Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2019

1. seminar (Tähvend)

1. (VJIMC 2002)

   Ringis R on vähemalt üks nullitegur, kusjuures nullitegurite arv on lõplik. Tõesta, et ring R on lõplik.

2. (Timus Online Judge #1130 (kohandatud))

   Tasandil on antud n vektorit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Seejuures $|\vec{v}_i| \leqslant 1$ iga $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ korral. Tõesta, et leiduvad arvud $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \{-1, 1\}$ nii, et

   $$|k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n| \leqslant \sqrt{2}.$$

3. (IMC 2010) Defineerime jada $x_1, x_2, x_3, \ldots$ järgnevalt:

   $$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{5}; \\ x_{n+1} &= x_n^2 - 2 \qquad \text{iga } n \geqslant 1 \text{ korral.} \end{aligned}$$

   Arvutage

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

4. (VJIMC 1997)

   Kas kolmemõõtmelist eukleidilist ruumi on võimalik katta sirgetega, mis on paarikaupa kiivsed (s.t. nad ei lõiku ega ole paralleelsed)?

2. seminar (Tähvend)

1. (Putnam 1998)

   Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kolm korda pidevalt diferentseeruv. Tõesta, et leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et
   $$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geqslant 0.$$

2. (Putnam 2000)

   Tõesta, et avaldis
   $$\frac{\gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$
   on täisarv kõikide täisarvude $n \geqslant m \geqslant 1$ korral.

3. (IMC 2005)

   Vaatleme $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ vektorruumina. Leia maksimaalne võimalik dimensioon, mis saab olla selle alamruumil V, kusjuures
   $$\forall X, Y \in V\colon\ \operatorname{tr}(XY) = 0.$$

4. (rahvaluule)

   Nimetame sümbolitest a, b ja c koosnevat sõne *ruuduvabaks*, kui ükski alamsõne ei esine temas kaks korda järjest. Näiteks *aba* ja *abcab* on ruuduvabad, aga *bcbacba* ei ole, sest *cba* esineb kaks korda järjest.

   Tõesta, et iga $N \in \mathbb{N}$ korral leidub N sümbolist koosnev ruuduvaba sõne.

3. seminar (Oskar)

1. (IMC 2014)

   Tähistagu $d_n(x)$ positiivse täisarvu x n-dat numbrit kümnendsüsteemis, s.t $x = \sum_i d_i(x)10^{i-1}$. Olgu meil selline jada positiivsetest täisarvudest $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nii, et jadas $(d_n(a_n))_{n=1}^{\infty}$ on lõplik arv nulle. Näidata, et leidub lõpmatult palju positiivseid täisarve, mida ei leidu jadas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. (Putnam 2001)

   Olgu meil selline binaarne tehe $*$ nii, et iga a, b korral kehtib võrdus $(a * b) * a = b$. Tõestada, et iga a, b korral kehtib $a * (b * a) = b$.

3. (SMMC)

   Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

   $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i, j) x_i x_j \geq 0.$$

4. (NTU 2007)

   Olgu meil $x \in \mathbb{Q}$ selline, et $x > 1$ ja eksisteerib piirväärtus $\lim_{n \to \infty} \{x^n\}$. Siin tähistab $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ arvu a murrulist osa. Tõestada, et x on täisarv.

4. seminar (Jaan Kristjan)

1. (soojendus)

   Leida kõik positiivsed paaritud täisarvulised x ja y väärtused nii, et kehtiks võrdus:

$$xy^2 + x = 2x^{2018} + 3 + y^2$$

2. (TÜMV 2010)

   Kas rida

$$\sum_{m>1,n>1,n\neq m} \frac{1}{mn|m-n|}$$

   koondub?

3. (IMC 2003)

   Leida kõik võimalikud positiivsed täisarvude paarid (a, b) nii, et positiivsete täisarvude hulga saab jagada kaheks hulgaks A ja B nii, et $a \cdot A = b \cdot B$

4. Kas on võimalik asetada 6 punkti tasandile nii, et vahemaa iga kahe punkti vahel on täisarv ja iga kolm punkti ei asu ühel sirgel?

5. seminar (Oskar)

1. (SEEMOUS 2008)

   Olgu $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ selline pidev funktsioon, et iga $a > 0$ korral on võrrandil $f(x) = ax$ vähemalt üks lahend.

   (a) Tõesta, et iga $a > 0$ korral on võrrandil $f(x) = ax$ lõpmata palju lahendeid.

   (b) Tuua näide selliste omadustega funktsioonist, mis on lisaks veel rangelt kasvav.

2. (SEEMOUS 2008)

   Leida kõik sürjektiivsed funktsioonid $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, ..., n\}$, mis rahuldavad iga $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ korral võrratust
   $$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}.$$

3. (SMMC 2017)

   Olgu meil selline jada, et $a_1 = 1$ ja
   $$a_m = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{m-1}^2}$$
   Kas leidub selline naturaalarv N, et $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_N > 2019^{2019}$

4. (VJIMC 2013)

   Tähistagu S_n esimese n algarvu summat. Tõestada, et iga n korral leidub S_n ja S_{n+1} vahele jääv täisruut.

6. seminar (Jaan Kristjan)

1. (NCUMC)

   Kas leiduvad mingis intervallis sellised mittekonstantsed funktsioonid $f(x), g(x)$ nii, et $(f(x)g(x))' = f(x)'g(x)'$

2. (Putnam 1991)

   Olgu A ja B erinevad $n \times n$ maatriksid nii, et $A^3 = B^3$ ja $A^2B = B^2A$. Kas $A^2 + B^2$ on pööratav?

3. (TÜ võistlus)

   Kas iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib:

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$$

4. (TÜ võistlus)

   Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega kuuppolüunoom, kusjuures $P(k)$ jagub 5-ga iga täisarvu k korral. Kas $P(x)$ kõik kordajad jaguvad 5-ga?

5. Putnam 2012 A-6

7. seminar (Kati)

1. (Putnam 2009)

   Tõesta, et igat positiivset ratsionaalarvut saab avaldada algarvude faktoriaalide korrutiste jagatisena (algarvud ei pea olema erinevad). Näiteks:

   $$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$$

2. (VJIMC 2015)

   Olgu lõpmatu malelaud, mille read ja veerud on nummerdatud positiivsete täisarvudega. Kas on võimalik kirjutada igasse ruutu üks positiivne ratsionaalarv, nii et iga positiivne ratsionaalarv esineb täpselt ühe korra ning iga rea ja veeru summa on lõplik?

3. (TÜMV 2005)

   Olgu $S = \{0000000, 0000001, ..., 1111111\}$ kõikvõimalike seitsmekohaliste binaararvude hulk. Kahe elemendi s_1, $s_2 \in S$ vaheline kaugus on s_1 ja s_2 erinevate kahendkohtade arv. Näiteks 0001011 ja 1001010 vaheline kaugus on 2, kuna nende esimene ja seitsmes kahendkoht on erinevad. Tõestada, et kui T on hulga S selline alamhulk, millel on üle 16 elemendi, siis T sisaldab kahte elementi, mille vaheline kaugus on ülimalt 2.

4. (IMC 2013)

   Olgu p ja q erinevad algarvud. Tõesta, et

   $$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor} = \begin{cases} 0, & \text{kui } pq \text{ on paarisarv} \\ 1, & \text{kui } pq \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

8. seminar (Nikita)

1. Olgu R ring (ei tarvitse olla kommutatiivne), kus iga elemendi ruut on võrdne nulliga. Tõesta, et $abc + abc = 0$ kõigi $a, b, c \in R$ korral.

2. Leia kõik rangelt monotoonsed funktsioonid $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, mis rahuldavad tingimust

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x$$

   iga $x \in (0, \infty)$ korral.

3. Olgu S hulk, mille elementideks on kõik tähtedest a, b ja c koosnevad sõned. Olgu hulgal S defineeritud ekvivalentsusseos $\sim$, mis rahuldab järgmisi tingimusi.

   - $\forall x \quad (xx \sim x)$
   - $\forall x\ \forall y\ \forall z \quad (y \sim z \Rightarrow xy \sim xz \land yx \sim yz)$

   Tõesta, et iga sõne x korral leidub sõne y, nii et $x \sim y$ ja sõne y pikkus on ülimalt 8.

9. seminar (Oliver)

1. (VJIMC 2007)

   Kas positiivsete ratsioonaalarvude hulga $\mathbb{Q}^+$ saab jagada kaheks mittetühjaks lõikumatuks alamhulgaks Q_1 ja Q_2, mis on liitmise suhtes kinnised?

   Kas see on võimalik siis, kui liitmise asemel on korrutamine?

2. (Putnam 2006)

   Tõesta, et iga n elemendilise reaalarvude hulga $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jaoks leidub mittetühi alamhulk $S \subseteq X$ ja täisarv m, et
   $$\left| m + \sum_{s \in S} s \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. (Putnam 2011)

   Olgu S hulk, mis koosneb järjestatud algarvud kolmikutest (p, q, r), mille jaoks võrrandil $px^2 + qx + r = 0$ leidub vähemalt üks ratsionaalarvuline lahend. Millised algarvud esinevad vähemalt seitsmes S elemndis?

4. (IMC 2017)

   Olgu K võrdkülgne kolmnurk tasandil. Tõesta, et iga $p > 0$ jaoks eksisteerib $\varepsilon > 0$, millel on järgnev omadus:
   Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $T_1, \dots, T_n$ kolmnurgad, mis on homoteetsed K suhtes negatiivse kordajaga(peegeldatud ja skaleeritud). Nende paarikaupa ühisosade pindala on 0 ja nendest ükski ei sisalda K välist punkti. Kui
   $$\sum_{l=1}^{n} S(T_l) > S(K) - \varepsilon,$$
   siis
   $$\sum_{l=1}^{n} P(T_l) > p.$$

10. seminar (Kati)

1. (Putnam 2005)

   Näita, et iga positiivne täisarv on esituv summana, mille liidetavad on kujul $2^r 3^s$, kus r ja s on mittenegatiivsed täisarvud ja mitte ükski liidetav ei jagu mõne teisega. (Näiteks $23 = 9 + 8 + 6$)

2. (Putnam 2007)

   Olgu k positiivne täisarv. Arvud $1, 2, 3, \ldots, 3k + 1$ kirjutatakse juhuslikus järjekorras paberile. Leidke tõenäosus, et mitte ühelgi hetkel ei jagu juba kirjutatud arvude summa 3-ga.

3. (TÜ võistlus)

   Olgu antud täisarv $n \geq 2$. Kas sümmeetrilises rühmas S_n on rohkem elemente paaris- või paaritu järguga?

   Info ülesande lahenduseks:

   (a) Rühma elemendi *a järk* on vähim positiivne täisarv k nii, et $a^k = 1$ (siin 1 on rühma ühikelement) või lõpmatus, kui sellist arvu ei leidu. Lõplikus rühmas igal elemendil on lõplik järk.

   (b) *Sümmeetriline rühm* S_n koosneb kõikidest hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ *permutatsioonidest* ehk selle hulga bijektiivsetest teisendustest, kusjuures rühma korrutamine on defineeritud kui teisenduste kompositsioon ehk järjest rakendamine. Nii et kahe permutatsiooni $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ puhul $(\sigma_1\sigma_2)(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$ iga $x \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Selle tehte suhtes S_n on tõepoolest rühm (ehk tehe on assotsiatiivne, leidub ühikelement (tähistatakse id), ning igal elemendil leidub pöördelement).

   (c) Konkreetset permutatsiooni võib tähistada näiteks Cauchy kahe rea notatsiooniga

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

   Teine võimalus on esitada sõltumate tsüklite korrutisena. Näiteks,

   $$(15)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad (125)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) Permutatsiooni, kus ainult kaks arvu on omavahel vahetatud, nimetatakse *transpositsiooniks.* Ta on esitatav kujul (kl). Iga permutatsioon on esitatav (mitmel viisil) transpositsioonide korrutisena, kusjuures ühe permutatsiooni kõikides sellistes esitustes on transpositsioonide arvud sama paarsusega. Selle invariantse paarsuse järgi nimetatakse permutatsiooni kas paaris- või paarituks. NB! Permutatsiooni enda paarsus ja permutatsiooni järgu paarsus on erinevad mõisted.

   (e) Rühmas S_n on paarispermutatsioone täpselt sama palju kui paarituid.

4. (VIJMC 2014)

   Olgu kaardipakis $2n$ kaarti. Iga segamisega muutub kaartide järjekord järjestusest $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ järjestuseks $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$. Leidke kõik paarisarvud $2n$ nii, et peale 8 segamist taastuks esialgne kaartide järjekord.

11. seminar (Carel)

1. (soojendus hingele ja vaimule)

   Tõestada, et Dirichlet' funktsioon
   $$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv,} \end{cases}$$
   on esitatav kujul
   $$D(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) \right).$$

2. (Putnam 1997)

   Olgu f kaks korda diferentseeruv reaalmuutujafunktsioon, mis rahuldab võrdust
   $$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x),$$
   kus $g(x) \geq 0$, iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Näidake, et $|f(x)|$ on tõkestatud.

3. (IMC 2010)

   Olgu A sümmeetriline $m \times m$ maatriks üle kaheelemendilise korpuse selline, et tema kõik diagonaalsed elemendid on nullid. Tõestage, et iga positiivse täisarvu n jaoks iga maatriksi A^n kolumn sisaldab nulli.

4. (TÜMV 2003)

   Olgu S_n n-elemendilise hulga substitutsioonide hulk. Iga $\pi \in S_n$ jaoks defineerime $A(\pi) = \{\eta \in S_N \colon \eta \circ \pi = \pi \circ \eta\}$ ning $\Phi(\pi) = |A(\pi)|$. Leida $\Phi(\pi)$ iga $\pi \in S_n$ jaoks.

12. seminar (Oliver)

1. (IMC 2006)

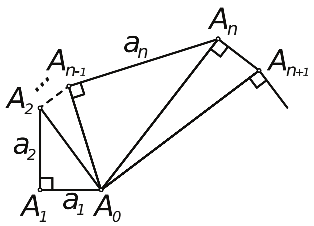
   Mitu täisarvu x rahuldab järgmist kahte tingimust:

   (a) $0 < x < 10^{2006}$

   (b) $10^{2006} | x^2 - x$

2. (SEEMOUS 2012)

   Vaatleme positiivsete reaalarvude jada a_n jaoks täisnurksed kolmnurki $\triangle A_0A_1A_2$, $\triangle A_0A_2A_3$, ..., mis asetsevad nagu joonisel kujutatud.

   Kas on võimalik, et punktide hulk $\{A_n\}$ on tõkestamata, kuid jada $\sum_{n=2}^{\infty} \angle A_{n-1}A_0A_n$ koondub?

3. (IMC 2006)

   Tõesta, et leidub lõpmatult palju selliseid positiivsete ühistegurita täisarvude paare (m, n), et võrrandil $(x+m)^3 = nx$ on kolm erinevat täisarvulist juurt.

4. (SEEMOUS 2013)

   Leia
   $$\int_0^1 |f'(x)|^2 |f(x)| \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}\, x$$
   maksimaalne väärtus üle selliste pidefalt diferentseeruvate funktsioonide $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, et $f(0) = 0$ ja
   $$\int_0^1 |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x \leq 1.$$

13. seminar (Carel)

1. (Putnam 2000)

   Tõestage, et leidub lõpmata palju täisarve n nii, et n, $n+1$ ja $n+2$ on kahe täisarvu ruudu summa

2. (TÜMV 2005)

   Nimetame naturaalarvude hulka A kaksikuvabaks, kui see ei sisalda ühtegi elementide a ja a' paari nii, et $a = 2a'$. Leidke suurima kaksikuvaba hulga $A \subset \{1, 2, \ldots, 256\}$ võimsus.

3. (SUMO 2019)

   Olgu $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ rangelt kasvav funktsioon. On teada, et $f(f(1)), f(f(2)), \ldots$ ja $f(f(1)+1), f(f(2)+1), \ldots$ on aritmeetilised jadad ning $f(1) = 1$, $f(2) = 3$. Leidke väärtus

   $$\sum_{i=1}^{100} f(i).$$

4. (IMC 2009)

   Olgu $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ sellised, et $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Tõestage, et leidub positiivne täisarv k nii, et $(AB - BA)^k = 0$.

14. seminar (Nikita)

1. (IMC 2000)

   Olgu $p(x) = x^5 + x$ ja $q(x) = x^5 + x^2$. Leia üles kõik kompleksarvude paarid (w, z), nii et $w \neq z$, $p(w) = p(z)$ ja $q(w) = q(z)$.

2. (IMC 2000)

   Olgu $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ning $\mathrm{rank}(AB - BA) = 1$. Tõesta, et $(AB - BA)^2 = 0$.

3. (IMC 2000)

   Olgu $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ selline kasvav diferentseeruv funktsioon, et tuletisfunktsioon f' on tõkestatud ning $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Olgu $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$. Defineerime jadad (a_n) ja (b_n) järgmiselt:

   $$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)}, \quad b_n = F^{-1}(n).$$

   Tõesta, et

   $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$