Eksam aines „Mitme muutuja matemaatiline analüüs“

Kordamisküsimused

Eksamil osaleja peab oskama piletil antud tulemust sõnastada ja tõestada. Tuleb olla valmis tulemusega seonduvate mõistete defineerimiseks ja lihtsate näidete toomiseks, kui õppejõud neid küsib. Kõigi sõnastuste ja tõestuste selgitamise käigus peab olema valmis välja minema definitsioonide, reaalarvude omaduste ja muude tuntud väideteni. Kursuses „Ühe muutuja matemaatiline analüüs“ õpitud väiteid võib lugeda tuntuks.

NB! Kõikjal $m = 2$, st. piirdume kahe muutuja juhuga, v.a. kui on eraldi öeldud teisiti või küsitakse täiendavalt, kuidas asi muutuks teiste m väärtuste kasutamisel.

NB! Kui pole spetsiifiliselt öeldud, milline juhtum teha, ja konspektis on tehtud üks juhtum, võib õppejõud küsida eksamil mõne teise juhtumi tegemist. (Näiteks, kui eeldatakse, et vektor $(a, b, c) \neq 0$, ja konspekti tõestus on juhul $c = 0$, võidakse eksamil oodata tõestust juhul $b = 0$ või $a = 0$.)

1. Kauguse kolm omadust ja nende järeldus (tagurpidi kolmnurga võrratus).
2. Lahtine kera on lahtine hulk. Kinnine kera on kinnine hulk.
3. Sulundipunkti kriteerium jadade keeles. Hulga kinnisuse kriteerium jadade keeles.
4. Diferentseeruvuse definitsioonis sobivad arvude A_1, A_2 rolli funktsiooni osatuletised antud punktis (teoreem 1.2, järeldus 1.3). Näide funktsioonist, millel on lõplikud osatuletised mingis punktis, aga mis pole selles punktis diferentseeruv.
5. Mitme muutuja liitfunktsiooni diferentseerimise reegel.
6. Kui (teist järku) segaosatuletised on pidevad, siis nad on võrdsed.
7. Diferentseeruva funktsiooni tuletise arvutamine antud suunas. Millises suunas on funktsiooni muutumine kiireim? Näide funktsioonist, mis pole diferentseeruv punktis P_0 ning kus nimetatud valem ei kehti mõnes suunas.
8. Teoreem võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamata funktsioonist (juhtum $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$, väitena saadakse funktsiooni määratus, pidevus ja pidevalt diferentseeruvus).
9. Lokaalses ekstreemumis lõpliku osatuletise olemasolul on see võrdne nulliga. Kolme muutuja funktsiooni kontranäide, et nulliga võrdsed osatuletised ei garanteeri ekstreemumi olemasolu.
10. Punktis P positiivselt määratud hessiaaniga funktsioonil on range lokaalne miinimum punktis P.
11. Antud ristküliku suvalise kahe alajaotuse T ja T' korral $s(T) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S(T')$.
12. Integreeruvusega samaväärsed tingimused (Riemanni ja Darboux’ integreeruvuse samaväärsus; integreeruvus tähendab, et võnkumine saab olla kuitahes väike). Darboux’ lemma võib lugeda tuntuks.
13. Integraal üle mis tahes tõkestatud hulga. Integreeruva funktsiooni tõkestatus.
14. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku, lõigete pindalade integraalina.
15. Hulga Jordani mõttes mõõtuvuse ja Jordani mõõdu definitsioon. Nullmõõduga hulkade omadused. Hulk on mõõtuv parajasti siis, kui raja on nullmõõduga.

16. Tõkestatud funktsiooni integreeruvus ja integraal ei sõltu funktsiooni väärtustest nullmõõduga hulgal.

17. Integraali aditiivsus piirkonna järgi (piirkondade ühisosa on nullmõõduga).

18. Pideva joonega seonduvad mõisted (kaar, lihtne, lihtne kinnine, sirgestuv, sile). Kaar on sirgestuv parajasti siis, kui kõõlmurdjoonte pikkuste hulk on tõkestatud.

19. Sileda joone kaare pikkuse valem.

20. Esimest liiki joonintegraali arvutusvalem üle sileda joone.

21. Teist liiki joonintegraali arvutusvalem üle sileda joone.

22. Esimest ja teist liiki joonintegraalide omadused. Tõestada vaja kolm omadust, sealjuures täpselt üks omadustest peab olema selline, mis teist liiki joonintegraalide korral ei kehti.

23. Greeni valem (sh. ka kommentaar lõpliku ühendi ja üldjuhu kohta).

24. Integreerimisteest sõltumatute joonintegraalide kirjeldus: integraal on sõltumatu integreerimisteest parajasti siis, kui integrand on täpne diferentsiaal (st. mingi potentsiaalifunktsiooni täisdiferentsiaal).

25. Integreerimisteest sõltumatute joonintegraalide kirjeldus: integrand $F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$ on täpne diferentsiaal (st. mingi potentsiaalifunktsiooni täisdiferentsiaal) parajasti siis, kui ta on kinnine diferentsiaal (st. $F_y = G_x$).

26. Trigonomeetriline süsteem on ortonormeeritud süsteem. Funktsiooni f Fourier' rea n-nes osasumma on funktsioonile f parim ruutkeskmine lähend kõigi ülimalt n-järku trigonomeetriliste polünoomide seas. Paaris- ja paaritu funktsiooni Fourier' kordajad, siinus ja koosinusrida.

27. Dirichlet' teoreem tükiti pideva funktsiooni Fourier' rea punktiviisi koondumisest.

28. Féjeri teoreem tükiti pideva funktsiooni Fourier' rea osasummade aritmeetiliste keskmiste ühtlasest koondumisest.