f(P)| \xrightarrow[P\to P_0]{} \infty$, siis öeldakse, et funktsioon f on punktis P_0 *lõpmata suur* (või protsessis $P \to P_0$ lõpmata suur).

Teoreem 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteerium)**.** *Olgu P_0 funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt ning olgu $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} c;$

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\},\, n = 1, 2, \ldots,\; P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c.$

Teisisõnu, funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 on c parajasti siis, kui iga punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ korral on vastava funktsiooni väärtuste jada $\big(f(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ piirväärtus c.

Tõestus. Tõestame teoreemi ainult juhu $c \in \mathbb{R}$ jaoks. Juhtudel $c = \infty$ ja $c = -\infty$ on tõestus analoogiline.

(i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i) ning olgu punktid $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$. Fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab meil implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(ii) tõestuseks leida indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

Kuna $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} c$, siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c)| < \varepsilon.$$

Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P_0) < \delta.$$

Kui nüüd $n \geqslant N$, siis $P_n \in \mathcal{D}$ ja $0 < d(P_n, P_0) < \delta$ ning järelikult

$$|f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et (i) ei kehti. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, mille korral

$$d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad |f(P_n) - c| \geqslant \varepsilon.$$

Aga nüüd $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, kuid mitte $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, mis on vastuolus eeldusega (ii). □

Järeldus 3.2. *Mitme muutuja funktsioonil saab antud punktis eksisteerida ülimalt üks piirväärtus.*

Tõestus. Olgu P_0 funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt ning olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ sellised, et

$$f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \beta.$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et $\alpha = \beta$. Selleks valime mingi punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt); siis funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi (teoreemi 3.1) põhjal

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$$

ning järelikult arvjada piirväärtuse ühesuse tõttu $\alpha = \beta$, nagu soovitud. □

3.3. Funktsiooni piirväärtuse omadusi

Teoreem 3.3. *Eksisteerigu funktsioonidel f ja g lõplik piirväärtus oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis P_0. Siis ka nende funktsioonide summal $f + g$, vahel $f - g$, korrutisel fg ning, kui $\lim_{P\to P_0} g(P) \neq 0$, siis ka jagatisel f/g eksisteerib punktis P_0 lõplik piirväärtus, kusjuures*

$$\begin{aligned}
\lim_{P\to P_0} \big(f(P) + g(P)\big) &= \lim_{P\to P_0} f(P) + \lim_{P\to P_0} g(P),\\
\lim_{P\to P_0} \big(f(P) - g(P)\big) &= \lim_{P\to P_0} f(P) - \lim_{P\to P_0} g(P),\\
\lim_{P\to P_0} \big(f(P)\, g(P)\big) &= \lim_{P\to P_0} f(P) \lim_{P\to P_0} g(P),\\
\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} &= \frac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0} g(P)}.
\end{aligned}$$

TÕESTUS. Tähistame

$$\lim_{P\to P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P\to P_0} g(P) =: \beta.$$

Olgu punktid $P_n \in \mathcal{D}\setminus\{P_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$. Teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$f(P_n) \pm g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \pm \beta, \quad f(P_n)\, g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\,\beta \quad \text{ja} \quad \frac{f(P_n)}{g(P_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha}{\beta}$$

(siin viimane koonduvus peab aset leidma eeldusel, et $\beta \neq 0$), mis kehtib arvjada piirväärtuse vastavate omaduste põhjal, sest (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \text{ja} \quad g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta.$$

□

Lause 3.4 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse monotoonsus)**.** *Leidugu funktsioonide f ja g määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktil P_0 ümbrus $\mathcal{U}$, mille korral*

$$f(P) \leqslant g(P) \quad \textit{iga } P \in (\mathcal{U}\cap\mathcal{D})\setminus\{P_0\} \textit{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$, siis

$$\lim_{P\to P_0} f(P) \leqslant \lim_{P\to P_0} g(P).$$

TÕESTUS. Eksisteerigu piirväärtused

$$\lim_{P\to P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P\to P_0} g(P) =: \beta.$$

Lause tõestuseks peame näitama, et $\alpha \leqslant \beta$. Selleks valime mingi punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate hulga $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes $n \geqslant N$ korral $P_n \in (\mathcal{U}\cap\mathcal{D})\setminus\{P_0\}$, seega

$$f(P_n) \leqslant g(P_n).$$

Kuna teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g(P_n) = \beta,$$

siis arvjada piirväärtuse monotoonsuse tõttu $\alpha \leqslant \beta$, nagu soovitud. □

Lause 3.5 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse sändvitšteoreem)**.** *Leidugu funktsioonide f, g ja h määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktil P_0 ümbrus $\mathcal{U}$, mille korral*

$$f(P) \leqslant g(P) \leqslant h(P) \quad \textit{iga } P \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\} \textit{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$, kusjuures need piirväärtused on võrdsed:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} h(P) =: c, \tag{3.2}$$

siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{P \to P_0} g(P)$, kusjuures

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = c.$$

Tõestus. Eksisteerigu piirväärtused $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$ ning kehtigu võrdus (3.2). Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks P_0 koonduv punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Veendumaks, et $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) = c$, piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$\lim_{n \to \infty} g(P_n) = c. \tag{3.3}$$

Kuna $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes $n \geqslant N$ korral $P_n \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\}$, seega

$$f(P_n) \leqslant g(P_n) \leqslant h(P_n).$$

Kuna (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} h(P_n) = c,$$

siis arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal kehtib (3.3). □

Lause 3.6. *Olgu P_0 funktsioonide f ja g määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt, kusjuures*

(1) $f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} 0$*;*

(2) *funktsioon g on punkti P_0 mingis ümbruses tõkestatud, s.t leiduvad punkti P_0 ümbrus $\mathcal{U}$ ja arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|g(P)| \leqslant M \quad \textit{iga } P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \textit{ korral.}$$

Siis ka

$$f(P)\, g(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} 0.$$

Teisisõnu, lause 3.6 ütleb, et *antud piirprotsessis hääbuva funktsiooni ja tõkestatud funktsiooni korrutis on selles piirprotsessis hääbuv.*

Lause 3.6 tõestus. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks P_0 koonduv punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Veendumaks, et $f(P)\,g(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} 0$, piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$f(P_n)\,g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.4}$$

Selleks märgime, et

- $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (see järeldub eeldusest (1) teoreemi 3.1 põhjal);
- jada $\big(g(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud, sest kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et
$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U},$$
seega
$$|g(P_n)| \leqslant M \quad \text{iga } n \geqslant N \text{ korral},$$
järelikult
$$|g(P_n)| \leqslant \max\big\{|g(P_1)|, \dots, |g(P_N)|, M\big\} \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kuna hääbuva arvjada ja tõkestatud arvjada korrutis on hääbuv arvjada, siis (3.4) kehtib. □

3.4. Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu funktsioon $u = f(P)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt.

Definitsioon 3.7. Öeldakse, et funktsioon f on *pidev* punktis P_0, kui

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0),$$

s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$, nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\, d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Olgu $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$ sellised, et $P := (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{D}$. Vahet

$$\Delta u := \Delta u(P) := f(P) - f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)$$

nimetatakse funktsiooni f *(täis)muuduks* punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$. Funktsiooni f pidevuse tingimuse võime kirja panna ka järgneval nn. *diferentskujul: funktsioon $u = f(P)$ on pidev punktis P_0 parajasti siis, kui*

$$\Delta u \xrightarrow[\Delta x_i \to 0,\, i=1,\dots,m]{} 0.$$

Vahetult teoreemist 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumist) järeldub

Teoreem 3.7 (mitme muutuja funktsiooni pidevuse Heine kriteerium)**.** *Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu punkt $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on pidev punktis P_0;*

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D},\, n \in \mathbb{N},\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0).$

Teisisõnu, funktsioon f on pidev punktis P_0 parajasti siis, kui iga punktiks P_0 koonduva määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ korral koondub vastav funktsiooni väärtuste jada $\big(f(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ funktsiooni väärtuseks $f(P_0)$ punktis P_0.

Definitsioon 3.8. Öeldakse, et funktsioon f on *pidev,* kui ta on pidev oma määramispiirkonna $\mathcal{D}$ igas kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$.

Me ütleme, et funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, kui tema ahend $f|_{\mathcal{D}_0}$ on pidev funktsioon.

3.5. Piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$

Definitsioon 3.9. Olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Arvu

$$\|P\| := d\big(P_0, (0, \dots, 0)\big)$$

(s.t. punkti P kaugust punktist $(0, \dots, 0)$) nimetatakse punkti P *normiks.*

Definitsioon 3.10. Olgu funktsiooni f määramispiirkond $\mathcal{D}$ tõkestamata.

Me ütleme, et funktsiooni f piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$ on

- arv $c \in \mathbb{R}$, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c| < \varepsilon;$$

- ∞ (loetakse: lõpmatus), kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad f(P) > E;$$

- $-\infty$ (loetakse: miinus lõpmatus), kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et

$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad f(P) < -E.$$

Kui funktsiooni f piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$ on c ($c \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$), siis me kirjutame

$$\lim_{\|P\| \to \infty} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[\|P\| \to \infty]{} c.$$

Kehtib teoreemi 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) järgnev analoog.

Teoreem 3.8. *Olgu funktsiooni f määramispiirkond ülalt tõkestamata ning olgu $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f(P) \xrightarrow[\|P\| \to \infty]{} c$;

(ii) $\Big[P_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N},\ \|P_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty\Big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c.$

Toetudes teoreemile 3.8, on lihtne tõestada järelduse 3.2 analoog mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse ühesusest protsessis $\|P\| \to \infty$ ning samuti teoreemi 3.3 ja lausete 3.4–3.6 analoogid piirprotsessi $\|P\| \to \infty$ jaoks eeldusel, et funktsioonide f ja g (ning lauses 3.5 ka funktsiooni h) ühine määramispiirkond $\mathcal{D}$ on ülalt tõkestamata.

3.6. Piirväärtus mööda pidevat joont

Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, olgu P_0 määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt ning olgu L pidev joon ruumis $\mathbb{R}^m$, mis sisaldab punkti P_0 ning mis sisaldub määramispiirkonnas $\mathcal{D}$, välja arvatud, võib-olla, punkt P_0, millelt me ei eelda kuulumist määramispiirkonda $\mathcal{D}$. Olgu joon L antud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in T, \tag{3.5}$$

kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall; seejuures me eeldame, et leidub parajasti üks $t_0 \in T$ nii, et

$$P_0 = \big(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_m(t_0)\big).$$

Definitsioon 3.11. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{t \to t_0} f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big),$$

siis seda piirväärtust nimetame funktsiooni f piirväärtuseks punktis P_0 (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile P_0) *mööda joont* L parametriseeringu (3.5) järgi.

Lause 3.9. *Kui funktsioonil f eksisteerib oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis P_0 (lõplik või lõpmatu) piirväärtus*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) =: c, \tag{3.6}$$

siis c on ka funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 mööda mis tahes pidevat joont (mis sisaldab punkti P_0 ning mis sisaldub määramispiirkonnas $\mathcal{D}$, välja arvatud, võib-olla, punkt P_0) selle joone mis tahes parametriseeringu järgi.

TÕESTUS. Eksisteerigu funktisoonil f punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) piirväärtus (3.6), olgu punkti P_0 sisaldav ning määramispiirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduv (välja arvatud, võib-olla, punkt P_0) pidev joon antud parameetriliste võrranditega (3.5), kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall, ning olgu $t_0 \in T$ selline, et

$$P_0 = \big(\phi_1(t_0), \dots, \phi_m(t_0)\big).$$

Peame näitama, et

$$\lim_{t\to t_0} f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big) = c. \tag{3.7}$$

Olgu $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ mingi punktist t_0 erinevate intervalli T punktide jada, mille korral $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab võrduseks (3.7) näidata, et

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\phi_1(t_n), \dots, \phi_m(t_n)\big) = c$$

ehk, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$P_n := \big(\phi_1(t_n), \dots, \phi_m(t_n)\big),$$

piisab näidata, et

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = c. \tag{3.8}$$

Funktsioonide $\phi_1, \dots, \phi_m$ pidevuse tõttu funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \phi_1(t_n) = \phi_1(t_0), \quad \dots\dots, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_m(t_n) = \phi_m(t_0);$$

s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub punktiks P_0 koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ ning järelikult lause 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal kehtib (3.8) (sest $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = c$). □

Näide 3.1. Veendume, et kahe muutuja funktsiooni $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ piirväärtus punktis $(0, 0)$

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \tag{3.9}$$

ei eksisteeri. Vaadeldava kahe muutuja funktsiooni piirväärtus punktis $(0, 0)$ mööda joont $y = x$ (võttes parameetri rolli muutuja x) on

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2};$$

piirväärtus punktis $(0, 0)$ mööda joont $y = 2x$ (võttes parameetri rolli muutuja x) on

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ y=2x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 2x}{x^2 + (2x)^2} = \frac{2}{5};$$

need piirväärtused on erinevad; järelikult lause 3.9 põhjal piirväärtus (3.9) ei eksisteeri.

3.7. Korduvad piirväärtused

Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, välja arvatud võib-olla punktis (x_0, y_0) endas. Eksisteerigu iga punkti x korral koordinaadi x_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti x_0 enda korral) lõplik piirväärtus

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) =: g(x).$$

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \to x_0} g(x) =: \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y), \tag{3.10}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *korduvaks piirväärtuseks.*

Analoogiliselt defineeritakse korduv piirväärtus

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{3.11}$$

(ning samuti ka korduvad piirväärtused rohkem kui kahe muutuja funktsioonide jaoks).

Üldiselt ei järeldu korduvate piirväärtuste (3.10) ja (3.11) olemasolust piirväärtuse

$$\lim_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y). \tag{3.12}$$

olemasolu.

Näide 3.2. Piirväärtus

$$\lim_{x, y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ei eksisteeri (vt. näidet 3.1); samas vastavad korduvad piirväärtused eksisteerivad: mis tahes $x \neq 0$ korral

$$\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

ning seega $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$. Analoogiliselt saame, et ka $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$.

Samuti ei järeldu piirväärtuse (3.12) olemasolust korduvate piirväärtuste (3.10) ja (3.11) olemasolu.

Näide 3.3. Piirväärtus

$$\lim_{x, y \to 0} y \sin \frac{1}{x}$$

on olemas, kuid üks vastavatest korduvatest piirväärtustest ei eksisteeri. Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, on piirprotsess $x, y \to 0$ samaväärne protsessiga $r \to 0$; seega

$$\lim_{x, y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{r \to 0} r \, \sin \phi \, \sin \frac{1}{r \cos \phi} = 0,$$

sest hääbuva ja tõkestatud funktsiooni korrutis on hääbuv (märgime, et funktsioon $(\phi, r) \mapsto \sin \phi \, \sin \frac{1}{r \cos \phi}$ on tõkestatud). Samuti mis tahes $x \neq 0$ korral $\lim\limits_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = 0$, seega

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Samas mitte ühegi $y \neq 0$ korral piirväärtus $\lim\limits_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x}$ ei eksisteeri, seega ei eksisteeri ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x}$.

Lause 3.10. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, välja arvatud võib-olla punktis (x_0, y_0) endas, kusjuures eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus*

$$\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y) =: c.$$

(a) *Kui iga punkti x korral punkti x_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti x_0 enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) =: g(x), \tag{3.13}$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, kusjuures

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y) = c.$$

(b) *Kui iga punkti y korral punkti y_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti y_0 enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y),$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, kusjuures

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y) = c.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse sümmeetriliselt.)

Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et iga (punktist x_0 erineva) punkti $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus (3.13), ning olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks x_0 koonduv punktist x_0 erinevate vahemiku $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktide jada. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab väite (a) tõestuseks näidata, et $g(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral, arvestades, et $f(x_n, y) \xrightarrow[y \to y_0]{} g(x_n)$, saame valida punkti y_n nii, et

$$|y_n - y_0| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad \bigl|f(x_n, y_n) - g(x_n)\bigr| < \frac{1}{n}.$$

Kuna $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ ja $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y_0$, siis lause 2.1 põhjal $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} (x_0, y_0)$ ruumis $\mathbb{R}^2$, seega funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c$ ning järelikult

$$g(x_n) = \bigl(g(x_n) - f(x_n, y_n)\bigr) + f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c$$

(siin $g(x_n) - f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, sest $|g(x_n) - f(x_n, y_n)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$), nagu soovitud. □

§ 4. Pidevate mitme muutuja funktsioonide põhiomadused

4.1. Pideva funktsiooni märgi säilivus

Teoreem 4.1. *Olgu hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ määratud funktsioon f pidev määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$. Kui $f(P_0) \neq 0$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$\text{iga } P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D} \text{ korral } f(P) \neq 0 \text{ ja } \operatorname{sgn} f(P) = \operatorname{sgn} f(P_0)$$

(s.t. leidub punkti P_0 ümbrus, milles selle funktsiooni väärtusted erinevad nullist ning on sama märgiga, mis $f(P_0)$).

Tõestus. Tähsitame $\alpha := f(P_0) \neq 0$. Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis P_0 leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\, d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \frac{|\alpha|}{2},$$

s.t. iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} < f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2}.$$

Niisiis, kui $f(P_0) > 0$, siis iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P) > f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) - \frac{f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} > 0;$$

kui aga $f(P_0) < 0$, siis iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) + \frac{-f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} < 0.$$

□

4.2. Aritmeetilised tehted pidevate funktsioonidega

Vahetult funktsiooni pidevuse definitsioonist ja teoreemist 3.3 järeldub

Teoreem 4.2. *Olgu funktsioonid f ja g pidevad oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$. Siis ka nende funktsioonide summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning, kui $g(P_0) \neq 0$, siis ka jagatis f/g on pidevad punktis P_0.*

Märkus 4.1. Eeldus $g(P_0) \neq 0$ teoreemis 4.2 koos teoreemiga 4.1 garanteerib, et punkt P_0 on jagatise f/g määramispiirkonna kuhjumispunkt.

Järeldus 4.3. *Olgu f ja g pidevad funktsioonid, millel on ühine määramispiirkond. Siis ka nende funktsioonide summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning, kui funktsioon g pole üheski määramispiirkonna punktis 0, siis ka jagatis f/g on pidevad funktsioonid.*

4.3. Pidevate funktsioonide liitfunktsiooni pidevus

Olgu $l \in \mathbb{N}$ ning olgu hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^l$ määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) &&= \phi_1(t_1, \ldots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) &&= \phi_2(t_1, \ldots, t_l), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \phi_m(Q) &&= \phi_m(t_1, \ldots, t_l). \end{aligned}$$

Olgu hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ selline, et

$$\mathcal{D} \supset \Big\{ \big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big) \colon \ Q \in \Delta \Big\},$$

ning olgu hulgas $\mathcal{D}$ määratud funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m).$$

Siis on hulgas Δ määratud funktsioon

$$u = f\big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big). \tag{4.1}$$

Ülaltoodud moel saadud (täpsemalt, kahe või enama funktsiooni järjest rakendamise teel saadud) funktsioone nimetatakse *liitfunktsioonideks.*

Teoreem 4.4. *Olgu funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevad hulga Δ kuhjumispunktis $Q_0 \in \Delta$ ning olgu funktsioon f pidev punktis*

$$P_0 = \big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big).$$

Siis ka liitfunktsioon (4.1) *on pidev punktis Q_0.*

Tõestus. Olgu $(Q_n)_{n=1}^\infty$ selline hulga Δ punktide jada, et $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_0$. Teoreemi 3.7 (pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab liitfunktsiooni (4.1) pidevuseks punktis Q_0 näidata, et

$$f\big(\phi_1(Q_n), \ldots, \phi_m(Q_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big)$$

ehk, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$P_n := \big(\phi_1(Q_n), \ldots, \phi_m(Q_n)\big),$$

piisab näidata, et

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0). \tag{4.1}$$

Funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevuse tõttu punktis Q_0 teoreemi 3.7 põhjal

$$\phi_1(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_1(Q_0), \quad \ldots\ldots, \quad \phi_m(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_m(Q_0);$$

s.t. jada $(P_n)_{n=1}^\infty$ koondub punktiks P_0 koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$ ning järelikult (jällegi teoreemi 3.7 põhjal) funktsiooni f pidevuse tõttu punktis P_0 kehtib (4.1). $\square$

4.4. Mitme muutuja elementaarfunktsioonid

Definitsioon 4.1. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Funktsioone $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, mis on saadud (hulga $\mathcal{D}$ punktide koordinaate tähistavatest) m sõltumatust muutujast lõpliku arvu aritmeetiliste tehete, ühe muutuja elementaarfunktsioonide ja liifunktsiooni moodustamise operatsioonide rakendamise teel, nimetatakse *m muutuja elementaarfunktsioonideks.*

Kui $m \geqslant 2$, siis m muutuja elementaarfunktsioone nimetatakse *mitme muutuja elementaarfunktsioonideks.*

Järgneva teoreemi võtame käesolevas kursuses teadmiseks ilma seda tõestamata.

Teoreem 4.5. *Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad.*

Teoreemi 4.5 saab rakendada elementaarfunktsiooni piirväärtuse leidmisel: kui f on mitme muutuja elementaarfunktsioon ning P_0 on selle funktsiooni määramispiirkonna punkt, mis on ühtlasi selle määramispiirkonna kuhjumispunkt, siis teoreemi 4.5 põhjal

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

4.5. Sidusas hulgas pideva funktsiooni vahepealsed väärtused

Teoreem 4.6 (Bolzano–Cauchy teoreem)**.** *Olgu funktsioon f pidev sidusas hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, olgu $A, B \in \mathcal{D}$ ning rahuldagu reaalarv c tingimust*

$$f(A) \leqslant c \leqslant f(B) \qquad (\textit{või } f(B) \leqslant c \leqslant f(A), \textit{ kui } f(B) < f(A)).$$

Siis mis tahes punkte A ja B ühendaval pideval kaarel, mis sisaldub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$, leidub punkt C nii, et $f(C) = c$.

TÕESTUS. Olgu tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ sisalduv punkte A ja B ühendav kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_m = \phi_m(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus $\phi_1, \ldots, \phi_m$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevad funktsioonid ning

$$A = \big(\phi_1(\alpha), \ldots, \phi_m(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(\phi_1(\beta), \ldots, \phi_m(\beta)\big).$$

Siis $u\colon [\alpha, \beta] \ni t \mapsto f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) \in \mathbb{R}$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev funktsioon (sest ta on pidevate funktsioonide liitfunktsioon), kusjuures $u(\alpha) = f(A)$ ja $u(\beta) = f(B)$; järelikult Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub $t_0 \in [\alpha, \beta]$ nii, et $u(t_0) = c$ ehk, teisisõnu, tähistades $C := \big(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_m(t_0)\big)$,

$$f(C) = f\big(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_m(t_0)\big) = u(t_0) = c.$$

□

4.6. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni tõkestatus

Teoreem 4.7 (Weierstrassi esimene teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on tõkestatud selles hulgas.*

TÕESTUS. Olgu funktsiooon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f ei ole tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in \mathcal{D}$ nii, et

$$|f(P_n)| > n.$$

Jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal saame temast välja eraldada koonduva osajada $(P_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Tähistame $P_0 := \lim\limits_{n\to\infty} P_{k_n}$; siis hulga $\mathcal{D}$ kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal $P_0 \in \mathcal{D}$. Kuna funktsioon $\mathcal{D} \ni P \mapsto |f(P)| \in \mathbb{R}$ on pidev (sest ta on pidevate funktsioonide $\mathcal{D} \ni P \mapsto f(P) \in \mathbb{R}$ ja $\mathbb{R} \ni u \mapsto |u| \in \mathbb{R}$ liitfunktsioon), siis teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal $|f(P_{k_n})| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(P_0)|$. Teiselt poolt, kuna punktid P_{k_n} rahuldavad tingimust

$$|f(P_{k_n})| > k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

siis $|f(P_{k_n})| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Saadud vastuolu tõestab teoreemi. □

4.7. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni rajad

Teoreem 4.8 (Weierstrassi teine teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon saavutab selles hulgas oma rajad. Teisisõnu, kui funktsiooon f on pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, siis leiduvad punktid $P_0, Q_0 \in \mathcal{D}$ nii, et*

$$f(P_0) = \sup_{P\in\mathcal{D}} f(P) \quad \textit{ja} \quad f(Q_0) = \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P).$$

Esitame Weierstrassi teisele teoreemile kaks tõestust, millest esimene toetub Bolzano–Weierstrassi teoreemile 2.5 ning teine Weierstrassi esimesele teoreemile.

WEIERSTRASSI TEISE TEOREEMI 4.8 ESIMENE TÕESTUS. Olgu funktsiooon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tähistame

$$M := \sup_{P\in\mathcal{D}} f(P) \quad \text{ja} \quad m := \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P)$$

ning valime iga $n \in \mathbb{N}$ korral punkti $P_n \in \mathcal{D}$ nii, et

$$f(P_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Siis jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal saame temast välja eraldada koonduva osajada $(P_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Tähistame $P_0 := \lim\limits_{n\to\infty} P_{k_n}$; siis hulga $\mathcal{D}$ kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal $P_0 \in \mathcal{D}$. Teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal $f(P_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0)$. Kuna punktid P_{k_n} rahuldavad tingimusi

$$M \geqslant f(P_{k_n}) > M - \frac{1}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} M,$$

siis arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal

$$f(P_0) = \lim_{n\to\infty} f(P_{k_n}) = M.$$

Tõestame nüüd sellise punkti $Q_0 \in \mathcal{D}$ olemasolu, mille korral $f(Q_0) = \inf\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$. Selleks märgime, et ka funktsioon $-f$ on pidev hulgas $\mathcal{D}$, järelikult eelnevalt tõestatu põhjal leidub punkt $Q_0 \in \mathcal{D}$ nii, et

$$-f(Q_0) = \sup_{P\in\mathcal{D}}\bigl(-f(P)\bigr) = -\inf_{P\in\mathcal{D}} f(P),$$

aga nüüd

$$f(Q_0) = \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P).$$

□

Weierstrassi teise teoreemi 4.8 teine tõestus. Olgu funktsiooon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tähistame $M := \sup\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ ja oletame vastuväiteliselt, et

$$f(P) < M \quad \text{iga } P \in \mathcal{D} \text{ korral.} \tag{4.2}$$

Siis funktsioon

$$g\colon\ \mathcal{D} \ni P \longmapsto \frac{1}{M - f(P)} \in \mathbb{R}$$

on pidev (sest ta on saadud pidevatest funktsioonidest aritmeetiliste tehete abil; juhime veel tähelepanu, et eelduse (4.2) põhjal $M - f(P) \neq 0$ hulgas $\mathcal{D}$); seega Weierstrassi esimese teoreemi 4.7 põhjal on funktsioon g tõkestatud. Teiselt poolt, valides hulga $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, mille korral $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$, saame, et $M - f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0+$ ning seega $g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, mis on vastuolus funktsiooni g tõkestatusega.

Sellise punkti $Q_0 \in \mathcal{D}$ olemasolu, mille korral $f(Q_0) = \inf\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$, saab näidata täpselt samamoodi nagu eelmises tõestuses. □

Märkus 4.2. Tingimust $f(Q_0) = \inf\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P) =: m$ rahuldava punkti $Q_0 \in \mathcal{D}$ olemasolu teoreemi 4.8 tõestuses võib näidata ka analoogiliselt punkti P_0 olemasolu tõestusele, valides analoogiliselt esimese tõestusega punktid $Q_n \in \mathcal{D}$ nii, et $f(Q_n) < m + \frac{1}{n}$ (punktiks Q_0 sobib sellisel juhul jada (Q_n) mis tahes koonduva osajada piirväärtus), või, analoogiliselt teise tõestusega, oletades vastuväiteliselt, et $f(P) > m$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral ja vaadeldes sel juhul funktsiooni $h\colon\ \mathcal{D} \ni P \longmapsto \frac{1}{f(P)-m} \in \mathbb{R}$.

4.8. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni ühtlane pidevus

Definitsioon 4.2. Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Öeldakse, et funktsioon f on hulgas $\mathcal{D}$ *ühtlaselt pidev,* kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P, Q \in \mathcal{D},\ d(P,Q) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Vahetult definitsioonist on ilmne, et hulgas $\mathcal{D}$ ühtlaselt pidev funktsioon on pidev selles hulgas. Vastupidine väide üldjuhul ei kehti. Vastavasisulisi kontranäiteid on lihtne leida juba vahemikus määratud pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta – näiteks funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on vahemikus $x \in (0, \infty)$ pidev, kuid mitte ühtlaselt pidev.

Teoreem 4.9 (Cantori teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on selles hulgas ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Olgu funktsioon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole ühtlaselt pidev selles hulgas. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ selliselt, et iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad punktid $P_n, Q_n \in \mathcal{D}$, mille korral

$$d(P_n, Q_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad \big|f(P_n) - f(Q_n)\big| \geqslant \varepsilon.$$

Siis jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal saame temast välja eraldada koonduva osajada $(P_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Tähistame $P_0 := \lim\limits_{n\to\infty} P_{k_n}$; siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{k_n} = P_0$, sest punktid Q_{k_n} rahuldavad tingimusi

$$0 \leqslant d(Q_{k_n}, P_0) \leqslant d(Q_{k_n}, P_{k_n}) + d(P_{k_n}, P_0) \leqslant \frac{1}{k_n} + d(P_{k_n}, P_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ning arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal seega ka $d(Q_{k_n}, P_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Hulga $\mathcal{D}$ kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal $P_0 \in \mathcal{D}$. Kuna funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{D}$, siis teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal $f(P_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0)$ ja $f(Q_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0)$. Nüüd ühel poolt

$$\lim_{n\to\infty}\big|f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})\big| = \big|f(P_0) - f(Q_0)\big| = 0, \tag{4.3}$$

teiselt poolt

$$\big|f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})\big| \geqslant \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

seega jada piirväärtuse monotoonsuse tõttu peab kehtima võrratus

$$\lim_{n\to\infty}\big|f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})\big| \geqslant \varepsilon > 0,$$

mis on vastuolus tingimusega (4.3). □

II peatükk.
Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutus

§ 1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus

1.1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Definitsioon 1.1. Olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0,\, x_i^0 + \Delta x_i,\, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_i},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) osatuletiseks argumendi x_i järgi* punktis P_0 ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0), \quad f'_{x_i}(P_0), \quad u'_{x_i}(P_0), \quad f_{x_i}(P_0), \quad u_{x_i}(P_0) \tag{1.1}$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik osatuletis $f'_{x_i}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(esimest järku) osatuletisfunktsioon (argumendi x_i järgi)*

$$f'_{x_i}\colon\ \mathcal{D} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) osatuletiseks argumendi x_i järgi.* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}, \quad u'_{x_i}, \quad f_{x_i}, \quad u_{x_i}. \tag{1.2}$$

Tähistused (1.1) on tähistustega (1.2) hästi kooskõlas: (lõplik) osatuletis antud punktis on osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Märkus 1.1. Märkimaks funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ esimest järku osatuletisfunktsiooni muutuja x_i järgi, kasutatakse tähistuste (1.2) kõrval sageli ka tähistusi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Märkus 1.2. Vahetult osatuletise definitsioonist näeme, et ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ osatuletis muutuja x järgi on sama, mis selle funktsiooni tuletis: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{dx}$ (ehk, alternatiivsetes tähistustes, $f'_x = f'$).

Märkus 1.3. Vahetult osatuletise definitsioonist järeldub, et m muutuja funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletis punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ muutuja x_i järgi on ühe muutuja funktsiooni

$$g(x) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$$

tuletis punktis x_i^0:

$$f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0).$$

See tähelepanek on kasulik mitme muutuja funktsiooni osatuletiste arvutamisel: leides funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletist muutuja x_i järgi, loeme ülejäänud muutujad $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ fikseeritud konstantideks ning leiame osatuletise u'_{x_i} nagu ühe muutuja x_i funktsiooni tuletise.

Näide 1.1. Leiame funktsiooni $u = x^4 \sin^3(x^7 y + 5y^{11})$ osatuletised.

Tõlgendades muutujat y fikseeritud konstandina ja leides tuletise funktsioonist u kui ühe muutuja x funktsioonist, saame

$$\begin{aligned} u'_x &= (x^4)'_x \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) + x^4 \Big(\sin^3(x^7 y + 5y^{11})\Big)'_x \\ &= 4x^3 \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) + x^4 \cdot 3\sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}) \cdot 7x^6 y \\ &= x^3 \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cdot \Big(4\sin(x^7 y + 5y^{11}) + 21x^7 y \cos(x^7 y + 5y^{11})\Big). \end{aligned}$$

Tõlegendades muutujat x fikseeritud konstandina ja leides tuletise funktsioonist u kui ühe muutuja y funktsioonist, saame

$$\begin{aligned} u'_y &= x^4 \cdot 3\sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}) \cdot (x^7 + 55y^{10}) \\ &= 3x^4 (x^7 + 55y^{10}) \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}). \end{aligned}$$

Märkus 1.4. Ühe muutuja funktsiooni puhul järeldub lõpliku tuletise olemasolust mingis punktis selle funktsiooni pidevus selles punktis. Mitme muutuja funktsiooni puhul analoogiline väide ei kehti: *m muutuja funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ puhul ei järeldu esimest järku osatuletiste $f'_{x_1}(P_0), \ldots, f'_{x_m}(P_0)$ olemasolust ja lõplikkusest funktsiooni f pidevus punktis P_0.*

Näide 1.2. Näites I.3.2 veendusime, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ei eksisteeri; seega funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

ei ole pidev punktis $(0,0)$. Samas leiduvad sellel funktsiooni punktis $(0,0)$ lõplikud osatuletised:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\,0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

1.2. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1,\ldots,x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses $\mathcal{U}$. Kõneldes funktsiooni f argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudest $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$ punktis P_0, eeldame edaspidi alati, et

$$P := (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{U}.$$

Tähistame

$$\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} = d(P,P_0);$$

siis,

$$\rho \to 0 \iff \Delta x_i \to 0,\ i=1,\ldots,m, \iff d(P,P_0)\to 0 \iff P \to P_0$$

ja

$$\rho = 0 \iff \Delta x_i = 0,\ i=1,\ldots,m, \iff d(P,P_0) = 0 \iff P = P_0.$$

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1,\ldots,x_m)$ on *diferentseeruv* punktis $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0)$, kui leiduvad arvud $A_1,\ldots,A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et selle funktsiooni muut punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$,

$$\Delta u := f(P) - f(P_0) = f(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_m^0+\Delta x_m) - f(x_1^0,\ldots,x_m^0), \tag{1.3}$$

rahuldab tingimust

$$\Delta u - (A_1\,\Delta x_1 + \cdots + A_m\,\Delta x_m) = o(\rho) \qquad \text{protsessis } \rho \to 0, \tag{1.4}$$

s.t.

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta u - (A_1\,\Delta x_1 + \cdots + A_m\,\Delta x_m)}{\rho} = 0.$$

Allpool märkuses 1.6 veendume, et m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooni 1.2 juht $m = 1$ on kooskõlas kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" antud ühe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga. Eelnevalt on aga otstarbekas m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse mõistet veidi uurida.

Järgnev teoreem annab kaks funktsiooni diferentseeruvusega samaväärset tingimust, mida sageli kasutatakse ka diferentseeruvuse definitsioonina.

Teoreem 1.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0;*

(ii) *leiduvad arvud $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul*

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha, \tag{1.5}$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$;

(iii) *leiduvad arvud $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul*

$$\Delta u = A_1 \, \Delta x_1 + \dots + A_m \, \Delta x_m + \alpha_1 \, \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \, \Delta x_m, \tag{1.6}$$

kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, $i = 1, \dots, m$.

Teoreem 1.1 on vahetu järeldus järgnevast lemmast, mida me kasutame ka allpool teoreemide 1.3 ja 1.4 tõestamisel. See lemma ütleb, et definitsiooni 1.2 tingimusi rahuldavad arvukomplektid $A_1, \dots, A_m$, teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi rahuldavad arvukomplektid $A_1, \dots, A_m$ ning teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi rahuldavad arvukomplektid $A_1, \dots, A_m$ on täpselt ühed ja samad. Veelgi enam, teoreemis 1.3 tõestame, et kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on diferentseeruv punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$, siis tal eksisteerivad selles punktis lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide $x_1, \dots, x_m$ järgi, kusjuures ainus ülalloetletud tingimusi rahuldav arvukomplekt $A_1, \dots, A_m$ on

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \quad \dots\dots, \quad A_m = \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

Lemma 1.2. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsiooni f muut (1.3) rahuldab tingimust (1.4);*

(ii) *funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul (1.5), kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$;*

(iii) *funktsiooni f muut* (1.3) *esitub kujul* (1.6)*, kus funktsioonid* $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ *rahuldavad tingimust* $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, $i = 1, \dots, m$.

Tõestus. (i)⇒(ii) on ilmne, kui defineerida $\alpha := \Delta u - (A_1\,\Delta x_1 + \dots + A_m\,\Delta x_m)$.

(ii)⇒(i) on samuti ilmne.

(ii)⇒(iii). Kehtigu (ii). Siis

$$\begin{aligned}\Delta u - \big(A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m\big) &= \alpha\,\frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}{\rho^2}\\ &= \frac{\alpha}{\rho}\,\frac{\Delta x_1}{\rho}\,\Delta x_1 + \dots + \frac{\alpha}{\rho}\,\frac{\Delta x_m}{\rho}\,\Delta x_m\\ &= \alpha_1\,\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\,\Delta x_m,\end{aligned}$$

kus $\alpha_i = \dfrac{\alpha}{\rho}\,\dfrac{\Delta x_i}{\rho}$, $i = 1, \dots, m$. Kuna

$$|\alpha_i| \leqslant \left|\frac{\alpha}{\rho}\right| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

siis $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, $i = 1, \dots, m$. Seega kehtib (iii).

(iii)⇒(ii). Kehtigu (iii). Siis kehtib valem (1.5), kus

$$\alpha = \alpha_1\,\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\,\Delta x_m;$$

seejuures $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$, sest

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha}{\rho}\right| &= \left|\alpha_1\,\frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_m\,\frac{\Delta x_m}{\rho}\right| \leqslant |\alpha_1|\,\frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \dots + |\alpha_m|\,\frac{|\Delta x_m|}{\rho}\\ &\leqslant |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Seega (ii) kehtib. □

Märkus 1.5. Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis piisavalt väikeste argumentide muutude $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ korral võime esituses (1.6) eeldada, et iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral mitte ainult $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, vaid juba $\alpha_i \xrightarrow[\Delta x_i\to 0]{} 0$.

Tõepoolest, teoreemi 1.1 põhjal leiduvad $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^m$ nii, et funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul (1.5), kus funktsion $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$. Lemma 1.2 implikatsiooni (ii)⇒(iii) tõestuse põhjal kehtib (1.6), kus iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$\alpha_i := \frac{\alpha}{\rho}\,\frac{\Delta x_i}{\rho}.$$

Oma väite tõestuseks peame leidma reaalarvu $M > 0$ selliselt, et kui $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |\Delta x_i| < M$, siis mis tahes $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $\alpha_i \xrightarrow[\Delta x_i\to 0]{} 0$, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral leidub δ nii, et

$$|\Delta x_i| < \delta \quad\Longrightarrow\quad \frac{|\alpha|}{\rho}\,\frac{|\Delta x_i|}{\rho} < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Selleks märgime esmalt, et kuna $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta_\varepsilon > 0$ nii, et

$$\rho < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\alpha|}{\rho} < \varepsilon.$$

Olgu nüüd $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $\varepsilon > 0$ fikseeritud. Paneme tähele, et kui $\rho < \delta_\varepsilon$, siis

$$\frac{|\alpha|}{\rho} \frac{|\Delta x_i|}{\rho} \leqslant \frac{|\alpha|}{\rho} < \varepsilon,$$

kui aga $\rho \geqslant \delta_\varepsilon$, siis

$$\frac{|\alpha|}{\rho} \frac{|\Delta x_i|}{\rho} \leqslant \frac{|\alpha|}{\rho} \frac{|\Delta x_i|}{\delta_\varepsilon}.$$

Siit näeme, et kui $\rho < \delta_1$ (sel juhul $\frac{|\alpha|}{\rho} < 1$), siis implikatsioon (1.7) kehtib, kui võtta $\delta := \varepsilon\,\delta_\varepsilon$. Seega piisab meil valida arv $M > 0$ selliselt, et tingimusest $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\Delta x_i| < M$ järeldub võrratus $\rho < \delta_1$; niisiis, me võime võtta näiteks $M = \frac{\delta_1}{\sqrt{m}}$.

Järgnev teoreem ütleb, et *funktsiooni diferentseeruvusest antud punktis järeldub selle funktsiooni kõikvõimalike esimest järku osatuletiste olemasolu ja lõplikkus selles punktis.*

Teoreem 1.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 lõplikud esimest järku osatuletised kõikide argumentide järgi. Seejuures ainus reaalarvukomplekt $A_1, \dots, A_m$, mis rahuldab (m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsiooni 1.2 tingimusi (ning lemma 1.2 põhjal seega ka ainus reaalarvukomplekt $A_1, \dots, A_m$, mis rahuldab teoreemi 1.1 väite* (ii) *tingimusi, ning ainus reaalarvukomplekt $A_1, \dots, A_m$, mis rahuldab teoreemi 1.1 väite* (iii) *tingimusi), on*

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \quad \dots\dots, \quad A_m = \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

TÕESTUS. Teoreemi 1.1 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(iii) põhjal leiduvad arvud $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ nii, et funktsiooni f muut Δu punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots \Delta x_m$, esitub kujul

$$\Delta u = A_1\,\Delta x_1 + \dots + A_m\,\Delta x_m + \alpha_1\,\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\,\Delta x_m, \tag{1.8}$$

kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust

$$\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \xrightarrow[\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0]{} 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fikseerime vabalt $j \in \{1, \dots, m\}$. Tähistades

$$\Delta_{x_j} u := f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + \Delta x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0),$$

piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j$$

(sest osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$ on defineeritud kui selles valemis esinev piirväärtus ning lemma 1.2 põhjal rahuldavad definitsiooni 1.2 tingimusi, teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi ning teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi täpselt ühed ja samad arvukomplektid $A_1, \ldots, A_m$).

Kui $\Delta x_1 = \cdots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \cdots = \Delta x_m = 0$, siis $\Delta_{x_j} u = \Delta u$, seega valemi (1.8) põhjal

$$\Delta_{x_j} u = \Delta u = A_j \, \Delta x_j + \alpha_j(0, \ldots, 0, \Delta x_j, 0, \ldots, 0) \, \Delta x_j$$

ning järelikult

$$\frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j + \alpha_j(0, \ldots, 0, \Delta x_j, 0, \ldots, 0) \xrightarrow[\Delta x_j \to 0]{} A_j,$$

nagu soovitud. □

Teoreem 1.4. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0;*

(ii) *funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 kõik lõplikud esimest järku osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, kusjuures selle funktsiooni muut* (1.3) *punktis P_0 rahuldab tingimust*

$$\Delta u - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \, \Delta x_m \right) = o(\rho) \quad \textit{protsessis } \rho \to 0; \tag{1.9}$$

(iii) *funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 kõik lõplikud esimest järku osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, kusjuures selle funktsiooni muut* (1.3) *esitub kujul*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \, \Delta x_m + \alpha, \tag{1.10}$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$;

(iv) *funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 kõik lõplikud esimest järku osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, kusjuures selle funktsiooni muut* (1.3) *punktis P_0 esitub kujul*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \, \Delta x_m + \alpha_1 \, \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m \, \Delta x_m, \tag{1.11}$$

kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, $i = 1, \ldots, m$.

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii) järeldub (m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsioonist 1.2 ja teoreemist 1.3.

(ii)$\Rightarrow$(i) järeldub definitsioonist 1.2.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv) järeldub lemmast 1.2. $\square$

Märkus 1.6. Kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" defineeriti ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ diferentseeruvus punktis x_0 kui lõpliku tuletise $f'(x_0)$ olemasolu. See definitsioon on kooskõlas m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga 1.2 juhul $m = 1$.

Tõepoolest, kui eksisteerib lõplik tuletis

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

siis, defineerides funktsiooni $\alpha = \alpha(\Delta x) := \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$, kehtib tingimus $\alpha \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$, kusjuures funktsiooni f muut punktis x_0 esitub kujul

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\, \Delta x + \alpha\, \Delta x;$$

niisiis teoreemi 1.1 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(iii) põhjal funktsioon f on diferentseeruv definitsiooni 1.2 (juhu $m = 1$) järgi.

Teiselt poolt, kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv definitsiooni 1.2 mõttes (juhul $m = 1$), siis teoreemi 1.3 põhjal eksisteerib tal punktis x_0 lõplik (osa)tuletis (muutuja x järgi) $f'_x(x_0) = f'(x_0)$ (vt. märkust 1.2), niisiis see funktsioon on diferentseeruv kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" antud definitsiooni mõttes.

Näites 1.2 veendusime, et m muutuja funktsiooni lõplike (esimest järku) osatuletiste olemasolust (kõigi muutujate järgi) antud punktis ei järeldu üldjuhul selle funktsiooni pidevust selles punktis. Järgnev lause ütleb, et m muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis (millest teoreemi 1.3 põhjal järeldub kõigi lõplike esimest järku osatuletiste olemasolu selles punktis) toob endaga kaasa selle funktsiooni pidevuse selles punktis. Seega *lõplike esimest järku osatuletiste olemasolust antud punktis ei järeldu üldjuhul funktsiooni diferentseeruvust selles punktis.* Veelgi enam: näites 1.5 vaadeldakse kahe muutuja funktsiooni, mis on pidev punktis $(0, 0)$ ning millel eksisteerivad punktis $(0, 0)$ lõplikud esimest järku osatuletised mõlema argumendi järgi, kuid mis pole diferentseeruv punktis $(0, 0)$. Seega ka *antud punktis pideva funktsiooni puhul ei järeldu üldjuhul lõplike esimest järku osatuletiste olemasolust selles punktis funktsiooni diferentseeruvust selles punktis.*

Lause 1.5. *Antud punktis diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.*

TÕESTUS. Funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on pidev (oma määramispiirkonna kuhjumis)punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$ parajasti siis, kui

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0.$$

Kui eeldada, et funktsion f on diferentseeruv punktis P_0, siis see koonduvus järeldub esitusest (1.5) (sest kui $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$, siis ammugi $\alpha \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$). $\square$

Selle punkti lõpetuseks toome mõned näited konkreetsete funktsioonide diferentseeruvuse kindlakstegemisest antud punktis.

Näide 1.3. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii) põhjal piisab funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ (ning on selleks ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x - 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$), s.t.

$$(\Delta x + \Delta y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0.$$

Veendume selles. Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x = \rho \cos\phi$, $\Delta y = \rho \sin\phi$, saame

$$\frac{(\Delta x + \Delta y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\rho} = \frac{\rho^2 (\cos\phi + \sin\phi)^2 \sin \dfrac{1}{\rho}}{\rho} = \rho\,(\cos\phi + \sin\phi)^2 \sin \frac{1}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Näide 1.4. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \dfrac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii) põhjal piisab funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ (ning on selleks ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x - 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$), s.t.

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0.$$

Veendume selles:

$$\frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho} = \frac{\rho^2 \sin \dfrac{1}{\rho^2}}{\rho} = \rho \sin \frac{1}{\rho^2} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Näide 1.5. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

on pidev punktis $(0,0)$ ning tal eksisteerivad selles punktis lõplikud osatuletised, kui ta ei ole diferentseeruv selles punktis.

Funktsiooni f pidevuseks punktis $(0,0)$ piisab näidata, et $f(x,y)\xrightarrow[x,y\to 0]{} f(0,0)=0$. Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x=\rho\,\cos\phi$, $\Delta y=\rho\,\sin\phi$, saame

$$\lim_{x,y\to 0} f(x,y)=\lim_{x,y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\,\cos^2\phi\,\sin\phi}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\,\cos^2\phi\,\sin\phi=0.$$

Funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0,0)$ lõplikud osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2\,0}{h^2}}{h}=0$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\,h}{h^2}}{h}=0;$$

seega teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii) põhjal on tema diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ tarvilik (ning ka piisav), et

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-0\,\Delta x-0\,\Delta y=o(\rho)\quad\text{protsessis } \rho\to 0$$

(siin $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$), s.t.

$$f(\Delta x,\Delta y)=\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\rho)\quad\text{protsessis } \rho\to 0. \tag{1.12}$$

Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x=\rho\,\cos\phi$, $\Delta y=\rho\,\sin\phi$, saame

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\frac{\frac{\rho^3\cos^2\phi\sin\phi}{\rho^2}}{\rho}=\cos^2\phi\sin\phi.$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}$ ei eksisteeri (sest ta sõltub lähenemisteest); seega (1.12) ei kehti ning järelikult funktsioon f pole diferentseeruv punktis $(0,0)$.

1.3. Piisav tingimus mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvuseks

Teoreem 1.6. *Eksisteerigu funktsioonil $u=f(P)=f(x_1,\dots,x_m)$ punkti $P_0=(x_1^0,\dots,x_m^0)\in\mathbb{R}^m$ mingis ümbruses lõplikud (esimest järku) osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures vastavad osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis P_0. Siis funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.*

TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et funktsiooni $u=f(P)$ muut Δu punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1,\dots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\dots\Delta x_m$, esitub valemiga (1.6), kus funktsioonid $\alpha_i=\alpha_i(\Delta x_1,\dots,\Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i\xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, $i=1,\dots,m$.

Tähistame $P := (x_1, \dots, x_m) := (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$; siis

$$
\begin{aligned}
\Delta u = f(P) - f(P_0) &= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0) \\
&= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m) - f(x_1^0, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m) \\
&\quad + f(x_1^0, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m) \\
&\quad + f(x_1^0, x_2^0, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_{m-1}, x_m) \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad + f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0) \\
&= g_1(x_1) - g_1(x_1^0) + g_2(x_2) - g_2(x_2^0) + \dots + g_m(x_m) - g_m(x_m^0),
\end{aligned}
$$

kus funktsioonid g_i on defineeritud võrdustega

$$
g_i(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}, \dots, x_m), \qquad i = 1, \dots, m.
$$

Iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral funktsioon g_i rahuldab lõigus $[x_i^0, x_i]$ (või lõigus $[x_i, x_i^0]$, kui $x_i < x_i^0$) kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi; seega leidub arv $\theta_i \in (0, 1)$ (mis sõltub argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudest $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$) nii, et

$$
\begin{aligned}
g_i(x_i) - g_i(x_i^0) &= g_i'(x_i^0 + \theta_i\,\Delta x_i)\,\Delta x_i \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i\,\Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)\,\Delta x_i
\end{aligned}
$$

(märgime, et kui $x_i = x_i^0$, s.t. $\Delta x_i = 0$, siis sobib θ_i rolli mis tahes arv vahemikust $(0, 1)$). Niisiis,

$$
\begin{aligned}
\Delta u = \sum_{i=1}^m \bigl(g_i(x_i) - g_i(x_i^0)\bigr) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i\,\Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)\,\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)\,\Delta x_i,
\end{aligned}
$$

kus iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$
\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i\,\Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0).
$$

Kuna osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_m}$ on pidevad punktis P_0, siis funktsioonid $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, $i = 1, \dots, m$, ning seega funksioon f on diferentseeruv punktis P_0. □

Märkus 1.7. Mitme muutuja funktsiooni f diferentseeruvusest punktis P_0 ei järeldu üldjuhul tema osatuletiste (s.t. osatuletisfunktsioonide) pidevus punktis P_0.

Näide 1.6. Näites 1.4 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$
f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}
$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Näitame, et kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ eksisteerivad lõplikud osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, kuid osatuletisfunktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $(0,0)$.

Näites 1.4 veendusime, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Kõikjal hulgas $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\Big((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\Big)'_x=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\Big(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\Big)\\&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ on punkti $(0,0)$ igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Tõepoolest, valides iga $n\in\mathbb{N}$ korral $r_n>0$ nii, et $\frac{1}{r_n^2}=2n\pi$ (s.t. $r_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$), ning tähistades $P_n:=(r_n,0)$ ja $Q_n:=(-r_n,0)$, saame, arvestades, et $r_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

$$P_n\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)\quad\text{ja}\quad Q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0).$$

Samal ajal

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_n)=2r_n\sin\frac{1}{r_n^2}-\frac{2r_n}{r_n^2}\cos\frac{1}{r_n^2}=2r_n\sin 2n\pi-\frac{2}{r_n}\cos 2n\pi=-\frac{2}{r_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$$

ning, analoogiliselt, $\frac{\partial f}{\partial x}(Q_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}$ on punkti $(0,0)$ igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Näide 1.7. Näites 1.3 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kui } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Näitame, et kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ eksisteerivad lõplikud osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, kuid osatuletisfunktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $(0,0)$.

Näites 1.3 veendusime, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Kõikjal hulgas $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\Big((x+y)^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)'_x\\&=2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x+y)^2\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(-\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{\frac32}}\Big)\\&=2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x\,(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac32}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri; niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, saame

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2r(\cos\phi + \sin\phi)\,\sin\frac{1}{r} - \frac{r\cos\phi\, r^2(\cos\phi+\sin\phi)^2}{r^3}\cos\frac{1}{r}\\ &= o(1) - \cos\phi\,(\cos\phi+\sin\phi)^2\cos\frac{1}{r} \qquad \text{protsessis } r\to 0.\end{aligned}$$

Valides iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n > 0$ nii, et $\frac{1}{r_n} = 2n\pi$ (s.t. $r_n = \frac{1}{2n\pi}$), ning tähistades $P_n := (r_n\cos 0, r_n\sin 0) = (r_n, 0)$ ja $Q_n := \big(r_n\cos\frac{\pi}{2}, r_n\sin\frac{\pi}{2}\big) = (0, r_n)$, saame, arvestades, et $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \quad \text{ja} \quad Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0).$$

Samal ajal

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(P_n) = o(1) - \cos 0\,(\cos 0 + \sin 0)^2\cos\frac{1}{r_n} = o(1) - \cos 2n\pi = o(1) - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1,\\ &\frac{\partial f}{\partial x}(Q_n) = o(1) - \cos\frac{\pi}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\Big)^2\cos\frac{1}{r_n} = o(1) - 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;\end{aligned}$$

järelikult funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri.

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ei eksisteeri; niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

1.4. Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse geomeetriline tõlgendus (kahe muutuja funktsiooni graafiku puutujatasand)

Definitsioon 1.3. Olgu kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ määramispiirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Hulka

$$\Big\{\big(x,y,f(x,y)\big)\colon\ (x,y)\in\mathcal{D}\Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

nimetatakse funktsiooni f *graafikuks.*

Definitsioon 1.4. Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ pidev punkti $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses. Tähistame $M_0 := \big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$ (märgime, et punkt M_0 asub funktsiooni f graafikul).

Tasandit π nimetatakse funktsiooni f graafiku *puutujatasandiks* punktis M_0, kui graafiku punkte $M := \big(x,y,f(x,y)\big)$ ja M_0 ühendava sirge ning selle tasandi vaheline nurk läheneb protsessis $(x,y)\to(x_0,y_0)$ nullile.

Paneme tähele, et funktsiooni f pidevuse tõttu punktis (x_0,y_0) on punkti (x,y) lähenemine punktile (x_0,y_0) (s.t. piirprotsess $(x,y)\to(x_0,y_0)$) samaväärne graafiku punkti $M = \big(x,y,f(x,y)\big)$ lähenemisega punktile M_0 (mööda seda graafikut). Seetõttu sõnastatakse graafiku puutujatasandi definitsioon sageli ka järgmiselt: tasandit π nimetatakse funktsiooni f graafiku *puutujatasandiks* punktis M_0, kui graafiku punkti M lähenemisel punktile M_0 (mööda seda graafikut) läheneb neid punkte ühendava sirge ja selle tasandi vaheline nurk nullile.

Järgnev teoreem ütleb, et *pideva kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab geomeetriliselt selle funktsiooni graafiku (z-teljega mitteparalleelse) puutujatasandi olemasolu vastavas graafiku punktis.*

Teoreem 1.7. *Olgu funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ pidev punkti $P_0 := (x_0, y_0)$ mingis ümbruses. Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0, siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis $M_0 := \big(x_0, y_0, f(P_0)\big)$. Selle puutujatasandi võrrand on*

$$z - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,(y - y_0). \tag{1.13}$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni f graafikul eksisteerib punktis M_0 puutujatasand, kusjuures see puutujatasand pole paralleelne z-teljega, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.

Tõestus. Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ diferentseeruv punktis P_0. Veendumaks, et tasand (1.13) on tema graafiku puutujatasand punktis M_0, piisab näidata, et graafiku punkti $M := \big(x, y, f(x, y)\big)$ lähenemisel punktile M_0 (mööda graafikut) neid punkte läbiva sirge ja selle tasandi vaheline nurk läheneb nullile ehk, teisisõnu, tähistades $P := (x, y)$, vektori

$$\overrightarrow{M_0M} = \big(x - x_0, y - y_0, f(P) - f(P_0)\big)$$

ja tasandi (1.13) normaalvektori

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), -1\right)$$

vaheline nurk $\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big)$ läheneb täisnurgale $\frac{\pi}{2}$ protsessis $P \to P_0$. Tähistame

$$\rho := d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Kuna piirprotsess $P \to P_0$ tähendab, et $\rho \to 0$, ning

$$\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \to \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \to 0,$$

siis jääb meil näidata, et $\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Selleks märgime, et

$$\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) = \frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|\;|\vec{n}|}$$

(sümbolid $\big|\overrightarrow{M_0M}\big|$, $|\vec{n}|$ ning $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}$ tähistavad vastavalt vektorite $\overrightarrow{M_0M}$ ja $\vec{n}$ pikkust ning nende skalaarkorrutist). Kuna funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,(y - y_0) - \big(f(P) - f(P_0)\big) = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0,$$

siis

$$\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M},\vec{n}\big)=\frac{1}{|\vec{n}|}\,\frac{o(\rho)}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}=\frac{1}{|\vec{n}|}\,\frac{\rho}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}\,\frac{o(\rho)}{\rho}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$$

(sest

$$\big|\overrightarrow{M_0M}\big|=\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2+\big|f(P)-f(P_0)\big|^2}=\sqrt{\rho^2+\big|f(P)-f(P_0)\big|^2}\geqslant\rho$$

ning seega $0\leqslant\frac{\rho}{|\overrightarrow{M_0M}|}\leqslant 1$), nagu soovitud.

Teiselt poolt, eksisteerigu funktsiooni $z=f(x,y)$ graafikul z-teljega mitteparalleelne puutujatasand punktis M_0; olgu selle puutujatasandi võrrand

$$z-f(P_0)=A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0). \tag{1.14}$$

Märgime, et $\vec{m}:=(A,B,-1)$ on selle puutujatasandi normaalvektor.

Märkides, nagu eelnevaski $P:=(x,y)$, $\rho:=d(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ ja $M=\big(x,y,f(x,y)\big)=\big(x,y,f(P)\big)$, piisab funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis P_0 näidata, et

$$\frac{A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)-\big(f(P)-f(P_0)\big)}{\rho}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$$

ehk, teisisõnu, $\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\rho}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$. Kuna

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\rho}=|\vec{m}|\,\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|\,|\vec{m}|}\,\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho}=|\vec{m}|\,\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M},\vec{m}\big)\,\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho},$$

kusjuures $\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M},\vec{m}\big)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$ (sest tasand (1.14) on funktsiooni f graafiku puutujatasand), siis, veendumaks, et $\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\rho}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$, piisab näidata, et

$$\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho}=O(1)\quad\text{protsessis }\rho\to 0.$$

Selleks, arvestades, et

$$\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho}=\frac{\sqrt{\rho^2+\big|f(P)-f(P_0)\big|^2}}{\rho}=\sqrt{1+\left|\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}\right|^2},$$

piisab näidata, et

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=O(1)\quad\text{protsessis }\rho\to 0.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned}&\bigl|f(P)-f(P_0)\bigr|\\&\quad\leqslant \bigl|f(P)-f(P_0)-A\,(x-x_0)-B\,(y-y_0)\bigr|+|A|\,|x-x_0|+|B|\,|y-y_0|\\&\quad=\bigl|\overrightarrow{ML}\bigr|+|A|\,|x-x_0|+|B|\,|y-y_0|,\end{aligned}$$

kus punkt $L := \bigl(x, y, A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+f(P_0)\bigr)$ on punkti M läbiva z-teljega paralleelse sirge ja puutujatasandi (1.14) lõikepunkt.

Tähistades tähega N punkti M ristprojektsiooni puutujatasandile (1.14), paneme tähele, et kõik (täisnurksed) kolmnurgad $\triangle MLN$ on sarnased (sest kõik hüpotenuusid ML on paralleelsed – nad on paralleelsed z-teljega – ning kõik kaatetid MN on paralleelsed – nad on risti puutujatasandiga (1.14)), seega leidub konstant $\kappa > 0$ nii, et alati $\bigl|\overrightarrow{ML}\bigr| = \kappa\bigl|\overrightarrow{MN}\bigr|$. Tähistades tähega ψ punkte M ja M_0 läbiva sirge ja puutujatasandi (1.14) vahelise nurga, saame nüüd, et

$$\frac{\bigl|\overrightarrow{ML}\bigr|}{\bigl|\overrightarrow{M_0M}\bigr|}=\kappa\,\frac{\bigl|\overrightarrow{MN}\bigr|}{\bigl|\overrightarrow{M_0M}\bigr|}=\kappa\,\sin\psi \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Siit järeldub, et "piisavalt väikeste" ρ väärtuste korral

$$\bigl|\overrightarrow{ML}\bigr|\leqslant\frac{1}{2}\bigl|\overrightarrow{M_0M}\bigr|=\frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\bigl|f(P)-f(P_0)\bigr|^2}\leqslant\frac{\rho+\bigl|f(P)-f(P_0)\bigr|}{2},$$

seega

$$\bigl|f(P)-f(P_0)\bigr|\leqslant|A|\,|x-x_0|+|B|\,|y-y_0|+\frac{\rho}{2}+\frac{\bigl|f(P)-f(P_0)\bigr|}{2}$$

ning järelikult

$$\frac{\bigl|f(P)-f(P_0)\bigr|}{\rho}\leqslant 2|A|\,\frac{|x-x_0|}{\rho}+2|B|\,\frac{|y-y_0|}{\rho}+1\leqslant 2|A|+2|B|+1.$$

□

1.5. Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.5. Avaldist

$$du(P_0) := df(P_0) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(P_0)\,\Delta x_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(P_0)\,\Delta x_m$$

nimetatakse funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) täisdiferentsiaaliks* punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$.

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on diferentseeruv hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P, siis, fikseerides argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutude väärtused $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ (s.t. lugedes need muudud fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \ldots, x_m$) funktsioonina $du = du(P)$ (ehk, teisiti tähistades, $df = df(P)$):

$$du = du(P) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(P)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(P)\,\Delta x_m$$

ehk (jättes eelnevas esituses argumendi P kirjutamata)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\,\Delta x_m.$$

Iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral nimetame *argumendi x_i diferentsiaaliks dx_i* tema muutu Δx_i, s.t.

$$dx_i := \Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

See tähistus on motiveeritud järgneva aruteluga: kui tõlgendada argumendi x_i diferentsiaali dx_i (m muutuja) funktsiooni $v = x_i$ diferentsiaalina, siis

$$\begin{aligned} dx_i = dv &= v'_{x_1}\,\Delta x_1 + \cdots + v'_{x_{i-1}}\,\Delta x_{i-1} + v'_{x_i}\,\Delta x_i + v'_{x_{i+1}}\,\Delta x_{i+1} + \cdots + v'_{x_m}\,\Delta x_m \\ &= 0\,\Delta x_1 + \cdots + 0\,\Delta x_{i-1} + 1\,\Delta x_i + 0\,\Delta x_{i+1} + \cdots + 0\,\Delta x_m \\ &= \Delta x_i. \end{aligned}$$

Vastavalt sellele tähistusele

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\,dx_m.$$

Märkus 1.8. Vahetult on kontrollitav, et kui funktsioonid $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ ja $v = g(P) = g(x_1, \ldots, x_m)$ on diferentseeruvad punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$, siis mis tahes arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral ka funktsioon $\alpha\, f + \beta\, g$ on diferentseeruv selles punktis, kusjuures

$$d(\alpha\, f + \beta\, g)(P_0) = \alpha\, df(P_0) + \beta\, dg(P_0).$$

1.6. Mitme muutuja liitfunktsioonide diferentseerimine

Olgu funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^l$ määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) \;= \phi_1(t_1, \ldots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) \;= \phi_2(t_1, \ldots, t_l), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \phi_m(Q) = \phi_m(t_1, \ldots, t_l) \end{aligned}$$

sellised, et

$$\mathcal{D} \supset \big\{(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)) :\; Q \in \Delta\big\}.$$

Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$\begin{aligned} u = g(Q) = g(t_1, \ldots, t_l) &:= f\big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big) \\ &= f\big(\phi_1(t_1, \ldots, t_l), \ldots, \phi_m(t_1, \ldots, t_l)\big), \quad Q = (t_1, \ldots, t_l) \in \Delta. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Teoreem 1.8. *Olgu funktsioonid* $\phi_1, \ldots, \phi_m$ *diferentseeruvad punktis*

$$Q_0 = (t_1^0, \ldots, t_l^0) \in \Delta$$

ning olgu funktsioon f *diferentseeruv punktis*

$$P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) = \big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big) \in \mathcal{D}.$$

Siis ka liitfunktsioon (1.15) *on diferentseeruv punktis* Q_0. *Seejuures iga* $j \in \{1, \ldots, l\}$ *korral*

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}(Q_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0).$$

TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et funktsiooni $u = g(Q)$ muut punktis Q_0, mis vastab argumentide $t_1, \ldots, t_l$ muutudele $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_l$,

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l) - g(t_1^0, \ldots, t_l^0) \\ &= f\big(\phi_1(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l), \ldots, \phi_m(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l)\big) \\ &\qquad - f\big(\phi_1(t_1^0, \ldots, t_l^0), \ldots, \phi_m(t_1^0, \ldots, t_l^0)\big) \end{aligned}$$

esitub kujul

$$\Delta u = C_1\, \Delta t_1 + \cdots + C_l\, \Delta t_l + \gamma_1\, \Delta t_1 + \cdots + \gamma_l\, \Delta t_l,$$

kus iga $j \in \{1, \ldots, l\}$ korral

$$C_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0)$$

ning, tähistades $r := \sqrt{\Delta t_1^2 + \cdots + \Delta t_l^2}$, funktsioon $\gamma_j = \gamma_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_l)$ rahuldab tingimust $\gamma_j \xrightarrow[r \to 0]{} 0$.

Funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0 esitub argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ vastav funktsiooni f muut punktis P_0 valemiga

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)\, \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)\, \Delta x_m + \alpha_1\, \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m\, \Delta x_m,$$

kus $P = (x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m)$ ning iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral funktsioon $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$ (siin, nagu kõikjal, $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$). Tähistame edaspidises

$$\Delta x_i := \phi_i(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l) - \phi_i(t_1^0, \ldots, t_l^0), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Kuna funktsioonid $\phi_1, \dots, \phi_m$ on diferentseeruvad punktis Q_0, siis iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$\Delta x_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t_1}(Q_0)\,\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \phi_i}{\partial t_l}(Q_0)\,\Delta t_l + \beta_1^i\,\Delta t_1 + \dots + \beta_l^i\,\Delta t_l,$$

kus iga $j \in \{1, \dots, l\}$ korral funktsioon $\beta_j^i = \beta_j^i(\Delta t_1, \dots, \Delta t_l)$ rahuldab tingimust $\beta_j^i \xrightarrow[r \to 0]{} 0$ (siin, nagu ennegi, $r = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_l^2}$). Niisiis,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \left(\sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) + \beta_j^i \right) \Delta t_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) \right) \Delta t_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \beta_j^i + \alpha_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) \right) \right) \Delta t_j \\
&= C_1\,\Delta t_1 + \dots + C_l\,\Delta t_l + \gamma_1\,\Delta t_1 + \dots + \gamma_l\,\Delta t_l,
\end{aligned}$$

kus

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \beta_j^i + \alpha_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) \right), \quad j = 1, \dots, l.$$

Teoreemi tõestuseks jääb veenduda, et funktsioonid $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ rahuldavad tingimust $\gamma_j \xrightarrow[r \to 0]{} 0$, $j = 1, \dots, l$. Selleks piisab näidata, et iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $\alpha_i \xrightarrow[r \to 0]{} 0$, milleks arvestades, et $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, piisab näidata, et $\rho \xrightarrow[r \to 0]{} 0$. Kuna funktsioonide $\phi_1, \dots, \phi_m$ diferentseeruvusest punktis Q_0 järeldub nende funktsioonide pidevus selles punktis, siis iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $\Delta x_i \xrightarrow[r \to 0]{} 0$, järelikult $\rho \xrightarrow[r \to 0]{} 0$, nagu soovitud. □

Konkreetsuse mõttes sõnastame teoreemi 1.8 eraldi juhu jaoks, kus $m = 3$ ja $l = 2$.

Olgu funktsioon

$$w = f(P) = f(x, y, z)$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ning olgu hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ määratud funktsioonid

$$x = x(Q) = x(u, v), \quad y = y(Q) = y(u, v), \quad z = z(Q) = z(u, v) \tag{1.16}$$

sellised, et

$$\mathcal{D} \supset \Big\{ \big(x(Q), y(Q), z(Q)\big) \colon\ Q \in \Delta \Big\}.$$

Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$w = g(Q) = g(u, v) := f\big(x(Q), y(Q), z(Q)\big) = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big),$$
$$Q = (u, v) \in \Delta. \tag{1.17}$$

Teoreem 1.9. *Olgu funktsioonid* (1.16) *diferentseeruvad punktis* $Q_0 = (u_0, v_0) \in \Delta$ *ning olgu funktsioon* f *diferentseeruv punktis*

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(x(Q_0), y(Q_0), z(Q_0)\big) \in \mathcal{D}.$$

Siis ka liitfunktsioon (1.17) *on diferentseeruv punktis* Q_0. *Seejuures*

$$\frac{\partial g}{\partial u}(Q_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\frac{\partial x}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\frac{\partial y}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,\frac{\partial z}{\partial u}(Q_0),$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(Q_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\frac{\partial x}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\frac{\partial y}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,\frac{\partial z}{\partial v}(Q_0).$$

Järeldus 1.10 (Lagrange'i keskväärtusteoreem mitme muutuja funktsioonide jaoks)**.** *Olgu funktsioon* $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *pidev punktides* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0), P = (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$, *kus* $P \neq P_0$, *ja diferentseeruv neid punkte ühendava sirglõigu igas punktis, välja arvatud, võib-olla, punktides* P_0 *ja* P *endis. Siis leidub reaalarv* $\theta \in (0, 1)$ *nii, et*

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)\,\Delta x_i$$

ehk, teisissõnu, punkte P_0 *ja* P *ühendaval sirglõigul leidub punkt* R *nii, et*

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(R)\,\Delta x_i.$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni

$$\Phi(t) = f(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m) = f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big), \quad t \in [0, 1],$$

kus $\phi_i(t) = x_i^0 + t\,\Delta x_i$, $i = 1, \ldots, m$; siis $f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0)$. Funktsioon Φ rahuldab lõigus $[0, 1]$ kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi – ta on selles lõigus pidev ning, vastavalt teoreemile 1.8, vahemikus $(0, 1)$ diferentseeruv, sest mis tahes $t \in (0, 1)$ korral funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_m$ on diferentseeruvad punktis t ning funktsioon f on diferentseeruv punktis

$$P_t := \big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) = (x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m);$$

seejuures

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_t)\,\phi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_t)\,\phi_m'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t)\,\Delta x_i.$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub arv $\theta \in (0, 1)$ nii, et $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)$ ning järelikult, tähistades $R := P_\theta = (x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)$,

$$f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_\theta)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(R)\,\Delta x_i.$$

□

§ 2. Tuletis etteantud suunas. Gradient

2.1. Kolme muutuja funktsiooni juht

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x,y,z)$ määratud punkti $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ mingis ümbruses ning läbigu punkti P_0 suunatud telg l, mille suund on määratud vektoriga $\vec{s} = (a,b,c)$. Märgime, et

$$a = |\vec{s}|\,\cos\alpha, \quad b = |\vec{s}|\,\cos\beta, \quad c = |\vec{s}|\,\cos\gamma,$$

kus $|\vec{s}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ on vektori $\vec{s}$ pikkus ning α, β ja γ on nurgad telje l ja vastavalt x-, y- ja z-telje vahel.

Tõepoolest, tähistades sümbolitega $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ vastavalt x-, y- ja z-telje suunalise ühikvektori, s.t. $\vec{x} := (1,0,0)$, $\vec{y} := (0,1,0)$ ja $\vec{z} := (0,0,1)$, saame ühelt poolt,

$$\vec{s}\cdot\vec{x} = a\,1 + b\,0 + c\,0 = a,$$

teiselt poolt aga

$$\vec{s}\cdot\vec{x} = |\vec{s}|\,|\vec{x}|\,\cos\alpha = |\vec{s}|\,\cos\alpha;$$

niisiis $a = |\vec{s}|\,\cos\alpha$. Võrdused $b = |\vec{s}|\,\cos\beta$ ja $c = |\vec{s}|\,\cos\gamma$ tõestatakse analoogiliselt.

Siit näeme, et vektori $\vec{s}$ suunaline ühikvektor on $\vec{s}_1 := (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Definitsioon 2.1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} & \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0,y_0,z_0)}{t} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x_0 + \tau|\vec{s}|\cos\alpha, y_0 + \tau|\vec{s}|\cos\beta, z_0 + \tau|\vec{s}|\cos\gamma) - f(x_0,y_0,z_0)}{\tau|\vec{s}|} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - f(x_0,y_0,z_0)}{t|\vec{s}|},
\end{aligned}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks punktis* P_0 *telje* l *suunas* (või *vektori* $\vec{s}$ *suunas*) ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(x_0,y_0,z_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0,z_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0,z_0).$$

Märkus 2.1. Vahetult definitsioonist järeldub, et funktsiooni $y = f(x,y,z)$ osatuletis punktis P_0 vastavalt muutuja x, y ja z järgi on funktsiooni f tuletis punktis P_0 vastavalt x-, y- ja z-telje suunas.

Definitsioon 2.2. Vektorit

$$\operatorname{grad} f(P_0) := \nabla f(P_0) := \big(f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0)\big)$$

nimetatakse funktsiooni f *gradiendiks* punktis P_0.

Sümbolit ∇ loetakse: "nabla" või "atled". Nimetus "nabla" tuleb heebreakeelsest sõnast vana-aegse harfisarnase muusikariista kohta – elava fantaasiaga lugeja suudab kindlasti leida teatava sarnasuse selle sümboli ja harfi vahel; "atled" on "delta" loetuna tagant ettepoole, sümbol ∇ on tagurpidi sümbol Δ!

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y, z)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Siis funktsioonil f eksisteerib punktis P_0 tuletis mis tahes vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunas, kusjuures see tuletis on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ ja vektori $\vec{s}$ suunalise ühikvektori skalaarkorrutisega:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}. \tag{2.1}$$

TÕESTUS. Olgu $\vec{s}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunaline ühikvektor, s.t. $\vec{s}_1 = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$.Defineerime funktsiooni

$$g(t) = f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1, z_0 + tc_1).$$

Kuna funktsioon f on määratud punkti (x_0, y_0, z_0) mingis ümbruses, siis funktsioon g on määratud punkti $t = 0$ teatavas ümbruses. Kuna

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1, z_0 + tc_1) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0),$$

siis tuletis $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0)$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib tuletis $g'(0)$; seejuures need tuletised on võrdsed. Funktsioon g on tõlgendatav liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)\big),$$

kus

$$\phi_1(t) = x_0 + ta_1, \quad \phi_2(t) = y_0 + tb_1, \quad \phi_3(t) = z_0 + tc_1.$$

Kuna

- funktsioonid ϕ_1, ϕ_2 ja ϕ_3 on diferentseeruvad punktis 0, kusjuures $\phi_1'(0) = a_1$, $\phi_2'(0) = b_1$ ja $\phi_3'(0) = c_1$;
- funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(\phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0)\big)$,

siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi 1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$\begin{aligned} g'(0) &= f_x'(P_0)\,\phi_1'(0) + f_y'(P_0)\,\phi_2'(0) + f_z'(P_0)\,\phi_3'(0) \\ &= f_x'(P_0)\,a_1 + f_y'(P_0)\,b_1 + f_z'(P_0)\,c_1 = \nabla f(P_0) \cdot \vec{s}_1 = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}; \end{aligned}$$

niisiis $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = g'(0) = \nabla f(P_0) \cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$, nagu soovitud. □

Märkus 2.2. Kui teoreemis 2.1 loobuda eeldusest funktsiooni f diferentseeruvuse kohta punktis P_0, siis valem (2.1) üldjuhul ei kehti.

Näide 2.1. Vaatleme funktsiooni

$$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}.$$

Sellel funktsioonil on punktis $(0, 0, 0)$ olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui $\vec{s} = (a, b, c)$ on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb, 0+tc) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{ta\,tb\,tc}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt[3]{abc}}{t} = \sqrt[3]{abc}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0, 0, 0)$ lõplikud osatuletised muutujate x, y ja z järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt x-, y- ja z-telje suunas), kusjuures

$$f'_x(0,0,0) = f'_y(0,0,0) = f'_z(0,0,0) = 0;$$

niisiis $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Seega mis tahes ühikvektori $\vec{s} = (a, b, c)$ korral

$$\nabla f(0,0,0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b + 0c = 0,$$

kuid $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0,0) = \sqrt[3]{abc} \neq 0$, kui $a, b, c \neq 0$.

Teoreem 2.2. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y, z)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Siis funktsiooni f tuletis punktis P_0 mis tahes suunas ei ületa tema tuletist selles punktis gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas (ehk, teisisõnu, tuletis gradiendi suunas on kõikvõimalikes suundades võetud tuletiste maksimaalne väärtus). Funktsiooni f tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkusega.*

Tõestus. Funktsiooni f tuletis punktis P_0 vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunas on teoreemi 2.1 põhjal, tähistades sümboliga θ nurga selle vektori ja gradiendi $\nabla f(P_0)$ vahel,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\left|\nabla f(P_0)\right| |\vec{s}| \cos\theta}{|\vec{s}|} = \left|\nabla f(P_0)\right| \cos\theta$$

(siin sümbol $\left|\nabla f(P_0)\right|$ tähistab gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkust). Näeme, et sellel tuletisel on suurim võimalik väärtus juhul, kui $\cos\theta = 1$, s.t. $\theta = 0$ ehk, teisisõnu, vektori $\vec{s}$ ja gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunad ühtivad. Eelnevast võrdusteahelast näeme ka, et tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f(P_0)}(P_0) = \left|\nabla f(P_0)\right| \cos 0 = \left|\nabla f(P_0)\right|.$$

□

2.2. Kahe muutuja funktsiooni juht

Kahe muutuja funktsiooni tuletis antud suunas ja gradient defineeritakse analoogiliselt kolme muutuja funktsiooni juhuga. Seejuures kehtivad teoreemide 2.1 ja 2.2 analoogid, kusjuures ka nende analoogide tõestused jäävad peaaegu sõna-sõnalt samaks.

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ määratud punkti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses ning läbigu punkti P_0 suunatud telg l, mille suund on määratud vektoriga $\vec{s} = (a, b)$. Märgime, et

$$a = |\vec{s}|\,\cos\alpha, \quad b = |\vec{s}|\,\cos\beta,$$

kus $|\vec{s}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ on vektori $\vec{s}$ pikkus ning α ja β on nurgad telje l ja vastavalt x- ja y-telje vahel.

Tõepoolest, tähistades sümbolitega $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vastavalt x- ja y-telje suunalise ühikvektori, s.t. $\vec{x} := (1, 0)$ ja $\vec{y} := (0, 1)$, saame ühelt poolt,

$$\vec{s} \cdot \vec{x} = a\,1 + b\,0 = a,$$

teiselt poolt aga

$$\vec{s} \cdot \vec{x} = |\vec{s}|\,|\vec{x}|\,\cos\alpha = |\vec{s}|\,\cos\alpha;$$

niisiis $a = |\vec{s}|\,\cos\alpha$. Võrdus $b = |\vec{s}|\,\cos\beta$ tõestatakse analoogiliselt.

Siit näeme, et vektori $\vec{s}$ suunaline ühikvektor on $\vec{s}_1 := (\cos\alpha, \cos\beta)$.

Definitsioon 2.3. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} &\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x_0 + \tau|\vec{s}|\cos\alpha, y_0 + \tau|\vec{s}|\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\tau|\vec{s}|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t|\vec{s}|},\end{aligned}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks punktis* P_0 *telje* l *suunas* (või *vektori* $\vec{s}$ *suunas*) ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0).$$

Märkus 2.3. Vahetult definitsioonist järeldub, et funktsiooni $y = f(x, y)$ osatuletis punktis P_0 vastavalt muutuja x ja y järgi on funktsiooni f tuletis punktis P_0 vastavalt x- ja y-telje suunas.

Definitsioon 2.4. Vektorit

$$\mathrm{grad} f(P_0) := \nabla f(P_0) := \big(f'_x(P_0), f'_y(P_0)\big)$$

nimetatakse funktsiooni f *gradiendiks* punktis P_0.

Teoreem 2.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Siis funktsioonil f eksisteerib punktis P_0 tuletis mis tahes vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunas, kusjuures see tuletis on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ ja vektori $\vec{s}$ suunalise ühikvektori skalaarkorrutisega:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}. \tag{2.2}$$

Tõestus. Olgu $\vec{s}_1 = (a_1, b_1)$ vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunaline ühikvektor, s.t. $\vec{s}_1 = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$. Defineerime funktsiooni

$$g(t) = f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1).$$

Kuna funktsioon f on määratud punkti (x_0, y_0) mingis ümbruses, siis funktsioon g on määratud punkti $t = 0$ teatavas ümbruses. Paneme tähele, et tuletis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta_1, y_0 + tb_1) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib tuletis $g'(0)$; seejuures need tuletised on võrdsed. Funktsioon g on tõlgendatav liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi(t), \psi(t)\big),$$

kus

$$\phi(t) = x_0 + ta_1, \quad \psi(t) = x_0 + tb_1.$$

Kuna

- funktsioonid ϕ ja ψ on diferentseeruvad punktis 0, kusjuures $\phi'(0) = a_1$ ja $\psi'(0) = b_1$;
- funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0) = \big(\phi(0), \psi(0)\big)$,

siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi 1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'_x(P_0)\,\phi'(0) + f'_y(P_0)\,\psi'(0) \\ &= f'_x(P_0)\,a_1 + f'_y(P_0)\,b_1 = \nabla f(P_0)\cdot \vec{s}_1 = \nabla f(P_0)\cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}; \end{aligned}$$

niisiis $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = g'(0) = \nabla f(P_0) \cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$, nagu soovitud. □

Märkus 2.4. Kui teoreemis 2.3 loobuda eeldusest funktsiooni f diferentseeruvuse kohta punktis P_0, siis valem (2.2) üldjuhul ei kehti.

Näide 2.2. Vaatleme funktsiooni

$$z = f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

Sellel funktsioonil on punktis $(0, 0)$ olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui $\vec{s} = (a, b)$ on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 a^2\, tb}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt[3]{a^2 b}}{t} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0, 0)$ lõplikud esimest järku osatuletised muutujate x ja y järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt vektorite $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ suunas), kusjuures

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0;$$

niisiis $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Seega mis tahes ühikvektori $\vec{s} = (a,b)$ korral

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b = 0,$$

kuid $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = \sqrt[3]{a^2 b} \neq 0$, kui $a, b \neq 0$.

Teoreem 2.4. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Siis funktsiooni f tuletis punktis P_0 mis tahes suunas ei ületa tema tuletist selles punktis gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas (ehk, teisisõnu, tuletis gradiendi suunas on kõikvõimalikes suundades võetud tuletiste maksimaalne väärtus). Funktsiooni f tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkusega.*

Teoreemi 2.4 tõestus kordab sõna-sõnalt teoreemi 2.2 tõestust (välja arvatud, et teoreemi 2.1 asemel toetutakse teoreemile 2.3). $\square$

§ 3. Kõrgemat järku osatuletised ja diferentsiaalid

3.1. Kõrgemat järku osatuletised

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kui funktsioonil f eksisteerib igas punktis P punkti P_0 mingist ümbrusest $\mathcal{U}$ lõplik osatuletis $f'_{x_i}(P)$, siis selles ümbruses on määratud osatuletisfunktsioon

$$f'_{x_i} \colon \mathcal{U} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 3.1. Olgu $j \in \{1, \ldots, m\}$. Kui osatuletisfunktsioonil f'_{x_i} eksisteerib punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) osatuletis muutuja x_j järgi $(f'_{x_i})'_{x_j}(P_0)$, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *osatuletiseks punktis* P_0 *(muutujate* x_i *ja* x_j *järgi)* ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i}(P_0), \quad f''_{x_i x_j}(P_0), \quad u''_{x_i x_j}(P_0), \quad f_{x_i x_j}(P_0), \quad u_{x_i x_j}(P_0) \tag{3.1}$$

või

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f''_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u''_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Seejuures, kui $j \neq i$, siis seda teist järku osatuletist nimetatakse *segaosatuletiseks.*

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik teist järku osatuletis $f''_{x_i x_j}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(teist järku) osatuletisfunktsioon (argumentide* x_i *ja* x_j *järgi)*

$$f''_{x_i x_j} \colon \mathcal{D} \ni P \longmapsto f''_{x_i x_j}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni f) *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *osatuletiseks (argumentide* x_i *ja* x_j *järgi).* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i}, \quad f''_{x_i x_j}, \quad u''_{x_i x_j}, \quad f_{x_i x_j}, \quad u_{x_i x_j}. \tag{3.2}$$

Tähistused (3.1) on tähistustega (3.2) hästi kooskõlas: (lõplik) teist järku osatuletis antud punktis on vastava osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Üldiselt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i} = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big)}{\partial x_j}, \quad f''_{x_i x_j} = (f'_{x_i})'_{x_j}, \quad u''_{x_i x_j} = (u'_{x_i})'_{x_j},$$
$$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j}, \quad u_{x_i x_j} = (u_{x_i})_{x_j}.$$

Me kasutame tähistusi (juhu $j = i$ jaoks)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_i} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_i} =: \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \begin{array}{ll} f''_{x_i x_i} =: f''_{x_i^2}, & u''_{x_i x_i} =: u''_{x_i^2}, \\ f_{x_i x_i} =: f_{x_i^2}, & u_{x_i x_i} =: u_{x_i^2}. \end{array} \tag{3.3}$$

Näide 3.1. Leiame funktsiooni

$$u = f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

teist järku osatuletised. Kui $(x,y) \neq (0,0)$, saame vahetult diferentseerides

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

millest sümmeetria põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2};$$

seega, jällegi vahetult diferentseerides,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\right)'_x = \frac{-4x^3 y^3 + 12 x y^5}{(x^2 + y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\right)'_y = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3},$$

millest sümmeetria põhjal vastavalt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-12x^5 y + 4x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Leiame funktsiooni f esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Nüüd saame leida funktsiooni f teist järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Üldiselt, (m muutuja) funktsiooni *kõrgemat järku osatuletised* defineeritakse rekurrentselt, sarnaselt teist järku osatuletistega. Haarame järgnevas kaasa ka (eelnevas juba defineeritud) teist järku osatuletiste juhu.

Olgu $n \geqslant 2$, kusjuures eeldame, et meil on defineeritud m muutuja funktsiooni $n-1$ järku osatuletisfunktsioonid.

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$. Eksisteerigu funktsioonil f igas punktis P punkti P_0 mingist ümbrusest $\mathcal{U}$ lõplik $n-1$ järku osatuletis $f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}}(P)$ (muutujate $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}$ järgi). Siis selles ümbruses on määratud $n-1$ järku osatuletisfunktsioon

$$f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}} \colon \mathcal{U} \ni P \longmapsto f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}}(P) \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 3.2. Kui $n-1$ järku osatuletisfunktsioonil $f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}}$ eksisteerib punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) osatuletis muutuja x_{i_n} järgi $\big(f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}}\big)'_{x_{i_n}}(P_0)$, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f *n-ndat järku* (ehk lihtsalt *n-ndaks*) *osatuletiseks punktis P_0 (muutujate $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi)* ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0), \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0), \quad f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P_0), \quad u^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P_0),$$
$$f_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P_0), \quad u_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P_0) \tag{3.4}$$

või

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Seejuures, kui mõned indeksitest $i_1, \ldots, i_n$ pole omavahel võrdsed (s.t. tegemist pole olukorraga, kus $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ on üks ja sama muutuja), siis seda n-ndat järku osatuletist nimetatakse *segaosatuletiseks*.

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik n-ndat järku osatuletis $f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(n-ndat järku) osatuletisfunktsioon (argumentide $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi)*

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}} \colon \mathcal{D} \ni P \longmapsto f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni f) *n-ndat järku* (ehk lihtsalt *n-ndaks*) *osatuletiseks (argumentide $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi)*. Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}, \quad f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}, \quad u^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}, \quad f_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}, \quad u_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}. \tag{3.5}$$

Tähistused (3.4) on tähistustega (3.5) hästi kooskõlas: (lõplik) n-ndat järku osatuletis antud punktis on vastava osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Üldiselt,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial\Big(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\Big)}{\partial x_{i_n}},\quad \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial\Big(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\Big)}{\partial x_{i_n}},$$

$$f^{(n)}_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}=(f^{(n-1)}_{x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}}})'_{x_{i_n}},\quad u^{(n)}_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}=(u^{(n-1)}_{x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}}})'_{x_{i_n}},$$

$$f_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}=(f_{x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}},\quad u_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}=(u_{x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}}.$$

Märkus 3.1. Märkimaks funktsiooni $u=f(P)=f(x_1,\dots,x_m)$ n-ndat järku osatuletist muutujate $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ järgi, kasutatakse tähistuste (3.5) kõrval sageli ka tähistusi

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}f\quad\text{ja}\quad\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}u;$$

niisiis (kooskõlas märkuses 1.1 kirjeldatud tähistustega)

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}f=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\bigg(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}f\bigg).$$

Mitme muutuja funktsioonide kõrgemat järku osatuletiste märkimisel kasutatakse teist järku osatuletiste puhul kasutatavate lihtsustavate tähistuste (3.3) analooge: näiteks kolme muutuja funktsiooni $u=f(x,y,x)$ korral

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial x}=:\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\quad f'''_{xxx}=:f'''_{x^3},$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x\,\partial z\,\partial z\,\partial x\,\partial y}=:\frac{\partial^5 f}{\partial x\,\partial z^2\,\partial x\,\partial y},\quad f^{(5)}_{yxzzx}=:f^{(5)}_{yxz^2x},$$

$$\frac{\partial^6 f}{\partial y\,\partial y\,\partial y\,\partial x\,\partial z\,\partial z}=:\frac{\partial^6 f}{\partial y^3\,\partial x\,\partial z^2},\quad f^{(6)}_{zzxyyy}=:f^{(6)}_{z^2xy^3}.$$

Definitsioon 3.3. Olgu $n\geqslant 2$. Öeldakse, et m muutuja funktsioon f on n *korda diferentseeruv* punktis $P\in\mathbb{R}^m$, kui funktsioonil f eksisteerivad selle punkti mingis ümbruses kõikvõimalikud $n-1$ järku osatuletised, kusjuures need osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) on punktis P diferentseeruvad.

3.2. Piisavaid tingimusi segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast

Eelneva punkti näite 3.1 funktsiooni $u=f(x,y)$ puhul kehtis väljaspool punkti $(0,0)$ võrdus $f''_{xy}=f''_{yx}$, s.t. samade muutujate järgi võetud segaosatuletis ei sõltunud diferentseerimise järjekorrast. Samas pole see mitte alati nii: selles samas näites $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Selles punktis anname mõned piisavad tingimused segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast.

Teoreem 3.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ kaks korda diferentseeruv punktis $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Siis*

$$f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P).$$

Tõestus. Teoreemi eeldustel leidub reaalarv $d > 0$, mille korral funktsioonil f eksisteerivad (esimest järku) osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) f'_x ja f'_y punkti $P = (x,y)$ ümbruses $(x-d, x+d) \times (y-d, y+d)$. Defineerime funktsiooni

$$\Phi(h) = f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - \big(f(x, y+h) - f(x,y)\big), \quad h \in (-d,d). \tag{3.6}$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et, ühelt poolt,

$$\Phi(h) = f''_{xy}(x,y)\, h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \to 0 \tag{3.7}$$

ning, teiselt poolt,

$$\Phi(h) = f''_{yx}(x,y)\, h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \to 0, \tag{3.8}$$

sest nende esituste kehtides $f''_{xy}(x,y) + \frac{o(h^2)}{h^2} = f''_{yx}(x,y) + \frac{o(h^2)}{h^2}$ protsessis $h \to 0$, millest järeldub, et $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Esituse (3.7) saamiseks fikseerime vabalt $h \in (-d,d) \setminus \{0\}$ ja defineerime funktsiooni

$$\phi(\xi) = f(\xi, y+h) - f(\xi, y), \quad \xi \in (x-d, x+d); \tag{3.9}$$

siis

$$\Phi(h) = \phi(x+h) - \phi(x).$$

Kuna funktsioon ϕ rahuldab lõigus $[x, x+h]$ (või lõigus $[x+h, x]$, kui $h < 0$) kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi, kusjuures

$$\phi'(\xi) = f'_x(\xi, y+h) - f'_x(\xi, y),$$

siis leidub arv $\theta \in (0,1)$ nii, et

$$\Phi(h) = \phi(x+h) - \phi(x) = \phi'(x+\theta h)\, h = \big(f'_x(x+\theta h, y+h) - f'_x(x+\theta h, y)\big)\, h. \tag{3.10}$$

Kuna osatuletis(funktsioon) f'_x on diferentseeruv punktis $P = (x,y)$, siis tema muut punktis P esitub kujul

$$\begin{aligned} &f'_x(x+\Delta x, y+\Delta y) - f'_x(x,y) \\ &\qquad = f''_{xx}(x,y)\,\Delta x + f''_{xy}(x,y)\,\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \end{aligned}$$

kus funktsioonid α_1 ja α_2 rahuldavad tingimust $\alpha_i(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0$, $i = 1,2$. Seega

$$\begin{aligned} f'_x(x+\theta h,&y+h) - f'_x(x+\theta h, y) \\ &= f'_x(x+\theta h, y+h) - f'_x(x,y) - \big(f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x,y)\big) \\ &= f''_{x^2}(x,y)\,\theta h + f''_{xy}(x,y)\, h + \alpha_1(\theta h, h)\,\theta h + \alpha_2(\theta h, h)\, h \\ &\qquad\qquad - \big(f''_{x^2}(x,y)\,\theta h + \alpha_1(\theta h, 0)\,\theta h\big) \\ &= f''_{xy}(x,y)\, h + \alpha_1(\theta h, h)\,\theta h + \alpha_2(\theta h, h)\, h - \alpha_1(\theta h, 0)\,\theta h. \end{aligned}$$

Niisiis, arvestades, et $\alpha_1(\theta h, h)\,\theta h + \alpha_2(\theta h, h)\,h - \alpha_1(\theta h, 0)\,\theta h = o(h)$ protsessis $h \to 0$,

$$\Phi(h) = \big(f''_{xy}(x,y)\,h + o(h)\big)h = f''_{xy}(x,y)\,h^2 + o(h)\,h = f''_{xy}(x,y)\,h^2 + o(h^2)$$
$$\text{protsessis } h \to 0.$$

Esitus (3.8) saadakse sümmeetriliselt (defineerides funktsiooni $\psi(\eta) = f(x + h, \eta) - f(x, \eta)$ ja pannes tähele, et $\Phi(h) = \psi(y+h) - \psi(y)$). □

Järgnev teoreem ütleb, et teoreemi 2.1 väide jääb kehtima ka veidi teistsuguste eelduste korral.

Teoreem 3.2. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x,y)$ punkti $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses segaosatuletised f''_{xy} ja f''_{yx}, kusjuures need osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) on pidevad punktis P. Siis*

$$f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P).$$

Tõestus. Teoreemi tõestus on oma üldideelt sarnane teoreemi 3.1 tõestusega. Tehtud eeldustel leidub reaalarv $d > 0$, mille korral funktsioonil f eksisteerivad punkti $P = (x,y)$ ümbruses $\mathcal{D} := (x-d, x+d) \times (y-d, y+d)$ teist järku osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) f''_{xy} ja f''_{yx} (ning seega ühtlasi ka esimest järku osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) f'_x ja f'_y). Defineerides funktsiooni (3.6), piisab (analoogiliselt teoreemi 3.1 tõestusele) saada esitused (3.7) ja (3.8).

Täpselt nagu ka teoreemi 3.1 tõestuses defineeritakse esituse (3.7) saamiseks kõigepealt funktsioon (3.9) ning seejärel saadakse (ühe muutuja funktsiooni) Lagrange'i keskväärtusteoreemile toetudes esitus (3.10). Kuna funktsioonil f eksisteerib ristkülikus $\mathcal{D}$ lõplik segaosatuletis f''_{xy}, siis funktsioon

$$v(\eta) = f'_x(x + \theta h, \eta), \quad \eta \in (y-d, y+d),$$

rahuldab lõigus $[y, y+h]$ (või lõigus $[y+h, y]$, kui $h < 0$) kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi, kusjuures

$$v'(\eta) = f''_{xy}(x + \theta h, \eta),$$

järelikult leidub arv $\widehat{\theta} \in (0,1)$ nii, et

$$\begin{aligned} f'_x(x+\theta h, y+h) - f'_x(x+\theta h, y) &= v(y+h) - v(y) = v'(y + \widehat{\theta} h)\,h \\ &= f''_{xy}(x + \theta h, y + \widehat{\theta} h)\,h. \end{aligned}$$

Osatuletise f''_{xy} pidevuse tõttu punktis (x,y)

$$f''_{xy}(x+\theta h, y + \widehat{\theta} h) = f''_{xy}(x,y) + o(1) \quad \text{protsessis } h \to 0,$$

seega

$$\Phi(h) = \big(f''_{xy}(x,y) + o(1)\big)\,h^2 = f''_{xy}(x,y)\,h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \to 0.$$

Esitus (3.8) saadakse sümmeetriliselt (defineerides funktsiooni $\psi(\eta) = f(x + h, \eta) - f(x, \eta)$ ja pannes tähele, et $\Phi(h) = \psi(y+h) - \psi(y)$). □

Selle punkti lõpetuseks tõestame ühe olulise järelduse teoreemist 3.1.

Järeldus 3.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ n korda diferentseeruv punktis $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsiooni f n-ndat järku osatuletised punktis P ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.*

Tõestus. Tõestame järelduse induktsiooni abil funktsiooni f diferentseeruvuse järgu n järgi. Juhul $n = 2$ kehtib järeldus teoreemi 3.1 põhjal. Eeldame nüüd, et $n > 2$ ning et järeldus kehtib, kui seal arv n asendada arvuga $n-1$. Näitame, et niisugusel eeldusel kehtib järeldus ka ülaltrükitud kujul.

Niisiis, eeldame, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on n korda diferentseeruv punktis $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Olgu $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ ning olgu $j_1, \dots, j_n$ indeksite $1, \dots, n$ mingi ümberjärjestus (s.t. hulkadena $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$). Järelduse tõestuseks peame näitama, et

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P) = f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{i_{j_n}}}(P). \tag{3.11}$$

Selleks märgime, et

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}\big)'_{x_{i_n}}(P) \quad \text{ja} \quad f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{i_{j_n}}}(P) = \big(f^{(n-1)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{i_{j_{n-1}}}}\big)'_{x_{i_{j_n}}}(P). \tag{3.12}$$

Kui $j_n = n$, siis $j_1, \dots, j_{n-1}$ on indeksite $1, \dots, n-1$ ümberjärjestus, seega tehtud eelduse põhjal $n-1$ korda diferentseeruva funktsiooni $n-1$ järku segaosatuletiste sõltumatusest diferentseerimise järjekorrast kehtib punkti P teatavas ümbruseses võrdus $f^{(n-1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}} = f^{(n-1)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{i_{j_{n-1}}}}$ ning järelikult kehtib ka (3.11).

Eeldame nüüd, et $j_n \neq n$, s.t. $j_n \in \{1, \dots, n-1\}$ ja $n \in \{j_1, \dots, j_{n-1}\}$, ning märgime $\{1, \dots, n-1\} \setminus \{j_n\} = \{k_1, \dots, k_{n-2}\}$; siis ka $\{j_1, \dots, j_{n-1}\} \setminus \{n\} = \{k_1, \dots, k_{n-2}\}$. Tehtud eelduse põhjal $n-1$ korda diferentseeruva funktsiooni $n-1$ järku segaosatuletiste sõltumatusest diferentseerimise järjekorrast kehtivad punkti P teatavas ümbruses võrdused

$$f^{(n-1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}} = f^{(n-1)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}} x_{i_{j_n}}} = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_{j_n}}}$$

ja

$$f^{(n-1)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{j_{n-1}}} = f^{(n-1)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}} x_{i_n}} = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{k_{i_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_n}},$$

millest võrduste (3.12) põhjal saame, et

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P) = \Big(\big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_{j_n}}}\Big)'_{x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_{j_n}} x_{i_n}}(P)$$

ja

$$f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{i_{j_n}}}(P) = \Big(\big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_n}}\Big)'_{x_{i_{j_n}}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_n} x_{i_{j_n}}}(P),$$

millest, arvestades, et teoreemi 3.1 põhjal antud punktis kaks korda diferentseeruva funktsiooni teist järku segaosatuletised selles punktis ei sõltu diferentseeruvuse järjekorrast,

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_{j_n}} x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_n} x_{i_{j_n}}}(P) = f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \dots x_{i_{j_n}}}(P),$$

s.t kehtib võrdus (3.11), nagu soovitud. □

3.3. Kõrgemat järku diferentsiaalid

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ diferentseeruv hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P. Fikseerides argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalide väärtused $dx_1, \ldots, dx_m$ (s.t. lugedes need diferentsiaalid fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \ldots, x_m$) funktsioonina $du = du(P)$:

$$du = du(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P)\, dx_m.$$

Eeldame nüüd, et funktsioon f on fikseeritud punktis $P \in \mathcal{D}$ kaks korda diferentseeruv (s.t. osatuletisfunktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ on diferentseeruvad punktis P). Siis (vt. märkust 1.8) ka selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal du (tõlgendatuna eespool kirjeldatud viisil m muutuja funktsioonina) on diferentseeruv punktis P, kusjuures tema täisdiferentsiaal selles punktis avaldub kujul

$$d(du)(P) = d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)(P)\, dx_1 + \cdots + d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Big)(P)\, dx_m = \sum_{i=1}^{m} d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(P)\, dx_i.$$

Tähistades selles võrduses osatuletisfunktsioonide $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ täisdiferentsiaalide avaldistes argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalid (selguse huvides) sümbolitega $\delta x_1, \ldots, \delta x_m$ (eristamaks neid fikseeritud väärtustest $dx_1, \ldots, dx_m$), s.t.

$$d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_i}(P)\, \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m\, \partial x_i}(P)\, \delta x_m, \quad i = 1, \ldots, m,$$

saame

$$d(du)(P) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P)\, \delta x_j\Big) dx_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P)\, \delta x_j\, dx_i.$$

Selle diferentsiaali väärtust (s.t. funktsiooni f esimest järku täisdiferentsiaali du täisdiferentsiaali $d(du)$ väärtust punktis P), kui $\delta x_i = dx_i$, $i = 1, \ldots, m$, nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *täisdiferentsiaaliks* punktis P ja tähistatakse sümboliga $d^2u(P)$ või $d^2 f(P)$:

$$d^2u(P) := d^2 f(P) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P)\, dx_i\, dx_j. \tag{3.13}$$

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis kaks korda diferentseeruv, siis analoogiliselt esimest järku täisdiferentsiaali juhuga võime argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ fikseeritud väärtuste korral funktsiooni f teist järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \ldots, x_m$) funktsioonina $d^2u = d^2u(P)$; seejuures esitusest (3.13) (jättes seal argumendi P kirjutamata) saame, et

$$d^2u = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\, dx_i\, dx_j.$$

Juhime tähelepanu, et funktsiooni f kaks korda diferentseeruvuse tõttu hulgas $\mathcal{D}$ (järelduse 3.3 põhjal)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad \text{kõikide } i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ korral.}$$

Nii näiteks kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$dz = df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2,$$

kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$\begin{aligned} du = df &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,dz^2 \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\,dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\,dx\,dz \end{aligned}$$

jne.

Funktsiooni kolmandat ja kõrgemat järku täisdiferentsiaalid defineeritakse analoogiliselt. Üldiselt, kui $n \geqslant 2$, siis n korda diferentseeruva funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ *n-ndat järku täisdiferentsiaal* $d^n u$ defineeritakse rekurrentselt võrdusega $d^n u = d(d^{n-1}u)$, kus $n-1$ järku täisdiferentsiaali $d^{n-1}u$ avaldises argumentide $x_1, \dots, x_m$ diferentsiaalid $dx_1, \dots, dx_m$ loetakse fikseeritud konstantideks ja seda täisdiferentsiaali tõlgendatakse m muutuja $x_1, \dots, x_m$ funktsioonina ning selle funktsiooni täisdiferentsiaalis $d(d^{n-1}u)$ võetakse argumentide $x_1, \dots, x_m$ diferentsiaalid $\delta x_1, \dots, \delta x_m$ võrdseks vastavalt diferentsiaalidega $dx_1, \dots, dx_m$.

Nii näiteks funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ kolmandat järku täisdiferentsiaal on

$$\begin{aligned} d^3 u = d(d^2 u)\big|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} &= d\Bigg(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\Bigg)\Bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Bigg(d\bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\bigg)\bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \Bigg)\,dx_i\,dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Bigg(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,\delta x_k \bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \Bigg)\,dx_i\,dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\,dx_k \end{aligned}$$

ja, analoogiliselt, neljandat järku täisdiferentsiaal on

$$d^4 u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^4 f}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\,dx_k\,dx_l$$

ning, üldiselt, n-ndat järku täisdiferentsiaal on

$$d^n u = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m}}_{n \text{ summamärki}} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} dx_{i_1} \cdots dx_{i_n}.$$

Arvestades, et n korda diferentseeruva funktsiooni n-ndat järku segaosatuletised ei sõltu diferentseerimise järjekorrast, saame siit näiteks valemid kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ kõrgemat järku täisdiferentsiaalide jaoks:

$$\begin{aligned} d^3 z &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2} dx^2\, dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3, \\ d^4 z &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial y\, \partial x^3} dx^3\, dy + 6\frac{\partial^4 f}{\partial y^2\, \partial x^2} dx^2\, dy^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial y^3\, \partial x} dx\, dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4 \end{aligned}$$

jne. Sarnasuse tõttu binoomvalemiga esitatakse üldine valem kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ n-ndat järku täisdiferentsiaali jaoks kujul

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

§ 4. Taylori valem mitme muutuja funktsiooni jaoks

Teoreem 4.1 (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul)**.** *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$$

n korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis mis tahes punkti $P = (x_1, \dots, x_m)$ jaoks punkti P_0 teatavast ümbrusest $\mathcal{U}$ kehtib valem

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \alpha_n \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \alpha_n, \end{aligned}$$

kus diferentsiaalide $df(P_0), \dots, d^n f(P_0)$ avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i := x_i - x_i^0, \quad i = 1, \dots, m,$$

ning, tähistades

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0),$$

funktsioon $\alpha_n = \alpha_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha_n = o(\rho^n)$ protsessis $\rho \to 0$.

Tõestus. Tõestame teoreemi induktsiooni abil funktsiooni f diferentseeruvuse järgu n järgi. Kui $n = 1$, siis teoreem kehtib teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(iii) põhjal. Eeldame nüüd, et $n \geqslant 2$ ning et teoreem kehtib, kui seal arv n asendada arvuga $n - 1$. Näitame, et niisugusel eeldusel kehtib teoreem ka ülaltrükitud kujul. Üleskirjutuste lihtsustamiseks kasutame järgmisi tähistusi: etteantud arvude $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, h_1, \dots, h_m \in \mathbb{R}$ korral tähistame $\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $h := (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ ning

$$\begin{aligned} P_0 + \Delta P &:= (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m, \\ P_0 + \Delta P + h &:= (x_1^0 + \Delta x_1 + h_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m + h_m) \in \mathbb{R}^m, \\ \Delta P + h &:= (\Delta x_1 + h_1, \dots, \Delta x_m + h_m) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Niisiis, eeldame, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on n korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Teoreemi tõestuseks tuleb näidata, et funktsioon $\alpha_n = \alpha_n(\Delta P) = \alpha_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$, kus

$$\begin{aligned} \alpha_n(\Delta P) &:= f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} \\ &= f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}, \end{aligned}$$

rahuldab tingimust $\alpha_n(\Delta P) = o(\rho^n)$ protsessis $\rho \to 0$, kus $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$.

Olgu $\varepsilon > 0$ selline, et funktsioon f on diferentseeruv punkti P_0 ε-ümbruses $\mathcal{U} := \{P \in \mathbb{R}^m \colon d(P, P_0) < \varepsilon\}$. Näitame, et funktsioon α_n on diferentseeruv punkti $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ε-ümbruses $\mathcal{U}_0 := \{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \colon \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\}$. Selleks märgime kõigepealt, et

$$\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathcal{U}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad P_0 + \Delta P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{U}.$$

Olgu $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathcal{U}_0$. Kui $h := (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ on selline, et $\Delta P + h \in \mathcal{U}_0$, siis

$$\begin{aligned}
&\alpha_n(\Delta P + h) - \alpha_n(\Delta P) \\
&\quad = f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, h_i \\
&\qquad - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\big((\Delta x_{i_1} + h_{i_1}) \cdots (\Delta x_{i_k} + h_{i_k}) - \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}\big).
\end{aligned}$$

Kuna $P_0 + \Delta P \in \mathcal{U}$, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 + \Delta P$, seega

$$f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0 + \Delta P)\, h_i + \beta(h),$$

kus funktsioon $\beta = \beta(h) = \beta(h_1, \dots, h_m)$ rahuldab tingimust $\beta(h) = o(r)$ protsessis $r := \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_m^2} \to 0$, järelikult

$$\begin{aligned}
&f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, h_i \\
&\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{m} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0 + \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \Big)\, h_i + \beta(h).
\end{aligned}$$

Iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral esimest järku osatuletisfunktsioon $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on $n-1$ korda diferentseeruv punktis P_0, seega tehtud eelduse põhjal teoreemi kehtivusest juhul, kui seal arv n on asendatud arvuga $n-1$, saame, et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0 + \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})(P_0)}{k!} + \gamma_i(\Delta P) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} + \gamma_i(\Delta P),
\end{aligned}$$

kus funktsioon $\gamma_i = \gamma_i(\Delta P)$ rahuldab tingimust $\gamma_i(\Delta P) = o(\rho^{n-1})$ protsessis $\rho \to 0$, seega

$$\begin{aligned}
&f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, h_i \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} + \gamma_i(\Delta P) \Big)\, h_i + \beta(h) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} \Big)\, h_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\Delta P)\, h_i + \beta(h).
\end{aligned}$$

Teiselt poolt, iga $k \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $w \colon \mathbb{R}^k \ni (z_1, \dots, z_k) \mapsto z_1 \cdots z_k \in \mathbb{R}$ diferentseeruv, kusjuures $\frac{\partial w}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_k) = z_1 \cdots z_{j-1} z_{j+1} \cdots z_k$ iga $j \in \{1, \dots, k\}$ korral, seega, tähistades $\Delta z := (\Delta z_1, \dots, \Delta z_k)$,

$$\begin{aligned}
(z_1 + \Delta z_1) \cdots (z_k + \Delta z_k) - z_1 \cdots z_k &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial w}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_k)\, \Delta z_j + \psi_k(\Delta z) \\
&= \sum_{j=1}^{k} z_1 \cdots z_{j-1}\, \Delta z_j\, z_{j+1} \cdots z_k + \psi_k(\Delta z),
\end{aligned}$$

kus, märkides $\sigma := \sqrt{\Delta z_1^2 + \cdots + \Delta z_k^2}$, funktsioon $\psi_k = \psi_k(\Delta z)$ rahuldab tingimust $\psi_k(\Delta z) = o(\sigma)$ protsessis $\sigma \to 0$. Seega mis tahes $k \in \{2, \ldots, n\}$ ja $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$
\begin{aligned}
&(\Delta x_{i_1} + h_{i_1}) \cdots (\Delta x_{i_k} + h_{i_k}) - \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{k} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{j-1}}\, h_{i_j}\, \Delta x_{i_{j+1}} \cdots \Delta x_{i_k} + \beta_{i_1,\ldots,i_k}(h),
\end{aligned}
$$

kus funktsioon $\beta_{i_1,\ldots,i_k} = \beta_{i_1,\ldots,i_k}(h)$ rahuldab tingimust $\beta_{i_1,\ldots,i_k}(h) = o(r)$ protsessis $r \to 0$.Mis tahes $k \in \{2, \ldots, n\}$ ja $j \in \{1, \ldots, k\}$ korral, tähistades summeerimisindeksi i_j ümber indeksiks i ja summeerimisindeksid $i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k$ vastavalt indeksiteks $i_1, \ldots, i_{k-1}$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{j-1}}\, h_{i_j}\, \Delta x_{i_{j+1}} \cdots \Delta x_{i_k} \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{m} \frac{\partial^{k-1}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{k-1}}\, h_i,
\end{aligned}
$$

järelikult

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(P_0)\big((\Delta x_1 + h_1) \cdots (\Delta x_1 + h_1) - \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}\big) \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(P_0) \Big(\sum_{j=1}^{k} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{j-1}}\, h_{i_j}\, \Delta x_{i_{j+1}} \cdots \Delta x_{i_k} + \beta_{i_1,\ldots,i_k}(h)\Big) \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\, k \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{m} \frac{\partial^{k-1}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{k-1}}\, h_i + o(r) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{1}{\kappa!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_\kappa=1}^{m} \frac{\partial^{\kappa}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_{i_\kappa} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_\kappa}\Big) h_i + o(r)
\end{aligned}
$$

protsessis $r \to 0$.

Eelnevast järeldub, et

$$
\alpha_n(\Delta P + h) - \alpha_n(\Delta P) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\Delta P)\, h_i + o(r) \quad \text{protsessis } r \to 0. \tag{4.1}
$$

Sellega oleme tõestanud, et funktsioon α_n on punkti $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ümbruses $\mathcal{U}_0$ diferentseeruv; seejuures esitusest (4.1) järeldub, et selles ümbruses iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$
\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i}(\Delta P) = \gamma_i(\Delta P) = o(\rho^{n-1}) \quad \text{protsessis } \rho \to 0.
$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal mitme muutuja funktsioonide jaoks (s.t. järelduse 1.10 põhjal) leidub iga punkti $\Delta P = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \in \mathcal{U}_0$ jaoks arv $\theta \in (0, 1)$, mille korral, tähistades $\theta \Delta P := (\theta \Delta x_1, \ldots, \theta \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$
\alpha_n(\Delta P) = \alpha_n(\Delta P) - \alpha_n(0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\theta \Delta P)\, \Delta x_i
$$

(rõhutame, et selline arv θ sõltub üldjuhul punktist ΔP). Rogers–Hölderi võrratusest juhul $p = q = 2$ (vt. teoreemi I.1.2) järeldub nüüd, et

$$
|\alpha_n(\Delta P)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\theta \Delta P)^2}\, \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\theta \Delta P)^2}\, \rho.
$$

Kuna $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(\theta\Delta P)^2} = o(\rho^{n-1})$ protsessis $\rho \to 0$, siis

$$|\alpha_n(\Delta P)| = o(\rho^{n-1})\,\rho = o(\rho^n) \quad \text{protsessis } \rho \to 0,$$

mida oligi tarvis tõestada. □

Teoreem 4.2 (Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

$n+1$ *korda diferentseeruv punkti* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *mingis* ε*-ümbruses* $\mathcal{U}$*. Siis iga punkti* $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$ *jaoks kehtib valem*

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!} \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

kus diferentsiaalide $df(P_0), \ldots, d^n f(P_0)$ *ja* $d^{n+1} f(R)$ *avaldistes*

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

ja

$$R = (x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \theta\Delta x_m)$$

mingi $\theta \in (0,1)$ *korral (mis sõltub punktist* P*).*

Tõestus. Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$. Defineerime iga $t \in \mathbb{R}$ korral punkti

$$P_t := (x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{4.3}$$

kus arvud $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$ on defineeritud võrdustega (4.2). Paneme tähele, et punkt P_0 eeskirja (4.3) järgi arvutatuna (s.t. punkt P_t, kus $t = 0$) on meie esialgne punkt P_0 ja $P_1 = P$ ning et leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $P_t \in \mathcal{U}$ iga $t \in (-\delta, 1+\delta)$ korral. Defineerime funktsiooni

$$\Phi(t) := f(P_t) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m) = f\big(\phi_1(t) \ldots, \phi_m(t)\big), \qquad t \in (-\delta, 1+\delta),$$

kus

$$\phi_i(t) = x_i^0 + t\Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

Funktsioon Φ on liitfunktsiooni diferentseerimise reegli põhjal $n+1$ korda diferentseeruv vahemikus $(-\delta, 1+\delta)$, kusjuures iga $t \in (-\delta, 1+\delta)$ korral

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi_1(t)\ldots,\phi_m(t)\big)\,\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi_1(t)\ldots,\phi_m(t)\big)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t)\,\Delta x_i,\\
\Phi''(t) &= \sum_{i=1}^{m} \bigg(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi_1(t)\ldots,\phi_m(t)\big)\bigg)'_t\,\Delta x_i\\
&= \sum_{i=1}^{m} \bigg(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}\big(\phi_1(t)\ldots,\phi_m(t)\big)\,\frac{\partial \phi_j}{\partial t}(t)\bigg)\,\Delta x_i\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\big(\phi_1(t)\ldots,\phi_m(t)\big)\,\Delta x_i \Delta x_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_t)\,\Delta x_i \Delta x_j
\end{aligned}$$

ning, üldiselt, iga $k \in \{1,\ldots,n+1\}$ korral

$$\Phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots \partial x_{i_1}}(P_t)\,\Delta x_{i_1}\cdots \Delta x_{i_k} = d^k f(P_t),$$

kus diferentsiaali $d^k f(P_t)$ avaldises kehtivad võrdused (4.2). Nüüd ühe muutuja funktsiooni Taylori valemi põhjal jääkliikmega Lagrange'i kujul leidub $\theta \in (0,1)$ nii, et, tähistades $R := P_\theta$,

$$\begin{aligned}
f(P) = \Phi(1) &= \Phi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}\,(1-0)^k + \frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}\\
&= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

nagu soovitud. $\square$

III peatükk.
Ilmutamata funktsioonide teooria

§ 1. Jacobi maatriksid ja determinandid

Olgu funktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{1.1}$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Siis süsteem (1.1) määrab kujutuse $\Phi\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(P) = \big(u_1(P), \ldots, u_n(P)\big) \in \mathbb{R}^n, \quad P \in \mathcal{D}. \tag{1.2}$$

Teiselt poolt, mis tahes kujutus $\Phi\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ määrab ühesel viisil funktsioonid (1.1), mis rahuldavad tingimust (1.2): sellise omadusega funktsioonid (1.1) on defineeritud võrdustega

$$u_j(P) = u_j, \quad P \in \mathcal{D}, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{kus } \Phi(P) = (u_1, \ldots, u_n).$$

Niisiis, *hulgas* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *määratud funktsioonide süsteemid* (1.1) *ja kujutused* $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ *on üksüheses vastavuses.*

Eeldame nüüd, et funktsioonid (1.1) on diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.1. Maatriksit

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

nimetatakse süsteemi (1.1) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$) *Jacobi*[1] *maatriksiks.*

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) — saksa matemaatik.

Rõhutame, et Jacobi maatriks pole arvmaatriks – tema elemendid on funktsioonid. Jacobi maatriksi (1.3) väärtus konkreetses punktis $P \in \mathcal{D}$ on arvmaatriks (mille elemendid on Jacobi maatriksi (1.3) elementide väärtused punktis $P \in \mathcal{D}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m}(P) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $n = m$, s.t. süsteem (1.1) omandab kuju

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = u_m(P) = u_m(x_1, \ldots, x_m). \end{cases} \tag{1.4}$$

Definitsioon 1.2. Süsteemi (1.4) Jacobi maatriksi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

determinanti

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

nimetatakse süsteemi (1.4) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$) *Jacobi determinandiks* ehk *jakobiaaniks.*

Rõhutame jällegi, et Jacobi determinant pole mitte arv, vaid funktsioon (Jacobi determinandi väärtus konkreetses punktis on arv).

Tõestame ühe Jacobi maatriksite olulise omaduse: *kujutuste korrutise Jacobi maatriks on nende kujutuste Jacobi maatriksite korrutis.*

Teoreem 1.1. *Olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{1.5}$$

diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu funktsioonid

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(t_1, \ldots, t_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(t_1, \ldots, t_l) \end{cases} \tag{1.6}$$

diferentseeruvad hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^l$, kusjuures süsteemiga (1.6) määratud kujutuse $\Delta \to \mathbb{R}^m$ väärtuste hulk sisaldub funktsioonide (1.5) määramispiirkonnas:

$$\Big\{\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \colon\ Q \in \Delta\Big\} \subset \mathcal{D}.$$

Siis liitfunktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = F_1(Q) = F_1(t_1, \ldots, t_l) := u_1\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = F_n(Q) = F_n(t_1, \ldots, t_l) := u_n\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \end{cases} \tag{1.7}$$

on diferentseeruvad hulgas Δ, kusjuures süsteemi (1.7) Jacobi maatriks on süsteemide (1.5) ja (1.6) Jacobi maatriksite korrutis:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1} & \frac{\partial F_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial t_l} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t_1} & \frac{\partial F_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial t_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial t_1} & \frac{\partial F_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial t_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_l} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \frac{\partial x_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial t_l} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(siin osatuletised $\dfrac{\partial F_j}{\partial t_k}$ ja $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}$ arvutatakse punktides $Q \in \Delta$ ning osatuletised $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ vastavates punktides $\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big)$).

TÕESTUS. Liitfunktsioonide (1.7) diferentseeruvus järeldub vahetult liitfunktsioonide diferentseerimise reeglist (teoreemist II.1.8); seejuures kõikide $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $k \in \{1, \ldots, l\}$ korral

$$\frac{\partial F_j}{\partial t_k}(Q) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big)\,\frac{\partial x_i}{\partial t_k}(Q) \quad \text{iga } Q \in \Delta \text{ korral;}$$

niisiis võrdus (1.8) kehtib. □

Kuna (ruut)maatriksite korrutise determinant on nende maatriksite determinantide korrutis, siis järeldub teoreemist 1.1 juhul $n = m = l$

Järeldus 1.2. *Olgu teoreemis 1.1* $n = m = l$*. Siis süsteemi* (1.7) *jakobiaan on süsteemide* (1.5) *ja* (1.6) *jakobiaanide korrutis:*

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(t_1,\ldots,t_n)} = \frac{D(u_1,\ldots,u_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\,\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(t_1,\ldots,t_n)}$$

(siin determinantides $\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(t_1,\ldots,t_n)}$ *ja* $\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(t_1,\ldots,t_n)}$ *osatuletised* $\frac{\partial F_j}{\partial t_k}$ *ja* $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ning determinandis* $\frac{D(u_1,\ldots,u_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ *osatuletised* $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q),\ldots,x_m(Q)\big)$*).*

Järeldus 1.3. *Olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1,\ldots,x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = u_m(P) = u_m(x_1,\ldots,x_m) \end{cases} \tag{1.9}$$

diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *ning olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(u_1,\ldots,u_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(u_1,\ldots,u_m) \end{cases} \tag{1.10}$$

diferentseeruvad hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^m$*, kusjuures süsteemiga* (1.10) *määratud kujutuse* $\Delta \to \mathbb{R}^m$ *väärtuste hulk sisaldub funktsioonide* (1.9) *määramispiirkonnas:*

$$\Big\{\big(x_1(Q),\ldots,x_m(Q)\big)\colon\ Q \in \Delta\Big\} \subset \mathcal{D} \tag{1.11}$$

ning

$$\Big(u_1\big(x_1(Q),\ldots,x_m(Q)\big),\ldots,u_m\big(x_1(Q),\ldots,x_m(Q)\big)\Big) = Q \quad \text{iga } Q \in \Delta \text{ korral.} \tag{1.12}$$

Siis nende süsteemide jakobiaanide korrutis on samaselt võrdne arvuga 1*:*

$$\frac{D(u_1,\ldots,u_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)}\,\frac{D(x_1,\ldots,x_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)} = 1, \tag{1.13}$$

s.t.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \frac{\partial x_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = 1$$

(siin osatuletised $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ja osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}$*).*

TÕESTUS. Defineerime iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral funktsiooni $F_j \colon \Delta \to \mathbb{R}$,

$$F_j(Q) = u_j\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big), \quad Q \in \Delta;$$

siis järelduse 1.2 põhjal

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)}.$$

Tingimuse (1.12) põhjal iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$F_j(u_1, \dots, u_m) = u_j \quad \text{iga } (u_1, \dots, u_m) \in \Delta \text{ korral;}$$

seega

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

niisiis samasus (1.13) kehtib. □

Vahetult eelnevast järeldusest 1.3 järeldub, et *kujutuse ja tema pöördkujutuse jakobiaanide korrutis on samaselt võrdne arvuga* 1.

Järeldus 1.4. *Olgu süsteemid* (1.9) *ja* (1.10) *poolt määratud kujutused teineteise pöördkujutused, s.t. lisaks tingimustele* (1.11) *ja* (1.12) *kehtivad ka*

$$\Big\{\big(u_1(P), \dots, x_m(P)\big) \colon\ P \in \mathcal{D}\Big\} \subset \Delta$$

ja

$$\Big(x_1\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big), \dots, x_m\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big)\Big) = P \quad \textit{iga } P \in \mathcal{D} \textit{ korral.}$$

Siis kehtib samasus (1.13) *(siin vaadeldavates jakobiaanides osatuletised* $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ja osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}$ *või, sümmeetriliselt, osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *arvutatakse punktides* $P \in \mathcal{D}$ *ja osatuletised* $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ *vastavates punktides* $\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big) \in \Delta$*).*

§ 2. Ühe võrrandiga antud ilmutamata funktsioonid

2.1. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni mõiste

Sisaldagu kahe muutuja funktsiooni $u = F(x, y)$ määramispiirkond ristkülikut

$$I_1 \times I_2 = \big\{(x, y) \colon\ x \in I_1,\ y \in I_2\big\},$$

kus $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y) = 0. \tag{2.1}$$

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et võrrand (2.1) määrab ristkülikus $I_1 \times I_2$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x), \tag{2.2}$$

kui mis tahes fikseeritud $x \in I_1$ korral võrrandil (2.1) eksisteerib parajasti üks lahend $y \in I_2$.

Kõnealune funktsioon (2.2)

$$I_1 \ni x \mapsto y(x) \in I_2$$

on määratud võrdusega

$$F\big(x, y(x)\big) = 0;$$

see funktsioon seab punktile $x \in I_1$ vastavusse võrrandi (2.1) ainsa lahendi $y \in I_2$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.2) on antud võrrandiga (2.1) *ilmutamata kujul.*

Näide 2.1. Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2.3}$$

Märgime, et

- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[-1, 1] \times [0, 1]$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina $y = y(x)$, sest iga fikseeritud väärtuse $x \in [-1, 1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend y lõigust $[0, 1]$ (see lahend on $y = \sqrt{1 - x^2}$; niisiis $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[-1, 1] \times [0, 1]$ muutujat x muutuja y (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $y \in [0, 1)$ korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit lõigust $[-1, 1]$ (need lahendid on $x = \sqrt{1 - y^2}$ ja $x = -\sqrt{1 - y^2}$);
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[-1, 1] \times [-1, 0]$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina $y = y(x)$, sest iga fikseeritud väärtuse $x \in [-1, 1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend y lõigust $[-1, 0]$ (see lahend esitub kujul $y = -\sqrt{1 - x^2}$; niisiis $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[-1, 1] \times [-1, 1]$ muutujat y muutuja x (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (-1, 1)$ korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit y lõigust $[-1, 1]$ (need lahendid on $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{1 - x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $(-1, 1) \times [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ muutujat y muutuja x funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ puudub võrrandil (2.3) lahend y lõigus $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$;
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[1, 2] \times (-\infty, \infty)$ muutujat y muutuja x funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (1, 2]$ korral võrrandil (2.3) puudub lahend;
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[0, 1] \times [-1, 1]$ muutuja x muutuja y (ühese) funktsioonina $x = x(y)$, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $y \in [-1, 1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend x lõigust $[0, 1]$ (see lahend on $x = \sqrt{1 - y^2}$; niisiis $x(y) = \sqrt{1 - y^2}$).

2.2. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja pidevus

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasoluks ja pidevuseks.

Teoreem 2.1. *Eeldame, et*

(1) *funktsioon* $u = F(x, y)$ *on määratud ja pidev mingis ristkülikus* $\mathcal{D}$ *keskpunktiga* (x_0, y_0)*:*

$$\mathcal{D} := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \qquad (\alpha, \beta > 0);$$

(2) $F(x_0, y_0) = 0$*;*

(3) *iga fikseeritud* $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *korral on funktsioon* $u(y) := F(x, y)$ *rangelt monotoonne (s.t. see (argumendi* y*) funktsioon on kas rangelt kasvav või rangelt kahanev).*

Siis

(a) *punkti* (x_0, y_0) *teatavas ristkülikukujulises ümbruses määrab võrrand* $F(x, y) = 0$ *muutuja* y *muutuja* x *(ühese) funktsioonina* $y = y(x)$*;*

(b) $y(x_0) = y_0$*;*

(c) *funktsioon* $y = y(x)$ *on punkti* x_0 *teatavas ümbruses pidev.*

TÕESTUS. Väidete (a) ja (b) tõestuseks piisab veenduda, et muutuja x iga väärtuse korral teatavast lõigust $[x_0-\alpha_0, x_0+\alpha_0] \subset [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ on väärtused $F(x, y_0-\beta)$ ja $F(x, y_0+\beta)$ erimärgilised. Niisugusel juhul mis tahes fikseeritud $x \in [x_0-\alpha_0, x_0+\alpha_0]$ korral järeldub võrrandi

$$h(y) = F(x, y) = 0$$

lahendi (muutuja y suhtes) olemasolu Bolzano–Cauchy esimesest teoreemist (märgime, et funktsioon h on pidev lõigus $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$); selle lahendi ühesus järeldub funktsiooni h monotoonsusest.

Oletame konkreetsuse mõttes, et funktsioon $u(y) = F(x_0, y)$ on rangelt kasvav. (Selle funktsiooni range kahanemise juhtu käsitletakse analoogiliselt.) Siis

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta),$$

s.t.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < 0 < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Kuna funktsioon F on pidev ristkülikus $\mathcal{D}$, siis on ta pidev ka punktides $(x_0, y_0-\beta)$ ja $(x_0, y_0+\beta)$ ning järelikult (teoreemi I.4.1 põhjal pideva funktsiooni märgi säilimisest) leidub reaalarv $\alpha_0 > 0$ nii, et

$$x \in [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \quad \Longrightarrow \quad F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta).$$

Väited (a) ja (b) on tõestatud.

Näitame, et funktsioon $y = y(x)$ on pidev vahemikus $(x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$. Fikseerime vabalt $\widetilde{x} \in (x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$ ja $\varepsilon > 0$ ning tähistame $\widetilde{y} = y(\widetilde{x})$. Me peame leidma reaalarvu $\delta > 0$ nii, et

$$\widetilde{x} - \delta < x < \widetilde{x} + \delta \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{y} - \varepsilon < y(x) < \widetilde{y} + \varepsilon.$$

Selleks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et mis tahes $x \in (\widetilde{x} - \delta, \widetilde{x} + \delta)$ korral on väärtused $F(x, \widetilde{y} - \varepsilon)$ ja $F(x, \widetilde{y} + \varepsilon)$ nullist erinevad ja erimärgilised, sest niisugusel juhul (muutuja y) funktsiooni $u(y) := F(x, y)$ range monotoonsuse ja pidevuse tõttu lõigus $[\widetilde{y} - \varepsilon, \widetilde{y} + \varepsilon]$ (Bolzano–Cauchy esimese teoreemi põhjal) võrrandi $F(x, y) = 0$ lahend y — s.t. väärtus $y(x)$ — paikneb $\widetilde{y} - \varepsilon$ ja $\widetilde{y} + \varepsilon$ vahel.

Kuna funktsioon $u(y) = F(\widetilde{x}, y)$ on kasvav, siis

$$F(\widetilde{x}, \widetilde{y} - \varepsilon) < F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < F(\widetilde{x}, \widetilde{y} + \varepsilon),$$

s.t.,

$$F(\widetilde{x}, \widetilde{y} - \varepsilon) < 0 < F(\widetilde{x}, \widetilde{y} + \varepsilon),$$

Kuna funktsioon F on pidev punktides $(\widetilde{x}, \widetilde{y} - \varepsilon)$ ja $(\widetilde{x}, \widetilde{y} + \varepsilon)$, siis (teoreemi I.4.1 põhjal pideva funktsioon märgi säilimisest) leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\widetilde{x} - \delta < x < \widetilde{x} + \delta \quad \Longrightarrow \quad F(x, \widetilde{y} - \varepsilon) < 0 < F(x, \widetilde{y} + \varepsilon).$$

Teoreem on tõestatud. □

2.3. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni diferentseeruvus

Tugevdades teoreemi 2.1 eeldusi, anname piisavad tingimused ilmutamata funktsiooni tuletise olemasoluks.

Teoreem 2.2. *Eeldame, et*

(1) *funktsioon $u = F(x, y)$ on määratud mingis ristkülikus $\mathcal{D}$ keskpunktiga (x_0, y_0):*

$$\mathcal{D} := (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta) \qquad (\alpha, \beta > 0);$$

(2) $F(x_0, y_0) = 0$*;*

(3) *osatuletised F'_x ja F'_y eksisteerivad ja on pidevad ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Siis kehtivad teoreemi 2.1 väited (a)–(c). *Veelgi enam,*

(d) *funktsioonil $y = y(x)$ eksisteerib punkti x_0 teatavas ümbruses pidev tuletis, kusjuures selles ümbruses*

$$y'(x) = -\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}; \tag{2.4}$$

niisiis

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x\big(x_0, y(x_0)\big)}{F'_y\big(x_0, y(x_0)\big)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

TÕESTUS. Konkreetsuse mõttes eeldame, et $F'_y(x_0, y_0) > 0$ (juhtu, kus $F'_y(x_0, y_0) < 0$, käsitletakse analoogiliselt).

Kuna osatuletis F'_y eksisteerib ristkülikus $\mathcal{D}$ ning on pidev punktis (x_0, y_0), siis iga punkti (x, y) korral teatavast ristkülikust

$$\mathcal{D}_0 := [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \times [y_0 - \beta_0, y_0 + \beta_0] \subset D,$$

kehtib $F'_y(x, y) > 0$. Seega muutuja x iga fikseeritud väärtuse korral lõigust $[x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0]$ funktsioon $h(y) := F(x, y)$ on kasvav lõigus $[y_0 - \beta_0, y_0 + \beta_0]$. Niisiis, funktsioon F rahuldab ristkülikus $\mathcal{D}_0$ teoreemi 2.1 eeldusi (1)–(3) ning järelikult kehtivad selle teoreemi väited (a)–(c).

Tõestuse lõpetuseks näitame, et funktsioonil $y = y(x)$ eksisteerib lõplik tuletis vahemikus $(x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0) =: I$.

Fikseerime vabalt punkti $x \in I$ ning vaatleme funktsiooni y argumendi muutusid Δx, mille korral $x + \Delta x \in I$. Tähistame

$$y = y(x) \quad \text{ja} \quad \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x);$$

siis $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$ ning järelikult

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0 - 0 = 0.$$

Funktsioon F on diferentseeruv ristküliku $\mathcal{D}$ igas punktis (sest sellel funktsioonil eksisteerivad selles ristkülikus pidevad osatuletised), seega

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x, y)\,\Delta x + F'_y(x, y)\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \quad (2.5)$$

kus funktsioonid $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ ja $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ rahuldavad tingimusi

$$\alpha \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0 \quad \text{ja} \quad \beta \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0.$$

Funktsiooni $y = y(x)$ pidevuse tõttu $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$ ning järelikult ka $\alpha, \beta \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$. Võrdusest (2.5) järeldub nüüd, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Siit järeldub, et

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}.$$

Tuletisfunktsiooni y' pidevus järeldub funktsioonide F'_x, F'_y ja y pidevusest. Teoreem on tõestatud. □

Märkus 2.1. Kui lisaks teoreemi 2.2 eelduste täidetusele funktsioon F on kaks korda diferentseeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon $y = y(x)$ on kaks korda diferentseeruv punkti x_0

teatavas ümbruses, kusjuures selles ümbruses valemi (2.4) põhjal, märkides üleskirjutuste lihtsustamiseks

$$\begin{gathered} F := F\big(x, y(x)\big), \quad F'_x := F'_x\big(x, y(x)\big), \quad F'_y := F'_y\big(x, y(x)\big), \\ F''_{x^2} := F''_{x^2}\big(x, y(x)\big), \quad F''_{y^2} := F''_{y^2}\big(x, y(x)\big), \\ F''_{xy} = F''_{yx} := F''_{xy}\big(x, y(x)\big) = F''_{yx}\big(x, y(x)\big) \end{gathered}$$

ning $y := y(x)$ ja $y' := y'(x)$,

$$\begin{aligned} y''(x) &= \big(y'(x)\big)' = \left(-\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}\right)' \\ &= -\frac{\Big(F'_x\big(x, y(x)\big)\Big)' F'_y\big(x, y(x)\big) - F'_x\big(x, y(x)\big)\Big(F'_y\big(x, y(x)\big)\Big)'}{F'_y\big(x, y(x)\big)^2} \\ &= -\frac{\big(F''_{x^2} + F''_{xy}\, y'\big)F'_y - F'_x\big(F''_{yx} + F''_{y^2}\, y'\big)}{\big(F'_y\big)^2} \\ &= \frac{F'_x\, F''_{yx} - F'_y\, F''_{x^2} + \big(F'_x\, F''_{y^2} - F'_y\, F''_{xy}\big)\, y'}{\big(F'_y\big)^2} \\ &= \frac{F'_x\, F''_{yx} - F'_y\, F''_{x^2} + \big(F'_x\, F''_{y^2} - F'_y\, F''_{xy}\big)\left(-\dfrac{F'_x}{F'_y}\right)}{\big(F'_y\big)^2} \\ &= \frac{F'_x\, F'_y\, F''_{yx} - \big(F'_y\big)^2 F''_{x^2} - \big(F'_x\big)^2 F''_{y^2} + F'_x\, F'_y\, F''_{xy}}{\big(F'_y\big)^3} \\ &= -\frac{\big(F'_x\big)^2 F''_{y^2} - 2F'_x\, F'_y\, F''_{yx} + \big(F'_y\big)^2 F''_{x^2}}{\big(F'_y\big)^3}. \end{aligned}$$

Näeme, et kui funktsiooni F teist järku osatuletised on pidevad punkti P_0 mingis ümbruses, siis ka teine tuletis(funktsioon) y'' on pidev punkti x_0 teatavas ümbruses.

Funktsiooni $y = y(x)$ kõrgemat järku tuletised saab leida analoogiliselt (eeldusel, et funktsioon F on punkti P_0 mingis ümbruses vastav arv kordi diferentseeruv).

Näide 2.2. Leiame võrrandiga

$$x^3 - 6x^2y + y^3 = 31 \tag{2.6}$$

punkti $(2, -1)$ ümbruses määratud funktsiooni $y = y(x)$ esimest ja teist järku tuletised punktis $x = 2$.

Selleks märgime, et võrrand (2.6) on samaväärne võrrandiga $F(x, y) = 0$, kus

$$F(x, y) = x^3 - 6x^2y + y^3 - 31.$$

Leiame funktsiooni F osatuletised:

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 12xy, \quad F'_y(x, y) = -6x^2 + 3y^2.$$

Näeme, et funktsiooni F osatuletised on kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ pidevad, kusjuures

$$F'_y(2,-1) = -21 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et $F(2,-1) = 0$) teoreemi 2.2 põhjal punkti $(2,-1)$ teatavas ümbruses võrrand (2.6) määrab muutuja y muutuja x diferentseeruva funktsioonina $y = y(x)$; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes $y := y(x)$, valemi (2.4) põhjal

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{3x^2 - 12xy}{6x^2 - 3y^2} = \frac{x^2 - 4xy}{2x^2 - y^2}, \tag{2.7}$$

millest, arvestades, et $y(2) = -1$, saame

$$y'(2) = \frac{4+8}{8-1} = \frac{12}{7}.$$

Kuna punkti $x = 2$ teatavas ümbruses kehtiva samasuse (2.7) parem pool on diferentseeruv (sest funktsioon $y = y(x)$ on selles ümbruses diferentseeruv), siis selle samasuse mõlemat poolt diferentseerides saame

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^2 - 4xy}{2x^2 - y^2}\right)' = \frac{(x^2 - 4xy)'(2x^2 - y^2) - (x^2 - 4xy)(2x^2 - y^2)'}{(2x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{(2x - 4y - 4xy')(2x^2 - y^2) - (x^2 - 4xy)(4x - 2yy')}{(2x^2 - y^2)^2}, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $y(2) = -1$ ja $y'(2) = \frac{12}{7}$,

$$y''(2) = \frac{\left(4 + 4 - \frac{96}{7}\right)7 - 12\left(8 - \frac{24}{7}\right)}{49} = \frac{56 - 96 - 96 - \frac{288}{7}}{49} = \frac{1240}{343}.$$

2.4. Mitme muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja diferentseeruvus

Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid defineeritakse analoogiliselt ühe muutuja ilmutamata funktsioonide juhuga.

Sisaldagu $m+1$ muutuja funktsiooni $u = F(x_1, \dots, x_m, y)$ määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \cdots \times I_m \times I = \big\{(x_1, \dots, x_m, y)\colon\ x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m,\ y \in I\big\},$$

kus $I_1, \dots, I_m, I \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0. \tag{2.8}$$

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et võrrand (2.8) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutuja y muutujate $x_1, \dots, x_m$ (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x_1, \dots, x_m), \tag{2.9}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m$ korral võrrandil (2.8) eksisteerib parajasti üks lahend $y \in I$.

Kõnealune funktsioon (2.9)

$$I_1 \times \cdots \times I_m \ni (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto y(x_1, \ldots, x_m) \in I$$

on määratud võrdusega

$$F\big(x_1, \ldots, x_m, y(x_1, \ldots, x_m)\big) = 0:$$

see funktsioon seab punktile $(x_1, \ldots, x_m) \in I_1 \times \cdots \times I_m$ vastavusse võrrandi (2.8) ainsa lahendi $y \in I$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.9) on antud võrrandiga (2.8) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 2.3. *Eeldame, et*

(1) *($m+1$ muutuja) funktsioon $u = F(x_1, \ldots, x_m, y)$ on määratud mingis risttahukas $\mathcal{D}$ keskpunktiga $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_0)$:*

$$\mathcal{D} := (x_1^0 - \alpha_1, x_1^0 + \alpha_1) \times \cdots \times (x_m^0 - \alpha_m, x_m^0 + \alpha_m) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$$

(siin $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta > 0$);

(2) *$F(P_0) = 0$;*

(3) *osatuletised $F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_m}$ ja F'_y eksisteerivad ja on pidevad risttahukas $\mathcal{D}$;*

(4) *$F'_y(P_0) \neq 0$.*

Siis

(a) *punkti P_0 teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab võrrand*

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = 0$$

muutuja y muutujate $x_1, \ldots, x_m$ (ühese) funktsioonina $y = y(x_1, \ldots, x_m)$;

(b) *$y(x_1^0, \ldots, x_m^0) = y_0$;*

(c) *funktsioon $y = y(x_1, \ldots, x_m)$ on punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidev;*

(d) *funktsioonil $y = y(x_1, \ldots, x_m)$ eksisteerivad punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised $y'_{x_1}, \ldots, y'_{x_m}$, kusjuures selles ümbruses*

$$y'_{x_i}(x_1, \ldots, x_m) = -\frac{F'_x\big(x_1, \ldots, x_m, y(x_1, \ldots, x_m)\big)}{F'_y\big(x_1, \ldots, x_m, y(x_1, \ldots, x_m)\big)}; \tag{2.10}$$

niisiis

$$y'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

Teoreemi 2.3 tõestus on täiesti analoogiline teoreemi 2.2 tõestusega (seejuures väidete (a)–(c) tõestus kasutab teoreemi 2.1 analoogi mitme muutuja ilmutamata funktsioonide jaoks – mille tõestus on jällegi täiesti analoogiline teoreemi 2.1 tõestusega), seepärast jätame ta siin ära toomata.

Märkus 2.2. Kui lisaks teoreemi 2.3 eelduste täidetusele funktsioon F on kaks korda diferentseeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon $y = y(x_1, \ldots, x_m)$ on kaks korda diferentseeruv punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses; seejuures tema teist järku osatuletised saab leida võttes osatuletised (punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses kehtivate) samasuste (2.10) mõlemast poolest.

Näide 2.3. Leiame võrrandiga

$$x^3z^2 - yz^3 - x = 2 \tag{2.11}$$

punkti $(1, 2, -1)$ ümbruses määratud funktsiooni $z = z(x, y)$ esimest ja teist järku osatuletised punktis $(x, y) = (1, 2)$.

Selleks märgime, et võrrand (2.11) on samaväärne võrrandiga $F(x, y, z) = 0$, kus

$$F(x, y.z) = x^3z^2 - yz^3 - x - 2.$$

Leiame funktsiooni F osatuletised:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2z^2 - 1, \quad F'_y(x, y, z) = -z^3, \quad F'_z(x, y, z) = 2x^3z - 3yz^2.$$

Näeme, et funktsiooni F osatuletised on kogu ruumis $\mathbb{R}^2$ pidevad, kusjuures

$$F'_z(1, 2, -1) = -8 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et $F(1, 2, -1) = 0$) teoreemi 2.3 põhjal punkti $(1, 2, -1)$ teatavas ümbruses võrrand (2.11) määrab muutuja z muutujate x ja y diferentseeruva funktsioonina $z = z(x, y)$; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes $z := z(x, y)$, valemi (2.10) põhjal

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{z^3}{2x^3z - 3yz^2} = \frac{z^2}{2x^3 - 3yz}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

millest, arvestades, et $z(1, 2) = -1$, saame

$$z'_x(1, 2) = \frac{-3 + 1}{-2 - 6} = \frac{1}{4}, \quad z'_y(1, 2) = \frac{1}{2 + 6} = \frac{1}{8}.$$

Kuna punkti $(x, y) = (1, 2)$ teatavas ümbruses kehtivate samasuste (2.12) paremad pooled on diferentseeruvad (sest funktsioon $z = z(x, y)$ on selles ümbruses diferentseeruv), siis neid samasusi diferentseerides saame

$$
\begin{aligned}
z''_{x^2} &= \left(\frac{-3x^2z^2+1}{2x^3z-3yz^2}\right)'_x = \frac{(-3x^2z^2+1)'_x(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(2x^3z-3yz^2)'_x}{(2x^3z-3yz^2)^2} \\
&= \frac{(-6xz^2-6x^2zz'_x)(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(6x^2z+2x^3z'_x-6yzz'_x)}{(2x^3z-3yz^2)^2}, \\
z''_{xy} &= \left(\frac{-3x^2z^2+1}{2x^3z-3yz^2}\right)'_y = \frac{(-3x^2z^2+1)'_y(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(2x^3z-3yz^2)'_y}{(2x^3z-3yz^2)^2} \\
&= \frac{(-6x^2zz'_y)(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(2x^3z'_y-3z^2-6yzz'_y)}{(2x^3z-3yz^2)^2}, \\
z''_{yx} &= \left(\frac{z^2}{2x^3-3yz}\right)'_x = \frac{(z^2)'_x(2x^3-3yz)-z^2(2x^3-3yz)'_x}{(2x^3-3yz)^2} \\
&= \frac{2zz'_x(2x^3-3yz)-z^2(6x^2-3yz'_x)}{(2x^3-3yz)^2}, \\
z''_{y^2} &= \left(\frac{z^2}{2x^3-3yz}\right)'_y = \frac{(z^2)'_y(2x^3-3yz)-z^2(2x^3-3yz)'_y}{(2x^3-3yz)^2} \\
&= \frac{2zz'_y(2x^3-3yz)-z^2(-3z-3yz'_y)}{(2x^3-3yz)^2},
\end{aligned}
$$

millest, arvestades, et $z(1,2)=-1$, $z'_x(1,2)=\frac{1}{4}$, $z'_y(1,2)=\frac{1}{8}$,

$$
\begin{aligned}
z''_{x^2}(1,2) &= \frac{(-6+\frac{6}{4})(-8)-(-3+1)(-6+\frac{2}{4}+\frac{12}{4})}{(-2-6)^2} = \frac{31}{64}, \\
z''_{xy}(1,2) &= \frac{\frac{6}{8}(-8)-(-3+1)(\frac{2}{8}-3+\frac{12}{8})}{(-2-6)^2} = -\frac{17}{128}, \\
z''_{yx}(1,2) &= \frac{-\frac{2}{4}(2+6)-(6-\frac{6}{4})}{(2+6)^2} = -\frac{17}{128}, \\
z''_{y^2}(1,2) &= \frac{-\frac{2}{8}(2+6)-(3-\frac{6}{8})}{(2+6)^2} = -\frac{17}{256}.
\end{aligned}
$$

Eelnevas võinuksime ühe osatuletistest z''_{xy} ja z''_{xy} rehkendamata jätta – samasustest (2.12) näeme, et funktsiooni z osatuletised on punkti $(x,y)=(1,2)$ teatavas ümbruses diferentseeruvad, s.t. funktsioon z on kaks korda diferentseeruv selles ümbruses ning järelikult on funktsiooni z teist järku segaosatuletised ei sõltu selles ümbruses diferentseerimise järjekorrast.

§ 3. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

3.1. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Sisaldagu $m+n$ muutuja funktsioonide

$$u_j = F_j(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \quad j = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \cdots \times I_m \times J_1 \times \cdots \times J_n,$$

kus $I_1, \dots, I_m, J_1, \dots, J_n \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et süsteem (3.2) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutujad $y_1, \dots, y_n$ muutujate $x_1, \dots, x_m$ (üheste) funktsioonidena:

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m), \quad \dots\dots, \quad y_n = y_n(x_1, \dots, x_m), \tag{3.3}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m$ korral süsteemil (3.2) eksisteerib parajasti üks lahend $(y_1, \dots, y_m) \in J_1 \times \cdots \times J_n$.

Kõnealused funktsioonid (3.3)

$$I_1 \times \cdots \times I_m \ni (x_1, \dots, x_m) \longmapsto y_j(x_1, \dots, x_m) \in J_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

on määratud võrdustega

$$F\big(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

s.t. iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral funktsioon $y_j = y_j(x_1, \dots, x_m)$ seab punktile $(x_1, \dots, x_m) \in I_1 \times \cdots \times I_m$ vastavusse muutuja y_j väärtuse süsteemi (3.2) ainsast lahendist $(y_1, \dots, y_m) \in J_1 \times \cdots \times J_m$.

Seejuures öeldakse, et funktsioonid (3.3) on antud süsteemiga (3.2) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 3.1. *Eeldame, et*

(1) *($m+n$ muutuja) funktsioonid* (3.1) *on määratud mingis risttahukas $\mathcal{D}$ keskpunktiga $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$:*

$$\mathcal{D} := (x_1^0 - \alpha_1, x_1^0 + \alpha_1) \times \cdots \times (x_m^0 - \alpha_m, x_m^0 + \alpha_m) \\ \times (y_1^0 - \beta_1, y_1^0 + \beta_1) \times \cdots \times (y_n^0 - \beta_n, y_n^0 + \beta_n)$$

(siin $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots \beta_n > 0$);

(2) $F_j(P_0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$;

(3) *osatuletised* $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j, k = 1, \ldots, n$ *eksisteerivad ja on pidevad risttahukas* $\mathcal{D}$;

(4) $$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}(P_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Siis

(a) *punkti* P_0 *teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab süsteem* (3.2) *muutujad* $y_1, \ldots, y_n$ *muutujate* $x_1, \ldots, x_m$ *(üheste) funktsioonidena* (3.3);

(b) $y_j(x_1^0, \ldots, x_m^0) = y_j^0$, $j = 1, \ldots, n$;

(c) *funktsioonid* (3.3) *on punkti* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *teatavas ümbruses pidevad;*

(d) *funktsioonidel* (3.3) *eksisteerivad punkti* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide* $j = 1, \ldots, n$ *ja* $i = 1, \ldots, m$ *korral*

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}} \tag{3.4}$$

(siin võrdusmärgist paremal olevates determinantides arvutatakse osatuletised $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_l}$ *punktis* $(x_1, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))$*).*

TÕESTUS. Viime tõestuse läbi induktsioonina võrrandite arvu n järgi süsteemis (3.2). Juhul $n = 1$ on meil teoreem tõestatud – see on teoreem 2.3. Eeldame nüüd, et kehtib teoreemi analoog $n-1$ võrrandist koosnevate süstemide jaoks ning näitame, et sel juhul kehtib teoreem ka n võrrandist koosnevate süsteemide jaoks.

Eelduse (4) põhjal erineb vähemalt üks korrutistest

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)}(P_0)\ \frac{\partial F_n}{\partial y_j}(P_0), \quad j = 1, \ldots, n,$$

nullist. Konkreetsuse mõttes oletame, et

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}(P_0)\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \neq 0$$

Siis süsteemi (3.2) viimane võrrand rahuldab teoreemi 2.3 eeldusi ($m+n$ muutuja funktsiooni jaoks), seega teoreemi 2.3 põhjal punkti P_0 teatavas ristkülikukujulises ümbruses

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 := (x_1^0-\alpha_1^0, x_1^0+\alpha_1^0) \times \cdots \times (x_m^0-\alpha_m^0, x_m^0+\alpha_m^0) \\ \times (y_1^0-\beta_1^0, y_1^0+\beta_1^0) \times \cdots \times (y_n^0-\beta_n^0, y_n^0+\beta_n^0)\end{aligned}$$

määrab süsteemi (3.2) viimane võrrand muutuja y_n muutujate $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}$ (ühese) funktsioonina

$$y_n = \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}), \tag{3.5}$$

mis on pidev ja diferentseeruv punkti $A_0 := (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0) \in \mathbb{R}^{m+n-1}$ ümbruses

$$\begin{aligned}\Delta_0 := (x_1^0-\alpha_1^0, x_1^0+\alpha_1^0) \times \cdots \times (x_m^0-\alpha_m^0, x_m^0+\alpha_m^0) \\ \times (y_1^0-\beta_1^0, y_1^0+\beta_1^0) \times \cdots \times (y_{n-1}^0-\beta_{n-1}^0, y_{n-1}^0+\beta_{n-1}^0)\end{aligned}$$

kusjuures $\phi(A_0) = \phi(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0) = y_n^0$; seejuures punkti A_0 ümbruses kehtib samasus

$$F_n\big(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1})\big) = 0. \tag{3.6}$$

Defineerime iga $j \in \{1, \dots, n-1\}$ korral funktsiooni

$$\Phi_j(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) := F_j\big(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1})\big);$$

siis süsteem (3.2) on risttahukas $\mathcal{D}_0$ samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0, \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0,\end{cases} \tag{3.7}$$

millele on lisatud võrrand (3.5). Paneme tähele, et süsteem (3.7) rahuldab punkti A_0 risttahukakujulises ümbruses Δ_0 teoreemi analoogi eeldusi $n-1$ võrrandist koosnevate süsteemide jaoks. Tõepoolest,

(1) funktsioonid $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ on pidevad risttahukas Δ_0;

(2) iga $j \in \{1, \dots, n-1\}$ korral

$$\begin{aligned}\Phi_j(A_0) &= F_j\big(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, \phi(A_0))\big) \\ &= F_j(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, y_n^0) = F_j(P_0) = 0;\end{aligned}$$

(3) iga $j \in \{1, \dots, n-1\}$ korral osatuletised $\dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_m}, \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial y_{n-1}}$ eksisteerivad ja on pidevad risttahukas Δ_0; seejuures kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$, $k \in$

$\{1,\ldots,n-1\}$ ja $A=(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{n-1})\in\Delta_0$ korral

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i}(A)&=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(P)+\frac{\partial F_j}{\partial y_n}(P)\,\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(A),\\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial y_k}(A)&=\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(P)+\frac{\partial F_j}{\partial y_n}(P)\,\frac{\partial\phi}{\partial y_k}(A),\end{aligned}$$

kus $P:=\big(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{n-1},\phi(A)\big)\in\mathcal{D}_0$.

(4) Veendume, et

$$\frac{D(\Phi_1,\ldots,\Phi_{n-1})}{D(y_1,\ldots,y_{n-1})}(A_0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}}+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}\end{vmatrix}\neq 0$$

(siin ja edaspidi võetakse kõik osatuletised $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ ja $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}$ punktis P_0 ja kõik osatuletised $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$ punktis A_0). Selleks tähistame

$$J(P_0):=\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}(P_0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}.$$

Liites viimases determinandis iga $j\in\{1,\ldots,n-2\}$ korral j-ndale veerule $\dfrac{\partial\phi}{\partial y_j}$-kordse viimase veeru, saame

$$J(P_0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}}+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}.$$

Paneme tähele, et viimase determinandi viimase rea $n-1$ esimest elementi on nullid: tõepoolest, need elemendid on saadud (punkti A_0 ümbruses kehtiva) samasuse (3.6) diferentseerimisel vastavalt muutujate $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}$ järgi. Seega

$$J(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(A_0)\, \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0).$$

Kuna eelduse põhjal $J(P_0) \neq 0$, siis ka $\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(A_0) \neq 0$, nagu soovitud.

Tehtud eelduse põhjal teoreemi analoogi kehtivuse kohta $n-1$ võrrandist koosnevate süsteemide jaoks

(a) punkti A_0 teatavas ristkülikukujulises ümbruses määrab süsteem (3.7) muutujad $y_1, \dots, y_{n-1}$ muutujate $x_1, \dots, x_m$ (üheste) funktsioonidena

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m), \quad \dots\dots, \quad y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \dots, x_m); \tag{3.8}$$

(b) $y_j(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_j^0,\ \ j = 1, \dots, n-1;$

(c) funktsioonid (3.8) on punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad;

(d) funktsioonidel (3.8) eksisteerivad punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide $j = 1, \dots, n-1$ ja $i = 1, \dots, m$ korral

$$(y_j)'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) = -\frac{\dfrac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \dots, y_{n-1})}}{\dfrac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}}.$$

Defineerides täiendavalt funktsiooni

$$y_n(x_1, \dots, x_m) := \phi\big(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_{n-1}(x_1, \dots, x_m)\big),$$

näeme, et teoreemi väited (a)–(c) ilmselt kehtivad; lisaks eksisteerivad funktsioonidel $y_1, \dots, y_n$ punkti P_0 teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide $x_1, \dots, x_m$ järgi. Jääb veenduda vaid valemi(te) (3.4) kehtivuses. Selleks märgime, et punkti $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ teatavas ümbruses kehtib iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral samasus

$$F_j\big(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big) = 0,$$

mida mis tahes $i \in \{1, \dots, m\}$ korral muutuja x_i järgi diferentseerides saame

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0$$

(siin osatuletised $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ arvutatakse punktis $(x_1, \ldots, x_m)$ ning osatuletised $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ ja $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}$ punktis $(x_1, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)))$. Osatuletise $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$ saame seega leida süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}, \\ \dotfill \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_n}{\partial x_i}, \end{cases}$$

millest Crameri reegli järgi saamegi valemi (3.4). □

3.2. Kujutuse $\mathbb{R}^m \supset \Delta \to \mathbb{R}^m$ lokaalne pööratavus

Teoreem 3.2. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(u_1, ..., u_m), \\ \dotfill \\ x_m = x_m(Q) = x_m(u_1, ..., u_m) \end{cases} \tag{3.9}$$

pidevad osatuletised punkti $Q_0 := (u_1^0, ..., u_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Kui süsteemi (3.9) *jakobiaan*

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

erineb nullist punktis Q_0, siis leiduvad punkti Q_0 lahtine ümbrus $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^m$ ja punkti $P_0 := (x_1^0, \ldots, x_m^0) := \big(x_1(Q_0), \ldots, x_m(Q_0)\big) \in \mathbb{R}^m$ lahtine ümbrus $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$ nii, et süsteem (3.9) *määrab pööratava kujutuse*

$$\Delta_0 \ni (u_1, \ldots, u_m) = Q \longmapsto \big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}_0, \tag{3.11}$$

kusjuures selle kujutuse pöördkujutust $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$ määravatel funktsioonidel

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, ..., x_m), \\ \dotfill \\ u_m = u_m(x_1, ..., x_m) \end{cases} \tag{3.12}$$

eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}_0$ pidevad osatuletised.

Märkus 3.1. Funktsioonide (3.12) osatuletised võib leida järgmise mõttekäigu abil. Süsteemi (3.12) poolt määratud kujutus $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$ on süsteemi (3.9) poolt määratud kujutuse $\Delta_0 \to \mathcal{D}_0$ pöördkujutus, seega nende kujutuste $\Delta_0 \to \mathcal{D}_0$ ja $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$

korrutis on hulga Δ_0 ühikteisendus; järelikult teoreemi 1.1 põhjal nende süsteemide Jacobi maatriksite korrutis on hulga Δ_0 ühikteisenduse Jacobi maatriks, s.t. ühikmaatriks:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Siin süsteemi (3.9) Jacobi maatriks arvutatakse punktides $Q = (u_1, \dots, u_m) \in \Delta_0$ ja süsteemi (3.12) Jacobi maatriks vastavates punktides $P = \big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}_0$.

Niisiis süsteemi (3.12) Jacobi maatriks on süsteemi (3.9) Jacobi maatriksi pöördmaatriks:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}^{-1},$$

s.t. mis tahes $i, j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = (-1)^{j+i} \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}}.$$

Siin, arvutades osatuletisi $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ punktis $P = \big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}_0$, kus $Q \in \Delta_0$, tuleb osatuletised $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_l}$ arvutada punktis Q ehk, sümmeetriliselt, arvutades osatuletisi $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ punktis $P \in \mathcal{D}_0$, tuleb osatuletised $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_l}$ arvutada punktis vastavas punktis $Q = \big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big) \in \Delta_0$.

Märkus 3.2. On selge, et teoreemis 3.2 (ning seega ka tema erijuhus teoreemis 3.4) saame me ümbruse Δ_0 valida sidusa. Sel juhul on ka ümbrus $\mathcal{D}_0$ sidus.

Ülesanne 3.1. Olgu funktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \dots, x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases} \tag{3.13}$$

pidevad sidusas hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tõestada, et süsteemi (3.13) poolt määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ kujutishulk

$$\Big\{\big(u_1(P), \dots, u_n(P)\big) \colon\ P \in \mathcal{D}\Big\} \subset \mathbb{R}^n$$

on sidus.

Teoreemi 3.2 tõestus kasutab järgnevat lemmat (mille loomulik kodu (nagu ka teoreemil 3.2) on vektorfunktsioonide – kujutuste $\mathbb{R}^m \supset \Delta \to \mathbb{R}^n$ teoorias).

Lemma 3.3. *Olgu punkti $P_0 := (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses määratud funktsioonid*

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \dots, x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases} \tag{3.14}$$

pidevad punktis P_0. Siis punkti $Q_0 := (u_1^0, \dots, u_n^0) := \big(u_1(P_0), \dots, u_n(P_0)\big) \in \mathbb{R}^n$ iga ümbruse $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ korral leidub punkti P_0 ümbrus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, mille süsteemi (3.14) *poolt määratud kujutus kujutab ümbrusesse $\mathcal{V}$:*

$$\Big\{\big(u_1(P), \dots, u_n(P)\big) \colon\ P \in \mathcal{U}\Big\} \subset \mathcal{V}.$$

TÕESTUS. Olgu $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ punkti Q_0 ümbrus. Siis ümbrus $\mathcal{V}$ sisaldab mingi risttahukakujulise ümbruse

$$\mathcal{V}_0 := (u_1^0 - \alpha_1, u_1^0 + \alpha_1) \times \dots \times (u_m^0 - \alpha_m, u_m^0 + \alpha_m).$$

Funktsioonide (3.14) pidevuse tõttu punktis P_0 iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral leidub punkti P_0 ümbrus $\mathcal{U}_j$ nii, et

$$P \in \mathcal{U}_j \quad \Longrightarrow \quad |u_j(P) - u_j(P_0)| = |u_j(P) - u_0| < \alpha_j.$$

Niisiis, kui $P \in \bigcap \mathcal{U}_j =: \mathcal{U}$, siis

$$\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big) \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V},$$

nagu soovitud. □

Üleskirjutuste lihtsuse mõttes esitame teoreemi 3.2 tõestuse ainult erijuhu $m = 2$ jaoks (teoreemi 3.2 tõestus üldjuhul on täiesti analoogiline). Kuna me kasutame edaspidises (ka?) just seda konkreetset erijuhtu, siis parema viidatavuse huvides sõnastame ta.

Teoreem 3.4. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$\begin{cases} x = x(Q) = x(u,v), \\ y = y(Q) = y(u,v) \end{cases} \tag{3.15}$$

pidevad osatuletised punkti $Q_0 := (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ *mingis ümbruses.*

Kui süsteemi (3.15) *jakobiaan*

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

erineb nullist punktis Q_0, *siis leiduvad punkti* Q_0 *lahtine ümbrus* $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^2$ *ja punkti* $P_0 := (x_0, y_0) := \big(x(Q_0), y(Q_0)\big) \in \mathbb{R}^2$ *lahtine ümbrus* $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$ *nii, et süsteem* (3.15) *määrab pööratava kujutuse*

$$\Delta_0 \ni (u,v) = Q \longmapsto \big(x(Q), y(Q)\big) \in \mathcal{D}_0,$$

kusjuures selle kujutuse pöördkujutust $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$ *määravatel funktsioonidel*

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{3.17}$$

eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}_0$ *pidevad osatuletised; seejuures*

$$u'_x = \frac{y'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \qquad u'_y = \frac{-x'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \qquad v'_x = \frac{-y'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \qquad v'_y = \frac{x'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}$$

(siin osatuletised x'_u, x'_v, y'_u, y'_v *arvutatakse punktidele* $P \in \mathcal{D}_0$ *vastavates punktides* $Q = \big(u(P), v(P)\big) \in \Delta_0$*).*

Tõestus. Olgu jakobiaan (3.16) nullist erinev punktis Q_0. Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) := -x + x(u,v) = 0, \\ F_2(x,y,u,v) := -y + y(u,v) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Funktsioonidel (3.18) eksisteerivad punkti $R_0 := (x_0, y_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^4$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures selle süsteemi Jacobi maatriks on

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_y & (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y & (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & x'_u & x'_v \\ 0 & -1 & y'_u & y'_v \end{pmatrix};$$

(siin osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v arvutatakse punktides (u,v)). Kuna punktis R_0

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

(siin osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v arvutatakse punktis $(u_0, v_0) = Q_0$), kusjuures $F_1(R_0) = F_2(R_0) = 0$, siis teoreemi 3.1 põhjal leidub punkti R_0 risttahukakujuline ümbrus $\mathcal{D}_1 \times \Delta_1$, kus $\mathcal{D}_1$ ja Δ_1 on vastavalt punktide P_0 ja O_0 ristkülikukujulised ümbrused, milles süsteem (3.18) määrab muutujad u ja v muutujate x ja $y$üheste funktsioonidena (3.17), millel eksisteerivad ristkülikus $\mathcal{D}_1$ pidevad osatuletised

$$u'_x = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & x'_v \\ 0 & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{y'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}},$$

$$u'_y = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & x'_v \\ -1 & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{-x'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}},$$

$$v'_x = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} x'_u & -1 \\ y'_u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{-y'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}},$$

$$v'_y = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} x'_u & 0 \\ y'_u & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{x'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}$$

(siin, arvutades osatuletisi u'_x, v'_x, u'_y ja v'_y punktis (x, y), tuleb osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v arvutada punktis $(u, v) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$).

Märgime, et mis tahes $P = (x, y) \in \mathcal{D}_1$ korral

$$\begin{cases} x = x\big(u(x,y), v(x,y)\big), \\ y = y\big(u(x,y), v(x,y)\big), \end{cases}$$

seega kui $\Phi\colon\ \Delta_1 \to \mathbb{R}^2$ ja $\Psi\colon\ \mathcal{D}_1 \to \Delta_1$ on vastavalt süsteemidega (3.15) ja (3.17) määratud kujutused, s.t.

$$\Phi(Q) = \big(x(Q), y(Q)\big), \quad Q \in \Delta_1, \qquad \text{ja} \qquad \Psi(P) = \big(u(P), v(P)\big), \quad P \in \mathcal{D}_1,$$

siis

$$P = \Phi\Psi(P) \quad \text{iga } P \in \mathcal{D}_1 \text{ korral.} \tag{3.19}$$

Nüüd vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} G_1(x,y,u,v) := -u + u(x,y) = 0, \\ G_2(x,y,u,v) := -v + v(x,y) = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Funktsioonidel (3.20) eksisteerivad punkti R_0 teatavas ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures selle süsteemi Jacobi maatriks on

$$\begin{pmatrix} (G_1)'_x & (G_1)'_y & (G_1)'_u & (G_1)'_v \\ (G_2)'_x & (G_2)'_y & (G_2)'_u & (G_2)'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y & -1 & 0 \\ v'_x & v'_y & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(siin osatuletised u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y arvutatakse punktides (x, y)). Kuna järelduse 1.3 põhjal punktis R_0

$$\frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} \neq 0$$

(siin osatuletised u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y arvutatakse punktis $(x_0, y_0) = P_0$ ning osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v vastavas punktis $(u_0, v_0) = Q_0$), kusjuures $\Psi_1(R_0) = \Psi_2(R_0) = 0$, siis leidub punkti R_0 risttahukakujuline ümbrus $\mathcal{D}_2 \times \Delta_2$, kus $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ ja $\Delta_2 \subset \Delta_1$ on vastavalt punktide P_0 ja Q_0 ristkülikukujulised ümbrused, milles süsteem (3.20) määrab muutujad x ja y muutujate u ja v üheste funktsioonidena

$$\begin{cases} x = \widehat{x}(u, v), \\ y = \widehat{y}(u, v). \end{cases} \tag{3.21}$$

Seejuures mis tahes $Q = (u, v) \in \Delta_2$ korral

$$\begin{cases} u = u\big(\widehat{x}(u, v), \widehat{y}(u, v)\big), \\ v = v\big(\widehat{x}(u, v), \widehat{y}(u, v)\big), \end{cases}$$

seega kui $\widehat{\Phi}\colon \Delta_2 \to \mathcal{D}_2$ on süsteemi (3.21) poolt määratud kujutus, s.t. $\widehat{\Phi}(Q) = \big(\widehat{x}(Q), \widehat{y}(Q)\big)$, $Q \in \Delta_2$, siis

$$Q = \Psi\widehat{\Phi}(Q) \quad \text{iga } Q \in \Delta_2 \text{ korral.} \tag{3.22}$$

Paneme tähele, et mis tahes $Q \in \Delta_2$ korral $\Phi(Q) = \widehat{\Phi}(Q)$, sest ühelt poolt (3.22) põhjal

$$\Phi\Psi\widehat{\Phi}(Q) = \Phi\big(\Psi\widehat{\Phi}(Q)\big) = \Phi(Q),$$

teiselt poolt (arvestades, et $\widehat{\Phi}(Q) \in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$) tingimuse (3.19) põhjal

$$\Phi\Psi\widehat{\Phi}(Q) = \Phi\Psi\big(\widehat{\Phi}(Q)\big) = \widehat{\Phi}(Q).$$

Tähistame $\Delta_0 := \Delta_2$ ja $\mathcal{D}_0 := \Phi(\Delta_0) = \big\{\Phi(Q)\colon\ Q \in \Delta_0 = \Delta_2\big\} \subset \mathcal{D}_2$; siis kujutuse Φ ahend $\Phi|_{\Delta_0}\colon\ \Delta_0 \to \mathcal{D}_0$ on pealekujutus, kusjuures $\Phi|_{\Delta_0}$ on ka üksühene, sest kui $Q_1, Q_2 \in \Delta_0 = \Delta_2$ on sellised, et $\Phi(Q_1) = \Phi(Q_2)$, siis

$$Q_1 = \Psi\widehat{\Phi}(Q_1) = \Psi\big(\widehat{\Phi}(Q_1)\big) = \Psi\big(\Phi(Q_1)\big) = \Psi\big(\Phi(Q_2)\big) = \Psi\big(\widehat{\Phi}(Q_2)\big) = \Psi\widehat{\Phi}(Q_2) = Q_2.$$

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\mathcal{D}_0$ on lahtine hulk. Olgu $P_1 \in \mathcal{D}_0$, s.t. $P_1 = \Phi(Q_1)$ mingi $Q_1 \in \Delta_0$ korral. Hulga Δ_0 lahtisuse tõttu leidub punkti Q_1 ümbrus $\mathcal{V} \subset \Delta_0$. Lemma 3.3 põhjal leidub punkti P_1 ümbrus $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ nii, et

$$\Psi(\mathcal{U}) = \big\{\Psi(P)\colon\ P \in \mathcal{U}\big\} \subset \mathcal{V}.$$

Nüüd mis tahes $P \in \mathcal{U}$ korral (arvestades, et $\Psi(P) \in \mathcal{V}$)

$$P = \Phi\Psi(P) = \Phi\big(\Psi(P)\big) \in \Phi(\mathcal{V}) \subset \Phi(\Delta_0) = \mathcal{D}_0,$$

seega $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}_0$, järelikult P_1 on hulga $\mathcal{D}_0$ sisepunkt; niisiis hulk $\mathcal{D}$ on lahtine. □

Märkus 3.3. Eelnevas tõestuses võinuksime osatuletised u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y välja rehkendada ka märkusele 3.1 tuginedes, s.t. arvestades, et süsteemi (3.17) Jacobi maatriks on süsteemi (3.15) Jacobi maatriksi pöördmaatriks. Siin, arvutades osatuletisi u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y punktis $P = (x, y) \in \mathcal{D}_0$, tuleb osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v süsteemi (3.15) Jacobi maatriksis arvutada vastavas punktis $Q = \big(u(P), v(P)\big) \in \Delta_0$ ehk, sümmeetriliselt, arvutades osatuletisi u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y punktis $P = \big(x(Q), y(Q)\big) \in \mathcal{D}_0$, kus $Q \in \Delta_0$, tuleb osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v süsteemi (3.15) Jacobi maatriksis arvutada vastavas punktis Q.

Järeldus 3.5. *Eksisteerigu funktsioonidel* (3.9) *pidevad osatuletised lahtises hulgas* $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, *kusjuures hulga* Δ *igas punktis jakobiaan* (3.10) *erineb nullist. Siis süsteemiga* (3.9) *määratud kujutuse* $\Delta \to \mathbb{R}^m$ *kujutishulk*

$$\mathcal{D} := \Big\{\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) : \ Q \in \Delta\Big\} \subset \mathbb{R}^m$$

on lahtine.

Tõestus. Järelduse tõestuseks tuleb näidata, et hulga $\mathcal{D}$ iga punkt on tema sisepunkt. Olgu $P_0 \in \mathcal{D}$, s.t. mingi $Q_0 \in \Delta$ korral $P_0 = \big(x_1(Q_0), \ldots, x_m(Q_0)\big)$. Teoreemi 3.2 põhjal leiduvad punkti Q_0 lahtine ümbrus $\Delta_0 \subset \Delta$ ja punkti P_0 lahtine ümbrus $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$ nii, et süsteem (3.9) määrab pööratava kujutuse (3.11), aga siit järeldub, et punkti P_0 lahtine ümbrus $\mathcal{D}_0$ sisaldub kujutishulgas $\mathcal{D}$; niiisis P_0 on hulga $\mathcal{D}$ sisepunkt, nagu soovitud. □

IV peatükk.
Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid

§ 1. Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

1.1. Lokaalse ekstreemumi mõiste. Tarvilik tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0

- *lokaalne maksimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) \leqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral;}$$

- *lokaalne miinimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Seejuures punkti P_0 nimetatakse vastavalt funktsiooni f *lokaalseks maksimumpunktiks* ja *lokaalseks miinimumpunktiks.*

Teisisõnu, funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne maksimum (või, vastavalt, lokaalne miinimum), kui sellel punktil leidub ümbrus, milles funktsiooni väärtus $f(P_0)$ on selle funktsiooni suurim väärtus (või, vastavalt, vähim väärtus) selles ümbruses.

Lokaalset maksimumi ja lokaalset miinimumi nimetatakse *lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0

- *range lokaalne maksimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) < f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\} \text{ korral;}$$

- *range lokaalne miinimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) > f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\} \text{ korral.}$$

Ranget lokaalset maksimumi ja ranget lokaalset miinimumi nimetatakse *range-teks lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Teoreem 1.1. *Eksisteerigu funktsioonil* $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *punktis* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *lõplikud osatuletised kõikide argumentide järgi. Kui funktsioonil* f *on punktis* P_0 *lokaalne ekstreemum, siis*

$$f'_{x_i}(P_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Tõestus. Konkreetsuse mõttes eeldame, et funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne miinimum (juhtu, kus funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne maksimum, käsitletakse analoogiliselt), s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et

$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in U_\varepsilon(P_0) \text{ korral.}$$

Olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Vaatleme funktsiooni

$$g(t) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0).$$

Paneme tähele, et

(1) funktsioon g on määratud vahemikus $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$;

(2) funktsioonil g on punktis $t = x_i^0$ lokaalne miinimum;

(3) funktsioon g on diferentseeruv punktis $t = x_i^0$, kusjuures $g'(x_i^0) = f'_{x_i}(P_0)$.

Tõepoolest, tähistame iga $t \in \mathbb{R}$ korral $Q_t := (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$; siis iga $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ korral $d(Q_t, P_0) = |t - x_i^0| < \varepsilon$, s.t. $Q_t \in U_\varepsilon(P_0)$, seega Q_t kuulub funktsiooni f määramispiirkonda ehk, teisisõnu, funktsioon g on määratud punktis t. Seejuures iga $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ korral

$$g(t) = f(Q_t) \geqslant f(P_0) = g(x_i^0);$$

niisiis, funktsioonil g on punktis x_i^0 lokaalne miinimum.

Väidetest (3) ja (2) järeldub Fermat' teoreemi põhjal, et $f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0) = 0$, nagu soovitud. □

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et punkt P_0 on funktsiooni f

- *statsionaarne punkt,* kui sellel funktsioonil eksisteerivad selles punktis osatuletised kõikide muutujate järgi, kusjuures kõik need osatuletised on võrdsed nulliga;

- *kriitiline punkt,* kui see punkt on kas funktsiooni f statsionaarne punkt või selle funktsiooni mingi osatuletis selles punktis kas ei eksisteeri või on lõpmatu.

Teoreemist 1.1 järeldub niisiis, et

- *mis tahes funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni kriitilises punktis;*
- *diferentseeruval funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni statsionaarses punktis.*

Märkus 1.1. Punkti statsionaarsus ei ole piisav tingimus funktsiooni lokaalse ekstreemumi olemasoluks selles punktis (isegi juhul, kui funktsioon on diferentseeruv selles statsionaarses punktis).

Näide 1.1. Veendume, et funktsioonil $z = f(x, y) := xy$ ei ole lokaalset ekstreemumit tema statsionaarses punktis $(0, 0)$.

Kõigepealt märgime, et punkt $(0, 0)$ on tõepoolest funktsiooni f statsionaarne punkt, sest selle funktsiooni osatuletised on

$$f'_x(x, y) = (xy)'_x = y \quad \text{ja} \quad f'_y(x, y) = (xy)'_y = x$$

ning seega $f'_x(0, 0) = 0$ ja $f'_y(0, 0) = 0$. Lisaks, funktsioon f on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, sest tema osatuletised on pidevad kogu tasandil.

Veendumaks, et funktsioonil f ei ole punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit, märgime, et punkti $(0, 0)$ mis tahes ümbrus sisaldab punkte (x, y), kus x ja y on nullist erinevad ja samamärgilised ning seega $f(x, y) = xy > 0 = f(0, 0)$, samuti punkte (x, y), kus x ja y on nullist erinevad ja erimärgilised ning seega $f(x, y) = xy < 0 = f(0, 0)$.

1.2. Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Definitsioon 1.4. Olgu $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Summat

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \tag{3.1}$$

nimetatakse *ruutvormiks* muutujatest $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$.

Maatriksit

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

nimetatakse *ruutvormi* (3.1) *maatriksiks.*

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et ruutvorm (3.1) on

- *positiivselt määratud,* kui

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) > 0 \quad \text{kõikide } x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R},\ x_1^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0, \text{ korral;}$$

- *negatiivselt määratud,* kui

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) < 0 \quad \text{kõikide } x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R},\ x_1^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0, \text{ korral.}$$

Positiivselt määratud ja negatiivselt määratud ruutvorme nimetatakse *määratud ruutvormideks.*

Ruutvormi (3.1) nimetatakse *määramata ruutvormiks,* kui tal esineb nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

Definitsioon 1.6. Determinante

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

nimetatakse ruutvormi (3.1) *peamiinoriteks.*

Algebra kursuses tõestatakse

Teoreem 1.2 (Sylvesteri tunnus)**.** (a) *Ruutvorm* (3.1) *on positiivselt määratud parajasti siis, kui kõik tema peamiinorid on positiivsed, s.t.*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \ldots\ldots, \quad A_m > 0.$$

(b) *Ruutvorm* (3.1) *on negatiivselt määratud parajasti siis, kui tema peamiinorite märgid vahelduvad, kusjuures* $A_1 < 0$*, s.t.*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \ldots .$$

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on kaks korda diferentseeruv punktis P_0, siis tema teist täisdiferentsiaali

$$d^2u(P_0) = \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(P_0)\, dx_i dx_j$$

võib tõlgendada kui ruutvormi muutujatest $dx_1, \ldots, dx_m$. Seda ruutvormi nimetatakse funktsiooni f *hessiaaniks*[1] punktis P_0.

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks statsionaarses punktis.

Teoreem 1.3. *Olgu funktsioon* $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$*.*

(a) *Kui hessiaan* $d^2u(P_0)$ *on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil* f *on punktis* P_0 *range lokaalne miinimum.*

(b) *Kui hessiaan* $d^2u(P_0)$ *on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil* f *on punktis* P_0 *range lokaalne maksimum.*

[1] Ludwig Otto Hesse (1811–1874) — saksa matemaatik.

(c) *Kui hessiaan $d^2u(P_0)$ on määramata ruutvorm, siis funktsioonil f ei ole lokaalset ekstreemumit punktis P_0.*

TÕESTUS. Olgu $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \neq P_0$. Taylori valemi põhjal

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) = du(P_0) + \frac{1}{2}\, d^2u(P_0) + \alpha = \frac{1}{2}\, d^2u(P_0) + \alpha,$$

(kuna P_0 on funktsiooni f statsionaarne punkt, siis $du(P_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, dx_i = 0$), kus diferentsiaalide $du(P_0)$ ja $d^2u(P_0)$ avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \dots, m,$$

ning funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho^2)$ protsessis $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} \to 0$. Tähistame

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P_0), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

ja $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\rho}$ (märgime, et $h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1$); siis

$$\Delta u = \frac{1}{2}\, d^2u(P_0) + \alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P_0)\, \Delta x_i\, \Delta x_j + \alpha = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i h_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right).$$

Eeldame nüüd, et teine täisdiferentsiaal $d^2u(P_0)$ on positiivselt määratud ruutvorm (diferentsiaalide $dx_1, \dots, dx_m$ suhtes). Siis

$$\Phi(h_1, \dots, h_m) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i h_j > 0, \qquad \text{kui} \quad h_1^2 + \dots + h_m^2 \neq 0.$$

Funktsioon $\Phi = \Phi(h_1, \dots, h_m)$ on pidev tõkestatud kinnises hulgas

$$S := \Big\{ (h_1, \dots, h_m) \colon\ h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1 \Big\},$$

seega Weierstrassi esimese teoreemi põhjal leidub punkt $(h_1^0, \dots, h_m^0) \in S$ milles see funktsioon Φ saavutab oma miinimumi hulgas S:

$$\mu := \min_{(h_1, \dots, h_m) \in S} \Phi(h_1, \dots, h_m) = \Phi(h_1^0, \dots, h_m^0) > 0.$$

Niisiis, mis tahes $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ korral

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i h_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) \geqslant \frac{\rho^2}{2} \left(\mu - \frac{2|\alpha|}{\rho^2} \right).$$

Siit näeme, et valides $\varepsilon > 0$ nii, et

$$\rho < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\alpha|}{\rho^2} < \frac{\mu}{4},$$

saame mis tahes $P \in U_\varepsilon(P_0) \setminus \{P_0\}$ korral (sel juhul $\rho = d(P, P_0) < \varepsilon$)

$$f(P) - f(P_0) \geqslant \frac{\rho^2}{2}\left(\mu - \frac{2|\alpha|}{\rho^2}\right) > \frac{\rho^2}{2}\left(\mu - \frac{\mu}{2}\right) = \frac{\mu\rho^2}{4} > 0,$$

järelikult funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.

Juhtu, kus ruutvorm $d^2u(P_0)$ (muutujate $dx_1, \ldots, dx_m$ suhtes) on negatiivselt määratud, käsitletakse analoogiliselt.

Eeldame nüüd, et teine täisdiferentsiaal $d^2u(P_0)$ on määramata ruutvorm. Näitame, et funktsioonil f ei ole punktis P_0 lokaalset ekstreemumit. Olgu argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muudud $\Delta x_1', \ldots, \Delta x_m'$ ja $\Delta x_1'', \ldots, \Delta x_m''$ sellised, et

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \Delta x_i' \Delta x_j' > 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \Delta x_i'' \Delta x_j'' < 0.$$

Tähistame $\rho' = \sqrt{\Delta x_1'^{\,2} + \cdots + \Delta x_m'^{\,2}}$, $\rho'' = \sqrt{\Delta x_1''^{2} + \cdots + \Delta x_m''^{\,2}}$ ning

$$h_i' = \frac{\Delta x_i'}{\rho'} \quad \text{ja} \quad h_i'' = \frac{\Delta x_i''}{\rho''}, \qquad i = 1, \ldots, m;$$

siis

$$q' := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i' h_j' > 0 \qquad \text{ja} \qquad q'' := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i'' h_j'' < 0.$$

Tähistame iga $\rho > 0$ korral

$$P_\rho' = (x_1^0 + \rho h_1', \ldots, x_m^0 + \rho h_m') \quad \text{ja} \quad P_\rho'' = (x_1^0 + \rho h_1'', \ldots, x_m^0 + \rho h_m'');$$

siis

$$f(P_\rho') - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i'\, h_j' + \frac{2\alpha}{\rho^2}\right) = \frac{\rho^2}{2}\left(q' + \frac{2\alpha}{\rho^2}\right) \geqslant \frac{\rho^2}{2}\left(q' - \frac{2|\alpha|}{\rho^2}\right),$$

$$f(P_\rho'') - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i''\, h_j'' + \frac{2\alpha}{\rho^2}\right) = \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{2\alpha}{\rho^2} - |q''|\right) \leqslant \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{2|\alpha|}{\rho^2} - |q''|\right).$$

Kui nüüd $\varepsilon < \min\{\rho', \rho''\}$ on selline, et

$$\rho < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\alpha|}{\rho^2} < \frac{1}{4}\, \min\bigl\{|q'|, |q''|\bigr\},$$

siis mis tahes $\rho < \varepsilon$ korral

$$f(P'_\rho) - f(P_0) > \frac{\rho^2}{2}\left(q' - \frac{q'}{2}\right) = \frac{\rho^2 q'}{4} > 0$$

ja

$$f(P'_\rho) - f(P_0) < \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{|q''|}{2} - |q''|\right) = -\frac{\rho^2 |q''|}{4} < 0,$$

järelikult funktsioonil f ei ole punktis P_0 lokaalset ekstreemumit. □

1.3. Kahe muutuja funktsiooni juht

Teoreem 1.4. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis $P_0 = (x_0, y_0)$. Tähistame*

$$a_{11} = f''_{x^2}(P_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(P_0), \quad a_{12} = a_{21} = f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$

ning

$$A_1 = a_{11} \quad \textit{ja} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2.$$

(a) *Kui*

$$A_1 > 0 \quad \textit{ja} \quad A_2 > 0,$$

siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.

(b) *Kui*

$$A_1 < 0 \quad \textit{ja} \quad A_2 > 0,$$

siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.

(c) *Kui*

$$A_2 < 0,$$

siis funktsioonil f ei ole punktis P_0 lokaalset ekstreemumit.

Tõestus. Väited (a) ja (b) järelduvad vahetult teoreemist 1.3. Tõestame väite (c). Olgu $A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Teoreemi 1.3 põhjal piisab näidata, et teine täisdiferentsiaal

$$d^2 f(P_0) = a_{11}\, \Delta x^2 + 2a_{12}\, \Delta x\, \Delta y + a_{22}\, \Delta y^2$$

on määramata ruutvorm oma argumentide x ja y muutude Δx ja Δy suhtes. Fikseeritud Δx ja Δy korral tähistame

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad h_1 = \frac{\Delta x}{\rho}, \quad h_2 = \frac{\Delta y}{\rho}.$$

Vaatleme alguses juhtu, kus $a_{11} \neq 0$. Siis

$$\begin{aligned} d^2 f(P_0) &= \rho^2 \Big(a_{11}\, h_1^2 + 2a_{12}\, h_1\, h_2 + a_{22} h_2^2 \Big) \\ &= \frac{\rho^2}{a_{11}} \Big(a_{11}^2\, h_1^2 + 2a_{11} a_{12}\, h_1\, h_2 + a_{12}^2 h_2^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)\, h_2^2 \Big) \\ &= \frac{\rho^2}{a_{11}} \Big((a_{11}\, h_1 + a_{12}\, h_2)^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)\, h_2^2 \Big). \end{aligned}$$

Niisiis, kui $h_1 = 1$ ja $h_2 = 0$, siis $\operatorname{sgn} d^2 f(P_0) = \operatorname{sgn} a_{11}$; kui aga

$$h_1 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \quad \text{ja} \quad h_2 = \frac{-a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$$

siis $\operatorname{sgn} d^2 f(P_0) = -\operatorname{sgn} a_{11}$. Niisiis, $d^2 f(P_0)$ on määramata ruutvorm.

Nüüd eeldame, et $a_{11} = 0$. Paneme tähele, et $a_{12} \neq 0$ (sest vastasel juhul oleks $A_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$). Kui $h_2 \neq 0$, siis

$$d^2 f(P_0) = \rho^2 \Big(2a_{12}\, h_1\, h_2 + a_{22} h_2^2 \Big) = \rho^2\, h_2^2 \Big(2a_{12}\, \frac{h_1}{h_2} + a_{22} \Big).$$

Piisavalt väikeste h_2 väärtuste korral on diferentsiaalil $d^2 f(P_0)$ sama märk nagu liidetaval $2a_{12}\, \dfrac{h_1}{h_2}$, järelikult see diferentsiaal $d^2 f(P_0)$ omandab nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. □

Näide 1.2. Leiame funktsiooni $z = x^4 + x^3 - 3x - 2x^2 y + y^2$ lokaalsed ekstreemumid.

Teoreemi 1.1 põhjal saab funktsioonil lokaalne ekstreemum esineda ainult tema kriitilistes punktides. Leiame funktsiooni z osatuletised:

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2 y + y^2)'_x = 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy, \\ z'_y &= (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2 y + y^2)'_y = -2x^2 + 2y; \end{aligned}$$

seega funktsiooni z statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy = 0, \\ -2x^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi teisest võrrandist $y = x^2$ esimesse võrrandisse, saame, et $3x^2 = 3$ ehk $x^2 = 1$, millest $x = -1$ või $x = 1$. Selle süsteemi lahendid ja seega funktsiooni z statsionaarsed punktid (ning funktsiooni z diferentseeruvuse tõttu ka ainsad selle funktsiooni kriitilised punktid) on $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$.

Leiame funktsiooni z teist järku osatuletised:

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_x = 12x^2 + 6x - 4y, \\ z''_{xy} = z''_{yx} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_y = -4x, \\ z''_{y^2} &= (-2x^2 + 2y)'_y = 2 \end{aligned}$$

ja tähistame

$$A_1 := z''_{x^2} = 12x^2 + 6x - 4y, \qquad A_2 := \begin{vmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 6x - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{vmatrix}.$$

Statsionaarses punktis $(-1,1)$

$$A_1 = 2 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

seega (teoreemi 1.4, (c), põhjal) funktsioonil z ei ole punktis $(-1,1)$ lokaalset ekstreemumit.

Statsionaarses punktis $(1,1)$

$$A_1 = 14 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

seega (teoreemi 1.4, (a), põhjal) funktsioonil z on punktis $(1,1)$ range lokaalne miinimum $z(1,1) = -2$.

§ 2. Mitme muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 2.1. Funktsiooni f

- suurimat väärtust hulgas $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f *globaalseks maksimumiks* (hulgas $\mathcal{D}$);
- vähimat väärtust hulgas $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f *globaalseks miinimumiks* (hulgas $\mathcal{D}$).

Globaalset maksimumi ja globaalset miinimumi nimetatakse ühise nimetusega *globaalsed ekstreemumid.*

Pole raske tuua näiteid (isegi pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta), kus funktsioonil puuduvad tema määramispiirkonna mingis alamhulgas globaalsed ekstreemumid. Teiselt poolt, Weierstrassi teisest teoreemist I.4.8 järeldub, et *tõkestatud kinnises hulgas pideval funktsioonil eksisteerivad selles hulgas globaalsed ekstreemumid.*

Kui funktsioonil $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ eksisteerib tema määramispiirkonna alamhulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ mingi globaalne ekstreemum, siis see globaalne ekstreemum võib olla hulga $\mathcal{D}$ sisepunktis või hulga $\mathcal{D}$ rajapunktis; seejuures, kui see globaalne ekstreemum saavutatakse hulga $\mathcal{D}$ sisepunktis, siis selles punktis on funktsioonil f ka vastav lokaalne ekstreemum, järelikult see punkt on funktsiooni f kriitiline punkt. Seega, kui me teame, et funktsioonil f eksisteerivad tema määramispiirkonna alamhulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid, siis nende globaalsete ekstreemumite leidmiseks võime kasutada järgmist eeskirja:

(1) leiame funktsiooni f väärtused tema kriitilistes punktides hulga $\mathcal{D}$ sisemuses;

(2) leiame funktsiooni f väärtused tema võimalikes ekstreemumpunktides hulga $\mathcal{D}$ rajal;

(3) neist leitud väärtustest suurim on funktsiooni f globaalne maksimum $\max\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ hulgas $\mathcal{D}$ ning vähim on funktsiooni f globaalne miinimum $\min\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ hulgas $\mathcal{D}$.

Näide 2.1. Leiame funktsiooni $z = x^3 + y^3 - 3xy$ suurima ja vähima väärtuse ristkülikus

$$\mathcal{D} := [0,2] \times [-1,2] := \big\{(x,y)\colon\ x \in [0,2],\ y \in [-1,2]\big\}.$$

Kõigepealt märgime, et kuna funktsioon z on pidev, siis Weierstrassi teise teoreemi I.4.8 põhjal tal eksisteerivad tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid.

Leiame funktsiooni z kriitilised punktid hulga $\mathcal{D}$ sisemuses $\mathcal{D}^{\circ}$. Kuna funktsioon z on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, siis tema ainsad kriitilised punktid on statsionaarsed punktid. Leiame funktsiooni z osatuletised:

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x;$$

seega funktsiooni z statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \qquad \text{ehk} \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi esimesest võrrandist $y = x^2$ teise võrrandisse, saame, et $x^4 - x = 0$ ehk $x(x^3 - 1) = 0$, millest $x = 0$ või $x = 1$. Selle süsteemi lahendid on seega $(0,0)$ ja $(1,1)$; kuna $(0,0) \notin \mathcal{D}^\circ$, siis funktsiooni z ainus statsionaarne (ning seega ka ainus kriitiline) punkt hulga $\mathcal{D}$ sisemuses $\mathcal{D}^\circ$ on $(1,1)$; seejuures

$$z(1,1) = -1.$$

Hulga $\mathcal{D}$ rajajoon $\partial\mathcal{D}$ esitub ühendina

$$\partial\mathcal{D} = \big\{(0,-1),(2,-1),(2,2),(0,2)\big\} \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

kus

$$L_1 := \big\{(x,y)\colon\ x \in (0,2),\ y = -1\big\}, \qquad L_2 := \big\{(x,y)\colon\ x = 2,\ y \in (-1,2)\big\},$$
$$L_3 := \big\{(x,y)\colon\ x \in (0,2),\ y = 2\big\}, \qquad L_4 := \big\{(x,y)\colon\ x = 0,\ y \in (-1,2)\big\}.$$

Rajajoone osal L_1 omandab funktsioon z kuju

$$z = x^3 - 1 + 3x =: f_1(x), \quad x \in (0,2).$$

Kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_1 punktis (x,y), siis funktsioonil f_1 oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_1 diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni f_1 statsionaarne punkt, s.t. $f_1'(x) = 0$. Leiame funktsiooni f_1 tuletise:

$$f_1'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Näeme, et tuletisel f_1' nullkohti pole, seega rajajoone osal L_1 funktsiooni z globaalseid ekstreemumeid ei ole.

Rajajoone osal L_3 omandab funktsioon z kuju

$$z = x^3 + 8 - 6x =: f_3(x), \quad x \in (0,2).$$

Leiame funktsiooni f_3 tuletise:

$$f_3'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise f_3' nullkohad on $x = -\sqrt{2}$ ja $x = \sqrt{2}$, kusjuures $-\sqrt{2} \notin (0,2)$; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal L_3 on $(\sqrt{2},2)$; seejuures

$$z(\sqrt{2},2) = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_3 punktis (x,y), siis funktsioonil f_3 oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_3 diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni f_3 statsionaarne punkt, s.t. $f_3'(y) = 0$.)

Rajajoone osal L_2 omandab funktsioon z kuju

$$z = 8 + y^3 - 6y =: f_2(y), \quad y \in (-1,2).$$

Leiame funktsiooni f_2 tuletise:

$$f_2'(y) = 3y^2 - 6 = 3(y^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise f_2' nullkohad on $y = -\sqrt{2}$ ja $y = \sqrt{2}$, kusjuures $-\sqrt{2} \notin (-1,2)$; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal L_2 on $(2,\sqrt{2})$; seejuures

$$z(2,\sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_2 punktis (x, y), siis funktsioonil f_2 oleks punktis y lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_2 diferentseeruvuse tõttu peaks y olema funktsiooni f_2 statsionaarne punkt, s.t. $f_2'(y) = 0$.)

Rajajoone osal L_4 omandab funktsioon z kuju

$$z = y^3 =: f_4(y), \quad y \in (-1, 2).$$

Funktsioon f_4 on kasvav vahemikus $(-1, 2)$, seega rajajoone osal L_4 võimalikke ekstreemumpunkte ei ole. (Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_4 punktis (x, y), siis funktsioonil f_4 oleks punktis $y \in (-1, 2)$ lokaalne ekstreemum; kuna aga funktsioon f_4 on kasvav vahemikus $(-1, 2)$, siis tal selleks vahemikus lokaalseid ekstreemumeid ei ole, seega rajajoone osal L_4 funktsiooni z globaalseid ekstreemumeid ei ole..)

Leiame funktsiooni z väärtused rajajoone $\partial\mathcal{D}$ ülejäänud võimalikes ekstreemumpunktides:

$$z(0, -1) = -1, \quad z(2, -1) = 8 - 1 + 6 = 13, \quad z(2, 2) = 8 + 8 - 12 = 4, \quad z(0, 2) = 8.$$

Valides eelnevas leitud võimalikest ekstreemumitest suurima ja vähima, saame

$$\max_{P \in \mathcal{D}} z(P) = z(2, -1) = 13 \quad \text{ja} \quad \min_{P \in \mathcal{D}} z(P) = z(1, 1) = z(0, -1) = -1.$$

Mõnikord võib globaalsete ekstreemumite leidmisel olla abi alljärgnevast teoreemist 2.1, mille tarvis toome eelnevalt sisse *kumera hulga* mõiste.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *kumer,* kui tema mis tahes kaht punkti ühendav sirglõik sisaldub selles hulgas, s.t. mis tahes $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}$ korral neid punkte P_0 ja P ühendav sirglõik

$$P_0P := \big\{(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m) \colon\ t \in [0, 1]\big\} \subset \mathcal{D},$$

kus $\Delta x_i := x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, m$.

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv lahtise kumera hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis ning olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ funktsiooni f statsionaarne punkt, s.t.*

$$f'_{x_1}(P_0) = \cdots = f'_{x_m}(P_0) = 0. \tag{2.1}$$

(a) *Kui iga $Q \in \mathcal{D}$ korral hessiaan $d^2 f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum (s.t. $f(P) > f(P_0)$ iga $P \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ korral).*

(b) *Kui iga $Q \in \mathcal{D}$ korral hessiaan $d^2 f(Q)$ on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne maksimum (s.t. $f(P) < f(P_0)$ iga $P \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ korral).*

Märkus 2.1. Teoreem II.4.2 (mitme muutuja funktsiooni Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul) jääb kehtima, kui temas vaadelda punkti P_0 ε-ümbruste asemel selle punkti mis tahes kumeraid lahtisi ümbrusi. Teoreem 2.1 on vahetu järeldus teoreemist II.4.2 (täpsemalt, selle teoreemi mainitud viisil tugevdatud variandist). Tõepoolest, kehtigu teoreemi 2.1 eeldused ning olgu iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \dots, dx_m$ suhtes). Teoreemi II.4.2 (kumerate ümbruste versiooni) põhjal mis tahes punkti $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ korral

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{d^2f(Q)}{2},$$

kus diferentsiaalide $df(P_0)$ ja $d^2f(Q)$ avaldistes $dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0$, $i = 1, \dots, m$, ning Q on mingi punkt punkte P_0 ja P ühendavalt sirglõigult. Kuna P_0 on funktsiooni f statsionaarne punkt, siis

$$df(P_0) = f'_{x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0)\,\Delta x_m = 0\,\Delta x_1 + \dots + 0\,\Delta x_m = 0;$$

kuna tehtud eelduse põhjal on $d^2f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm, siis $d^2f(Q) > 0$; seega $f(P) - f(P_0) = d^2f(Q) > 0$, järelikult $f(P) > f(P_0)$; niisiis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum. Teoreemi 2.1 väide (a) on tõestatud.

Väide (b) (hessiaani d^2f negatiivse määratuse juht) tõestatakse analoogiliselt.

Kuna me käesolevas kursuses teoreemi II.4.2 ei tõestanud, siis esitame järgnevas teoreemile 2.1 ühe tõestuse, mis on ülaltoodust küll mõnevõrra pikem, kuid ei kasuta mitme muutuja funktsiooni Taylori valemit.

Teoreemi 2.1 tõestus, mis ei kasuta Taylori valemit. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.)

Eeldame, et iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \dots, dx_m$ suhtes). Fikseerime vabalt $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$. Veendumaks, et funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum, piisab näidata, et $f(P) > f(P_0)$. Selleks tähistame $\Delta x_1 := x_1 - x_1^0, \dots, \Delta x_m := x_m - x_m^0$ ja defineerime funktsiooni

$$g(t) := f(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m).$$

Kuna hulk $\mathcal{D}$ on kumer ning (hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu) punktid P_0 ja P on funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D}$ sisepunktid (ning järelikult funktsioon f on määratud punktide P_0 ja P teatavas ümbruses), siis mingi $\varepsilon > 0$ korral funktsioon g on määratud vahemikus $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Tõepoolest, tähistades iga $t \in \mathbb{R}$ korral $P_t := (x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)$, peame leidma $\varepsilon > 0$ nii, et iga $t \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ korral $P_t \in \mathcal{D}$ (sest sel juhul on funktsioon f määratud punktis P_t ehk, teisisõnu, funktsioon g on määratud punktis t). Kõigepealt, hulga $\mathcal{D}$ kumeruse tõttu mis tahes $t \in [0, 1]$ korral $P_t \in \mathcal{D}$.

Olgu nüüd $\varepsilon > 0$ suvaline. Kui $t \in (-\varepsilon, 0)$, siis

$$d(P_t, P_0) = \sqrt{(t\,\Delta x_1)^2 + \dots + (t\,\Delta x_m)^2} = |t|\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\, d(P, P_0),$$

kui aga $t \in (1, 1 + \varepsilon)$, siis (arvestades, et $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$)

$$d(P_t, P) = \sqrt{\big((t-1)\,\Delta x_1\big)^2 + \dots + \big((t-1)\,\Delta x_m\big)^2} = |t-1|\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\, d(P, P_0).$$

Kuna hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu on P_0 ja P hulga $\mathcal{D}$ sisepunktid, siis leiduvad $r_0, r > 0$ nii, et $B(P_0, r_0) \subset \mathcal{D}$ ja $B(P, r) \subset \mathcal{D}$, s.t.

$$d(Q, P_0) < r_0 \implies Q \in \mathcal{D} \quad \text{ja} \quad d(Q, P) < r \implies Q \in \mathcal{D}.$$

Niisiis, valides $\varepsilon > 0$ nii, et $\varepsilon\, d(P, P_0) < \min\{r_0, r\}$, kehtib iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral $P_t \in \mathcal{D}$.

Kuna $g(0) = f(P_0)$ ja $g(1) = f(P)$, siis jääb näidata, et $g(1) > g(0)$. Selleks piisab näidata, et

(1) funktsioon g on diferentseeruv vahemikus $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$;

(2) $g'(t) > 0$ iga $t \in (0,1)$ korral,

sest tingimuse (1) kehtides Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub punkt $\xi \in (0,1)$ nii, et $g(1) - g(0) = g'(\xi)\,(1-0) = g'(\xi)$; tingimuse (2) kehtides $g'(\xi) > 0$, seega $g(1) - g(0) > 0$, s.t. $g(1) > g(0)$, nagu soovitud.

Funktsiooni g diferentseeruvuseks märgime, et g esitub liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big),$$

kus nii f kui ka $\phi_i(t) := x_i^0 + t\,\Delta x_i$, $i = 1, \dots, m$, on diferentseeruvad funktsioonid; seega liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv, kusjuures tema tuletis esitub valemiga

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'_{x_1}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \phi_1'(t) + \dots + f'_{x_m}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \phi_m'(t) \\ &= f'_{x_1}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_1 + \dots + f'_{x_m}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_m \\ &= \sum_{i=1}^m f'_{x_i}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_i \qquad (2.2) \\ &= \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)\, \Delta x_i. \end{aligned}$$

Siit näeme, et võrduste (2.1) tõttu

$$g'(0) = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0)\, \Delta x_i = 0.$$

Niisiis piisab väite (2) tõestuseks näidata, et tuletisfunktsioon g' on rangelt kasvav, milleks omakorda piisab veenduda, et funktsioon g on kaks korda diferentseeruv, kusjuures $g''(t) > 0$ iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral. Funktsiooni g kaks korda diferentseeruvus järeldub liitfunktsiooni diferentseeruvuse reegli (teoreemi II.1.8) põhjal võrdusest (2.2) (funktsiooni f kaks korda diferentseeruvuse ning funktsioonide $\phi_1, \dots, \phi_m$ diferentseeruvuse tõttu); seejuures mis tahes $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_i\, \phi_j'(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_i\, \Delta x_j \\ &= d^2 f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big). \end{aligned}$$

Kuna teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis järeldub eelnevast võrdusteahelast, et $g''(t) > 0$, nagu soovitud. $\square$

Märkus 2.2. Teoreemi 2.1 võib tõestada ka toetudes ühe muutuja funktsiooni Taylori valemile jääkliikmega Lagrange'i kujul, millega lugeja tutvus (või vähemalt oleks pidanud tutvuma) kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs".

Teoreem 2.2 ((ühe muutuja funktsiooni) Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** *Eksisteerigu (ühe muutuja) funktsioonil f punkti a mingis ümbruses $\mathcal{U}$ lõplik $(n+1)$-järku tuletis ($n \in \mathbb{N}$). Siis iga $x \in \mathcal{U}$ korral kehtib Taylori valem*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \;+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

kus punkt ξ paikneb punktide a ja x vahel.

Tõepoolest, kehtigu teoreemi 2.1 eeldused ning olgu iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ suhtes). Fikseerides vabalt punkti $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ ja defineerides funktsiooni g (nagu ülaltoodud tõestuseski), piisab (jälle nagu ülaltoodud tõestuseski) väite (a) tõestuseks näidata, et $g(1) > g(0)$. Selleks märgime (jälle nagu ülaltoodud tõestuseski), et funktsioon g on kaks korda diferentseeruv vahemikus $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, kusjuures $g'(0) = 0$ ning $g''(t) > 0$ iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral. Seega saame Taylori valemist (s.t. teoreemist 2.2, võttes seal $a = 0$ ja $n = 1$) mingi $\xi \in (0,1)$ korral

$$g(1) - g(0) = g'(0)\,(1-0) + \frac{g''(\xi)}{2}\,(1-0)^2 = \frac{g''(\xi)}{2} > 0,$$

nagu soovitud. Väite (b) saab tõestada analoogiliselt.

V peatükk.
Kordsed integraalid

§ 1. Kahekordse integraali mõiste

1.1. Darboux' summad. Darboux' integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ tõkestatud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Jagame lõigud $[a, b]$ ja $[c, d]$ omakorda mingiteks m ja n osalõiguks

$$[x_0, x_1], \dots, [x_{m-1}, x_m] \qquad \text{ja} \qquad [y_0, y_1], \dots, [y_{n-1}, y_n] \tag{1.1}$$

punktidega

$$a =: x_0 < x_1 < \dots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \dots < y_n := d. \tag{1.2}$$

Siis ristkülik $\mathcal{D}$ jaotub mn ristkülikuks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Ristküliku $\mathcal{D}$ *jaotusviisi* ristkülikuteks (1.3) tähistame tähega T. Punktidele (1.2) viitame järgnevas kui *jaotusviisi T määravatele punktidele* ning lõikudele (1.1) kui *jaotusviisi T määravatele lõikudele.*

Tähistame kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}, \qquad M_{ij} := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P).$$

Definitsioon 1.1. Summasid

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j \qquad \text{ja} \qquad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j.$$

nimetatakse funktsiooni f *Darboux' ülemsummaks* ja *Darboux' alamsummaks,* mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T.

Kõneldes järgnevas Darboux' ülem- ja alamsummadest, mõistame me selle all funktsiooni f Darboux' summasid, mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele.

Edasises kasutame me korduvalt järgnevat tähelepanekut: kuna mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} \bigl(-f(P)\bigr) = -\inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) = -m_{ij} \quad \text{ja} \quad \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} \bigl(-f(P)\bigr) = -\sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) = -M_{ij},$$

siis

$$S_{(-f)}(T) = -s_f(T) \quad \text{ja} \quad s_{(-f)}(T) = -S_f(T). \tag{1.4}$$

Tõestame mõned lihtsad Darboux' summade omadused.

Lause 1.1. (a) *Kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T' on saadud lõikude* (1.1) *edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks, siis*

$$S(T') \leqslant S(T) \qquad \textit{ja} \qquad s(T') \geqslant s(T),$$

s.t. jaotusviisi peenendamisel Darboux' ülemsummad ei kasva ning Darboux' alamsummad ei kahane.

(b) *Ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviiside T ja T' korral*

$$S(T) \geqslant s(T'),$$

s.t. ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem mitte ühestki Darboux' alamsummast.

(c) *Funktsiooni f kõikvõimalike Darboux' ülemsummade hulk on alt tõkestatud ning Darboux' alamsummade hulk on ülalt tõkestatud.*

TÕESTUS. (a). Väite tõestuseks üldisel juhul piisab tõestada väide juhu jaoks, kus jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.2) ühe uue punkti $\widehat{x} \in [a, b]$ või $\widehat{y} \in [c, d]$ lisamise teel. Oletame konkreetsuse mõttes, et jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.2) uue punkti $\widehat{x} \in [a, b]$ lisamisel, kusjuures see uus punkt kuulub lõigu $[a, b]$ i_0-ndasse osalõiku: $\widehat{x} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, kus $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, s.t. jaotusviis T' on saadud jaotusviisist T ristkülikute

$$\mathcal{D}_{i_0 1} = [x_{i_0-1}, x_{i_0}] \times [y_0, y_1], \qquad \ldots\ldots, \qquad \mathcal{D}_{i_0 n} = [x_{i_0-1}, x_{i_0}] \times [y_{n-1}, y_n]$$

asendamisel uute ristkülikutega

$$\mathcal{D}'_{i_0 1} = [x_{i_0-1}, \widehat{x}] \times [y_0, y_1],\ \mathcal{D}''_{i_0 1} = [\widehat{x}, x_{i_0}] \times [y_0, y_1],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathcal{D}'_{i_0 n} = [x_{i_0-1}, \widehat{x}] \times [y_{n-1}, y_n],\ \mathcal{D}''_{i_0 n} = [\widehat{x}, x_{i_0}] \times [y_{n-1}, y_n].$$

Jaotusviisile T' vastav Darboux' ülemsumma on

$$S(T') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \bigl(M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0}\, \Delta y_j + M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0}\, \Delta y_j\bigr),$$

kus

$$\Delta x'_{i_0} := \widehat{x} - x_{i_0-1} \quad \text{ja} \quad \Delta x''_{i_0} := x_{i_0} - \widehat{x}$$

ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$M'_{i_0 j} = \sup_{P \in \mathcal{D}'_{i_0 j}} f(P) \quad \text{ja} \quad M''_{i_0 j} = \sup_{P \in \mathcal{D}''_{i_0 j}} f(P).$$

Seega

$$\begin{aligned} S(T) - S(T') &= \sum_{j=1}^{n} M_{i_0 j}\, \Delta x_{i_0}\, \Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} \bigl(M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0}\, \Delta y_j + M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0}\, \Delta y_j\bigr) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \bigl(M_{i_0 j}\, \Delta x_{i_0} - M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0}\bigr)\, \Delta y_j. \end{aligned}$$

Kuna

$$\Delta x_{i_0} = \Delta x'_{i_0} + \Delta x''_{i_0}$$

ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral, arvestades, et $\mathcal{D}_{i_0 j} \supset \mathcal{D}'_{i_0 j}$ ja $\mathcal{D}_{i_0 j} \supset \mathcal{D}'_{i_0 j}$,

$$M_{i_0 j} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{i_0 j}} f(P) \geqslant \sup_{P \in \mathcal{D}'_{i_0 j}} f(P) = M'_{i_0 j}$$

ja

$$M_{i_0 j} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{i_0 j}} f(P) \geqslant \sup_{P \in \mathcal{D}''_{i_0 j}} f(P) = M''_{i_0 j},$$

siis

$$\begin{aligned} &M_{i_0 j}\, \Delta x_{i_0} - M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0} \\ &\qquad = M_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} + M_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0} - M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0} \\ &\qquad\qquad = (M_{i_0 j} - M'_{i_0 j})\, \Delta x'_{i_0} + (M_{i_0 j} - M''_{i_0 j})\, \Delta x''_{i_0} \geqslant 0; \end{aligned}$$

seega $S(T) - S(T') \geqslant 0$ ehk $S(T) \geqslant S(T')$, nagu soovitud.

Võrdustest (1.4) järeldub nüüd, et

$$s(T') = -S_{(-f)}(T') \geqslant -S_{(-f)}(T) = s(T).$$

(b). Tähistame sümboliga T'' ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi T määravate osalõikude (1.1) edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi T' määravate punktidega; siis väite (a) põhjal

$$S(T) \geqslant S(T'').$$

Jaotusviis T'' on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi T' määravate osalõikude edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi T määravate punktidega (1.2); järelikult väite (a) põhjal

$$s(T'') \geqslant s(T').$$

Seega
$$S(T) \geqslant S(T'') \geqslant s(T'') \geqslant s(T'),$$
nagu soovitud.

(c). Väite (b) põhjal

- funktsiooni f mis tahes Darboux' alamsumma on selle funktsiooni Darboux' ülemsummade hulga alumine tõke;
- funktsiooni f mis tahes Darboux' ülemsumma on selle funktsiooni Darboux' alamsummade hulga ülemine tõke.

□

Definitsioon 1.2. Funktsiooni f (ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' ülemsummade alumist raja nimetatakse funktsiooni f *Darboux' ülemiseks integraaliks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja tähistatakse sümboliga $\overline{I}_{\mathcal{D}}f$:
$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f := \inf\bigl\{S(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\bigr\}.$$
Funktsiooni f (ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' alamsummade ülemist raja nimetatakse funktsiooni f *Darboux' alumiseks integraaliks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja tähistatakse sümboliga $\underline{I}_{\mathcal{D}}f$:
$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f := \sup\bigl\{s(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\bigr\}.$$

Darboux' integraalide olemasolu järeldub lausest 1.1, (c), pidevuse aksioomi põhjal; seejuures lausest 1.1, (b), järeldub, et
$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f \geqslant \underline{I}_{\mathcal{D}}f.$$

Vahetult võrdustest (1.4) järeldub, et
$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f = \inf_T S_f(T) = \inf_T\bigl(-s_{(-f)}(T)\bigr) = -\sup_T s_{(-f)}(T) = -\underline{I}_{\mathcal{D}}(-f) \tag{1.5}$$
ja
$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f = \sup_T s_f(T) = \sup_T\bigl(-S_{(-f)}(T)\bigr) = -\inf_T S_{(-f)}(T) = -\overline{I}_{\mathcal{D}}(-f),$$
kus kõik infiimumid ja supreemumid võetakse üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T.

Definitsioon 1.3. Kui funktsiooni f Darboux' ülemine ja alumine integraal ristkülikus $\mathcal{D}$ on võrdsed, siis öeldakse, et funktsioon f on ristkülikus $\mathcal{D}$ *Darboux' mõttes integreeruv* ehk lihtsalt *integreeruv*. Funktsiooni f Darboux' ülemise ja alumise integraali ühist väärtust nimetatakse sel juhul funktsiooni f *Darboux' integraaliks* või lihtsalt *(kahekordseks) integraaliks* funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$ ja tähistatakse sümboliga
$$I_{\mathcal{D}}f \quad \text{või} \quad \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy,$$
s.t.
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy := I_{\mathcal{D}}f = \overline{I}_{\mathcal{D}}f = \underline{I}_{\mathcal{D}}f.$$

1.2. Darboux' summade piirväärtus. Darboux' lemma

Eeldame endiselt, et kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x,y)$ on tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$.

Ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T puhul osaristkülikuteks, mis on määratud punktidega

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \cdots < y_n := d, \tag{1.6}$$

tähistame

$$\Delta(T) := \max\bigl\{x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_{m-1}, y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_{n-1}\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Definitsioon 1.4. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f

- *Darboux' ülemsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

  $$I = \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim S(T),$$

  kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

  $$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|S(T) - I\bigr| < \varepsilon$$

  (s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust I vähem kui ε);

- *Darboux' alamsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

  $$I = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim s(T),$$

  kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

  $$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|s(T) - I\bigr| < \varepsilon$$

  (s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust I vähem kui ε).

Järgnevast teoreemist järeldub, et Darboux' summadel eksisteerib alati piirväärtus.

Teoreem 1.2 (Darboux' lemma). (a) *Funktsiooni f Darboux' ülemine integraal ristkülikus $\mathcal{D}$ on funktsiooni f Darboux' ülemsummade piirväärtus (ristkülikus $\mathcal{D}$):*

$$\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T).$$

(b) *Funktsiooni f Darboux' alumine integraal ristkülikus $\mathcal{D}$ on funktsiooni f Darboux' alamsummade piirväärtus (ristkülikus $\mathcal{D}$):*

$$\underline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T).$$

Darboux' lemma tõestus toetub järgmisele abitulemusele.

Lemma 1.3. *Olgu ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T' saadud selle ristküliku jaotusviisi T määravatele punktidele* (1.6) *p uue punkti lisamise teel ($p \in \mathbb{N}$). Tähistame*

$$M := \sup_{P\in\mathcal{D}} f(P), \quad m := \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P) \quad \textit{ja} \quad L := \max\big\{b-a, d-c\big\}.$$

Siis

$$0 \leqslant S(T) - S(T') \leqslant p\,(M-m)\,L\,\Delta(T).$$

Tõestus. Lemma tõestuseks piisab näidata, et

($\circ$) kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T'' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.6) ühe uue punkti lisamise teel, siis

$$0 \leqslant S(T)-S(T'') \leqslant (M-m)\,L\,\Delta(T) \quad \text{ja} \quad 0 \leqslant s(T'')-s(T) \leqslant (M-m)\,L\,\Delta(T).$$

Tõepoolest, kehtigu väide ($\circ$) ning olgu jaotusviis T' saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.6) uute punktide $u_1,\dots,u_p$ lisamise teel (siin iga $k\in\{1,\dots,p\}$ korral punkt u_k lisatakse punktidele $x_0,\dots,x_m$ või punktidele $y_0,\dots,y_n$). Tähistame $T_0 := T$ ning, edasi, iga $r\in\{1,\dots,p\}$ korral tähistame sümboliga T_r jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi T_{r-1} määravatele punktidele punkti u_r lisamise teel. Siis jaotusviis T_p langeb kokku jaotusviisiga T' ning seega väite ($\circ$) põhjal

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant S(T)-S(T') = S(T_0)-S(T_p) = \sum_{r=1}^{p}\big(S(T_{r-1})-S(T_r)\big)\\ &\leqslant \sum_{r=1}^{p}(M-m)\,L\,\Delta(T_{r-1}) \leqslant \sum_{r=1}^{p}(M-m)\,L\,\Delta(T) = p\,(M-m)\,L\,\Delta(T). \end{aligned}$$

Jääb veel tõestada väide ($\circ$). Olgu ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T'' saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.6) ühe uue punkti u lisamise teel, kusjuures oletame konkreetsuse mõttes, et see uus punkt on lisatud lõigu $[a,b]$ i_0-ndasse osalõiku: $u\in[x_{i_0-1},x_{i_0}]$. Tähistame

$$\Delta x'_{i_0} := u - x_{i_0-1} \quad \text{ja} \quad \Delta x''_{i_0} := x_{i_0} - u$$

ning iga $j\in\{1,\dots,n\}$ korral

$$\mathcal{D}'_{i_0 j} := [x_{i_0-1},u]\times[y_{j-1},y_j] \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}''_{i_0 j} := [u,x_{i_0}]\times[y_{j-1},y_j]$$

ja

$$M'_{i_0 j} = \sup_{P\in\mathcal{D}'_{i_0 j}} f(P) \quad \text{ja} \quad M''_{i_0 j} = \sup_{P\in\mathcal{D}''_{i_0 j}} f(P).$$

Siis

$$
\begin{aligned}
S(T) - S(T') &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j \\
&\qquad - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0}\, \Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0}\, \Delta y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_{i_0 j}\, \Delta x_{i_0}\, \Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0}\, \Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0}\, \Delta y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \bigl(M_{i_0 j}\, \Delta x_{i_0} - M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0} \bigr)\, \Delta y_j .
\end{aligned}
$$

Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$
\begin{aligned}
M_{i_0 j}\, \Delta x_{i_0} - M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0} &= M_{i_0 j}\, (\Delta x'_{i_0} + \Delta x'_{i_0}) - M'_{i_0 j}\, \Delta x'_{i_0} - M''_{i_0 j}\, \Delta x''_{i_0} \\
&= (M_{i_0 j} - M'_{i_0 j})\, \Delta x'_{i_0} + (M_{i_0 j} - M''_{i_0 j})\, \Delta x''_{i_0} \\
&\leqslant (M - m)\, \Delta x'_{i_0} + (M - m)\, \Delta x'_{i_0} \\
&= (M - m)\, (\Delta x'_{i_0} + \Delta x'_{i_0}) \\
&= (M - m)\, \Delta x_{i_0} \\
&\leqslant (M - m)\, \Delta(T);
\end{aligned}
$$

seega

$$
\begin{aligned}
S(T) - S(T') \leqslant \sum_{j=1}^{n} (M - m)\, \Delta(T)\, \Delta y_j &= (M - m)\, \Delta(T) \sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \\
&= (M - m)\, \Delta(T)\, (d - c) \leqslant (M - m)\, L\, \Delta(T).
\end{aligned}
$$

□

Teoreemi 1.2 tõestus. (a). Tähistame $\overline{I} := \overline{I}_{\mathcal{D}} f$. Väite tõestuseks peame näitama, et iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$
\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \overline{I} - \varepsilon < S(T) < \overline{I} + \varepsilon .
$$

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Kuna ristküliku $\mathcal{D}$ iga jaotusviisi T korral $\overline{I} \leqslant S(T)$ (sest $\overline{I}$ on ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele T vastavate Darboux' ülemsummade $S(T)$ alumine raja), siis piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$
\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad S(T) < \overline{I} + \varepsilon . \tag{1.7}
$$

Valime ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T'' selliselt, et

$$
S(T'') < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} .
$$

Olgu nüüd T ristküliku $\mathcal{D}$ suvaline jaotusviis. Olgu T' ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis, mis on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.6) jaotusviisi T'' määravate punktide juurdelisamise teel; seejuures nende juurdelisatavate punktide arv on ülimalt $p := p_1 + p_2 - 2$, kus p_1 ja p_2 vastavalt jaotusviisi T'' määravate lõigu $[a, b]$ osalõikude ja lõigu $[c, d]$ osalõikude arv; niisiis lemma 1.3 põhjal

$$S(T) \leqslant S(T') + p\,(M - m)\,L\,\Delta(T).$$

Jaotusviis T' on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi T'' määravatele punktidele teatavate uute (jaotusviisi T määravate) punktide juurdelisamise teel (või äärmisel juhul jaotusviisid T' ja T'' ühtivad), seega $S(T') \leqslant S(T'')$ ning järelikult

$$S(T) \leqslant S(T'') + p\,(M - m)\,L\,\Delta(T) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} + p\,(M - m)\,L\,\Delta(T).$$

Niisiis, kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T rahuldab tingimust $p\,(M - m)\,L\,\Delta(T) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, siis $S(T) < \overline{I} + \varepsilon$. Teisisõnu, tähistades $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2p\,(M - m)\,L}$, kehtib (1.7), nagu soovitud.

(b). Kuna ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes tükelduse T korral võrduste (1.4) ja (1.5) põhjal

$$\bigl|s_f(T) - \underline{I}_{\mathcal{D}} f\bigr| = \bigl|-S_{(-f)}(T) + \overline{I}_{\mathcal{D}}(-f)\bigr| = \bigl|S_{(-f)}(T) - \overline{I}_{\mathcal{D}}(-f)\bigr|,$$

siis piisab väite tõestuseks veenduda, et $\overline{I}_{\mathcal{D}}(-f) = \lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S_{(-f)}(T)$, mis kehtib juba tõestatud väite (a) põhjal. □

1.3. Tarvilikke ja piisavaid tingimusi funktsiooni integreeruvuseks

Darboux' lemma võimaldab anda mitu kasulikku tarvilikku ja piisavat tingimust funktsiooni integreeruvuseks antud ristkülikus.

Teoreem 1.4. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(ii) *funktsiooni f Darboux' ülemsummade piirväärtus ja Darboux' alamsummade piirväärtus ristkülikus $\mathcal{D}$ on võrdsed, s.t*

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T);$$

(iii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad S(T) - s(T) < \varepsilon \tag{1.8}$$

(s.t. et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mis rahuldab tingimust $\Delta(T) < \delta$, erinevad sellele jaotusviisile vastavad Darboux' summad teineteisest vähem kui ε); teisisõnu,

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \Bigl(S(T) - s(T)\Bigr) = 0;$$

(iv) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral*

$$S(T) - s(T) < \varepsilon; \tag{1.9}$$

teisisõnu,

$$\inf\Big\{S(T) - s(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\Big\} = 0.$$

Seejuures

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = I_{\mathcal{D}} f = \overline{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} S_f(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s_f(T). \tag{1.10}$$

Märkus 1.1. Kuna (punkti 1.1 tähistusi kasutades)

$$\begin{aligned} S(T) - s(T) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j, \end{aligned}$$

kus kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\omega_{ij} := M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{ij}} \big(f(P) - f(Q)\big)$$

(arvu ω_{ij} nimetatakse funktsiooni f *võnkumiseks* osaristkülikus $\mathcal{D}_{ij}$), siis võib teoreemi 1.4 väited (iii) ja (iv) formuleerida ka järgmisel (sagedasti kasutataval) kujul:

(iii') $\displaystyle\lim_{\Delta(T)\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = 0$;

(iv') $\displaystyle\inf\Bigg\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\Bigg\} = 0.$

TEOREEMI 1.4 TÕESTUS. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Vastavalt definitsioonile tähendab funktsiooni integreeruvus ristkülikus $\mathcal{D}$ tema Darboux' integraalide võrdust selles ristkülikus; seega järeldub tõestatav samaväärsus vahetult Darboux' lemmast.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (ii) ning olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame

$$I := \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T). \tag{1.11}$$

Ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral

$$S(T) - s(T) = S(T) - I + I - s(T) = \big|S(T) - I\big| + \big|I - s(T)\big|;$$

seega valides reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \bigl|S(T) - I\bigr| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\Delta(T) < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \bigl|s(T) - I\bigr| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(niisugused δ_1 ja δ_2 eksisteerivad võrduste (1.11) tõttu), ja tähistades $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, kehtib (1.8).

(iii)⇒(iv) on ilmne.

(iv)⇒(i). Kehtigu (iv) ning olgu $\varepsilon > 0$. Eelduse (iv) põhjal leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mis rahuldab tingimust (1.9). Arvestades, et

$$s(T) \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant S(T),$$

järeldub tingimusest (1.9), et

$$\bigl|\overline{I}_{\mathcal{D}} f - \underline{I}_{\mathcal{D}} f\bigr| < S(T) - s(T) < \varepsilon,$$

millest arvu $\varepsilon > 0$ suvalisuse tõttu järeldub, et $\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f$, s.t. funktsioon f on integreeruv.

Võrdused (1.10) järelduvad vahetult integraali definitsioonist ja Darboux' lemmast. □

Järeldus 1.5. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$ ning olgu $I \in \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = I; \tag{1.12}$$

(ii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad I - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I + \varepsilon; \tag{1.13}$$

(iii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral*

$$I - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I + \varepsilon.$$

TÕESTUS. (i)⇒(ii). Kehtigu (i) ning olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi 1.4 (samaväärsuse (i)⇔(iii)) põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad S(T) - s(T) < \varepsilon$$

millest, arvestades, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral

$$s(T) \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}} f = I = \overline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant S(T),$$

järeldub (1.13).

(ii)$\Rightarrow$(iii) on ilmne.

(iii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iii). Siis

$$I \leqslant \sup_T s(T) = \underline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}} f = \inf_T S(T) \leqslant I$$

(siin supreemum ja infiimum võetakse üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T); seega $\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f = I$, s.t. funktsioon f on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures kehtib (1.12). □

1.4. Riemanni integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Järgides punkti 1.1 tähistusi, tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.14}$$

kus

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \cdots < y_n := d. \tag{1.15}$$

Kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1},$$

s.t. Δx_i ja Δy_j on osaristküliku $\mathcal{D}_{ij}$ külgede pikkused, ning

$$\Delta(T) := \max\bigl\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11},\ \ldots,\ P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n},\ \ldots\ldots,\ P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1},\ \ldots,\ P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \tag{1.16}$$

(s.t. kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral valime mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$).

Definitsioon 1.5. Summat

$$\begin{aligned}\sigma &:= \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \ldots, P_{1n}, \ldots, P_{m1}, \ldots, P_{mn}) \\ &:= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j\end{aligned}$$

nimetatakse funktsiooni f *integraalsummaks* ehk *Riemanni summaks,* mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T ja punktide valikule (1.16).

Vahetult vastavatest definitsioonidest järeldub

Lause 1.6. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$. Siis ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T vastavad funktsiooni f Darboux' ülemsumma $S(T)$ ja alamsumma $s(T)$ on sellele jaotusviisile vastavate funktsiooni f integraalsummade ülemine ja alumine raja:*

$$S(T) = \sup \sigma \qquad \textit{ja} \qquad s(T) = \inf \sigma$$

(siin supreemum ja infiimum võetakse üle kõikvõimalike jaotusviisile T vastavate integraalsummade σ, s.t. üle kõikvõimalike punktide valikute (1.16)*).*

Definitsioon 1.6. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f *integraalsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma = I \quad \text{või lihtsalt} \quad \lim \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim \sigma = I,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma - I\big| < \varepsilon,$$

s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni f intgraalsummad arvust I vähem kui ε (sõltumata punktide valikust (1.16) selle jaotusviisi osaristkülikutest).

Definitsioon 1.7. Kui funktsiooni f integraalsummadel on olemas piirväärtus ristkülikus $\mathcal{D}$, siis öeldakse, et funktsioon f on *Riemanni mõttes integreeruv* ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures tema integraalsummade piirväärtust

$$R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy := \lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma$$

nimetatakse *Riemanni integraaliks* funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$.

Osutub, et *funktsiooni f Riemanni mõttes integreeruvus on sama, mis tema integreeruvus (s.t. Darboux' mõttes integreeruvus), kusjuures tema Riemanni integraal ja integraal (s.t. Darboux' integraal) langevad kokku* (vt. teoreemi 1.8 allpool). Veendumaks selles, tõestame kõigepealt, et *Riemanni mõttes integreeruv funktsioon on tõkestatud.*

Teoreem 1.7. *Ristkülikus $\mathcal{D}$ tõkestamata funktsioon ei ole Riemanni mõttes integreeruv selles ristkülikus.*

Tõestus. Olgu funktsioon f tõkestamata ristkülikus $\mathcal{D}$ ning olgu selle ristküliku jaotusviis T määratud punktidega (1.15). Tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta_{ij} := \Delta x_i \, \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Veendumaks, et funktsioon f pole integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, piisab näidata, et

($\circ$) iga reaalarvu $M \geqslant 0$ korral leiduvad punktid (1.16) selliselt, et

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m,n} f(P_{ij}) \, \Delta_{ij} \right| > M.$$

Tõepoolest, kehtigu väide ($\circ$). Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$. Tähistame $I := R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$. Siis funktsiooni f mis tahes integraalsumma σ korral, mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ mingile piisavalt "peenele" jaotusviisile,

$$|\sigma - I| < 1 \quad \text{ehk, teisisõnu,} \quad I - 1 < \sigma < I + 1$$

ning seega

$$|\sigma| < \max\bigl\{|I-1|, |I+1|\bigr\}.$$

Oleme saanud vastuolu väitega ($\circ$).

Jääb veel tõestada väide ($\circ$). Fikseerime vabalt reaalarvu $M \geqslant 0$. Kuna funktsioon f on tõkestamata ristkülikus $\mathcal{D}$, siis ta on tõkestamata mingis osaristkülikus $\mathcal{D}_{i_0 j_0}$. Valime iga $(i,j) \in \bigl(\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}\bigr) \setminus \bigl\{(i_0, j_0)\bigr\}$ korral mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$ ja tähistame

$$\alpha := \left| \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (i_0,j_0)}}^{m,n} f(P_{ij}) \, \Delta_{ij} \right|.$$

Siis mis tahes $P \in \mathcal{D}_{i_0 j_0}$ korral

$$\left| f(P)\,\Delta_{i_0 j_0} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (i_0,j_0)}}^{m,n} f(P_{ij}) \, \Delta_{ij} \right| \geqslant |f(P)\,\Delta_{i_0 j_0}| - \left| \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (i_0,j_0)}}^{m,n} f(P_{ij}) \, \Delta_{ij} \right| = |f(P)|\,\Delta_{i_0 j_0} - \alpha.$$

Järelikult, kui valida punkt $P_{i_0 j_0} \in \mathcal{D}_{i_0 j_0}$ nii, et

$$|f(P_{i_0 j_0})| > \frac{M + \alpha}{\Delta_{i_0 j_0}}$$

(niisugune valik on võimalik, sest funktsioon f on tõkestamata osaristkülikus $\mathcal{D}_{i_0 j_0}$), siis

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m,n} f(P_{ij}) \, \Delta_{ij} \right| \geqslant |f(P_{i_0 j_0})|\,\Delta_{i_0 j_0} - \alpha > \frac{M + \alpha}{\Delta_{i_0 j_0}}\,\Delta_{i_0 j_0} - \alpha = M.$$

$\square$

Teoreem 1.8. *Olgu funktsioon f määratud ristkülikus $\mathcal{D}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(ii) *funktsioon f on integreeruv (s.t. Darboux' mõttes integreeruv) ristkülikus $\mathcal{D}$.*

Seejuures funktsiooni f Riemanni integraal ja integraal (s.t. Darboux' integraal) langevad kokku:

$$R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = I_{\mathcal{D}}f. \tag{1.17}$$

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu funktsioon f Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures

$$R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy =: I.$$

ning olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, millele vastavate integraalsummade σ korral

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Lause 1.6 põhjal (märgime, et teoreemi 1.7 põhjal on funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$) järeldub siit, et

$$I - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant s(T) \leqslant S(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{4},$$

millest

$$S(T) - s(T) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Teoreemi 1.4 (samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(iv)) põhjal on funktsioon f integreeruv (s.t. Darboux' mõttes integreeruv) ristkülikus $\mathcal{D}$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Olgu funktsioon f integreeruv (s.t. Darboux' mõttes integreeruv) ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy =: I.$$

Järelduse 1.5 põhjal iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korra leidub reaalarv $\delta_\varepsilon > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad I - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I + \varepsilon.$$

Arvestades, et jaotusviisile T vastavate funktsiooni f integraalsummade σ korral $s(T) \leqslant \sigma \leqslant S(T)$, järeldub siit, et

$$\Delta(T) < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

aga see tähendab, et $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} \sigma = I$, s.t. funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv, kusjuures kehtib (1.17). $\square$

1.5. Integraal üle mis tahes tõkestatud hulga

Olgu $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tõkestatud hulk. Tähistame

$$a := \inf_{(x,y)\in A} x, \quad b := \sup_{(x,y)\in A} x, \quad c := \inf_{(x,y)\in A} y, \quad d := \sup_{(x,y)\in A} y$$

(need infiimumid ja supreemumid on lõplikud hulga A tõkestatuse tõttu, vt. lauset I.1.10); siis

$$A \subset [a,b] \times [c,d] =: \mathcal{D}_A =: \mathcal{D}.$$

Definitsioon 1.8. Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x,y)$ tõkestatud hulgas A. Öeldakse, et funktsioon f on *integreeruv hulgas A,* kui funktsioon $z = \widehat{f}(P) = \widehat{f}(x,y)$,

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in A, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_A \setminus A, \end{cases}$$

on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_A$. Seejuures integraali

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_{\mathcal{D}_A} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy$$

nimetatakse *integraaliks funktsioonist f üle hulga A.*

Definitsioon 1.9. Funktsiooni $\chi_A\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(P) = \begin{cases} 1, & \text{kui } P \in A, \\ 0, & \text{kui } P \notin A, \end{cases} \qquad P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

nimetatakse hulga A *karakteristlikuks funktsiooniks* või ka (eriti tõenäosusteoorias) hulga A *indikaatorfunktsiooniks.*

Definitsioon 1.10. Kui hulga A karakteristlik funktsioon χ_A on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_A$, siis öeldakse, et hulk A on *mõõtuv;* seejuures integraali

$$S_A := \iint_{\mathcal{D}_A} \chi_A(x,y)\,dx\,dy$$

nimetatakse hulga A *pindalaks.*

§ 2. Kahekordse integraali omadusi

Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Järgides eelmise paragrahvi tähistusi, tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

kus

$$a =: x_0 < x_1 < \dots < x_m := b \quad \text{ja} \quad c =: y_0 < y_1 < \dots < y_n := d.$$

Kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1},$$

s.t. Δx_i ja Δy_j on osaristküliku $\mathcal{D}_{ij}$ külgede pikkused, ning

$$\Delta(T) := \max\big\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\big\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11},\ \dots,\ P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n},\ \dots\dots,\ P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1},\ \dots,\ P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \tag{2.1}$$

(s.t. kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral valime mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$).

Me tähistame

$$\sigma := \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \dots, P_{1n}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{mn}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

s.t. $\sigma = \sigma_f$ on funktsiooni f integraalsumma (ehk Riemanni summa), mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T ja punktide valikule (2.1).

Eeldame nüüd, et funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ on tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$. Tähistame kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$M_{ij} := M_{if}(f) := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := m_{if}(f) := \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P)$$

ja

$$\omega_{ij} := \omega_{ij}(f) := M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) = \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} \big(f(P) - f(Q)\big)$$

ning

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j \qquad \text{ja} \qquad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

s.t. $S(T) = S_f(T)$ ja $s(T) = s_f(T)$ on vastavalt funktsiooni f Darboux' ülemsumma ja Darboux' alamsumma, mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T.

Tõkestatud hulga $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ korral tähistame

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \mathcal{D} := [a, b] \times [c, d],$$

kus

$$a := \inf_{(x,y)\in\mathcal{A}} x, \quad b := \sup_{(x,y)\in\mathcal{A}} x, \quad c := \inf_{(x,y)\in\mathcal{A}} y, \quad d := \sup_{(x,y)\in\mathcal{A}} y$$

(need infiimumid ja supreemumid on lõplikud hulga $\mathcal{A}$ tõkestatuse tõttu, vt. lauset I.1.10). Ilmselt $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

Hulgas $\mathcal{A}$ määratud kahe muutuja funktsiooni $z = f(P) = f(x, y)$ korral defineerime funktsiooni $\widehat{f}\colon \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$

2.1. Eelnevast paragrahvist välja ununenud kasulikke teadmisi

Lause 2.1. *Ristkülikus $\mathcal{D}$ määratud konstantne kahe muutuja funktsioon $f(x, y) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) on integreeruv selles ristkülikus, kusjuures*

$$\int_{\mathcal{D}} \alpha\, dx\, dy = \alpha\,(b - a)\,(d - c) = \alpha\, S_{\mathcal{D}} \tag{2.2}$$

(sümbol $S_{\mathcal{D}}$ tähistab ristküliku $\mathcal{D}$ pindala).

Tõestus. Konstantse funktsiooni $f(x, y) = \alpha$ mis tahes integraalsumma

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \alpha \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i\,(d - c) = \alpha\,(d - c) \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \alpha\,(d - c)\,(b - a) = \alpha\, S_{\mathcal{D}}, \end{aligned}$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on $\alpha\, S_{\mathcal{D}}$, s.t. kehtib (2.2). □

Teoreem 2.2. *Kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ pidev kahe muutuja funktsioon on integreeruv selles hulgas.*

Tõestus. □

Lause 2.3. *Hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ integreeruv kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on tõkestatud selles hulgas.*

Tõestus. Funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. Funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvusest ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ järeldub teoreemi 1.7 põhjal tema tõkestatus selles ristkülikus, millest omakorda järeldub funktsiooni f tõkestatus hulgas $\mathcal{A}$. □

2.2. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud aritmeetiliste tehetega

Teoreem 2.4. *Olgu kahe muutuja funktsioonid* $u = f(P) = f(x, y)$ *ja* $v = g(P) = g(x, y)$ *integreeruvad hulgas* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ning olgu* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Siis*

(a) *korrutis* αf *on integreeruv hulgas* $\mathcal{A}$, *kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x, y)\, dx\, dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy;$$

(b) *funktsioonide* f *ja* g *summa* $f + g$ *ja vahe* $f - g$ *on integreeruvad hulgas* $\mathcal{A}$, *kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \big(f(x, y) \pm g(x, y)\big)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x, y)\, dx\, dy;$$

(c) *funktsioon* $\alpha f + \beta f$ *on integreeruv hulgas* $\mathcal{A}$, *kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \big(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\big)\, dx\, dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x, y)\, dx\, dy;$$

(d) *funktsioonide* f *ja* g *korrutis* fg *on integreeruv hulgas* $\mathcal{A}$.

Omadustele (a), (b) (summa kohta) ja (c) teoreemist 2.8 viidatakse vastavalt kui kahekordse integraali *homogeensusele, aditiivsusele* ja *lineaarsusele.*

Enne teoreemi 2.4 tõestamist toome ära ühe olulise järelduse tema väitest (a).

Järeldus 2.5. *Mõõtuvas hulgas* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *määratud konstantne kahe muutuja funktsioon* $f(x, y) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *on integreeruv selles hulgas, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha\, dx\, dy = \alpha\, S_{\mathcal{A}}$$

(sümbol $S_{\mathcal{A}}$ *tähistab hulga* $\mathcal{A}$ *pindala).*

TÕESTUS. Antud juhul $\widehat{f} = \alpha\, \chi_{\mathcal{A}}$ ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. Hulga $\mathcal{A}$ mõõtuvuse tõttu tema karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, seega teoreemi 2.4 väite (a) põhjal ka funktsioon $\alpha\, \chi_{\mathcal{A}} = \widehat{f}$ on integreeruv selles ristkülikus, s.t. funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \alpha\, dx\, dy &= \iint_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} \widehat{f}(x, y)\, dx\, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} \alpha\, \chi_{\mathcal{A}}(x, y)\, dx\, dy = \alpha \iint_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y)\, dx\, dy = \alpha\, S_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

□

Teoreemi 2.4 tõestus. Tähistame

$$I := I_f := \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{ja} \qquad I_g := \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

(a). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b]\times[c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \bigl|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\bigr| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned}\bigl|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\bigr| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \alpha I\right| = |\alpha|\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I\right|\\ &= |\alpha|\,\bigl|\sigma_f - I\bigr|.\end{aligned}$$

Juhul, kui $\alpha = 0$, on järelduse väite kehtivus ilmne. Eeldame järgnevas, et $\alpha \neq 0$. Siis funktsiooni f integreeruvuse tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \bigl|\sigma_f - I\bigr| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|},$$

aga nüüd võrratuse $\Delta(T) < \delta$ kehtides $\bigl|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\bigr| < |\alpha|\,\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$, nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul (arvestades, et funktsiooni f integreeruvus (hulgas $\mathcal{A}$) tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust (hulgas $\mathcal{D}$)) ülaltõestatu põhjal funktsioon $\alpha\widehat{f} = \widehat{\alpha f}$ on integreeruv, seega ka funktsioon αf on integreeruv; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{D}} \alpha\widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \alpha\iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy\\ &= \alpha\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud.

(b). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b]\times[c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \bigl|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\bigr| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned}\bigl|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\bigr| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bigl(f(P_{ij}) \pm g(P_{ij})\bigr)\,\Delta x_i\,\Delta y_j - (I_f \pm I_g)\right|\\ &= \left|\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_f\right) \pm \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_g\right)\right|\\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_f\right| + \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_g\right|\\ &= \bigl|\sigma_f - I_f\bigr| + \bigl|\sigma_g - I_g\bigr|.\end{aligned}$$

Funktsioonide f ja g integreeruvuse tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \bigl|\sigma_f - I_f\bigr| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad \Delta(T) < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \bigl|\sigma_g - I_g\bigr| < \frac{\varepsilon}{2};$$

niisiis võrratuse $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ kehtides $\bigl|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul (arvestades, et funktsiooni f integreeruvus (hulgas $\mathcal{A}$) tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust (hulgas $\mathcal{D}$)) ülaltõestatu põhjal funktsioon $\widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f+g}$ on integreeruv, seega funktsioon $f+g$ on integreeruv; seejuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \bigl(f(x,y) \pm g(x,y)\bigr)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{D}} \bigl(\widehat{f}(x,y) \pm \widehat{g}(x,y)\bigr)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_{\mathcal{D}} \widehat{g}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud.

(c). Väite (a) põhjal on funktsioonid αf ja βg integreeruvad hulgas $\mathcal{A}$, seega väite (b) põhjal on ka summa $\alpha f + \beta g$ integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} \bigl(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\bigr)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{A}} \beta g(x,y)\,dx\,dy \\ &= \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

(d). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab teoreemi 1.4 põhjal (vt märkust 1.1) väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(fg)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ ning mis tahes $P, Q \in \mathcal{D}_{ij}$ korral

$$\begin{aligned}f(P)\,g(P) - f(Q)\,g(Q) &= f(P)\,\bigl(g(P) - g(Q)\bigr) + g(Q)\,\bigl(f(P) - f(Q)\bigr) \\ &\leqslant |f(P)|\,\bigl|g(P) - g(Q)\bigr| + |g(Q)|\,\bigl|f(P) - f(Q)\bigr| \\ &\leqslant L_f\,\omega_{ij}(g) + L_g\,\omega_{ij}(f),\end{aligned}$$

kus

$$L_f := \sup_{P \in \mathcal{D}} |f(P)| \quad \text{ja} \quad L_g := \sup_{P \in \mathcal{D}} |g(P)|$$

(märgime, et funktsioonid f ja g on teoreemi 1.7 põhjal tõkestatud), seega

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(fg)\,\Delta x_i\,\Delta y_j \leqslant L_f\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(g)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + L_g\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j.$$

Eeldades üldisust kitsendamata, et $L_f, L_g \neq 0$ (vastasel korral oleks f või g nullfunktsioon ning seega ka nende korrutis oleks nullfunktsioon), leiduvad funktsioonide f ja g integreeruvuse tõttu teoreemi 1.4 põhjal (vt märkust 1.1) reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2\,L_g}$$

ja

$$\Delta(T) < \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(g)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2\,L_f}.$$

Niisiis, kui $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(fg)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < L_f\,\frac{\varepsilon}{2\,L_f} + L_g\,\frac{\varepsilon}{2\,L_g}.$$

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul (arvestades, et funktsiooni f integreeruvus (hulgas $\mathcal{A}$) tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust (hulgas $\mathcal{D}$)) ülaltõestatu põhjal funktsioon $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{fg}$ on integreeruv (hulgas $\mathcal{D}$), seega funktsioon fg on integreeruv (hulgas $\mathcal{A}$). □

2.3. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud järjestusega

Teoreem 2.6. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = f(P) = f(x,y)$ ja $v = g(P) = g(x,y)$ integreeruvad hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

(a) *Kui*

$$f(P) \geqslant 0 \quad \textit{iga } P \in \mathcal{A} \textit{ korral,} \tag{2.3}$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0.$$

(b) *Kui*

$$f(P) \geqslant g(P) \quad \textit{iga } P \in \mathcal{A} \textit{ korral,} \tag{2.4}$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy. \tag{2.5}$$

(c) *Funktsiooni f absoluutväärtus $|f|$ (s.t. funktsioon $w = |f(P)| = |f(x,y)|$) on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\left|\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy. \tag{2.6}$$

(d) (Kahekordse integraali keskväärtusteoreem) *Olgu hulk $\mathcal{A}$ mõõtuv. Tähistame*

$$M := \sup_{P\in\mathcal{A}} f(P) \quad ja \quad m := \inf_{P\in\mathcal{A}} f(P);$$

siis leidub arv $\mu \in \mathbb{R}$ nii, et

$$m \leqslant \mu \leqslant M \tag{2.7}$$

ja

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \mu\, S_{\mathcal{A}} \tag{2.8}$$

(siin $S_{\mathcal{A}}$ on hulga $\mathcal{A}$ pindala); kui hulk $\mathcal{A}$ on kinnine ja sidus ning funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{A}$, siis leidub punkt $C \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = f(C)\, S_{\mathcal{A}}. \tag{2.9}$$

Enne teoreemi 2.6 tõestamist toome ära ühe olulise vahetu järelduse tema väitest (d) (s.t. kahekordse integraali keskväärtusteoreemist).

Järeldus 2.7. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ integreeruv mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, mille pindala $S_{\mathcal{A}} = 0$. Siis*

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Teisisõnu, kahekordne integraal üle nullpindalalga hulga on null.

Teoreemi 2.6 tõestus. (a). Kehtigu (2.3). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b]\times[c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Eelduse (2.3) tõttu funktsiooni f kõik Darboux' summad on mittenegatiivsed, järelikult

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \inf_{T} S(T) \geqslant 0,$$

kus infiimum on võetud üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T osaristkülikuteks ja $S(T)$ tähistab jaotusviisile T vastavat funktsiooni f Darboux' ülemsummat.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul $\widehat{f}(P) \geqslant 0$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral, seega ülaltõestatu põhjal

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0.$$

(b). Kui kehtib (2.4), siis

$$f(P) - g(P) \geqslant 0 \quad \text{iga } P \in \mathcal{A} \text{ korral,}$$

seega teoreemi 2.4, (b), ja väite (a) põhjal

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} \big(f(x,y) - g(x,y)\big)\,dx\,dy \geqslant 0,$$

millest järeldub (2.5), nagu soovitud.

(c). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab teoreemi 1.4 põhjal (vt märkust 1.1) väite tõestuseks leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T nii, et

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\big(|f|\big)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T, mis tahes $i \in \{1,\ldots,m\}$ ja $j \in \{1,\ldots,n\}$ ning mis tahes $P, Q \in \mathcal{D}_{ij}$ korral $\big|f(P)\big| - \big|f(Q)\big| \leqslant \big|f(P) - f(Q)\big|$ ning seega

$$\begin{aligned}
\omega_{ij}\big(|f|\big) &= \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{\rangle|}} \Big(\big|f(P)\big| - \big|f(Q)\big|\Big) \\
&\leqslant \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{\rangle|}} \big|f(P) - f(Q)\big| = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{\rangle|}} \big(f(P) - f(Q)\big) = \omega_{ij}(f).
\end{aligned}$$

Funktsiooni f integreeruvuse tõttu saame teoreemi 1.4 põhjal (vt märkust 1.1) leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T nii, et

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon,$$

aga sel juhul

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\big(|f|\big)\,\Delta x_i\,\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon,$$

nagu soovitud.

Võrratus (2.6) on samaväärne võrratusteahelaga

$$-\iint_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy \leqslant \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy. \tag{2.10}$$

Selle ahela esimene võrratus on samaväärne võrratusega

$$-\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} \big(-f(x,y)\big)\,dx\,dy \leqslant \iint_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy,$$

mis, samuti nagu ka võrratusteahela (2.10) teine võrratus, järeldub väitest (b), sest

$$-f(x,y),\ f(x,y) \leqslant \bigl|f(x,y)\bigr| \qquad \text{iga } (x,y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A}$ on ristkülik). Sel juhul (arvestades, et funktsiooni f integreeruvus (hulgas $\mathcal{A}$) tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust (hulgas $\mathcal{D}$)) ülaltõestatu põhjal funktsioon $\bigl|\widehat{f}\bigr| = \widehat{|f|}$ on integreeruv (hulgas $\mathcal{D}$), seega funktsioon $|f|$ on integreeruv (hulgas $\mathcal{A}$); seejuures

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy\right| &= \left|\int_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy\right| \\ &\leqslant \int_{\mathcal{D}} \bigl|\widehat{f}(x,y)\bigr|\,dx\,dy = \int_{\mathcal{A}} \bigl|f(x,y)\bigr|\,dx\,dy.\end{aligned}$$

(d). Väite tõestus sarnaneb ühe muutuja funktsiooni Riemanni integraali keskväärtusteoreemi tõestusega. Järelduse 2.5 ja väite (b) põhjal

$$m\,S_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{A}} m\,dx\,dy \leqslant \int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \int_{\mathcal{A}} M\,dx\,dy = M\,S_{\mathcal{A}}.$$

Siit näeme, et kui $S_{\mathcal{A}} = 0$, siis ka $\int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$ ning seega sobib μ rolli mis tahes arv arvude m ja M vahelt; kui aga $S_{\mathcal{A}} \neq 0$, siis tähistades

$$\mu := \frac{\int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx,\ dy}{S_{\mathcal{A}}},$$

kehtivad (2.7) ja (2.8).

Eeldame nüüd lisaks, et hulk $\mathcal{A}$ on kinnine ja sidus ning funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{A}$. Rahuldagu arv $\mu \in \mathbb{R}$ tingimusi (2.7) ja (2.8) (sellise arvu μ olemasolu oleme juba tõestanud). Kuna hulk $\mathcal{A}$ on kinnine, siis Weierstrassi teise teoreeemi I.4.8 põhjal leiduvad punktid $A, B \in \mathcal{A}$ nii, et

$$f(A) = \inf_{P\in\mathcal{A}} = m \quad \text{ja} \quad f(B) = \sup_{P\in\mathcal{A}} = M.$$

Kuna hulk $\mathcal{A}$ on sidus, siis Bolzano–Cauchy teoreemi I.4.6 põhjal, arvestades, et $f(A) \leqslant \mu \leqslant f(B)$, leidub punkt $C \in \mathcal{A}$ nii, et $f(C) = \mu$, aga nüüd kehtib (2.9). □

2.4. Kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi

Teoreem 2.8. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ integreeruv mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siis*

(a) *funktsioon f on integreeruv igas mõõtuvas hulgas $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$;*

(b) *kui $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ on mõõtuvad hulgad mille ühisosa pindala $S(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 0$ ja mille ühend $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, siis*

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{A}_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Omadusele (b) teoreemist 2.8 viidatakse kui kahekordse integraali *aditiivsusele piirkonna järgi.*

Teoreemi 2.8 tõestus. (a).

(b).

□

§ 3. Kahekordse integraali arvutamine

Kõikjal selles paragrahvis kasutame eelmiste paragrahvidega sarnaseid tähistusi. Muuhulgas, punktide

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \tag{3.1}$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \tag{3.2}$$

korral tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

3.1. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku

Teoreem 3.1. *Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ integreeruv ristkülikus*

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) *Eksisteerigu iga $x \in [a, b]$ korral integraal*

$$g(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) *Eksisteerigu iga $y \in [c, d]$ korral integraal*

$$h(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dx = \int_c^d h(y)\, dy.$$

Tõestus. Tõestame ainult väite (a). Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.

Tähistame

$$I := \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.3}$$

ja fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et kui punktid (3.1) rahuldavad tingimust

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Delta x_i < \delta, \tag{3.4}$$

siis mis tahes punktide $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, korral

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Selleks paneme tähele, et mis tahes punktide (3.1) ja (3.2) ning $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, ja $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\begin{aligned} &\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| \\ &\qquad \leqslant \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| + \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| \Delta x_i. \end{aligned}$$

Funktsiooni f integreeruvuse tõttu ristkülikus $\mathcal{D}$ leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rahuldagu nüüd punktid (3.1) tingimust (3.4) ning olgu punktid $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, suvalised. Kuna funktsioonid $h_i(y) := f(\xi_i, y)$, $i = 1, \ldots, m$, on integreeruvad lõigus $[c, d]$, siis iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral leidub reaalarv $\delta_i > 0$ nii, et kui punktid (3.2) rahuldavad tingimust $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta y_j < \delta_i$, siis mis tahes $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Niisiis, kui valida punktid (3.2) nii, et $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Delta y_j < \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta\}$, ning valida vabalt $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, m$, siis

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

□

3.2. Kahekordse integraali arvutamine üle kõvertrapetsi

Teoreem 3.2. (a) *Olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x) \quad \textit{ja} \quad \beta = \beta(x), \qquad x \in [a, b],$$

pidevad lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\alpha(x) \leqslant \beta(x) \quad \textit{iga } x \in [a, b] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{A} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\},$$

kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy, \tag{3.5}$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) *Olgu funktsioonid*

$$\gamma = \gamma(y) \quad \textit{ja} \quad \delta = \delta(y), \qquad y \in [c,d],$$

pidevad lõigus $[c,d]$, kusjuures

$$\gamma(y) \leqslant \delta(y) \quad \textit{iga } y \in [c,d] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{B} := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ c \leqslant y \leqslant d,\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\big\},$$

kusjuures iga $y \in [c,d]$ korral eksisteerib integraal

$$h(x) := \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx,$$

siis

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d h(y)\,dy.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) tõestatakse analoogiliselt).

Olgu funktsioon f integreeruv kõvertrapetsis $\mathcal{A}$, kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal (3.5). Siis funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{A}} := [a,b] \times [c,d],$$

kus

$$c := \inf_{x\in[a,b]} \alpha(x) \quad \text{ja} \quad d := \sup_{x\in[a,b]} \beta(x);$$

seejuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

Seega teoreemi 3.2 väite (a) põhjal

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □