Muudatused ja parandused aine
"Mitme muutuja matemaatiline analüüs"
loengukonspektis

4. september 2019: laeti üles konspekti I peatükk.

6. september 2019.

• Lemmale 1.5 eelnevas lõigus kustutati viide lausele 1.10 – lause 1.10 tõestus ei kasuta otseselt lemmat 1.5.

• Lemma 1.5 esitati esialgsega samaväärsel kujul, kus võrratused

$$|x_j - x_j^0| \leqslant d(P, P_0) \quad \text{iga } j \in \{1, \dots, m\} \text{ korral}$$

asendati võrratustega

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant d(P, P_0).$$

Muudetud sõnastusega lemma 1.5 koos tõestusega järgneb.

Lemma 1.5. *Olgu* $P = (x_1, \dots, x_m)$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. *Siis*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant d(P, P_0) \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|. \tag{1.9}$$

Tõestus. Arvestades, et $d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|^2}$, sisalduvad võrratused (1.9) järgnevas võrratusteahelas:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|^2} \leqslant \sqrt{m \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|^2} = \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|.$$

$\square$

• Muudeti lause 1.4 tõestuse osa, kus tõestatakse väited (a) ja (b) lahtiste kerade ja risttahukate jaoks. (Eelnev põhjendus, miks piisab vaadelda ainult lahtisi kerasid ja risttahukaid, jäi samaks.) Uus tõestus on järgmine.

Lause 1.4 tõestus. BLA-BLA-BLA...

(a). Olgu $r > 0$. Vaatleme lahtist kera $B := B(P_0, r)$. Olgu $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B \quad &\Longleftrightarrow \quad d(P, P_0) < r \quad \Longrightarrow \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < r \\ &\Longleftrightarrow \quad P \in (x_1^0 - r, x_1^0 + r) \times \cdots \times (x_m^0 - r, x_m^0 + r) =: C_2, \end{aligned}$$

seega $B \subset C_2$; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B \quad &\iff \quad d(P, P_0) < r \\ &\Longleftarrow \quad \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < r \quad \iff \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \frac{r}{\sqrt{m}} \\ &\iff \quad P \in \left(x_1^0 - \tfrac{r}{\sqrt{m}}, x_1^0 + \tfrac{r}{\sqrt{m}}\right) \times \cdots \times \left(x_m^0 - \tfrac{r}{\sqrt{m}}, x_m^0 + \tfrac{r}{\sqrt{m}}\right) =: C_1, \end{aligned}$$

niisiis $B \supset C_1$.

(b). Olgu $d_1, \ldots, d_m > 0$. Tähistame

$$C := (x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \cdots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m).$$

Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C \quad &\iff \quad |x_i - x_i^0| < d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral} \\ &\Longrightarrow \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i =: d \\ &\Longrightarrow \quad d(P, P_0) < \sqrt{m} d \quad \iff \quad P \in B(P_0, \sqrt{m} d) =: B_2, \end{aligned}$$

seega $C \subset B_2$; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C \quad &\iff \quad |x_i - x_i^0| < d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral} \\ &\Longleftarrow \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \min_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i =: r \\ &\Longleftarrow \quad d(P, P_0) < r \quad \iff \quad P \in B(P_0, r) =: B_1, \end{aligned}$$

niisiis $C \supset B_1$. □

• Lause 2.1 tõestust muudeti; uus tõestus järgneb.

Lause 2.1 tõestus. Lemma 1.5 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$0 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i^n - x_i| \leqslant d(P_n, P) \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i^n - x_i|,$$

järelikult arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal

$$d(P_n, P) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \iff \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P \ \text{ ruumis } \mathbb{R}^m \quad &\iff \quad d(P_n, P) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \iff \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\ &\iff \quad |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ \text{ iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral} \\ &\iff \quad x_i^n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_i \ \text{ iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral.} \end{aligned}$$

□

25. september 2019: laeti üles konspekti II peatükk.

• Punkti I.1.6 definitsiooni 1.8 neljandas reas ja sellele järgneva lõigu teises reas kirjutati ekslikku "$t \in [\alpha, \beta]$" asemele "$t \in T$".