MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 6: Newtoni meetod süsteemi lahendamisel.

19. märts 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 26. märts 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Sissejuhatus

Vaatleme võrrandisüsteme kujul

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) = 0, \end{cases}$$

ehk $F(x) = 0$, kus $x = (x_1,\dots,x_n)$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$. Olgu x^* võrrandi $F(x) = 0$ lahend, järjestikuseid lähendeid tähistame $x^m = (x_1^m,\dots,x_n^m)$, $m = 0,1,\dots$. Koondumist $x^m \to x^*$ võib vaadelda ruumis $\mathbb{R}^n$ mitmesuguste normide suhtes:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \quad \text{(lõpmatusnorm)}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \text{(1-norm)}$$

$$\|x\|_2 = \Big(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\Big)^{1/2} \quad \text{(2-norm)}$$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, 1 \le p < \infty \quad (p\text{-norm})$$

Definitsiooni kohaselt $x^m \to x^* \Leftrightarrow \|x^m - x^*\| \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Kõik normid on koondumise kindlakstegemisel samaväärsed.

Newtoni meetod

Vaatleme võrrandisüsteemi kujul

$$F(x) = 0.$$

Eeldame, et funktsioonid f_i, $i = 1,\dots,n$, on diferentseeruvad, st F on diferentseeruv. Tähistame

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Vastavalt alglähendile $x^0 \in \mathbb{R}^n$ leiame lähendid

$$x^{m+1} = x^m - \big(F'(x^m)\big)^{-1} F(x^m), \quad m = 0,1,2,\dots,$$

kus $\left(F'(x^m)\right)^{-1}$ on $F'(x^m)$ pöördmaatriks.

Newtoni meetodi samm on teostatav, kui $F'(x^m)$ on pööratav ehk $\det F'(x^m) \neq 0$.

Modifitseeritud Newtoni meetodi korral

$$x^{m+1} = x^m - \left(F'(x^0)\right)^{-1} F(x^m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pöördmaatriksi leidmine

Väikeste süsteemide korral on maatriksi A pöördmaatriks leitav *Numpy* paketti *linalg* või *matrix* kasutades. Kui A on tüüpi numpy array, siis tuleks kasutada `inv(A)`, kui A on tüüpi numpy matrix, siis `A.I`. Vt täpsemalt `https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.13.0/reference/generated/numpy.linalg.inv.html` ja `https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.13.0/reference/generated/numpy.matrix.html`.

Vähegi suuremate süsteemide korral on pöördmaatriksi leidmine ajaliselt kulukas, seetõttu tuleks Newtoni meetodi samm

$$x^{m+1} = x^m - \left(F'(x^m)\right)^{-1} F(x^m)$$

asendada lineaarvõrrandisüsteemiga

$$F'(x^m)x^{m+1} = F'(x^m)x^m - F(x^m),$$

kus tundmatuks on x^{m+1}. Ka siin saab hoiduda maatriksi $F'(x^m)$ ja vektori x^m korrutamisest (n^2 korrutamist) lahendades süsteemi

$$F'(x^m)z = F(x^m)$$

tundmatu z suhtes ning leides

$$x^{m+1} = x^m - z = x^m - (F'(x^m))^{-1}F(x^m).$$

Lineaarvõrrandisüsteemi võib lahendada hariliku iteratsioonimeetodi abil või kasutades paketist *linalg* käsku `solve`. Vt täpsemalt `https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.13.0/reference/generated/numpy.linalg.solve.html`

Ülesanne. Lahendage Newtoni ning modifitseeritud Newtoni meetodi abil võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} 12x_1 - 3x_2^2 - 4x_3 &= 7.17, \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11.54, \\ x_2^3 + 7x_3 &= 7.631. \end{aligned}$$

Esmalt viige süsteem kujule $F(x) = 0$ ning leidke $F'(x)$. Lõpetage iteratsiooniprotsess, kui $\|x^m - x^{m-1}\| \leq 10^{-5}$. Ekraanile trükkige kõik lähendid, normid $\|x^m - x^{m-1}\|$ ning iteratsioonisammude arv.