Globaalsed ekstreemumid

1. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

a) $f(x,y)=x^2+y^2-xy,\quad (x,y)\in\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$;
b) $f(x,y)=x^2-y^2+2,\quad (x,y)\in\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$;
c) $f(x,y)=x-2y-1,\quad (x,y)\in\{(x,y)\colon 0\leqslant x,y\leqslant 1,\ 0\leqslant x+y\leqslant 1\}$;
d) $f(x,y)=x^2-xy+y^2,\quad (x,y)\in\{(x,y)\colon |x|+|y|\leqslant 1\}$;
e) $f(x,y)=(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2},\quad (x,y)\in\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 4\}$;
f) Näidake, et funktsioonil $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2,\quad (x,y)\in[-5,5]\times[-1,1]$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

2. Jaotage arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

3. Esitage arv 81 nelja positiivse arvu korrutisena nii, et nende summa oleks minimaalne.

4. Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leidke see, mille täispindala on minimaalne.

5. Missuguste mõõtmete korral on antud ruumalaga V risttahuka kujulisel vannil vähim pindala?

6. Antud kerasse raadiusega R joonestage suurima ruumalaga risttahukas.

7. Kõikidest ühe ja sama alusega ning tipunurgaga kolmnurkadest leidke see, mille pindala on suurim.

8. Kõikidest antud perimeetriga kolmnurkadest leidke see, millel on maksimaalne pindala.

9. Leidke antud perimeetriga $2p$ ristkülik, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

10. Leidke antud perimeetriga $2p$ kolmnurk, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

11. Joonestage ellipsoidi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ sisse maksimaalse ruumalaga risttahukas.

12. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste korrutis oleks maksimaalne?

13. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste summa oleks maksimaalne?

14. Näidake, et mittenegatiivsete arvude $x_1,\ldots,x_n$ geomeetriline keskmine ei ületa aritmeetilist keskmist.

Vastused

1. a) $\max f = f(0,-1) = 2$, $\min f = f(0,1/2) = -0{,}25$; b) $\max f = f(-1,0) = f(1,0) = 3$, $\min f = f(0,1) = f(0,-1) = 1$; c) $\max f = f(1,0) = 0$, $\min f = f(0,1) = -3$; d) $\max f = f(-1,-0) = f(0,-1) = 1$, $\min f = f(0,0) = 0$; e) $\max f = f(0,1) = f(0,-1) = 3/e$, $\min f = f(0,0) = 0$; f) Punktis $(0,0)$ on ainuke lokaalne maksimum $f(0,0) = 0$, kuid näiteks punktis $(5,0)$ $f(5,0) = 25$. Seega punkt $(0,0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt.
2. $10+10+10$.
3. $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$.
4. Kuup.
5. $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$, $z = \dfrac{(2V)^{\frac{1}{3}}}{2}$, kus x ja y on vanni põhja mõõtmed ja z on vanni kõrgus.
6. Kuup küljega $\dfrac{2R}{\sqrt{2}}$.
7. Võrdhaarne.
8. Võrdkülgne kolmnurk.
9. Ristküliku küljed on $\dfrac{2p}{3}$ ja $\dfrac{p}{3}$.
10. Kolmnurga küljed on $\dfrac{3p}{4}$, $\dfrac{3p}{4}$ ja $\dfrac{p}{2}$.
11. Risttahuka külgservad on $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$ ja $\dfrac{2c}{\sqrt{3}}$.
12. Võrdkülgne kolmnurk.
13. Võrdkülgne kolmnurk.

Lahendused

1.e) Statsionaarsed punktid määrame süsteemist $\begin{cases} -2x(3y^2+2x^3-3x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} &= 0, \\ -2y(3y^2+2x^3-3)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} &= 0. \end{cases}$ Süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) \in \left\{(0,0),(0,\pm 1),\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(1,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$. Neis punktides saab f väärtused hulgast $\left\{0, 3\mathrm{e}^{-1}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}}{4}, 3\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}\right\}$. Rajal $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=4\}$ omandab funktsioon väärtused $(2x^3+12-3x^2)\mathrm{e}^4 \in [-16\mathrm{e}^4, 16\mathrm{e}^4]$ (ühe muutuja funktsiooni analüüs!). Neist väärtustest suurim on $16\mathrm{e}^4$ (punktis $(2,0)$) ja vähim on $-16\mathrm{e}^4$ (punktis $(-2,0)$).
1.f) Statsionaarsed punktid määrame süsteemist $\begin{cases} 3x^2-8x+2y &= 0, \\ 2x-2y &= 0, \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) \in \{(0,0)\}$. (Punkt $(2,2)$ ei ole määramispiirkonnas.) Leiame hessiaanid: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, millest järeldub, et $H(0,0)$ on negatiivselt määratud, seega

range lokaalne maksimum. Leiame, et $f(0,0)=0$.

Paneme tähele, et $f(5,0)=25$ ja $f(-5,0)=-225$, mistõttu punktis $(0,0)$ ei ole globaalne ekstreemum.

2. Olgu $D=\{(x,y)\colon\ x>0, y>0, 30-x-y>0\}$. Ülesanne on leida funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$, kus $f(x,y)=x\cdot y\cdot(30-x-y)$, suurim väärtus.

Vaatleme sulundit $\overline{D}=\{(x,y)\colon\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 30\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon\overline{D}\to\mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^{\circ}=D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} 30y-2xy-y^2 &= &0,\\ 30x-2xy-x^2 &= &0,\end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y)=(10,10)$. Seega mujal kui punktis $(10,10)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit hulgas D ei ole. Saame, et $f(10,10)=1000$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $(10,10)$ on globaalne maksimum.

Lahendus 2. Aritmeetilise-geomeetrilise keskmise võrratus.

3. $D=(\mathbb{R}^+)^3$, $f(x,y,z)=x+y+z+\dfrac{81}{xyz}$. Statsionaarse punkti tingimus $\begin{cases} 1-\dfrac{81}{x^2yz} &= &0,\\ 1-\dfrac{81}{xy^2z} &= &0,\\ 1-\dfrac{81}{xyz^2} &= &0,\end{cases}$ on samaväärne nõudega $(x,y,z)=(3,3,3)$. Hessiaan $H(x,y,z)=\dfrac{xyz}{81}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^2} & \dfrac{1}{xy} & \dfrac{1}{xz}\\ \dfrac{1}{xy} & \dfrac{2}{y^2} & \dfrac{1}{yz}\\ \dfrac{1}{xz} & \dfrac{1}{yz} & \dfrac{2}{z^2}\end{pmatrix}$ on positiivselt määratud iga $(x,y,z)\in D$ korral. Lause põhjal on punktis $(3,3,3)$ funktsioonil f globaalne miinimum $f(3,3,3)=12$.

Lahendus 2. Aritmeetilise-geomeetrilise keskmise võrratus.

4. Olgu fikseeritud $V>0$, $D=(\mathbb{R}^+)^2$, $f(x,y)=2xy+2x\cdot\dfrac{V}{xy}+2y\cdot\dfrac{V}{xy}=2xy+2V\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$. Tarvis on leida funktsiooni f vähim väärtus hulgas D. Statsionaarse punkti tingimus $\begin{cases} 2y-\dfrac{2V}{x^2} &= &0,\\ 2x-\dfrac{2V}{y^2} &= &0\end{cases}$ on samaväärne tingimusega $(x,y)=\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)$.

Tähistame $D_1=\{(x,y)\colon\ x>0, y>0, x+y<2\sqrt[3]{2V}\}$. Paneme tähele, et $\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)\in D_1$. Lahtises kumeras hulgas D_1 on lause põhjal punktis $\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus $f\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)=6\sqrt[3]{V^2}$, sest hessiaan $H(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{4V}{x^3} & 2\\ 2 & \dfrac{4V}{y^3}\end{pmatrix}$ on positiivselt määratud iga

$(x,y)\in D$ korral. Tõepoolest, kuna $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < \sqrt[3]{4V^2}$, siis $\frac{16V^2}{x^3y^3} - 4 > 0$.

Kui aga $(x,y)\in D\setminus D_1$, siis $x+y \geqslant 2\sqrt[3]{2V}$, mistõttu $f(x,y) = 2xy + \frac{2V(x+y)}{xy} \geqslant 2xy + \frac{4V\sqrt[3]{2V}}{xy} \geqslant 2\sqrt{8V\sqrt[3]{2V}} = 2^{\frac{8}{3}}V^{\frac{2}{3}} > 6\sqrt[3]{V^2}$, kuna $2^8 = 256 > 216 = 6^3$. Kokkuvõttes on punktis $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus hulgas D.

5. Olgu fikseeritud $V>0$, $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $f(x,y) = xy + 2x\cdot\frac{V}{xy} + 2y\cdot\frac{V}{xy} = xy + 2V\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Tarvis on leida funktsiooni f vähim väärtus hulgas D. Statsionaarse punkti tingimus $\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$ on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$.

Tähistame $D_1 = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, x+y<2\sqrt[3]{4V}\}$. Paneme tähele, et $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)\in D_1$. Lahtises kumeras hulgas D_1 on lause põhjal punktis $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus $f\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 3\sqrt[3]{4V^2}$, sest hessiaan $H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$ on positiivselt määratud iga $(x,y)\in D$ korral. Tõepoolest, kuna $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < \sqrt[3]{16V^2}$, siis $\frac{16V^2}{x^3y^3} - 1 > 0$.

Kui aga $(x,y)\in D\setminus D_1$, siis $x+y \geqslant 2\sqrt[3]{4V}$, mistõttu $f(x,y) = xy + \frac{2V(x+y)}{xy} \geqslant xy + \frac{4V\sqrt[3]{4V}}{xy} \geqslant 2\sqrt{4V\sqrt[3]{4V}} = 2^{\frac{7}{3}}V^{\frac{2}{3}} > 3\sqrt[3]{4V^2}$, kuna $2^7 = 128 > 108 = 3^3\cdot 4$. Kokkuvõttes on punktis $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ funktsiooni f vähim väärtus hulgas D.

6. Olgu fikseeritud R. Risttahuka servapikkused olgu x, y ja z, siis $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$. Ülesanne on leida funktsiooni $f(x,y) = x\cdot y\cdot\sqrt{4R^2-x^2-y^2}$ suurim väärtus hulgas $D = \{(x,y)\colon\ x>0, y>0, x^2+y^2<4R^2\}$.

Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x,y)\colon\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 4R^2\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D}\to\mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \frac{4xR^2-2xy^2-x^3}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} = \\ \frac{4yR^2-2x^2y-y^3}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} = \end{cases}$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y) = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit ei ole. Saame, et $f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$. Rajal ∂D on f

väärtus null, seega punktis $\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$ on globaalne maksimum.

7. Olgu kolmnurga alus a ja tipunurk α. Ülejäänud kaks külge olgu b ja c, mille vastasnurgad olgu β ja γ. Kolmnurga pindala on $\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a^2}{2\sin\alpha} \cdot \sin\beta\sin\gamma$. See on ühe muutuja ekstreemumülesanne funktsiooni $f(x) = \frac{a^2}{2\sin\alpha} \cdot \sin x \sin(\pi - \alpha - x)$ jaoks vahemikus $(0, \pi - \alpha)$. Globaalne maksimum on $\frac{a^2}{2\sin\alpha}\left(\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)^2$ punktis $x = \frac{\pi - \alpha}{2}$.

8. Olgu fikseeritud p (pool ümbermõõtu). Ülesanne on leida funktsiooni $f(x, y) = \sqrt{p \cdot (p-x) \cdot (p-$ suurim väärtus hulgas $D = \{(x, y)\colon\ x > 0, y > 0, x + y < 2p\}$.
Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x, y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 2p\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse.
Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\begin{cases} \frac{p(p-y)(2p-2x-y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}} \\ \frac{p(p-x)(2p-x-2y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}} \end{cases}$
süsteem on samaväärne tingimusega $(x, y) = \left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$ funktsioonil f lokaalne ekstreemumit ei ole. Saame, et $f\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right) = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$ on globaalne maksimum.

9. Ühe muutuja ekstreemumülesanne, $f(x) = \pi x^2(p - x)$ lõigus $[0, p]$. Globaalne maksimum on punktis $x = \frac{2p}{3}$.

10. Olgu kolmnurga küljed a, b ja c, kusjuures külg a olgu pöörlemisteljeks. Pöördkeha koosneb kahest põhjati kokkupandud koonusest. Koonuse põhja raadiuse ruut on $b^2(\sin\gamma)^2 = b^2 - b^2(\cos\gamma)^2 = b^2 - \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$. Sealjuures $a + b + c = 2p$. Koonuste koguruumala on $f(b) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(b^2 - \frac{((2p - b - a)^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}\right) \cdot a$. See on ühe muutuja ekstreemumülesanne vahemikus $(0, 2p - a)$. Globaalne maksimum on punktis $b = \frac{2p - a}{2}$.

11. Mõeldud on, et risttahuka servad on paralleelsed koordinaattelgedega. Olgu fikseeritud R. Risttahuka servapikkused olgu x, y ja z, siis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 4$. Ülesanne on leida funktsiooni $f(x, y) = x \cdot y \cdot c\sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ suurim väärtus hulgas $D = \{(x, y)\colon\ x > 0, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 4\}$.
Vaatleme sulundit $\overline{D} = \{(x, y)\colon\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 4\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väär-

tuse. Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{cy\cdot(4a^2b^2-2b^2x^2-a^2}{ab\sqrt{4a^2b^2-a^2y^2-b^2}} \\ \dfrac{cx\cdot(4a^2b^2-2a^2y^2-b^2}{ab\sqrt{4a^2b^2-a^2y^2-b^2}} \end{array}\right.$

süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y)=\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)$ on globaalne maksimum.

12. Olgu $D=\{(x,y)\colon x>0, y>0, \pi-x-y>0\}$. Ülesanne on leida funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$, kus $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(\pi-x-y)$, suurim väärtus.
Vaatleme sulundit $\overline{D}=\{(x,y)\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant\pi\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon\overline{D}\to\mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse.
Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\left\{\begin{array}{rcl}\cos x\sin(2x+y) & = & 0,\\ \sin x\sin(x+2y) & = & 0,\end{array}\right.$ süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y)=\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit hulgas D ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. Rajal ∂D on f väärtus null, seega punktis $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ on globaalne maksimum. Otsitav kolmnurk on võrdkülgne.
Lahendus 2. Jenseni võrratus.

13. Olgu $D=\{(x,y)\colon x>0, y>0, \pi-x-y>0\}$. Ülesanne on leida funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$, kus $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(\pi-x-y)$, suurim väärtus.
Vaatleme sulundit $\overline{D}=\{(x,y)\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant\pi\}$. Hulk $\overline{D}$ on tõkestatud ja kinnine, seega Weierstrassi teoreemi kohaselt funktsioon $f\colon\overline{D}\to\mathbb{R}$ saavutab seal oma suurima väärtuse.
Statsionaarsed punktid hulgas $\overline{D}^\circ = D$ leiame võrrandisüsteemist $\left\{\begin{array}{rcl}\cos x+\cos(x+y) & = & 0,\\ \cos y+\cos(x+y) & = & 0.\end{array}\right.$
Süsteemist järeldub, et $\cos x=-\cos(x+y)=\cos y$, millest $x,y\in(0,\pi)$ tõttu $x=y$. Niisiis $\cos x=-\cos 2x$, millest järeldub, et $2(\cos x)^2+\cos x-1=0$. Niisiis $\cos x=\dfrac{1}{2}$, mistõttu $x=\dfrac{\pi}{3}$.
Kokkuvõttes leiame, et süsteem on samaväärne tingimusega $(x,y)=\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$. Seega mujal kui punktis $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ funktsioonil f lokaalset ekstreemumit hulgas D ei ole. Saame, et $f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Rajal ∂D on f avaldises üks liidetav null, järele jääb $f(x,y)=\sin x+\sin y$ või $f(x,y)=2\sin x$ või $f(x,y)=2\sin y$. Et ükski neist väärtustest ei saa ületada arvu $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}>2$, on punktis $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ globaalne maksimum. Otsitav kolmnurk on võrdkülgne.
Lahendus 2. Jenseni võrratus.