MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 10: Taylori polünoom

16. aprill 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 23. aprill 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Taylori valem

Olgu $f \in C^n[a,b]$ (st f on n korda pidevalt diferentseeruv) ning eksisteerigu $f^{(n+1)}(x)$ iga $x \in (a,b)$ korral (st $f^{(n+1)}$ ei pea olema pidev). Lisaks olgu $x_0 \in [a,b]$. Siis iga $x \in [a,b]$ korral leidub $\xi = \xi(x) \in (x, x_0)$ nii, et

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Siin

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

on n-astme Taylori polünoom punktis x_0, mis lähendab funktsiooni f hästi punkti x_0 ümbruses (st jääkliikme $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ jaoks kehtib $\lim\limits_{x \to x_0} R_n(x) = 0$).

Ülesanne. Olgu

$$f(x) = e^x \cos x$$

ning $x_0 = 0$. Lähendage funktsiooni f Taylori polünoomidega $P_2(x)$, $P_3(x)$ ja $P_4(x)$. Selleks

- joonestage samas teljestikus funktsioonide $f(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ ja $P_4(x)$ graafikud, kui $x \in [0,1]$;
- leidke vastavad jääkliikmed $R_2(x)$, $R_3(x)$ ja $R_4(x)$;
- hinnake viga punktis 0.5 kasutades jääkliikmest saadavat hinnangut ning võrrelge saadud tulemust tegeliku veaga, st leidke hinnangud $|R_i(0.5)|$ jaoks ning arvutage väärtused $|f(0.5) - P_i(0.5)|$, $i = 2, 3, 4$.

NB! Tuletised tuleb leida analüütiliselt. Tuletiste leidmiseks ja hindamiseks võib kasutada nt WolframAlpha-t.