MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 5: Harilik iteratsioonimeetod süsteemi lahendamisel.

12. märts 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 19. märts 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Sissejuhatus

Vaatleme võrrandisüsteme kujul

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) = 0, \end{cases}$$

ehk $F(x) = 0$, kus $x = (x_1,\dots,x_n)$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$. Olgu x^* võrrandi $F(x) = 0$ lahend, järjestikuseid lähendeid tähistame $x^m = (x_1^m,\dots,x_n^m)$, $m = 0,1,\dots$. Koondumist $x^m \to x^*$ võib vaadelda ruumis $\mathbb{R}^n$ mitmesuguste normide suhtes:

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$ (lõpmatusnorm)

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ (1-norm)

$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{1/2}$ (2-norm)

$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, 1 \le p < \infty$ (p-norm)

Definitsiooni kohaselt $x^m \to x^* \Leftrightarrow \|x^m - x^*\| \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Kõik normid on koondumise kindlakstegemisel samaväärsed.

Harilik iteratsioonimeetod

Esitame võrrandi $F(x) = 0$ kujul $x = G(x)$ ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1,\dots,x_n), \\ \dots \\ x_n = g_n(x_1,\dots,x_n). \end{cases}$$

Vastavalt alglähendile $x^0 \in \mathbb{R}^n$ leiame lähendid $x^{m+1} = G(x^m)$, $m = 0,1,2,\dots$, ehk

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = g_1(x_1^m,\dots,x_n^m), \\ \dots \\ x_n^{m+1} = g_n(x_1^m,\dots,x_n^m), \end{cases} \quad m = 0,1,2,\dots.$$

Olgu ruumis $\mathbb{R}^n$ fikseeritud mingi norm. Olgu B kinnine kera keskpunktiga a, raadiusega $r > 0$, st $B = \overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\}$.

Teoreem (koonduvusteoreem). Olgu

1) $G : B \to B$,

2) eksisteerigu $q < 1$ nii, et $\|G(x) - G(y)\| \le q\|x - y\|$ iga $x, y \in B$ korral (st G on ahendav).

Siis võrrandil $x = G(x)$ on keras B parajasti üks lahend $x^* \in B$ ning iga alglähendi $x^0 \in B$ korral harilik iteratsionimeetod koondub selleks lahendiks. Kehtib hinnang

$$\|x^m - x^*\| \le \frac{q^m}{1-q}\|x^0 - x^1\|.$$

Märkus. Diferentseeruva funktsiooni G korral võib ahendavuse tingimuse asendada tingimusega $\|G'(x)\| \le q < 1$ iga $x \in B$ korral. Siin

$$G'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

ning maatriksi norm on vastavalt $\mathbb{R}^n$ normile kas

$$\|G'(x)\|_\infty = \sup_{\|y\|_\infty \le 1} \|G'(x)\, y\|_\infty$$

või

$$\|G'(x)\|_p = \sup_{\|y\|_p \le 1} \|G'(x)\, y\|_p, \quad 1 \le p < \infty,$$

kus $y \in \mathbb{R}^n$. Enamlevinud normid avalduvad kujul

$$\begin{aligned} \|G'(x)\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|, \quad \text{(maksimum üle reasummade)} \\ \|G'(x)\|_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|, \quad \text{(maksimum üle veerusummade)} \\ \|G'(x)\|_2 &\le \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Seideli meetod

Seideli meetod on oma olemuselt harilik iteratsioonimeetod, kus kasutatakse alati ära kõige uuem informatsioon, st vastavalt alglähendile $x^0 \in \mathbb{R}^n$ leiame lähendid x^{m+1}, $m = 0, 1, 2, \dots$, järgmisel moel

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = g_1(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m), \\ x_2^{m+1} = g_1(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m), \\ \dots \\ x_n^{m+1} = g_n(x_1^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m). \end{cases}$$

Leidub võrrandisüsteeme, mille korral Seideli meetod koondub aga harilik iteratsioonimeetod ei koondu ning vastupidi.

Ülesanne. Lahendage hariliku iteratsioonimeetodi ning Seideli meetodi abil võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} 12x_1 - 3x_2^2 - 4x_3 &= 7.17, \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11.54, \\ x_2^3 + 7x_3 &= 7.631. \end{aligned}$$

Esmalt viige süsteem kujule $x = G(x)$, leidke mingi alglähend ja lõpetamistingimus ning viige läbi iteratsiooniprotsess.
Korrektse lõpetamistingimuse saamiseks valige näiteks $B = [0, 1.3]^3$ ning leidke $q > 0$, mille korral kehtib Märkuses toodud tingimus

$$\|G'(x)\| \leq q < 1 \quad \forall x \in B.$$

Millist maatriksi normi kasutasite? Kasutage edaspidises sama vektorinormi. Lõpetage iteratsiooniprotsess, kui

$$\frac{q}{1-q}\|x^m - x^{m-1}\| \leq \varepsilon,$$

kus $\varepsilon = 10^{-5}$. Siis on tagatud lahendi täpsus $\|x^m - x^*\| \leq \varepsilon$.
Ekraanile trükkige q väärtus, kõik lähendid ning iteratsioonisammude arv.