MTMM.00.005 Numbrilised meetodid
Praktikum nr 8–9: Interpoleerimine.

2. ja 9. aprill 2019

Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele. Tähtaeg 16. aprill 2019.

NB! Selleks, et kasutada mittestandardseid pakette nagu *numpy* ja *matplotlib*, võib programmikoodi kompileerida ka käsureal.

```
H:\nm_pr> "C:\Program Files\Anaconda3\python" <failinimi>.py
```

Siin `nm_pr` on kaust, milles asub programmikood.

Interpolatsiooniülesanne

Antud on interpolatsioonisõlmed $x_0, \ldots, x_n$, kus $x_i \neq x_j$, kui $i \neq j$, ning arvud $f_0, \ldots, f_n$. Ülesandeks on leida funktsioon f nii, et $f(x_i) = f_i$.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Lagrange'i fundamentaalpolünoomideks nimetatakse antud sõlmede $x_0, \ldots, x_n$ korral funktsioone

$$l_{ni}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{w_n(x)}{(x - x_i)\, w_n'(x_i)}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

kus $w_n(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$. Lagrange'i fundamentaalpolünoomid rahuldavad seost

$$l_{ni}(x_j) = \begin{cases} 1, \text{ kui } j = i, \\ 0, \text{ kui } j \neq i, \end{cases} \quad j = 0, \ldots, n.$$

Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks nimetatakse funktsiooni kujul

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, l_{ni}(x).$$

On lihtne kontrollida, et P_n rahuldab interpolatsioonitingimusi $P_n(x_j) = f_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Olgu antud erinevatele argumendi väärtustele $x_0, \ldots, x_n$ vastavad funktsiooni f väärtused $f(x_0), \ldots, f(x_n)$. Funktsiooni f **esimest järku diferentssuhteks** nimetatakse avaldist

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j,$$

teist järku diferentssuhteks avaldist

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}, \quad i \neq j, j \neq k, i \neq k,$$

k-**järku diferentssuhteks** nimetatakse avaldist

$$f(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}}) - f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{x_{i_0} - x_{i_k}}.$$

Kehtib valem

$$f(x_0,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{w_n'(x_i)}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoomiks nimetatakse funktsiooni kujul

$$\begin{aligned}P_n(x) &= f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\dots+\\ &\quad +f(x_0,\dots,x_n)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}).\end{aligned}$$

On võimalik näidata, et $P_n(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.

Polünoomidega interpoleerimine on ebastabiilne lähteandmete suhtes.

Ülesanne 1. Täitke järgmine tabel, kus funktsiooni väärtused esitage nelja komakohaga.

x_i	105	115	120	125	130	140
$f(x)=\sqrt[3]{x+\alpha}$						

Leidke $P_n(x)$, $n=1,\dots,5$, kus sõlmedena kasutate neid tabelis toodud argumente, mis asuvad väärtusele $x_\alpha=121+0.1\alpha$ kõige lähemal.
Joonestage samas teljestikus funktsioonide $P_n(x)$ ja $f(x)$, $x\in[40,200]$, graafikud, kui $n=1,\dots,5$.
Leidke $P_n(x_\alpha)-f(x_\alpha)$, $n=1,\dots,5$.

a) Kasutage Lagrange'i interpolatsioonivalemit;
b) Kasutage Newtoni interpolatsioonivalemit.

Ülesanne 2. Lähendage interpolatsioonipolünoomi abil funktsiooni $f(x)=|x|$ piirkonnas $x\in[-1,1]$, kasutades sõlmedena väärtusi $x_i=-1+\frac{2}{n}i$, $i=0,\dots,n$.
Hinnake viga $\varepsilon_n=\max\limits_{-1\le x\le 1}|P_n(x)-f(x)|$, leides maksimaalse hälbe kümme korda tihedamal võrgul, st

$$\bar{\varepsilon}_n=\max_{0\le i\le 10n}|P_n(z_i)-f(z_i)|,\quad z_i=-1+\frac{2}{10n}i.$$

Leidke $\bar{\varepsilon}_n$ vähemalt kümne erineva n korral, $n\le 30$, sealhulgas $n=30$ korral. Joonestage samas teljestikus funktsioonide $P_n(x)$, $n=4,8,12$, ja $f(x)$ graafikud.