2.6. Kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi

Selles punktis tõestame järgneva teoreemi.

Teoreem 2.10. *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuvad hulgad, kusjuures nende ühisosa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ Jordani mõõt on null, ning olgu funktsioon $f\colon \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ integreeruv hulkades $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Siis funktsioon f on integreeruv ka ühendis $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, kusjuures*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teoreemi 2.10 tõestus kasutab järgnevaid kahte tulemust, mille tõestused toome ära selle punkti lõpus pärast teoreemi 2.10 tõestamist.

Lause 2.11. *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuvad hulgad. Siis ka nende hulkade ühend $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, ühisosa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ja hulgateoreetiline vahe $\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuvad.*

Teoreem 2.12. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes nullmõõduga hulk ning olgu $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Siis funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = 0. \tag{2.16}$$

Teoreemi 2.10 tõestus. Kuna hulgad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuvad, siis lause 2.11 põhjal ka ühend $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuv. Kuna Jordani mõttes mõõtuv hulk on tõkestatud, siis leidub ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Kõikjal tõestuses kasutame järgnevat tähistust: kui $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuv hulk, siis funktsioon $\widehat{f}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega

$$\widehat{f}_{\mathcal{C}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kui } (x,y) \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{kui } (x,y) \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{C}. \end{cases}$$

Funktsiooni f integreeruvus ühendis $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tähendab selle tähistuse kohaselt funktsiooni $\widehat{f}_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$ integreeruvust (ristkülikus $\mathcal{D}$).

Paneme tähele, et $\widehat{f}_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} = \widehat{f}_{\mathcal{A}} + \widehat{f}_{\mathcal{B}} - \widehat{f}_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$. Kuna funktsioonid $\widehat{f}_{\mathcal{A}}$, $\widehat{f}_{\mathcal{B}}$ ning $\widehat{f}_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ on integreeruvad (sest funktsiooni f integreeruvus hulkades $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tähendab vastavalt funktsioonide $\widehat{f}_{\mathcal{A}}$ ja $\widehat{f}_{\mathcal{B}}$ integreeruvust ning funktsioon $\widehat{f}_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ on integreeruv teoreemi 2.12 põhjal), siis funktsioon $\widehat{f}_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$ on integreeruv (sest teoreemi 2.3, (b), põhjal on integreeruvate funktsioonide summa ja vahe integreeruvad), s.t. funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Seejuures (jällegi teoreemi 2.3, (b), põhjal)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \big(\widehat{f}_{\mathcal{A}}(x,y) + \widehat{f}_{\mathcal{B}}(x,y) - \widehat{f}_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x,y)\big)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

sest teoreemi 2.12 põhjal $\iint_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$. □

LAUSE 2.11 TÕESTUS. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ (PÕHJENDADA, MIKS SELLINE RISTKÜLIK LEIDUB!). Kuna $\chi_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}}\,\chi_{\mathcal{B}}$, siis funktsioon $\chi_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$ (sest hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ mõõtuvus tähendab vastavalt karakteristlike funktsioonide $\chi_{\mathcal{A}}$ ja $\chi_{\mathcal{B}}$ integreeruvust ning teoreemi 2.3, (d), põhjal on integreeruvate funktsioonide korrutis integreeruv); see aga tähendab, et hulk $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuv.

Edasi, kuna $\chi_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}} = 1-\chi_{\mathcal{A}}$, siis funktsioon $\chi_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}}$ on integreeruv (sest teoreemi 2.3, (b), põhjal on integreeruvate funktsioonide vahe integreeruv), see aga tähendab, et hulk $\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}$ on mõõtuv. Siit järeldub, et ka hulk $\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}$ on mõõtuv.

Kuna $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{D}\setminus\mathcal{B})$, siis eelneva põhjal on hulk $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$ mõõtuv (sest vahe $\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}$ on mõõtuv ning mõõtuvate hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}$ ühisosa on mõõtuv).

Lõpuks, De Morgani valemite põhjal

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \big(\mathcal{D}\setminus(\mathcal{D}\setminus\mathcal{A})\big) \cup \big(\mathcal{D}\setminus(\mathcal{D}\setminus\mathcal{A})\big) = \mathcal{D}\setminus\big((\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}) \cap (\mathcal{D}\setminus\mathcal{B})\big),$$

seega eelneva põhjal on hulk $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mõõtuv □

TEOREEMI 2.12 TÕESTUS. Kuna hulk $\mathcal{A}$ on Jordani mõttes mõõtuv, siis hulk $\mathcal{A}$ on tõkestatud; seega leidub ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Defineerime funktsiooni $\widehat{f}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ võrdustega

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kui } (x,y) \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } (x,y) \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{A}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Funktsiooni f integreeruvuseks hulgas $\mathcal{A}$ ja võrduseks (2.16) piisab näidata, et funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures $\iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dxdy = 0$. Selleks piisab näidata, et

$$\sup_T s_{\widehat{f}}(T) = 0 = \inf_T S_{\widehat{f}}(T), \tag{2.18}$$

kus supreemum ja infiimum võetakse üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõigi jaotusviiside T (osaristkülikuteks) ning $s_{\widehat{f}}(T)$ ja $S_{\widehat{f}}(T)$ tähistavad vastavalt jaotusviisile T vastavaid funktsiooni $\widehat{f}$ Darboux' alam- ja ülemsummat.

Funktsiooni f tõkestatuse leidub reaalarv $M > 0$ nii, et

$$|f(x,y)| \leqslant M \quad \text{iga } (x,y) \in \mathcal{A} \text{ korral,}$$

seega

$$-M\chi_{\mathcal{A}}(x,y) \leqslant \widehat{f}(x,y) \leqslant M\chi_{\mathcal{A}}(x,y) \quad \text{iga } (x,y) \in \mathcal{D} \text{ korral.}$$

Sellest võrratusteahelast järeldub, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral

$$-MS_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = -S_{M\chi_{\mathcal{A}}}(T) = s_{-M\chi_{\mathcal{A}}}(T) \leqslant s_{\widehat{f}}(T) \leqslant S_{\widehat{f}}(T) \leqslant S_{M\chi_{\mathcal{A}}}(T) = MS_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)$$

(PÕHJENDADA!). Siit järelduvad nüüd soovitud võrdused (2.18), sest kuna hulga $\mathcal{A}$ nullmõõdulisuse tõttu

$$\inf_T S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dxdy = \mu(\mathcal{A}) = 0,$$

(siin $\mu(\mathcal{A})$ tähistab hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõõtu), siis, ühelt poolt,

$$\sup_T s_{\widehat{f}}(T) \geqslant \sup_T(-MS_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)) = -\inf_T MS_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = -M\inf_T S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = 0$$

ning, teiselt poolt,

$$\inf_T S_{\widehat{f}}(T) \leqslant \inf_T MS_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = M\inf_T S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = 0.$$

□