MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 7: Lineaarsete süsteemide lahendamine.

26. märts 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 2. aprill 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Harilik iteratsioonimeetod lineaarse süsteemi lahendamisel

Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

ehk

$$x = Bx + b,$$

kus $x = (x_j)$ on tundmatute vektor, $B = (b_{ij})$ süsteemi maatriks ja $b = (b_i)$ vabaliige. Hariliku iteratsioonimeetodi korral valitakse alglähend x^0, edasi leitakse

$$x^{m+1} = Bx^m + b, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Teoreem 1 (piisav tingimus koondumiseks). Kui

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \quad \text{või} \quad \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \quad \text{või} \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 < 1$$

(ehk $\|B\| < 1$), siis süsteem

$$x = Bx + b$$

on üheselt lahenduv ning harilik iteratsioonimeetod koondub lahendiks iga alglähendi korral.

Olgu $q < 1$ selline, et $\|B\| \le q$.

Märkus 1. Kuna

$$\|x^m - x^*\| \le q\|x^{m-1} - x^*\| = q\|x^{m-1} - x^* \pm x^m\| \le q(\|x^m - x^*\| + \|x^m - x^{m-1}\|),$$

siis $\|x^m - x^*\| \le \dfrac{q}{1-q}\|x^m - x^{m-1}\|$ ja iteratsiooniprotsessi võib lõpetada kui

$$\frac{q}{1-q}\|x^m - x^{m-1}\| \le \varepsilon.$$

Märkus 2. Koonduvusteoreemi hinnangu

$$\|x^m - x^*\| \le \frac{q^m}{1-q}\|x^0 - x^1\|$$

põhjal saab piisava iteratsioonisammude arvu m leida seosest $\dfrac{q^m}{1-q}\|x^0 - x^1\| \le \varepsilon$.

Teoreem 2 (tarvilik ja piisav tingimus koondumiseks). Harilik iteratsioonimeetod koondub süsteemi $x = Bx + b$ ainsaks lahendiks iga alglähendi korral parajasti siis, kui võrrandi $\det(B - \lambda I) = 0$ lahendid on kõik mooduli poolest väiksemad arvust 1, st $|\lambda| < 1$.

Lineaarse II liiki Fredholmi integraalvõrrandi lahendamine kvadratuurvalemite meetodiga

Vaatleme lineaarset Fredholmi II liiki integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_a^b K(x,s)u(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a,b].$$

Siin K ja f on etteantud funktsioonid, a ja b konstandid. Otsitav on funktsioon u.

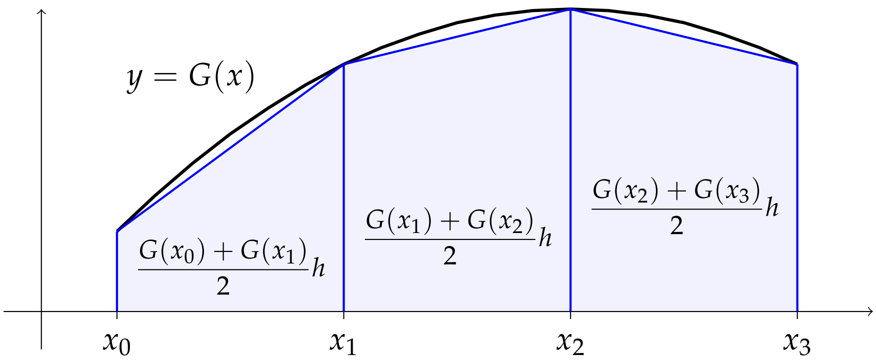
Valime osalõikude arvu n ja moodustame ühtlase võrgu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, kus $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, ning $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Asendame integraali mingi kvadratuurvalemiga, st

$$\int_a^b G(s)\,ds \approx \sum_{j=0}^{n} w_j\, G(x_j).$$

Olgu selleks kvadratuurvalemiks trapetsvalem, mille korral

$$w_0 = \frac{h}{2}, \quad w_1 = h, \quad \ldots, \quad w_{n-1} = h, \quad w_n = \frac{h}{2}.$$



Kirjutades esialgse võrrandi välja sõlmedes $x_0, \ldots, x_n$ ja asendades integraali kvadratuurvalemiga, saame lineaarvõrrandite süsteemi tundmatute $u_i = u(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, suhtes

$$u_i = \sum_{j=0}^{n} w_j K(x_i, x_j) u_j + f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

Nii saab leida lahendi u lähisväärtused sõlmedes x_i, st $u(x_i) \approx u_i$. Lahendi lähisväärtused väljaspool sõlmi saab leida seosega

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} w_j K(t, x_j) u_j + f(t), \quad t \in [a,b].$$

Lahendamiseks kuluva aja mõõtmine

Aja mõõtmiseks võib kasutada paketti *timeit*. Vt näidet:

```
from timeit import default_timer as timer
start=timer()
for i in range (100):
    print(i)
end=timer()
print('Aega kulus',end - start,'sekundit')
```

Ülesanne. Lahendage kvadratuurvalemite meetodiga integraalvõrrand

$$u(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x+2s)u(s)\,ds + x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Lineaarse süsteemi (1) lahendamiseks kasutage kolme erinevat meetodit:

a) pöördmaatriksi leidmine `numpy.linalg.inv` abil,

b) lineaarvõrrandi lahendamine `numpy.linalg.solve` abil (mis on tegelikult Gaussi elimineerimismeetod võrrandi $Ax = b$ lahendamiseks),

c) harilik iteratsioonimeetod.

Võrrelge kolme erineva meetodi lahendamisaegu juhtudel $n = 1000$, $n = 2000$, $n = 4000$. Iteratsioonimeetodi korral printige välja ka iteratsioonisammude arv. Lõpetage iteratsiooniprotsess, kui $\|x^{m+1} - x^m\| \leq 10^{-7}$.

Esmalt aga kirjutage süsteem (1) välja komponenthaaval, valige väike n ning leidke süsteemi (1) lahend iteratsioonimeetodil. Joonistage lahendi graafik, st murdjoon, mis läbib punkte (x_i, u_i), $i = 0, \ldots, n$, ning täpse lahendi $u(x) = x - \pi\cos(x)$ graafik. Lahendage seesama väike süsteem ka pöördmaatriksi ja `solve` abil ning kontrollige graafiku abil lahendi korrektsust. Kui kõik kolm meetodit annavad korrektse tulemuse, siis hakake n väärtust suurendama.