MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 12: Numbriline diferentseerimine

30. aprill 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesannete lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 7. mai 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Numbriline diferentseerimine

Olgu antud võrdsete vahemikega sõlmed $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$, ning funktsiooni f väärtused $f(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Numbrilise diferentseerimise valemid võimaldavad leida funktsiooni tuletise (ka kõrgemat järku tuletiste) väärtusi sõlmedes. Esimest järku täpsusega diferentsvalemid, mis kasutavad funktsiooni väärtusi kahes sõlmes:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}], \tag{1}$$

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2}$$

Teist järku täpsusega diferentsvalemid, mis kasutavad funktsiooni väärtusi kolmes sõlmes:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \tag{3}$$

$$f'(x_i) = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+2}], \tag{4}$$

$$f'(x_i) = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in [x_{i-2}, x_i]. \tag{5}$$

Kui täpsete väärtuste f_i asemel on teada ligikaudsed väärtused $\tilde{f}_i$ veaga $\varepsilon_i = |f_i - \tilde{f}_i|$, siis lisaks tinglikule veale, mis tekib jääkliikme ärajätmisel, avaldab mõju ka tingimatu viga – algandmete täpsus ε_i. Kui samm h väheneb, siis kasvab tingimatu vea mõju.

Näide. Vaatleme valemit (3) ning hindame tekkivat viga

$$\left| f'(x_i) - \frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_{i-1}}{2h} \right| = \left| \frac{(f_{i+1} - \tilde{f}_{i+1}) - (f_{i-1} - \tilde{f}_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M,$$

kus $\varepsilon = \max\{\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i-1}\}$ ning $|f'''(\xi)| \le M$, $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Eeldusel, et ε ja M on piisavalt täpsed hinnangud, saame leida optimaalse h väärtuse, mille korral veahinnang on minimaalne. Selleks leiame $e(h) = \dfrac{\varepsilon}{h} + \dfrac{h^2}{6} M$ statsionaarsed punktid. Võrdusest $e'(h) = -\dfrac{\varepsilon}{h^2} + \dfrac{h}{3} M = 0$ saame $h_{opt} = \sqrt[3]{\dfrac{3\varepsilon}{M}}$ ning kuna $e''(h_{opt}) = \dfrac{2\varepsilon}{h_{opt}^3} + \dfrac{M}{3} > 0$, on tegemist miinimumkohaga.

Praktikas ei ole optimaalse sammu h leidmine võimalik, kuna puudub informatsioon jääkliikmes esineva kõrgemat järku tuletise kohta. Oluline on aga teada, et sammu vähendamine ei lisa alati tulemusele täpsust.

Ülesanne 1. Tabelis on toodud funktsiooni $f(x)$ lähisväärtused $\tilde{f}(x)$. Kasutage kolme sõlme valemitest (3)–(5) täpseimat, et leida $f'(x)$ lähisväärtused $\tilde{f}'(x)$. Arvutage funktsiooni $f(x)$ analüütilise tuletise $f'(x)$ abil vead $|f'(x) - \tilde{f}'(x)|$. Miks viga esimeses ja neljandas reas on suurem kui viga teises ja kolmandas reas?
Andmed valige vastavalt väärtusele α:

- Kui $\alpha \,\vdots\, 4$, siis

x	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{f}'(x)$	$\|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|$
1.1	9.025013		
1.2	11.023176		
1.3	13.463738		
1.4	16.444647		

  $f(x) = e^{2x}$

- Kui $(\alpha - 1) \,\vdots\, 4$, siis

x	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{f}'(x)$	$\|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|$
8.1	16.944099		
8.3	17.564921		
8.5	18.190562		
8.7	18.820910		

  $f(x) = x \ln x$

- Kui $(\alpha - 2) \,\vdots\, 4$, siis

x	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{f}'(x)$	$\|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|$
2.9	−2.8157787		
3.0	−2.9699775		
3.1	−3.0973190		
3.2	−3.1945433		

  $f(x) = x \cos x$

- Kui $(\alpha - 3) \,\vdots\, 4$, siis

x	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{f}'(x)$	$\|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|$
2.0	0.9609060		
2.2	1.2433300		
2.4	1.5328910		
2.6	1.8260042		

  $f(x) = 2(\ln x)^2$

Ülesanne 2. Leidke $f'(x_\alpha)$ lähend valemi (1) või (2) abil, kasutades sammuna väärtusi $h = \dfrac{h_\alpha}{10^i}$, $i = 0, \ldots, 8$. Algandmed $\tilde{f}_i$ arvutage täpsusega k komakohta, st veahinnanguga $|f_i - \tilde{f}_i| \leq 0.5 \cdot 10^{-k}$. Printige välja järgmine tabel

i	h	$\tilde{f}'(x_\alpha)$	$\lvert f'(x_\alpha) - \tilde{f}'(x_\alpha)\rvert$
0			
$\vdots$			
8			

Leidke $f'(x_\alpha)$ jaoks optimaalne sammu pikkus h_{opt}, kasutades sama valemit (1) või (2) (näites on h_{opt} leitud valemi (3) jaoks), ka algandmed on antud sama täpsusega, st $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-k}$. Selleks peate hindama vaadeldaval lõigul $f''(\xi)$ väärtusi. Kas teoreetiliselt leitud h_{opt} on kooskõlas praktiliste arvutustulemustega?

Andmed valige vastavalt väärtusele α:

- Kui $\alpha \vdots 4$, siis

  $f(x) = e^{2x}$, $x_\alpha = 1.5$, $h_\alpha = 0.1$, $k = 6$

- Kui $(\alpha - 1) \vdots 4$, siis

  $f(x) = x \ln x$, $x_\alpha = 3.3$, $h_\alpha = 0.2$, $k = 6$

- Kui $(\alpha - 2) \vdots 4$, siis

  $f(x) = x \cos x$, $x_\alpha = 8.2$, $h_\alpha = 0.1$, $k = 7$

- Kui $(\alpha - 3) \vdots 4$, siis

  $f(x) = 2(\ln x)^2$, $x_\alpha = 2.0$, $h_\alpha = 0.2$, $k = 7$