MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 13–15: Numbriline integreerimine

7.–21. mai 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesannete lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 28. mai 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Newton-Cotesi valemid

Olgu vaja leida integraal

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Kui on võimalik leida funktsiooni f algfunktsioon F, saab kasutada Newton-Leibnizi valemit

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Kui algfunktsioon ei ole esitatav elementaarfunktsioonide kaudu või on integreeritav funktsioon f esitatud väärtuste tabelina, st teada on vaid lõplik arv funktsioni väärtusi, tuleb kasutada ligikaudseid meetodeid.

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi saamiseks asendatakse integreeritav funktsioon interpolatsioonipolünoomiga. Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalmeid, milles kaalufunktsioon puudub (st on konstantselt 1) ning sõlmed on võrdsete vahemikega, nimetatakse **Newton-Cotesi valemiteks**.

Olgu $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, siis Lagrange'i polünoom $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{ni}(x)$ interpoleerib funktsiooni f väärtusi sõlmedes x_i, st $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Newton-Cotesi valemid on kujul

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \big(P_n(x) + r_n(f,x)\big)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f),$$

kus $A_i = \int_a^b l_{ni}(x)dx$. Tähistades $B_i = \dfrac{A_i}{b-a}$, saame kirja panna kordajate B_i omadused (tõestatakse loengus):

$$1)\ \sum_{i=0}^{n} B_i = 1; \qquad 2)\ B_i = B_{n-i}, i = 0, \dots, n.$$

Trapetsvalem

Olgu $n = 1$, siis $x_0 = a$, $x_1 = b$ ja kehtib

$$B_0 + B_1 = 1,$$
$$B_0 = B_1,$$

st $B_0 = B_1 = \frac{1}{2}$. Trapetsvalem lihtvalemina esitub kujul

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) + R_1(f),}$$

kus $R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]$. Jaotades lõigu $[a,b]$ N võrdseks osalõiguks otspunktidega $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,N$, $h = \frac{b-a}{N}$, ning rakendades igale osale trapetsvalemit, saame trapetsvalemi liitvalemina kujul

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{b-a}{2N}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N) + R_1(f,N),}$$

kus $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\dots,N$, ja $R_1(f,N) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]$.

Simpsoni valem

Olgu $n = 2$, siis $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ ja kehtib

$$\begin{aligned} &B_0 + B_1 + B_2 = 1, \\ &B_0 = B_2. \end{aligned}$$

Kolmanda tingimuse saame sellest, et interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem on täpne iga ülimalt n astme polünoomi f korral. Olgu $[a,b] = [0,2]$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = x^2$, siis ühelt poolt

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{3},$$

teiselt poolt

$$\int_0^2 f(x)dx = 2(B_0 f(0) + B_1 f(1) + B_2 f(2)) = 2(B_0 \cdot 0 + B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 4),$$

millest $B_1 + 4B_2 = \frac{4}{3}$. Süsteemi lahendiks on $B_0 = B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{4}{6}$.

Simpsoni valem lihtvalemina esitub kujul

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R_2(f),}$$

kus $R_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{IV}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$. Simpsoni valem on liitvalemina rakendatav, kui lõik on jaotatud paarisarvuks osalõikudeks. Jaotades lõigu $[a,b]$ N võrdseks osalõiguks, kus N on paarisarv, otspunktidega $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,N$, $h = \frac{b-a}{N}$, ning rakendades osadele eraldi Simpsoni valemit, saame Simpsoni valemi liitvalemina kujul

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3N}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 4f_{N-1} + f_N) + R_2(f,N),}$$

kus $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\dots,N$, ja $R_2(f,N) = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{IV}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$.

Newtoni $\frac{3}{8}$-valem

Olgu $n = 3$, siis $B_0 = B_3 = \frac{1}{8}$, $B_1 = B_2 = \frac{3}{8}$ ning $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = b$, $h = \frac{b-a}{3}$ korral

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right) + R_3(f),}$$

kus $R_3(f) = -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{IV}(\xi)$. Newtoni $\frac{3}{8}$-valem liitvalemina esitub kujul

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{3(b-a)}{8N}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \ldots + 3f_{N-1} + f_N) + R_3(f,N),}$$

kus $N = 3m$, $m \in \mathbb{N}$, $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$, ja $R_3(f,N) = -\frac{(b-a)^5}{80N^4} f^{IV}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$.

Veel Newton-Cotesi valemeid

n	$B_0 = B_n$	$B_1 = B_{n-1}$	$B_2 = B_{n-2}$	B_3
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} B_i f(x_i)$$

$x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$

Ristkülikvalem

Ka ristkülikvalemit võib vaadelda mingis mõttes interpolatsioonitüüpi valemina, kus integreeritava funktsiooni f lähendiks võetakse tükiti konstantne funktsioon, mille korral interpolatsioonitingimused on rahuldatud lõigu keskpunktides.

Ristkülikvalem lihtvalemina

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_0(f),}$$

kus $R_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, ning liitvalemina

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\left(f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + \ldots + f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right) + R_0(f,N),}$$

kus $h = \frac{b-a}{N}$, $R_0(f,N) = \frac{(b-a)^3}{24N^2}f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]$.

Runge võte vea hindamiseks

Olgu integraali täpne väärtus I ning kvadratuurvalemi abil sammu h korral leitud lähisväärtus I_h ja sammu $2h$ korral leitud lähisväärtus I_{2h}. Kui kvadratuurvalemi jääkliige $I - I_h$ esitub kujul $I - I_h = \kappa h^q + O(h^{q+1})$, kus κh^q on jääkliikme peaosa (κ on h-st sõltumatu, aga funktsioonist f sõltuv konstant), siis kehtib hinnang

$$I - I_h = \frac{I_h - I_{2h}}{2^q - 1} + O(h^{q+1}).$$

Trapetsvalemi ja ristkülikvalemi korral $q = 2$, Simpsoni valemi ja Newtoni $\frac{3}{8}$-valemi korral $q = 4$. Sellel seosel põhinevat vea ligikaudse hindamise meetodit nimetatakse **Runge võtteks**.

Ülesanne 1. Kasutage määratud integraali leidmiseks Newton-Cotes'i valemeid

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} B_i f(x_i), \quad x_i = a + ih,\ h = \frac{b-a}{n},$$

$n = 1, \ldots, 6$ korral.

n	$B_0 = B_n$	$B_1 = B_{n-1}$
1	$\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

n	$B_0 = B_n$	$B_1 = B_{n-1}$	$B_2 = B_{n-2}$	B_3
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$

Integraal valige vastavalt parameetri α väärtusele:

1) kui $\alpha \,\vdots\, 4$, siis $\int_{0.1}^{5} \frac{\sin x}{x} dx$;

2) kui $(\alpha - 1) \,\vdots\, 4$, siis $\int_0^2 x^x dx$;

3) kui $(\alpha - 2) \,\vdots\, 4$, siis $\int_{0.2}^{2} \frac{e^x}{x} dx$;

4) kui $(\alpha - 3) \,\vdots\, 4$, siis $\int_0^2 e^{-x^2} dx$.

Ülesanne 2. Leidke Newton-Leibnizi valemi abil integraali

$$\int_1^2 xe^{(1+0.1\alpha)x}dx$$

väärtus. Algfunktsiooni leidmisel võite kasutada `www.WolframAlpha.com`'i, Mathcad'i sümbolarvutust vmt.
Leidke integraali väärtus trapetsvalemi abil, kui $N = 2, 4, 8, 16, \ldots$. Lõpetage protsess, kui Runge võtte abil hinnatud viga

$$|R_h| = \left|\frac{I_h - I_{2h}}{2^q - 1}\right| \leq 10^{-6}.$$

Trükkige ekraanile kvadratuursummad, Runge vead ning tegelikud vead iga $N = 2, 4, 8, 16, \ldots$ korral.
Korrake sama ülesannet kasutades Simpsoni ning ristkülikvalemit.