

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

Praktikum nr 2: Harilik iteratsioonimeetod võrrandi lahendamisel.

19. veebruar 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 26. veebruar 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsuaerial.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Harilik iteratsioonimeetod

Vaatleme võrrandeid kujul $f(x) = 0$, kus f on pidev funktsioon. Asendame võrrandi $f(x) = 0$ otsitava lahendi x^* ümbruses samaväärse võrrandiga

$$x = g(x).$$

Seda saab teha mitmel erineval viisil, näiteks võttes $g(x) = x - \psi(x)f(x)$, kus ψ on pidev funktsioon, millel pole lahendi x^* teatavas ümbruses nullkohti. Kõige lihtsam on kasutada konstantset funktsiooni $\psi(x) = \beta = \text{const} \neq 0$.

Meetodi kirjeldus. Valime alglahendi x_0 . Leiame

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Kui g on pidev ja iteratsioonimeetod koondub, siis koondub jada x_n võrrandi lahendiks.

Teoreem (koonduvusteoreem). Olgu $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ning olgu g ahendav lõigus $[a, b]$, st leidub $q < 1$ nii, et $|g(x_1) - g(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|$ iga $x_1, x_2 \in [a, b]$ korral. Siis võrrandil $x = g(x)$ on lõigus $[a, b]$ parajasti üks lahend x^* ning iteratsioonimeetod koondub selleks lahendiks iga $x_0 \in [a, b]$ korral. Kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Märkus. Diferentseeruva funktsiooni g korral võib teoreemis ahendavuse tingimuse asendada tugevama tingimusega

$$|g'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [a, b].$$

Millal lõpetada iteratsiooniprotsess? Teoreemi eeldustel kehtib

$$|x_n - x^*| = |g(x_{n-1}) - g(x^*)| \leq q|x_{n-1} - x^*| \leq q(|x_n - x_{n-1}| + |x_n - x^*|),$$

millest

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Iteratsiooniprotsessi võib lõpetada, kui on täidetud tingimus

$$\frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Ülesanne. Lahendage hariliku iteratsioonimeetodiga võrrand

$$(10 + \alpha)x - (1 + 0.001\alpha)^x = 0.$$

Väiksem lahend leidke täpsusega 10^{-6} , suurem lahend täpsusega 10^{-3} . Mitu iteratsiooni iga lahendi leidmiseks kulub? Printige välja kõik lähendid.

Näpunäide: Võrrandil on kaks lahendit, väiksem neist asetseb lõigus $[0, 1]$. Viige võrrand kujule $x = g(x)$ nii, et leiduks lõik $[a, b]$, mille korral $g([a, b]) \subset [a, b]$ ning $|g'(x)| \leq q < 1$ iga $x \in [a, b]$ korral.