§ 3. Kahekordse integraali arvutamine

Kõikjal selles paragrahvis kasutame eelmiste paragrahvidega sarnaseid tähistusi. Muuhulgas, punktide

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \tag{3.1}$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \tag{3.2}$$

korral tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

3.1. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku

Teoreem 3.1. *Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ integreeruv ristkülikus*

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) *Eksisteerigu iga $x \in [a, b]$ korral integraal*

$$g(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) *Eksisteerigu iga $y \in [c, d]$ korral integraal*

$$h(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dx = \int_c^d h(y)\, dy.$$

Tõestus. Tõestame ainult väite (a). Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.

Tähistame

$$I := \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.3}$$

ja fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et kui punktid (3.1) rahuldavad tingimust

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Delta x_i < \delta, \tag{3.4}$$

siis mis tahes punktide $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, korral

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Selleks paneme tähele, et mis tahes punktide (3.1) ja (3.2) ning $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, ja $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\begin{aligned} &\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| \\ &\qquad \leqslant \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| + \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| \Delta x_i. \end{aligned}$$

Funktsiooni f integreeruvuse tõttu ristkülikus $\mathcal{D}$ leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rahuldagu nüüd punktid (3.1) tingimust (3.4) ning olgu punktid $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, suvalised. Kuna funktsioonid $h_i(y) := f(\xi_i, y)$, $i = 1, \ldots, m$, on integreeruvad lõigus $[c, d]$, siis iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral leidub reaalarv $\delta_i > 0$ nii, et kui punktid (3.2) rahuldavad tingimust $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta y_j < \delta_i$, siis mis tahes $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Niisiis, kui valida punktid (3.2) nii, et $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Delta y_j < \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta\}$, ning valida vabalt $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, m$, siis

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

□

3.2. Kahekordse integraali arvutamine üle kõvertrapetsi

Teoreem 3.2. (a) *Olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x) \quad \textit{ja} \quad \beta = \beta(x), \qquad x \in [a, b],$$

pidevad lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\alpha(x) \leqslant \beta(x) \quad \textit{iga } x \in [a, b] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{A} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\},$$

kusjuures iga $x \in [a, b]$ korral eksisteerib integraal

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy, \tag{3.5}$$

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) *Olgu funktsioonid*

$$\gamma = \gamma(y) \quad \textit{ja} \quad \delta = \delta(y), \qquad y \in [c, d],$$

pidevad lõigus $[c, d]$, kusjuures

$$\gamma(y) \leqslant \delta(y) \quad \textit{iga } y \in [c, d] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{B} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ c \leqslant y \leqslant d,\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\big\},$$

kusjuures iga $y \in [c, d]$ korral eksisteerib integraal

$$h(x) := \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\, dx,$$

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d h(y)\, dy.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) tõestatakse analoogiliselt).

Olgu funktsioon f integreeruv kõvertrapetsis $\mathcal{A}$, kusjuures iga $x \in [a, b]$ korral eksisteerib integraal (3.5). Siis funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{A}} := [a, b] \times [c, d],$$

kus

$$c := \inf_{x \in [a,b]} \alpha(x) \quad \text{ja} \quad d := \sup_{x \in [a,b]} \beta(x);$$

seejuures iga $x \in [a, b]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_c^d \widehat{f}(x, y)\, dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy.$$

Seega teoreemi 3.2 väite (a) põhjal

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy\right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

nagu soovitud. □

3.3. Muutuja vahetus kahekordses integraalis

3.3.1. Regulaarsed teisendused ruumis $\mathbb{R}^m$

Kujutusi $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ nimetatame *teisendusteks*[1] ruumis $\mathbb{R}^m$.

Paragrahvis IV.1 veendusime, et teisendused $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, ja hulgas $\mathcal{U}$ määratud funktsioonide süsteemid

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(u_1, \dots, u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(u_1, \dots, u_m), \end{cases} \tag{3.6}$$

on üksüheses vastvavuses: süsteem (3.6) määrab kujutuse $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus

$$\Phi(Q) = \big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathbb{R}^m, \quad Q \in \mathcal{U}; \tag{3.7}$$

teiselt poolt, mis tahes kujutus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ määrab ühesel viisil funktsioonid (3.6), mis rahuldavad tingimust (3.7): sellise omadusega funktsioonid (3.6) on defineeritud võrdustega

$$x_i(Q) = x_i, \quad Q \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m, \qquad \text{kus } \Phi(Q) = (x_1, \dots, x_m).$$

Edasises, viidates võrrandite süsteemile (3.6) kui teisendusele (3.6), mõistame me selle teisenduse all selle süsteemiga määratud teisendust $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 3.1. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk. Öeldakse, et süsteemiga (3.6) määratud teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ on *regulaarne,* kui

(1) teisendus Φ on pööratav;

(2) teisendust Φ määravatel funktsioonidel (3.6) eksisteerivad hulgas $\mathcal{U}$ pidevad esimest järku osatuletised;

[1] Tavaliselt mõistetakse mingi hulga teisenduste all kujutusi sellest hulgast sellesse samasse hulka. Meie nimetame teisendusteks ruumis $\mathbb{R}^m$ kujutusi ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulkadest ruumi $\mathbb{R}^m$.

(3) selle teisenduse jakobiaan

$$\frac{D(x_1,\dots,x_m)}{D(u_1,\dots,u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{hulgas } \mathcal{U}.$$

Seejuures öeldakse ka, et teisendus (3.6) teisendab hulga $\mathcal{U}$ regulaarselt hulgaks $\mathcal{V}$.

Märgime ilma tõestuseta, et regulaarse teisenduse $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ pöördteisendus $\Phi^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ on samuti regulaarne.

3.3.2. Üldine muutuja vahetuse valem kahekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^2$, mis on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{3.8}$$

Tähistame

$$J(u,v) := \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix},$$

s.t. $J(u,v)$ on selle süsteemi jakobiaan punktis (u,v).

Teoreem 3.3. *Kui*

(1) *kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on pidev xy-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{D}$;*

(2) *võrrandid* (3.8) *määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab uv-tasandi kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{D}$,*

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv. \tag{3.9}$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 3.1. Valem (3.9) jääb kehtima, kui teisendus (3.8) rahuldab regulaarsuse tingimusi mitte kogu hulgas Δ, vaid väljaspool hulga Δ mingit nullpindalaga alamhulka, mille see teisendus kujutab hulga $\mathcal{D}$ nullpindalaga alamhulgaks.

3.3.3. Üleminek polaarkoordinaatidele kahekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^2$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi. \end{cases} \tag{3.10}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\phi$-tasandi punktile (r, ϕ), kus $r \geqslant 0$ ja $\phi \in [0, 2\pi)$, vastavusse xy-tasandi punkti, mille polaarraadius on r ja polaarnurk on ϕ, s.t. punkti, mille polaarkoordinaadid on r ja ϕ. Selle teisenduse puhul

$$x'_r = \cos\phi, \qquad x'_\phi = -r\sin\phi,$$
$$y'_r = \sin\phi, \qquad y'_\phi = r\cos\phi;$$

seega tema jakobiaan

$$J(r,\phi) := \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r.$$

Näeme, et teisendus (3.10) teisendab $r\phi$-tasandi hulga

$$\{(r,\phi)\colon\ r \geqslant 0,\ \phi \in [0, 2\pi]\} \tag{3.11}$$

sisemuse

$$\{(r,\phi)\colon\ r > 0,\ \phi \in (0, 2\pi)\}$$

regulaarselt xy-tasandiks, millest on välja lõigatud x-telje positiivne osa (koos punktiga $(0,0)$; hulga (3.11) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r = 0$ või $\phi \in \{0, 2\pi\}$) kujutab see teisendus x-telje positiivseks osaks (koos punktiga $(0,0)$. Seega järeldub teoreemist 3.3 ja märkusest 3.1

Teoreem 3.4. *Kui*

(1) *kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on pidev xy-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{D}$;*

(2) *teisendus* (3.10) *kujutab hulgas* (3.11) *sisalduva kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{D}$,*

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} f\bigl(r\cos\phi, r\sin\phi\bigr)\,r\,dr\,d\phi.$$

§ 4. Kahekordse integraali rakendusi

4.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Paragrahvis 1 defineerisime tasandilise hulga (ehk, suupärasemalt, tasandilise kujundi) mõõtuvuse ja pindala vastavalt kui selle hulga karakteristliku funktsiooni integreeruvuse ja integraali sellest karakteristlikust funktsioonist. Sellel definitsioonil – erinevalt traditsioonilisest pindala definitsioonist (mis käesoleva kursuse raamesse ei mahu) – on üks oluline puudus: tema seos meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast on väga raskesti tajutav. Rõhutame vaid, et traditsiooniline mõõtuvuse ja pindala definitsioon on käesolevas kursuses toodud definitsiooniga samaväärne: need definitsioonid määravad ühed ja samad mõõtuvad hulgad (s.t. niisugused hulgad, millel on olemas pindala – märgime, et mitte igal tasandi alamhulgal pole pindala); seejuures mis tahes mõõtuva hulga pindala nende erinevate definitsioonide järgi on üks ja sama.

Teoreem 4.1. *Olgu $\mathcal{D}$ mõõtuv kujund xy-tasandil. Siis tema pindala $S_{\mathcal{D}}$ avaldub valemiga*

$$S_{\mathcal{D}} = \iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy.$$

4.2. Kõversilindri ruumala arvutamine

Selles punktis anname arvutusvalemi kõversilinderi ruumala arvutamiseks. Keha[2] ruumala mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri; rõhutame vaid, et ruumala matemaatiliselt range definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga ruumalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale. Keha, millel on olemas ruumala (mitte igal ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulgal pole ruumala!) nimetatakse *mõõtuvaks.*

Teoreem 4.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv kinnine piirkond ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x,y) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x,y), \qquad (x,y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\alpha(x,y) \leqslant \beta(x,y) \quad \text{iga } (x,y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Siis kõversilinder

$$\mathcal{C} := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x,y) \in \mathcal{A},\ \alpha(x,y) \leqslant z \leqslant \beta(x,y)\big\},$$

on mõõtuv, kusjuures tema ruumala $V_{\mathcal{C}}$ avaldub valemiga

$$V_{\mathcal{C}} = \iint\limits_{\mathcal{A}} \big(\beta(x,y) - \alpha(x,y)\big)\,dx\,dy.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

[2]Keha ehk ruumilise kujundi all mõistame me ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulki.

4.3. Ruumilise pinnatüki pindala arvutamine

Selles punktis anname mõned arvutusvalemid ruumilise pinnatüki pindala arvutamiseks. Ruumilise pinnatüki pindalal mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri – see matemaatiselt range definitsioon on üsna keeruline – rõhutame vaid, et see definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale.

Teoreem 4.3. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

pidevad osatuletised uv-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas Δ, kusjuures

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad \textit{piirkonnas } \Delta,$$

kus

$$A := \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \qquad C := \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix},$$

Siis pinnatüki

$$\Sigma := \Big\{ \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) : \ (u,v) \in \Delta \Big\}$$

pindala S_Σ avaldub valemiga

$$S_\Sigma = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Järeldus 4.4. *Eksisteerigu funktsioonil $z = f(x,y)$ pidevad osatuletised kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Siis selle funktsiooni graafiku osa*

$$\Sigma := \Big\{ \big(x, y, f(x,y)\big) : \ (x,y) \in \mathcal{D} \Big\}$$

pindala S_Σ avaldub valemiga

$$S_\Sigma := \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Tõestus. Graafiku osa (pinnatükk) Σ esitub parameetriliselt võrranditega

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v), \qquad (u,v) \in \mathcal{D}. \tag{4.1}$$

Seda pinnatükki esitavatel funktsioonidel (4.1) eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}$ pidevad osatuletised, kusjuures

$$\begin{aligned} x'_u &= 1, & x'_v &= 0, \\ y'_u &= 0, & y'_v &= 1, \\ z'_u &= f'_x, & z'_v &= f'_y, \end{aligned}$$

seega teoreemi 4.3 tähistusi kasutades

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

järelikult teoreemi 4.3 põhjal

$$S_\Sigma = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{f'_x(u,v)^2 + f'_y(u,v)^2 + 1}\, du\, dv,$$

nagu soovitud. $\square$

§ 5. Kolmekordne integraal

5.1. Kolmekordse integraali mõiste

Kolmekordne integraal

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

kolme muutuja funktsioonist $u = f(x,y,z)$ üle hulga $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraaliga (kahe muutuja funktsioonist). Kui kahekordse integraali defineerimisel lähtututi ristküliku jaotusviisist osaristkülikuteks, siis kolmekordse integraali puhul lähtutakse risttahuka jaotusviisist osaristtahukateks; kõik teooriaarenduseks vajalikud mõisted – Darboux' summad, Darboux' integraalid, integreeruvus, Darboux' summade piirväärtus, Riemanni summad, Riemanni integraal – defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraali juhuga; seejuures kolmekordse integraali olemasoluks tarvilikud ja piisavad tingimused ning kolmekordse integraali omadused on kahekordse integraali vastavate tingimuste ja omaduste ilmsed analoogid. Seepärast piirdume käesolevas konspektis kolmekordse integraali osas vaid olulisemate arvutusvalemite äratoomisega.

5.2. Kolmekordse integraali arvutamine

Teoreem 5.1. *Olgu kolme muutuja funktsioon $u = f(x,y,z)$ integreeruv risttahukas $\mathcal{E} := [a,b] \times [c,d] \times [e,l]$. Tähistame $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$.*

(a) *Kui iga $(x,y) \in \mathcal{D}$ korral eksisteerib integraal*

$$g(x,y) := \int_e^l f(x,y,z)\,dz,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\int_e^l f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

(b) *Kui iga $z \in [e,l]$ korral eksisteerib integraal*

$$h(z) := \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^l \left(\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\right) dz = \int_e^l h(z)\,dz.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. $\square$

Teoreem 5.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv kinnine piirkond ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x, y) \quad ja \quad \beta = \beta(x, y), \qquad (x, y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\alpha(x, y) \leqslant \beta(x, y) \quad iga\ (x, y) \in \mathcal{A}\ korral.$$

Kui kolme muutuja funktsioon $u = f(x, y, z)$ on integreeruv kõversilindris

$$\mathcal{C} := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ (x, y) \in \mathcal{A},\ \alpha(x, y) \leqslant z \leqslant \beta(x, y)\big\},$$

kusjuures iga $(x, y) \in \mathcal{A}$ korral eksisteerib integraal

$$g(x, y) := \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y)\, dz,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{A}} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x, y)\, dx\, dy.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Teoreem 5.3. *Olgu kolme muutuja funktsioon $u = f(x, y, z)$ integreeruv hulgas*

$$\mathcal{C} := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z \in [e, l],\ (x, y) \in \mathcal{A}(z)\big\},$$

kus iga $z \in [e, l]$ korral $\mathcal{A}(z)$ on mõõtuv kinnine piirkond xy-tasandil. Kui iga $z \in [e, l]$ korral eksisteerib integraal

$$h(z) := \iint\limits_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy,$$

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_e^l \left(\iint\limits_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz = \int_e^l h(z)\, dz.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

5.3. Muutuja vahetus kolmekordses integraalis

5.3.1. Üldine muutuja vahetuse valem kolmekordse integraali jaoks

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \tag{5.1}$$

Tähistame

$$J(u, v, w) := \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u(u, v, w) & x'_v(u, v, w) & x'_w(u, v, w) \\ y'_u(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & y'_w(u, v, w) \\ z'_u(u, v, w) & z'_v(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{vmatrix},$$

s.t. $J(u, v, w)$ on selle süsteemi jakobiaan punktis (u, v, w).

Teoreem 5.4. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x, y, z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{E}$;*

(2) *võrrandid* (5.1) *määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab uvw-ruumi kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &\qquad = \iiint\limits_{\Delta} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \big|J(u, v, w)\big|\, du\, dv\, dw. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

Märkus 5.1. Valem (5.2) jääb kehtima, kui teisendus (5.1) rahuldab regulaarsuse tingimusi mitte kogu hulgas Δ, vaid väljaspool hulga Δ mingit nullruumalaga alamhulka, mille see teisendus kujutab hulga $\mathcal{E}$ nullruumalaga alamhulgaks.

5.3.2. Üleminek silindrilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \\ z = h. \end{cases} \tag{5.3}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\phi h$-ruumi punktile (r, ϕ, h), kus $r \geqslant 0$ ja $\phi \in [0, 2\pi)$, vastavusse xyz-ruumi punkti, mille silindrilised koordinaadid on r, ϕ ja h. Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} x'_r &= \cos\phi, & x'_\phi &= -r\sin\phi, & x'_h &= 0, \\ y'_r &= \sin\phi, & y'_\phi &= r\cos\phi, & y'_h &= 0, \\ z'_r &= 0, & z'_\phi &= 0, & z'_h &= 1, \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r, \phi, h) := \frac{D(x, y, z)}{D(r, \phi, h)} &= \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (5.3) teisendab $r\phi h$-ruumi hulga

$$\big\{(r, \phi, h)\colon\ r \geqslant 0,\ \phi \in [0, 2\pi],\ h \in \mathbb{R}\big\} \tag{5.4}$$

sisemuse

$$\big\{(r, \phi, h)\colon\ r > 0,\ \phi \in (0, 2\pi),\ h \in \mathbb{R}\big\}$$

regulaarselt xyz-ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand

$$\big\{(x, y, z)\colon\ y = 0,\ x \geqslant 0\big\} \tag{5.5}$$

(s.t. zx-tasandi osa, kus $x \geqslant 0$); hulga (5.4) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r = 0$ või $\phi \in \{0, 2\pi\}$) kujutab see teisendus pooltasandiks (5.5). Seega järeldub teoreemist 5.4 ja märkusest 5.1

Teoreem 5.5. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x, y, z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{E}$;*

(2) *teisendus* (5.3) *kujutab hulgas* (5.4) *sisalduva kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Delta} f\big(r\cos\phi, r\sin\phi, h\big)\,r\,dr\,d\phi\,dh.$$

5.3.3. Üleminek sfäärilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{5.6}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\theta\phi$-ruumi punktile (r,θ,ϕ), kus $r \geqslant 0$, $\theta \in [0,\pi]$ ja $\phi \in [0,2\pi)$, vastavusse xyz-ruumi punkti, mille sfäärilised koordinaadid on r, θ ja ϕ. Selle teisenduse puhul

$$\begin{array}{lll} x'_r = \sin\theta\cos\phi, & x'_\theta = r\cos\theta\cos\phi, & x'_\phi = -r\sin\theta\sin\phi, \\ y'_r = \sin\theta\sin\phi, & y'_\theta = r\cos\theta\sin\phi, & y'_\phi = r\sin\theta\cos\phi, \\ z'_r = \cos\theta, & z'_\theta = -r\sin\theta, & z'_\phi = 0, \end{array}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r,\theta,\phi) := \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi \\ &\qquad r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi) + r^2\sin^3\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi) \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (5.6) teisendab $r\theta\phi$-ruumi hulga

$$\big\{(r,\phi,\theta)\colon\ r \geqslant 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi]\big\} \tag{5.7}$$

sisemuse

$$\big\{(r,\phi,\theta)\colon\ r > 0,\ \theta \in (0,\pi),\ \phi \in (0,2\pi)\big\}$$

regulaarselt xyz-ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand (5.5) (s.t. zx-tasandi osa, kus $x \geqslant 0$); hulga (5.7) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r = 0$ või $\theta \in \{0,\pi\}$ või $\phi \in \{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus pooltasandiks (5.5). Seega järeldub teoreemist 5.4 ja märkusest 5.1

Teoreem 5.6. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x,y,z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas piirkonnas $\mathcal{E}$;*

(2) *teisendus* (5.6) *kujutab hulgas* (5.7) *sisalduva kinnise mõõtuva piirkonna Δ piirkonnaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &\qquad = \iiint\limits_{\Delta} f\big(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta\big)\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi. \end{aligned}$$

5.4. Kolmekordse integraali rakendusi

5.4.1. Keha ruumala arvutamine

Teoreem 5.7. *Mõõtuva hulga $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ ruumala $V_{\mathcal{E}}$ avaldub valemiga*

$$V_{\mathcal{E}} = \iiint\limits_{\mathcal{E}} dx\, dy\, dz.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □