MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 11: Vähimruutude meetod

23. aprill 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 30. aprill 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Vähimruutude meetod

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = f_m, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = f, \tag{1}$$

kus $m \geq n$, A on $m \times n$ maatriks, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^m$. Kui $m > n$, st võrrandeid on rohkem kui muutujaid, siis võib juhtuda, et süsteem on vastuoluline, st süsteemi ei ole võimalik lahendada. Sellisel juhul räägitakse lahendist vähimruutude mõttes.

Defineerime jääkliikme $R(x) = f - Ax$ ning vaatleme saadud vektori 2-normi ruutu

$$\|R(x)\|^2 = \|f - Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)^2.$$

Süsteemi (1) lahendiks vähimruutude mõttes nimetatakse elementi $x \in \mathbb{R}^n$, mille korral

$$\|R(x)\|^2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|R(y)\|^2$$

ehk võrrandite vasaku ja parema poole erinevuste ruutude summa on minimaalne.

Süsteemi (1) **normaalvõrrandite süsteemiks** nimetatakse süsteemi

$$A^T Ax = A^T f \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i,\ k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Siin $A^T A$ on $n \times n$ maatriks ja $A^T f \in \mathbb{R}^n$, st võrrandeid on sama palju kui muutujaid.

Teoreem. Element x on süsteemi (1) lahend vähimruutude mõttes parajasti siis, kui x on süsteemi (2) lahend.

Teoreem. Süsteem (2) on üheselt lahenduv parajasti siis, kui maatriksi A veerud on lineaarselt sõltumatud.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud argumendi väärtused $x_0, \dots, x_m$ ning neile vastavad funktsiooniväärtused $f_0 = f(x_0), \dots, f_m = f(x_m)$. Valitakse välja mingid lineaarselt sõltumatud koordinaatfunktsioonid φ_j, $j = 0, \dots, n$, $n \leq m$, ning otsitakse funktsiooni f lähendit kujul

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x),$$

kus $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$. Kordajad c_j leitakse tingimustest $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, m$. Kui $n = m$, on tegemist interpoleerimisülesandega, kui $n < m$, on tegemist vähimruutude meetodiga, st süsteem lahendatakse vähimruutude mõttes.

Lähendades polünoomidega, on koordinaatfunktsioonideks

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_n(x) = x^n.$$

Vastava lineaarvõrrandisüsteemi $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, m$, kordajad on $a_{ij} = \varphi_j(x_i) = x_i^j$ ning normaalvõrrandite süsteem esitub kujul

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^{k+j} \right) c_j = \sum_{i=0}^{m} x_i^k f_i, \quad k = 0, \dots, n. \tag{3}$$

Teoreem. Süsteem (3) on üheselt lahenduv parajasti siis, kui sõlmede $x_0, \dots, x_m$ seas on vähemalt $n + 1$ erinevat.

Ülesanne. Lähendage funktsiooni $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, vähimruutude meetodil polünoomiga $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, kasutades sõlmedena väärtusi $x_i = -1 + \frac{2}{m} i$, $i = 0, \dots, m$, $m > n$.
Hinnake viga $\varepsilon_n = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x) - f(x)|$, leides maksimaalse hälbe kümme korda tihedamal võrgul, st

$$\bar{\varepsilon}_n = \max_{0 \leq i \leq 10m} |P_n(z_i) - f(z_i)|, \; z_i = -1 + \frac{2}{10m} i.$$

Joonistage funktsioonide $P_n(x)$ graafikud, kuhu on kantud ka punktid $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, m$.
Parameetrid m ja n valige vastavalt väärtusele α:

- Kui $\alpha \,\vdots\, 3$, siis $n = 5$ ja $m = 6, 7, 8, \dots$ (vaadelge eraldi paarisarvulisi ja paarituid m väärtusi). Kuidas muutub m kasvades viga $\bar{\varepsilon}$?
- Kui $(\alpha - 1) \,\vdots\, 3$, siis $m = 20$, $n = 1, \dots, 19$. Mis astme polünoomi korral on $\bar{\varepsilon}$ vähim?
- Kui $(\alpha - 2) \,\vdots\, 3$, siis $m = 21$, $n = 1, \dots, 20$. Mis astme polünoomi korral on $\bar{\varepsilon}$ vähim?