

Kategooriatest

Ülo Reimaa

Tartu Ülikool

16.10.2019

Matemaatikas on kesksel kohal *kombineerimine*.

Matemaatikas on kesksel kohal *kombineerimine*.

- $2 \cdot 3 = 6$

Matemaatikas on kesksel kohal *kombineerimine*.

- $2 \cdot 3 = 6$
- $(1, 0) + (0, 2) = (1, 2)$

Matemaatikas on kesksel kohal *kombineerimine*.

- $2 \cdot 3 = 6$
- $(1, 0) + (0, 2) = (1, 2)$
- $2 \cdot (1, 1) = (2, 2)$

Vaatame avaldisi/funktsioone:

$$\sin(x) \quad \text{ja} \quad x^2$$

Vaatame avaldisi/funktsioone:

$$\sin(x) \quad \text{ja} \quad x^2$$

Muutujasse asendamisega on võimalik neid kombineerida kahel viisil.

Vaatame avaldisi/funktsioone:

$$\sin(x) \quad \text{ja} \quad x^2$$

Muutujasse asendamisega on võimalik neid kombineerida kahel viisil.

Esimest teise asendades: $\sin(x)^2$
Teist esimesse asendades: $\sin(x^2)$

Vaatame aga näiteks järgmisi avaldisi:

$$\sqrt{x} \quad \text{ja} \quad (0, 1, x)$$

Vaatame aga näiteks järgmisi avaldisi:

$$\sqrt{x} \quad \text{ja} \quad (0, 1, x)$$

Kui $x = 5$, siis $(0, 1, x) = (0, 1, 5)$.

Vaatame aga näiteks järgmisi avaldisi:

$$\sqrt{x} \quad \text{ja} \quad (0, 1, x)$$

Muutujasse asendamisega on võimalik neid avaldisi kombineerida kahel viisil.

Vaatame aga näiteks järgmisi avaldisi:

$$\sqrt{x} \quad \text{ja} \quad (0, 1, x)$$

Muutujasse asendamisega on võimalik neid avaldisi kombineerida kahel viisil.

Esimest teise asendades: $(0, 1, \sqrt{x})$
Teist esimesse asendades: $\sqrt{(0, 1, x)}$

Vaatame aga näiteks järgmisi avaldisi:

$$\sqrt{x} \quad \text{ja} \quad (0, 1, x)$$

Muutujasse asendamisega on võimalik neid avaldisi kombineerida kahel viisil.

Esimest teise asendades: $(0, 1, \sqrt{x})$
Teist esimesse asendades: $\sqrt{(0, 1, x)}$

Ühel juhul on avaldise tähendus enamasti selge.
Teise korral on soovitud tähendus vähem ilmne.

Avaldised: $\sqrt{x}$ ja $(0, 1, x)$
Asendades: $(0, 1, \sqrt{x})$ ja $\sqrt{(0, 1, x)}$

Milles probleem?

Avaldised: $\sqrt{x}$ ja $(0, 1, x)$
Asendades: $(0, 1, \sqrt{x})$ ja $\sqrt{(0, 1, x)}$

Milles probleem? Vaatame avaldisi lähemalt..

$$\sqrt{x}$$

x on arv ning $\sqrt{x}$ on arv.

$$(0, 1, x)$$

x on arv, aga $(0, 1, x)$ on vektor.

Avaldised: $\sqrt{x}$ ja $(0, 1, x)$
Asendades: $(0, 1, \sqrt{x})$ ja $\sqrt{(0, 1, x)}$

Milles probleem? Vaatame avaldisi lähemalt..

$$\sqrt{x}$$

x on arv ning $\sqrt{x}$ on arv.

$$(0, 1, x)$$

x on arv, aga $(0, 1, x)$ on vektor.

Lühidalt:

$$\text{arv} \xrightarrow{\sqrt{x}} \text{arv} \quad \text{ja} \quad \text{arv} \xrightarrow{(0,1,x)} \text{vektor}$$

$$\mathbf{arv} \xrightarrow{\sqrt{x}} \mathbf{arv}$$

sisend: arv, väljund: arv

$$\mathbf{arv} \xrightarrow{(0,1,x)} \mathbf{vektor}$$

sisend: arv, väljund: vektor

arv $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv** sisend: arv, väljund: arv

arv $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor** sisend: arv, väljund: vektor

Sellest pildist näeme selgemalt, kuidas avaldiste
kombineerimine mõistlik oleks.

arv $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv** sisend: arv, väljund: arv

arv $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor** sisend: arv, väljund: vektor

Sellest pildist näeme selgemalt, kuidas avaldiste
kombineerimine mõistlik oleks.

arv $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv** $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor**

arv $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv** sisend: arv, väljund: arv

arv $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor** sisend: arv, väljund: vektor

Sellest pildist näeme selgemalt, kuidas avaldiste
kombineerimine mõistlik oleks.

arv $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv** $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor**

Teistpidi tüübid aga ei ühildu.

arv $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor** $\neq$ **arv** $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv**

arv $\xrightarrow{\sqrt{x}}$ **arv** ja **arv** $\xrightarrow{(0,1,x)}$ **vektor**

- Kombineerimisel peab veenduma, et väljundi ning sisendi tüübid ühtivad.
- Need andmed saab kokku võtta märgistatud noolega.

sisend $\xrightarrow{\text{avaldis}}$ **väljund**

- Neid reegleid järgides võib avaldisi kombineerida kuidas iganes.

Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

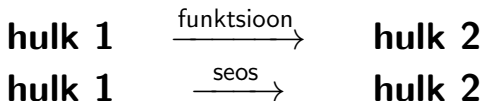
Avaldistega sarnaselt kombineeritakse näiteks:

$$\text{hulk 1} \xrightarrow{\text{funktsioon}} \text{hulk 2}$$

Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

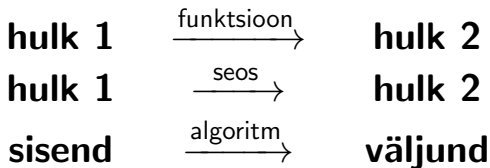
Avaldistega sarnaselt kombineeritakse näiteks:



Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

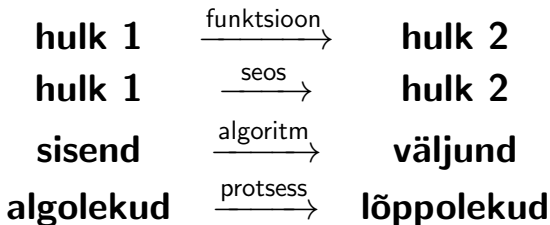
Avaldistega sarnaselt kombineeritakse näiteks:



Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

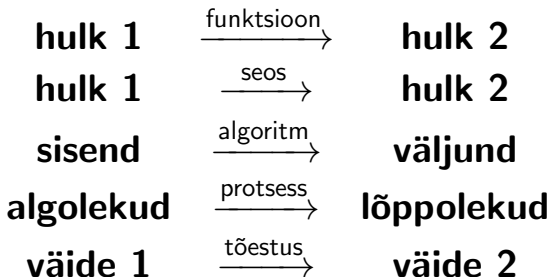
Avaldistega sarnaselt kombineeritakse näiteks:



Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

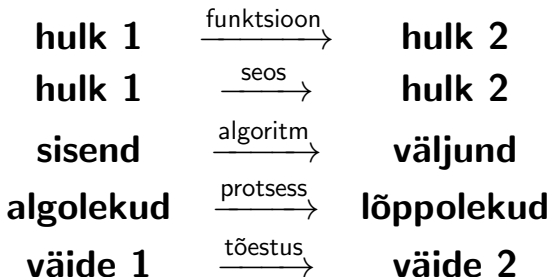
Avaldistega sarnaselt kombineeritakse näiteks:



Kategooriateooria

Nooltega opereerimise teooria.

Avaldistega sarnaselt kombineeritakse näiteks:



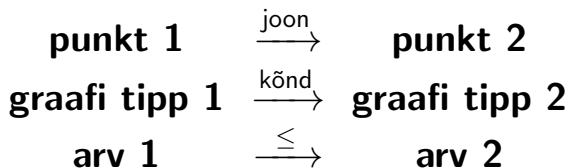
On ka geomeetrilisema sisuga näiteid.

punkt 1 $\xrightarrow{\text{joon}}$ **punkt 2**

On ka geomeetrilisema sisuga näiteid.

punkt 1	$\xrightarrow{\text{joon}}$	punkt 2
graafi tipp 1	$\xrightarrow{\text{kõnd}}$	graafi tipp 2

On ka geomeetrilisema sisuga näiteid.



On ka geomeetrilisema sisuga näiteid.

punkt 1	$\xrightarrow{\text{joon}}$	punkt 2
graafi tipp 1	$\xrightarrow{\text{kõnd}}$	graafi tipp 2
arv 1	$\xrightarrow{\leq}$	arv 2
hulk 1	$\xrightarrow{\subseteq}$	hulk 2

On ka geomeetrilisema sisuga näiteid.

punkt 1	$\xrightarrow{\text{joon}}$	punkt 2
graafi tipp 1	$\xrightarrow{\text{kõnd}}$	graafi tipp 2
arv 1	$\xrightarrow{\leq}$	arv 2
hulk 1	$\xrightarrow{\subseteq}$	hulk 2
kera 1	$\xrightarrow{\subseteq}$	kera 2

On ka geomeetrilisema sisuga näiteid.

punkt 1	$\xrightarrow{\text{joon}}$	punkt 2
graafi tipp 1	$\xrightarrow{\text{kõnd}}$	graafi tipp 2
arv 1	$\xrightarrow{\leq}$	arv 2
hulk 1	$\xrightarrow{\subseteq}$	hulk 2
kera 1	$\xrightarrow{\subseteq}$	kera 2

Miks nooled?

- Tulevad loomulikult esile *protsesse* kombineerides.

Miks nooled?

- Tulevad loomulikult esile *protsesse* kombineerides.
- Ühine „kasutajaliides“ paljudele valdkondadele.

Miks nooled?

- Tulevad loomulikult esile *protsesse* kombineerides.
- Ühine „kasutajaliides“ paljudele valdkondadele.
- Ühine keel võimaldab lihtsamalt näha ja luua seoseid erinevate mõistete vahel.

Miks nooled?

- Tulevad loomulikult esile *protsesse* kombineerides.
- Ühine „kasutajaliides“ paljudele valdkondadele.
- Ühine keel võimaldab lihtsamalt näha ja luua seoseid erinevate mõistete vahel.
- Ainuüksi noolte poolt tekitatud struktuuri kaudu saab suhteliselt palju tõestada.

Miks nooled?

- Tulevad loomulikult esile *protsesse* kombineerides.
- Ühine „kasutajaliides“ paljudele valdkondadele.
- Ühine keel võimaldab lihtsamalt näha ja luua seoseid erinevate mõistete vahel.
- Ainuüksi noolte poolt tekitatud struktuuri kaudu saab suhteliselt palju tõestada.
- Tõestame vähemaga rohkemat.

Miks nooled?

- Tulevad loomulikult esile *protsesse* kombineerides.
- Ühine „kasutajaliides“ paljudele valdkondadele.
- Ühine keel võimaldab lihtsamalt näha ja luua seoseid erinevate mõistete vahel.
- Ainuüksi noolte poolt tekitatud struktuuri kaudu saab suhteliselt palju tõestada.
- Tõestame vähemaga rohkemat.
- Või siis rohkemaga vähemat, aga üldisemat.

Mida nooltega teha saab?

Nooltega saab püstitada ning lahendada lähendusülesandeid.

Olgu $X \subseteq \mathbb{R}$ tõkestatud alamhulk. Tahame leida vähima hulga kujul $[a, b]$, mis hulka X sisaldab.

Mida nooltega teha saab?

Nooltega saab püstitada ning lahendada lähendusülesandeid.

Olgu $X \subseteq \mathbb{R}$ tõkestatud alamhulk. Tahame leida vähima hulga kujul $[a, b]$, mis hulka X sisaldab.

Meil on käepärast naturaalarvud $\mathbb{N}$, kuid meil on tarvis arve lahutada. Mis oleks vähim loomulik viis naturaalarve lahutamisega laiendada?

Mida nooltega teha saab?

Nooltega saab püstitada ning lahendada lähendusülesandeid.

Olgu $X \subseteq \mathbb{R}$ tõkestatud alamhulk. Tahame leida vähima hulga kujul $[a, b]$, mis hulka X sisaldab.

Meil on käepärast naturaalarvud $\mathbb{N}$, kuid meil on tarvis arve lahutada. Mis oleks vähim loomulik viis naturaalarve lahutamisega laiendada?

Et saaks seda küsimust täpsemalt püstitada, oleks vaja määratleda kogum, mille koosseisust lähendit otsime.

Kategooria mõiste

Kategooria koosneb objektidest ning nendevahelistest (tähistustega) nooltest.

Lisaks peaks kategooria nooli olema võimalik kenasti kombineerida.

Kategooria mõiste

Kategooria koosneb objektidest ning nendevahelistest (tähistustega) nooltest.

Lisaks peaks kategooria nooli olema võimalik kenasti kombineerida.

Näiteks: kategooria **Set**

Koosneb hulkadest ning funktsioonidest.

Kategooria mõiste

Kategooria koosneb objektidest ning nendevahelistest (tähistustega) nooltest.

Lisaks peaks kategooria nooli olema võimalik kenasti kombineerida.

Näiteks: kategooria **Set**

Koosneb hulkadest ning funktsioonidest.

Näiteks: kategooria **$\mathbf{P}(X)$** , kus X on hulk

Objektideks on hulga X alamhulgad ning noolteks on sisalduvused.

Meil on käepärast naturaalarvud $\mathbb{N}$, kuid meil on
tarvis arve lahutada. Mis oleks vähim loomulik viis
naturaalarve lahutamisega laiendada?

Siin otsime lähendit kategooriast, mille objektideks
on liitmise ja lahutamisega struktuurid. (Sobiv
kategooria on **Ab**)

Meil on käepärast naturaalarvud $\mathbb{N}$, kuid meil on tarvis arve lahutada. Mis oleks vähim loomulik viis naturaalarve lahutamisega laiendada?

Siin otsime lähendit kategooriast, mille objektideks on liitmise ja lahutamisega struktuurid. (Sobiv kategooria on **Ab**)

Analoogiliselt saab ratsionaalarvud täisarve jagamisega struktuuriga lähendades ning reaalarvud ratsionaalarvudest neid „aukudeta“ struktuuriga lähendades.

Kokkuvõtteks

- Kategooriateooria lisab abstraktsusastme, kuid laialdasemalt ning kohati ka spetsiifilisemalt on sellel lihtsustav mõju.

Kokkuvõtteks

- Kategooriateooria lisab abstraktsusastme, kuid laialdasemalt ning kohati ka spetsiifilisemalt on sellel lihtsustav mõju.
- Organiseerib teadmisi ning erinevates kontekstides esinevaid sarnaseid mõisteid.

Kokkuvõtteks

- Kategooriateooria lisab abstraktsusastme, kuid laialdasemalt ning kohati ka spetsiifilisemalt on sellel lihtsustav mõju.
- Organiseerib teadmisi ning erinevates kontekstides esinevaid sarnaseid mõisteid.
- Ilmutab ühiseid aspekte matemaatika eri valdkondades.

Kokkuvõtteks

- Kategooriateooria lisab abstraktsusastme, kuid laialdasemalt ning kohati ka spetsiifilisemalt on sellel lihtsustav mõju.
- Organiseerib teadmisi ning erinevates kontekstides esinevaid sarnaseid mõisteid.
- Ilmutab ühiseid aspekte matemaatika eri valdkondades.
- Lihtsam siseneda võõratesse valdkondadesse.

Kokkuvõtteks

- Kategooriateooria lisab abstraktsusastme, kuid laialdasemalt ning kohati ka spetsiifilisemalt on sellel lihtsustav mõju.
- Organiseerib teadmisi ning erinevates kontekstides esinevaid sarnaseid mõisteid.
- Ilmutab ühiseid aspekte matemaatika eri valdkondades.
- Lihtsam siseneda võõratesse valdkondadesse.
- Teatud tehnilistes situatsioonides oleks kategooriateooriata olukorra hoomamine suhteliselt keeruline.