MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 1: Sissejuhatus. Vead ligikaudsel arvutamisel.

12. veebruar 2019

Arvestuse saamiseks praktikumi osas tuleb lahendada kõik arvestuslikud ülesanded, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Mõnes arvestuslikus ülesandes esineb parameeter α, mis on iga tudengi jaoks unikaalne ning mille väärtuse saate teada õppejõult.

Esimese praktikumi ülesannete esitamise lõpptähtaeg on 19. veebruar 2019.

Programm Python

Arvutipraktikumis kasutame vabavaralist Python tarkvara ja selle pakette (oma kodutöid võib teha ka mõnes muus programmis). Programmi Python lihtsamate tõdede kordamiseks on veebis saadaval palju erinevaid materjale, näiteks eesti keeles `http://progeopik.cs.ut.ee/` või inglise keeles `https://docs.python.org/3/tutorial/`.

Toome mõned lihtsad näited Pythoni kasutamisest arvutuste tegemisel.

```
v0=1
t=10
g=9.8
s=v0*t+0.5*g*t**2
print(s)
```

```
C = -20
dC = 5
while C <= 40:
   F = (9.0/5)*C + 32
   print(C,F)
   C = C + dC
```

```
Ckraadid = [-20,-15,-10,-5,0,5,10,15,20,25,30,35,40]
for C in Ckraadid:
   F = (9.0/5)*C + 32
   print(C,F)
```

```
import math
r = 2.3
pindala = math.pi*r*r
print(pindala)
```

Pakett numpy

Meie kursuses kasutame laialdaselt Pythoni paketti *numpy*, selle lühitutvustus on aadressil `https://docs.scipy.org/doc/numpy/user/quickstart.html`.

Toome mõned lihtsad näited paketi *numpy* kasutamisest.

```
import numpy as np

def f(x):   #defineerib ühe muutuja funktsiooni f
   return np.exp(-x)   #tagastab e^{-x}

a=np.linspace(-1,1,5)   #loob 5-komponendilise vektori
                        #[-1,-0.5,0,0.5,1]
b=np.zeros(len(a))   #loob nullidest koosneva vektori,
                     #mille pikkus on võrdne vektori a pikkusega
a[0]   #tagastab vektori a esimese elemendi
a[1:-1]   #tagastab vektori a elemendid teisest kuni eelviimaseni
f(a)   #rakendab funktsiooni f vektori a kõikidele elementidele
       #(tulemus on vektor)
np.zeros((3,5))   #loob nullidest koosneva 3*5 maatriksi
np.ones((3,5))   #loob ühtedest koosneva 3*5 maatriksi
A=np.ones((3,5))
A*a   #maatriksite A ja a korrutis elementide kaupa
      #(ei ole maatriksite korrutamine)
B=np.eye(2)   #loob teist järku ühikmaatriksi
C=np.array([[0.0,-1.0],[1.0,0.0]])
D=np.dot(C,C)   #maatriksite C ja C korrutis
```

Ülesanne 1. Leidke n esimese naturaalarvu summa.

```
def s(n):
   s = 0
   for i in range(n+1):
      s = s+i
   return s
```

Graafikud Pythonis

Graafikute loomiseks on Pythonis mitmeid erinevaid võimalusi, meie kasutame üldiselt paketti *Matplotlyb* (vt `https://matplotlib.org/users/index.html`).

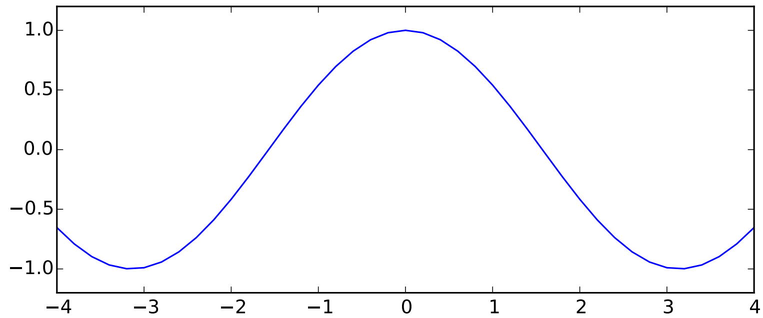
Ülesanne 2. Joonestada funktsiooni $cos(x)$ graafik lõigus $[-4;4]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def h(t):
   return np.cos(t)

t=np.linspace(-4,4,41)   #loome argumentide vektori
y=h(t)   #rakendame funktsiooni h vektorile t

plt.plot(t,y)   #joonistab murdjoone (t_i,y_i), i=0..len(t)-1
plt.show()   #näitab joonist
```



Ülesanne 3. Kujutada funktsioonid $f_1(t) = t^2 e^{-t^2}$ ja $f_2(t) = t^4 e^{-t^2}$ lõigus $[0, 3]$ ühel graafikul. Tulemus salvestada faili Joonis1.png.

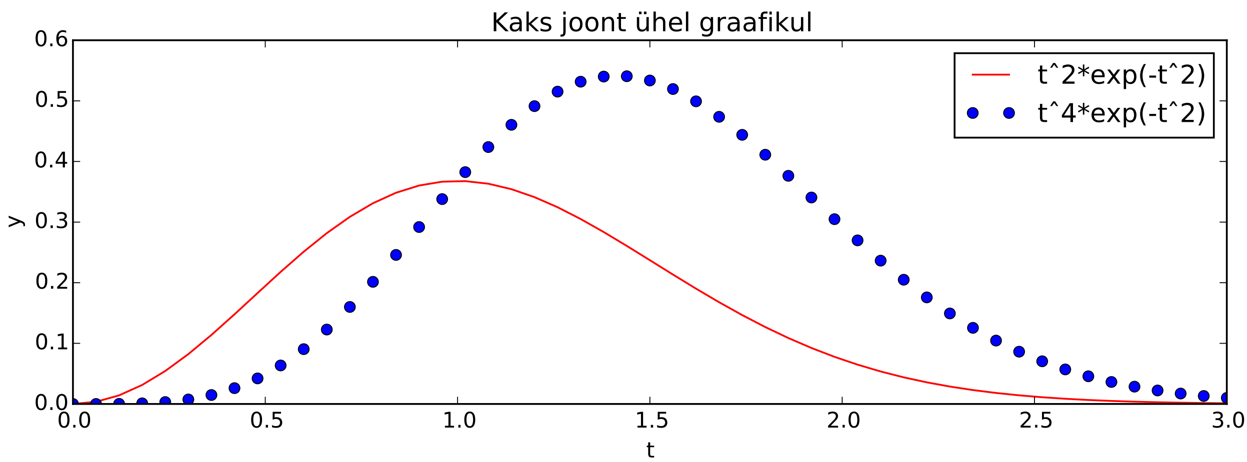
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f1(t):   #defineerib funktsiooni f1
   return t**2*np.exp(-t**2)

def f2(t):   #defineerib funktsiooni f2
   return t**2*f1(t)

t = np.linspace(0,3,51)   #loob sõlmed
y1 = f1(t)   #funktsiooni f1 väärtused sõlmedes
y2 = f2(t)   #funktsiooni f2 väärtused sõlmedes

plt.plot(t,y1,'r-')   #f1 graafik: punane (r) joon (-)
plt.plot(t,y2,'bo')   #f2 graafik: sinised (b) ringid (o)
plt.xlabel('t')   #x-telg
plt.ylabel('y')   #y-telg
plt.legend(['t^2*exp(-t^2)','t^4*exp(-t^2)'])   #joonte tähendused
plt.title('Kaks joont ühel graafikul')   #graafiku nimi
plt.savefig ('Joonis1.png')  #salvestab graafiku faili Joonis1.png
plt.show()
```



<u>Ülesanne 4.</u> Arvutage välja jada $a_k = \sin(k)$, $k \in \mathbb{N}$, esimesed 100 liiget ning esitage need tulpdiagrammil. Leidke esimene indeks k, mille korral $a_k > d$, kus $0.9 < d < 1$ on mingi fikseeritud arv.

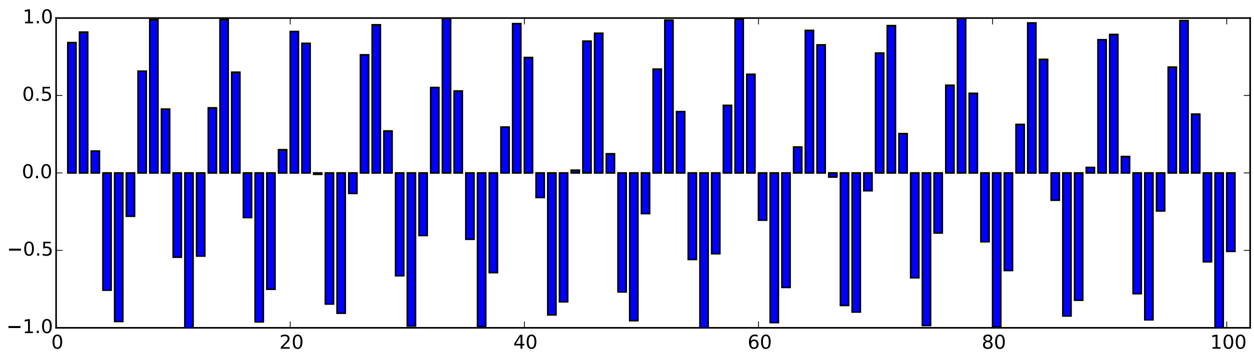
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

k = np.linspace(1,100,100)
a = np.sin(k)
def ind(d):
   i=0
   while a[i]<=d:
      i=i+1
   return i+1

print('Sisesta d: ')
d = float(input())
print('a_',ind(d),'>',d)

fig = plt.figure()   # Kõigepealt loome joonist tähistava objekti
ax = fig.add_subplot(1,1,1)   # ja lisame joonisele joonestusala
ax.set_ylim(-1,1)   # Määrame y-telje nähtavuspiirkonna
ax.set_xlim(0,102)   # Määrame x-telje nähtavuspiirkonna
ax.bar(k,a,0.7)   # Lisame tulbad (0.7 on tulba laius)
plt.show()
```

Ülemises programmikoodis on üks puudus – ta ei tööta igasuguste d väärtuste korral. Kuidas seda puudust likvideerida?



Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu a suuruse A ligikaudne väärtus. Ligikaudse väärtuse a **tõeliseks veaks** nimetatakse suurust $\Delta a = A - a$. Ligikaudse arvu a **absoluutseks veaks** nimetatakse positiivset arvu Δ, mis rahuldab võrratust

$$|\Delta a| = |A - a| \leq \Delta.$$

Mida väiksem on Δ, seda parem on hinnang. Kuna $a - \Delta \leq A \leq a + \Delta$, siis kirjutatakse $A = a \pm \Delta$.

Ligikaudse arvu a **relatiivseks veaks** nimetatakse positiivset arvu δ, mille korral on rahuldatud võrratus

$$\left|\frac{\Delta a}{a}\right| = \left|\frac{A - a}{a}\right| \leq \delta.$$

Võib võtta $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$.

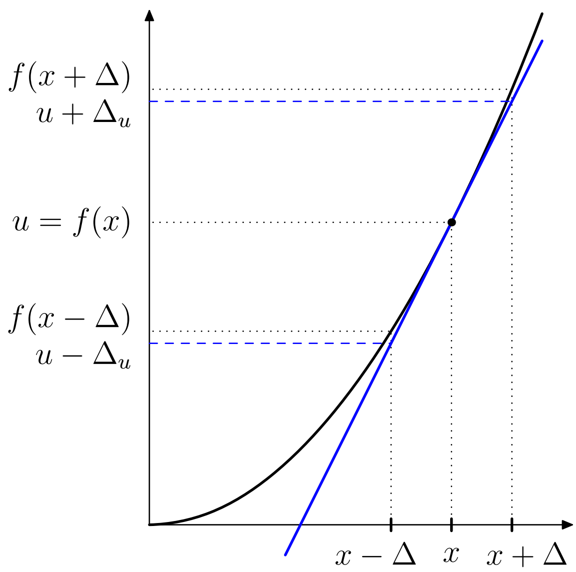
Kui on teada argumentide $x_1, \ldots, x_n$ väärtused absoluutsete vigadega $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, siis diferentseeruva funktsioooni f väärtuse $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ absoluutseks veaks loetakse

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta_i,$$

eeldusel, et absoluutsed vead Δ_i on väikesed. Väärtuse u relatiivseks veaks loetakse

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln |u|}{\partial x_i}\right| \Delta_i.$$

Liitmisel ja lahutamisel andmete absoluutsed vead liituvad, korrutamisel ja jagamisel andmete relatiivsed vead liituvad.



Näide. Arvutusvead on ajaloos põhjustanud suuri katastroofe. Tutvuge leheküljel `http://www.ima.umn.edu/~arnold/455.f96/disasters.html` toodud näidetest esimesega.

Raketitõrjesüsteemi *Patriot* sisemine kell mõõdab aega kümnendiksekundites. Arv

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \ldots = \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2^4}} + \frac{\frac{1}{2^5}}{1 - \frac{1}{2^4}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$$

esitub kahendsüsteemis kujul $0.000110011001100110011001100110011\ldots$. Arvuti 24-bitisesse registrisse salvestati arv $0.00011001100110011001100$ veaga $0.000000000000000000000000110011\ldots$, mis kümnendsüsteemis teeb $9.5 \cdot 10^{-8}$. Õhus oldud 100-tunnise aja arvutamisel tehti viga $9.5 \cdot 10^{-8} \cdot 100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 = 0.34$ sekundit. Iraagi rakett liigub kiirusega 1676 m/s läbides 0.34 sekundi jooksul 570 meetrit. Laskmistäpsuse viga on üle poole kilomeetri.

Arvestuslikud ülesanded

Ülesanne 5. Leidke maakera pinnal paikneva kihi ruumala, kui Maa ekvatoriaalraadius on $R = 6378.135$ km ning kihi paksus

$$d = \begin{cases} \alpha + 25 \text{ cm}, & \text{kui } \alpha \geq 10, \\ \alpha + 5 \text{ dm}, & \text{kui } \alpha \leq 9. \end{cases}$$

Hinnake saadud tulemuse absoluutset ja relatiivset viga. Kas tulemus erineks, kui kasutada valemi $V = \frac{4}{3}\pi(3R^2d + 3Rd^2 + d^3)$ asemel valemit $V = \frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$?

Ülesanne 6. Mitut Taylori rea liiget on tarvis, et lähendada

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

väärtust kohal $x = \pi$ täpsusega 10^{-8}?

Märkus 1. Lõpmatult diferentseeruva funktsiooni f **Taylori rida** punktis a esitub kujul

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots.$$

Meie ülesandes $a = 0$ ning

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(0) + \cos'(x)|_{x=0}\frac{x}{1!} + \cos''(x)|_{x=0}\frac{x^2}{2!} + \cos'''(x)|_{x=0}\frac{x^3}{3!} + \cos''''(x)|_{x=0}\frac{x^4}{4!} + \ldots \\ &= 1 - \sin(x)|_{x=0}\frac{x}{1!} - \cos(x)|_{x=0}\frac{x^2}{2!} + \sin(x)|_{x=0}\frac{x^3}{3!} + \cos(x)|_{x=0}\frac{x^4}{4!} + \ldots \\ &= 1 - 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

Taylori rida punktis 0 nimetatakse ka Maclaurini reaks.

Märkus 2. Funktsiooni f n-astme **Taylori polünoom** punktis a esitub kujul

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ülesandes 6 on vaja leida n nii, et $|\cos(\pi) - P_n(\pi)| \leq 10^{-8}$.