MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 3: Newtoni meetod võrrandi lahendamisel.

26. veebruar 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesannete 1 ja 2 lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 5. märts 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Newtoni meetod

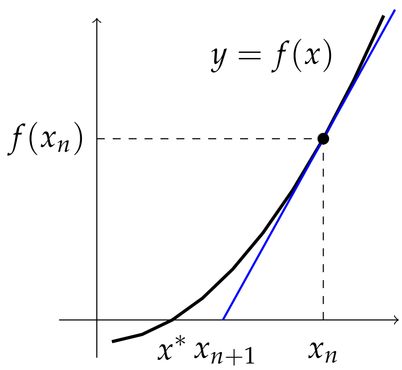
Vaatleme võrrandeid kujul $f(x) = 0$. Olgu funktsioon f kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$, mis sisaldab lahendi x^* ja selle lähendi x_n. Taylori valemi põhjal

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_n)^2, \quad \xi \in (x, x_n).$$

Jääkliikme ärajätmisel saame võrrandile $f(x) = 0$ kuju $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$ ning uue lähendi leidmise eeskirja

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Geomeetriliselt tähendab Newtoni meetod joone $y = f(x)$ asendamist tema puutujaga $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ punktis $(x_n, f(x_n))$, kusjuures lähendi uus väärtus leitakse kui puutuja lõikepunkt x-teljega.



Newtoni meetodit võib tõlgendada ka kui harilikku iteratsioonimeetodit $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, milles

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Seega on rakendatavad ka hariliku iteratsionimeetodi koonduvustingimused ning veahinnangud (vt Teoreem praktikumist 2 ning sellele järgnev). Kuna $|g'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right|$ hindamine võib osutuda tülikaks, siis praktikas võib kasutada iteratsioonimeetodi lõpetamiseks tingimust $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$. Kui vaadeldavas lõigus, mis sisaldab lahendi x^* ning lähendid x_n ja x_{n-1} kehtib $|g'(x)| \leq q = 0.5$, siis selline tingimus garanteerib lahendi täpsuse ε.

Teoreem. Kui $f \in C^2[a, b]$ ning võrrandi $f(x) = 0$ lahendi $x^* \in [a, b]$ korral $f'(x^*) \neq 0$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et Newtoni meetod koondub võrrandi lahendiks iga $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ korral, st piisavalt hea alglähendi korral Newtoni meetod koondub alati.

Ülesanne 1. Funktsioonil

$$f(x) = \frac{4x-7}{x-2}$$

on nullkoht punktis $x^* = 1.75$. Leidke see nullkoht kasutades Newtoni meetodis alglähendina väärtusi

a) $x_0 = 1.625$; b) $x_0 = 1.875$; c) $x_0 = 1.5$; d) $x_0 = 1.99$; e) $x_0 = 3$; f) $x_0 = 0.5$.

Kuvage ekraanile kõik leitud x_n väärtused. Lõpetage iteratsiooniprotsess, kui $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-5}$. Selgitage saadud tulemusi funktsiooni f graafiku abil.

Juhul d) analüüsige ka algoritmi koonduvuskiirust printides välja järjestikused jagatised

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^k}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

erinevate k väärtuste korral (nt $k = 1, 2, 3$). Kas leidub selline $\lambda > 0$, et

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \lambda |x_n - x^*|^k \,?$$

Ülesanne 2. Lahendage Newtoni meetodiga võrrand $f(x) = 0$, kus

$$f(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x}, \quad x \in [0, 1].$$

Kuvage ekraanile kõik leitud x_n väärtused. Lõpetage iteratsiooniprotsess, kui $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-5}$.

Uurige lahendi kordsust m teades, et

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \to 1 - \frac{1}{m} \qquad \text{või} \qquad \frac{x_n - x_{n-1}}{-x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1}} \to m.$$

Kas Newton-Scröderi meetod

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

koondub kiiremini võrreldes Newtoni meetodiga? Kuvage ekraanile kõik leitud x_n väärtused.