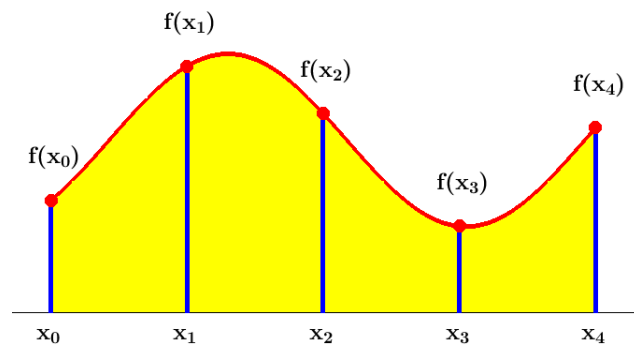


MTMM.00.340
Kõrgem matemaatika I



2020/2021 õa
sügissemester

Ülesannete kogu

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{array}{lll} (Const)' = 0 & (\sin x)' = \cos x & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' = -\sin x & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (e^x)' = e^x & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' = a^x \ln a & (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\ (\ln |x|)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & \end{array}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{array}{ll} (1) \int 0 \, dx = C & (7) \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ (2) \int dx = x + C & (8) \int \cos x \, dx = \sin x + C \\ (3) \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & (9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\ (4) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & (10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \\ (5) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & (11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ (6) \int e^x \, dx = e^x + C & (12) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \end{array}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1	Maatriksid	2
1.1	Reaalarvu absoluutväärtus	2
1.2	Summa sümbol	2
1.3	Maatriksid	2
1.4	Tehed maatriksitega	3
1.5	Maatriksite korrutamine	4
1.6	Tehete omadused	5
1.7	Rakenduslikud ülesanded	6
2	Determinandid	7
2.1	Determinandi arvutamine	7
2.2	Determinantide põhiomadused	8
2.3	Determinantide arendamine	9
2.4	Rakenduslikud ülesanded	10
3	Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine	11
3.1	Pöördmaatriks	11
3.2	Pöördmaatriksi leidmine	12
3.3	Maatriksvõrrandite lahendamine	13
3.4	Rakenduslikud ülesanded	14
4	Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid	15
4.1	Maatriksi astaku leidmine	15
4.2	Crameri valemid	15
4.3	Võrrandisüsteemi üldlahend ja erilahend	16
4.4	Gaussi elimineerimise meetod	17
4.5	Rakenduslikud ülesanded	18
5	Funktsioonid	19
5.1	Funktsionaalsed sõltuvused	19
5.2	Funktsioonide graafikud	19
5.3	Funktsioonid ja nende omadused	21
6	Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmfunksioon	22
6.1	Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon	22
6.2	Eksponentfunktsioon	22
6.3	Logaritmfunksioon	23
6.4	Logistiline kõver	24
7	Funktsiooni piirväärtus	25
7.1	Piirväärtuse omadused	25
7.2	Piirväärtuse arvutamine	26

7.3	Tähtsad piirväärtused	27
7.4	Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded	28
7.5	Rakenduslikud ülesanded	28
8	Kontrolltöö nr. 1	29
9	Pidevus. Tuletis	30
9.1	Pidevad ja katkevad funktsioonid	30
9.2	Funktsiooni tuletis	31
9.3	Liitfunktsiooni tuletis	33
9.4	Kõrgemat järku tuletis	34
9.5	Logaritmiline diferentseerimine	34
10	Diferentsiaal	35
10.1	L'Hospitali reegel	35
10.2	Funktsiooni diferentsiaal	35
10.3	Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine	36
10.4	Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	36
11	Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine	37
11.1	Tuletis kui protsessi muutumise kiirus	37
11.2	Joone puutuja ja normaal	37
11.3	Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõguspiirkonnad	38
11.4	Ekstreemumid	39
11.5	Optimiseerimine	40
11.6	Graafiku asümptoodid	41
12	Määramata integraal	42
12.1	Määramata integraali mõiste	42
12.2	Määramata integraali leidmine	42
12.3	Diferentsiaali märgi alla viimine	43
12.4	Muutujavahetus	44
13	Ositi integreerimine	45
13.1	Ositi integreerimine	45
13.2	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	45
14	Diferentsiaalvõrrandid	47
14.1	Harilikud diferentsiaalvõrrandid	47
14.2	Diferentsiaalvõrrandi lahend	47
14.3	Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	48
14.4	Rakenduslikud ülesanded	49
15	Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	51
15.1	Lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid	51
15.2	Lineaarse esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine	51
15.3	Rakenduslikud ülesanded	52
16	Kontrolltöö 2	53
17	Riemanni summad ja numbriline integreerimine	54
17.1	Riemanni summad	54
17.2	Numbriline integreerimine	55

18 Määratud integraali arvutamine	57
18.1 Newton-Leibnizi valem	57
18.2 Määratud integraali omadused	57
18.3 Muutujavahetus määratud integraalis	58
19 Määratud integraali arvutamine 2	59
19.1 Ositi integreerimine	59
19.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	59
20 Pindala arvutamine	60
20.1 Kõvertrapetsi pindala	60
20.2 Kõversektori pindala	60
20.3 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral	61
21 Joone pikkuse ja keha ruumala arvutamine	62
21.1 Joone pikkus	62
21.2 Keha ruumala ristlõigete kaudu	62
21.3 Pöördkeha ruumala	63
22 Määratud integraali füüsilised rakendused	64
22.1 Teepikkus	64
22.2 Kiirus ja kiirendus	65
22.3 Töö	66
22.4 Vedelike pumpamisel tehtav töö	66
23 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	67
23.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	67
23.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine	68
24 Päratud integraalid 1	69
24.1 Lõpmatute rajadega integraalid	69
25 Päratud integraalid 2	70
25.1 Integraalid tõkestamata funktsioonist	70
25.2 Päratud integraalide rakendusi	71
26 Vektorite skalaarkorrutis	72
26.1 Vektorite skalaarkorrutis	72
26.2 Vektorite vaheline nurk	73
27 Vektorite vektorkorrutis ja segakorrutis	74
27.1 Vektorite vektorkorrutis	74
27.2 Kolme vektori segakorrutis	75
28 Sirge ja tasandi võrrandid	76
28.1 Tasandi võrrand	76
28.2 Sirge võrrand ruumis	77
29 Kontrolltöö nr. 3	78
30 Kompleksarvu algebraline kuju	79
30.1 Kompleksarvu algebraline kuju	79
30.2 Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul	80

31 Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju	81
31.1 Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju	81
31.2 Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul	82
31.3 Rakenduslikud ülesanded	83
32 Kompleksarvu astendamine ja juurimine	84
32.1 Kompleksarvu astendamine ja juurimine	84
32.2 Kordamine	85
32.3 Algebraliste võrrandite lahendamine	85

Praktikum 1

Maatriksid

1.1 Reaalarvu absoluutväärtus

Definitsioon 1.1

Reaalarvu a absoluutväärtus $|a|$ defineeritakse valemiga $|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$

Ülesanne 1.1. Leidke järgmised väärtused.

(a) $|-3-5|$ (b) $|-|-8||$ (c) $\sqrt{9}$

Ülesanne 1.2. Lahendage järgmised võrrandid ja võrratused.

(a) $|x| = 3$ (c) $|2x+6| = 4$ (e) $|x| < 2$ (g) $x^2 < 2$
(b) $|2x-3| = 7$ (d) $|8-3x| = 9$ (f) $|1-x| > 1$

1.2 Summa sümbol

$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Ülesanne 1.3. Kirjutage summa sümboli Σ abil järgmised summad.

(a) $1+2+3+4+5$ (c) $1+1+1+1+1+1$ (e) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7$
(b) $1-1+1-1+1-1$ (d) $1-4+9-16+25$ (f) $1+q+q^2+\dots+q^k$

Ülesanne 1.4. Kirjutage ilma summa sümbolita järgmised summad.

(a) $\sum_{k=1}^6 b_k$ (b) $\sum_{j=2}^5 3^j$ (c) $\sum_{n=1}^1 (-1)^{n+1} 5^n$ (d) $\sum_{k=0}^n 3$

1.3 Maatriksid

Definitsioon 1.2

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi elementideks, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse $m \times n$ maatriksist.

Ülesanne 1.5. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n . Tähistage lühidalt maatriksi tema üldelemendi kaudu.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(i) \quad I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(j) \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(k) \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(g) \quad G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{30} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{30} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{30} \end{pmatrix}$$

$$(l) \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(h) \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(m) \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Tehed maatriksitega

Definitsioon 1.3

Maatriksi $A = (a_{ij})$, $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude äravahetamisel, s.t

$A^T = (a_{ji})$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$ korral.

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis maatriksite A ja B **summaks (vaheks)** nimetatakse maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed), s.t

$C = A \pm B$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Maatriksi A **korrutamisel skalaariga** ehk arvuga λ , korrutuvad selle arvuga maatriksi kõik elemendid, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ülesanne 1.6. Leidke ülesandes 1.5: 1) võrdsed maatriksid, 2) antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

Ülesanne 1.7. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & b & -1 \\ -2 & c & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leidke a , b ja c väärtused nii, et kehtiks võrdus $A = B^T$.

Ülesanne 1.8. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 1.5 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehed.

$$(a) \quad 2A - 3A$$

$$(d) \quad -H + 2I^T$$

$$(g) \quad A^T - B$$

$$(j) \quad F - E$$

$$(b) \quad 3B + 2B^T$$

$$(e) \quad A + B$$

$$(h) \quad B^T + A$$

$$(k) \quad C + D$$

$$(c) \quad 4E^T$$

$$(f) \quad C + \frac{1}{2}E^T$$

$$(i) \quad E + G$$

$$(l) \quad D^T - C$$

1.5 Maatriksite korrutamine

Definitsioon 1.4

Kui maatriksi A veergude arv n võrdub maatriksi B ridade arvuga, siis maatriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse maatriksit C , mille elementideks on

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj},$$

kus

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, (m \times n), & B &= (b_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p, (n \times p), \\ C &= (c_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p, (m \times p). \end{aligned}$$

Ülesanne 1.9. Millised alljärgnevatest korrutistest on defineeritud ülesandes 1.5 antud maatriksite korral? Leidke defineeritud korrutised ning esitage vastavad korrutamise valemid.

- | | | | | | |
|----------|-------------|----------|-------------|-------------|------------------|
| (a) AB | (c) $A^T B$ | (e) DC | (g) FE | (i) $B^T C$ | (k) $O^T B$ |
| (b) BA | (d) CD | (f) EF | (h) $F^T E$ | (j) $D^T B$ | (l) $A^T \theta$ |

Ülesanne 1.10. Leidke maatriksite korrutised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ | (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |

Ülesanne 1.11. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke

- | | | | |
|----------|----------|-----------------|-----------------|
| (a) AB | (b) BA | (c) $B^2 - A^2$ | (d) $(B - A)^2$ |
|----------|----------|-----------------|-----------------|

Ülesanne 1.12. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

- | | | |
|---------------|---------------|-------------------------|
| (a) $A^2 = A$ | (b) $B^3 = B$ | (c) $C^2 - 4C - 5E = O$ |
|---------------|---------------|-------------------------|

Ülesanne 1.13. Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

näidake, et võrdusest $AB = AC$ ei järeldu maatriksite B ja C võrdus.

1.6 Tehete omadused

Olgu matriksid A, B, C ja nullmatriks θ ühesuguste järkudega matriksid ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B \\ A + \theta &= A = \theta + A \\ (A^T)^T &= A \\ (A + B)^T &= A^T + B^T \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T \end{aligned}$$

Olgu matriksid A, B, C ja nullmatriks θ sellised, et allpool toodud tehted on määratud ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

$$\begin{aligned} AB &\neq BA \text{ üldjuhul} \\ (A \pm B)C &= AC \pm BC \\ (AB)C &= A(BC) \\ \lambda(AB) &= (\lambda A)B = A(\lambda B) \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ A\theta &= \theta \\ \theta A &= \theta \end{aligned}$$

Ülesanne 1.14. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 1.5 antud matriksite korral? Teostage lubatud tehted.

(a) $\frac{1}{2}EB^TD - 2A$

(b) $AEB + 4E^T$

(c) $CA^T - DA^T$

(d) $A^TE^6A - \frac{1}{2}BE^4B^T + D^2$

(e) $CBA - CDA$

(f) $2BEAC - BE^2AC$

(g) $\frac{3}{2}H^TEAC - \frac{1}{2}H^TAC$

(h) $2CBEH + DBH$

(i) $A^TFI^T - A^TEH$

(j) $IF^TH + H^TE^2H$

(k) $(\frac{1}{2}I)I^T - (9H)^TH$

(l) $AB + FI^TH^T$

(m) $FI^TH^T - E^THH^T$

(n) $3H^TEFI^T - \frac{1}{12}H^T(HI)I^T$

(o) $BHH^TA - C^3D$

(p) $DD^T - D^TD + DC - CD + C^2$

(q) $(-1)(2D - C)$

(r) $\theta B - A^TO$

(s) $4D\theta - OA$

(t) $\theta(C - 2D^T)$

(u) $OA + \theta B$

(v) $A + O^T - (10B)^T\theta$

(w) $0(CA + AD)$

(x) $0(DB + 10CA^T)$

Ülesanne 1.15. Kontrollige järgnevate võrduste kehtivust ülesandes 1.5 antud matriksite korral.

(a) $C(D^T)^T = (D^T)^TC$

(e) $(D^T - C^T)^T = D - C$

(i) $(BA)^T = A^TB^T$

(b) $(C^T)^TD = D(C^T)^TC$

(f) $(A^T - B)^T = A - B^T$

(j) $ABA = B^TA^TB^T$

(c) $C^T + D^T = (C + D)^T$

(g) $(2D)^T - D = 2D^T - D$

(k) $(C + D)A^T = CA^T + DA^T$

(d) $(C^T + D)^T = D^T + C$

(h) $3B^T - A = (3B - A^T)^T$

(l) $B^T(D - C) = B^TD - B^TC$

(m) $(CD)^T = C^T D^T$	(r) $(C^T - D)^T A^T = A^T (C^T - D)$	$= (2A)^T + (3B)^T$
(n) $(CD)^T = D^T C^T$	(s) $A(D^T - C)^T = A(D - C^T)$	(v) $5((H^T)^T + EH)^T = 10(H^T)$
(o) $(5C)D = C(5D) = 5CD$	(t) $2A(D - C)^T = A(2D)^T - 2AC^T$	(w) $(2I)^T H^T = 2H^T I^T$
(p) $(CD)C = C(DC)$	(u) $(2A + 3B)^T$	(x) $I^T (3H^T) = 3(HI)^T$
(q) $AD - B^T D = (A - B^T)D$		(y) $(HI)^T = I^T H^T$

1.7 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 1.16. Maatriksite kasutamine andmete hoidmiseks. Ravimifirma hoiab laos C-vitamiini järgmistes kogustes: 25 kasti 100 mg pudelites, 10 kasti 250 mg pudelites ja 32 kasti 500 mg pudelites. Lisaks B₃-vitamiini kogustes: 30 kasti 100 mg pudelites, 18 kasti 250 mg pudelites ja 40 kasti 500 mg pudelites. Neid koguseid kirjeldatakse maatriksiga A . Ühe vastava kasti müügihinda hoitakse maatriksis C . Laost viiakse välja kaks korda sama kogust kaste B . Leidke maatriks, mis kirjeldab allesjäänud vitamiinide kogust. Millist infot annab maatriks BC^T ?

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 32 \\ 30 & 18 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 1.17. (B) Olgu ajahetkel t maatriksi

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} \end{pmatrix}^T$$

igas reas toodud ühe ökosüsteemi kolme liigi isendite arv vastavalt N_{1t}, N_{2t}, N_{3t} .

Teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}$$

seob liigi isendite arvu ajahetkel t ja $t+1$ valemiga $N_{t+1} = P \cdot N_t$. Teostage viimane tehe ja analüüsige kolme liigi isendite arvukuse mõju üksteise suhtes. Millise struktuuriga peaks olema maatriks P , et isendite arv oleks üksteisest sõltumatu?

Ülesanne 1.18. (F) Satelliidi teekonda ümber Maa võib tasandil kujutada võrrandiga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.76 & -1 \\ 1 & 2.81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (7.76 \cdot 10^7),$$

kus ühikuteks on miilid. Millist joont on kujutatud?

Ülesanne 1.19. (IT) Roboti liikumise programmeerimiseks kasutatakse korrutist

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teostage toodud korrutamine ning kujutage graafikul algset vektorit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ning lõpptulemust.

2.1 Determinandi arvutamine

Definitsioon 2.1

Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$. Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant.

Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse maatriksi A **determinandi arendamiseks i -nda rea järgi**.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j -nda veeru järgi. Tähistatakse ka $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Kolmandat järku ruutmaatriksi determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Definitsioon 2.2

Determinanti M_{ij} nimetatakse ruutmaatriksi A **elemendile a_{ij} vastavaks miinoriks**, mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Definitsioon 2.3

Determinandi D_A **elemendi a_{ij} alamdeterminandiks** A_{ij} nimetatakse sellele elemendile vastava miinori M_{ij} korrutist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Alamdeterminanti A_{ij} nimetatakse ka elemendi a_{ij} algebraliseks täiendiks.

Ülesanne 2.1. Kirjutage välja: 1) maatriksi A teise rea elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid, 2) maatriksi B esimese veeru elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid. Arvutage iga maatriksi determinant.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $J = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$.

2.2 Determinantide põhiomadused

Omadus 2.1

1. Maatriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda maatriksi determinandi väärtust.
2. Maatriksi kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Kahe võrdse või võrdelise maatriksi rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.
4. Kui maatriksi mingi rea (või veeru) elemendid on kõik nullid, siis determinant võrdub nulliga.
5. Maatriksi mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k korrutub determinandi väärtus arvuga k .
6. Maatriksi determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi mingile reale (veerule) liita mistahes nullist erineva arvuga korrutatud teine rida (veerg).
7. Kui maatriksi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summasid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.

Kolmnurkse maatriksi determinant, mille peadiagonaalist allpool (üleval pool) asuvad elemendid on kõik nullid, võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.

Ülesanne 2.2. Kasutades determinantide omadusi, selgitage, kas võrdus kehtib.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 2.3. Kasutades determinantide omadusi, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} -12 & -24 & -24 & 15 \\ 12 & 32 & 32 & -35 \\ -22 & 18 & 18 & 18 \\ 44 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 2.4. Kasutades determinantide omadusi ja teadmist, et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 40$, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 2.5. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $|B|$, kui $|A| = -3$.

2.3 Determinantide arendamine

Ülesanne 2.6. Leidke determinantide väärtused: 1) arendades teise rea järgi, 2) arendades kolmanda veeru järgi, 3) arendades vabalt valitud rea või veeru järgi, mis on eelnevalt teisendatud nii, et selles reas või veerus oleks vaid üks nullist erinev element.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 2.7. Arvutage determinant kasutades arendamist rea või veeru järgi.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 2.8. Arvutage determinandi väärtus.

$$(a) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} x^3+1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3+1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^\pi \\ 9999 & -e^\pi & 0 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 1 \\ e^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(l) \begin{vmatrix} 15 & 0,2 & 0,1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (m) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

2.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 2.9. Leidke järgmiste koordinaatidega antud kolmnurkade pindalad S , kui

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(-1, 4), B(3, 1), C(2, 6)$

(c) $A(1, 0), B(2, 2), C(4, 3)$

(b) $A(-2, 2), B(1, 5), C(6, -1)$

(d) $A(3, 6), B(10, 1), C(-2, -3)$

Ülesanne 2.10. Leidke järgmistele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad V , kui

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(4, 0, 0),$

(b) $K(2, 0, 0),$

(c) $P(1, 2, 3),$

$B(5, 2, 2),$

$L(0, 4, 0),$

$Q(0, 4, 5),$

$C(2, 6, 0)$

$M(0, 0, 3)$

$R(6, 0, 7)$

Ülesanne 2.11. (B) Olgu meil mingis liigis neli erinevat vanuseklassi. Kui liik on jõudnud stabiilseesse seisusse, siis tema arvukus erinevates vanuseklassides ei tohiks enam oluliselt muutuda. Vastavas teoorias tuleb lahendada näiteks võrrand

$$|P - \lambda E| = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kus teisendusmaatriks P kirjeldab nelja erineva vanuseklassi arengut pikemal ajaperioodil (ellujäämistõenäosuste ja järeltulijate kohta), E on ühikmaatriks ja positiivne reaalne λ on stabiilse liigi jaoks vajalik juurdekasvu kiirus (isendit ajaühikus). Kui see juurdekasvu kiirus ei võrdu arvuga λ , siis liik ei ole stabiilse arvukusega erinevate vanuseklasside suhtes. Leidke λ väärtus. Leitud λ korral lahendage maatriksvõrrand $(P - \lambda E)x = 0$, kus lahend $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ näitab stabiilse oleku jaoks iga vastava vanuseklassi proportsioone kogu liigi populatsiooni $N = \sum_{i=1}^4 x_i$ suhtes.

Ülesanne 2.12. (K) Füüsikalises keemias kasutatakse molekulaarorbitaalide energiatasemete leidmiseks Hückel'i meetodit (vt. konspekti lisa), kus tuleb leida järgmist tüüpi determinandid. Leidke need.

(a) $\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix}$

Praktikum 3

Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine

3.1 Pöördmaatriks

Definitsioon 3.1

Ühikmaatriksiks nimetatakse niisugust n -järku ruutmaatriksit E , mille peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga.

3-järku ühikmaatriks on

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suvalise n -järku maatriksi A korral kehtib $AE = EA = A$, kus E on n -järku ühikmaatriks.

Definitsioon 3.2

Ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks A^{-1} nimetatakse sellist maatriksit, millega antud maatriksit A korrutades saadakse ühikmaatriks E , s.t

$$A^{-1}A = E.$$

Maatriksi korrutamine pöördmaatriksiga on kommutatiivne $A^{-1}A = AA^{-1}$.

Omadus 3.1

Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, millel leiduvad pöördmaatriksid. Siis nende kahe maatriksi korrutise pöördmaatriks leitakse valemiga $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ülesanne 3.1. Milline järgmistest on maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

(a) $B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 3.2. Näidake ilma determinanti leidmata, et maatriksil $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puudub pöördmaatriks.

Ülesanne 3.3. Olgu A n -järku ruutmaatriks ja E n -järku ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis $(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}$?

Ülesanne 3.4. Olgu A , B ja C pööratavad n -järku ruutmaatriksid. Lihtsustage avaldis $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ülesanne 3.5. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui $A^2 - 4A + E = O$.

Ülesanne 3.6. (M) Olgu E ühikmaatriks ning A ja B sama järku ruutmaatriksid.

Tõestage, et kui maatriks $E + AB$ on pööratav, siis on pööratav ka $E + BA$. Näpunäide: Võib näidata, et kui maatriks C on maatriksi $E + AB$ pöördmaatriks, siis maatriks $E - BCA$ on maatriksi $E + BA$ pöördmaatriks.

Ülesanne 3.7. (M) Tõestage, et $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{k-1}$, kui $A^{k-1} \neq O$ ja $A^k = O$.

3.2 Pöördmaatriksi leidmine

Definitsioon 3.3

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, so kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ on elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant ehk elemendi a_{ij} algebraline täiend.

Definitsioon 3.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse järgmisi teisendusi:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis kirjutades maatriksi A kõrvale paremale ühikmaatriksi E , kujul $(A|E)$, saame ridade elementaarteisenduste abil paremale otsitava pöördmaatriksi $(E|A^{-1})$.

Ülesanne 3.8. Millise k korral ei leidu antud maatriksil pöördmaatriksit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Ülesanne 3.9. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid valemi abil.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 3.10. Leidke pöördmaatriks nii valemi abil kui ka elementaarteisenduste abil. Kontrollige saadud tulemust.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ülesanne 3.11. Leidke pöördmaatriksid.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 3.12. Leidke seos $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ja tema pöördmaatriksi elementide vahel.

3.3 Matriksvõrrandite lahendamine

Olgu A, B ja X sama järku ruutmaatriksid, kus A ja B on teada ning A on regulaarne. Matriks X on tundmatu, mis tuleb leida.

Matriksvõrrandi $AX = B$ lahendiks on

$$X = A^{-1}B.$$

Matriksvõrrandi $XA = B$ lahendiks on

$$X = BA^{-1}.$$

Ülesanne 3.13. Lahendage võrrandisüsteemid matrikskujul.

$$(a) \begin{cases} 4x + 2y + 6z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1.5 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y - z - 2u - 3 = 0 \\ 2x - 3y + u - 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - u - 2 = 0 \\ 2x + y + 4z + u - 4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 3.14. Lahendage matriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(b) X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -10 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (g) X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 3.15. Lahendage matriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad XR = PQ, \text{ kui } R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad KXL = M, \text{ kui } K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 3.16. (F) Teatud elektriskeemis on Kirchoff'i seaduse põhjal võimalik voolutugevused amprites leida võrrandiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Leidke voolutugevuste vektor, korrutades võrrandit (vasakult) vastava pöördmaatriksiga.

Ülesanne 3.17. (IT) Teile saadeti kodeeritud sõnum. On teada, et igale 32 tähega tähestiku tähele on seatud vastavusse number nii, et tühik = 1, A=2, B=3, ..., Y=33 (vt. nt. <https://goo.gl/zOXm14>).

Lisaks on teada, et seda sõnumit korrutati vasakult maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dekodeerige järgmised sõnumid.

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 33 & 87 & 52 & 89 & 108 & 97 & 26 \\ 26 & 54 & 21 & 69 & 84 & 88 & 5 \\ 67 & 229 & 177 & 180 & 220 & 149 & 111 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} 142 & 66 & 90 & 21 & 91 & 112 & 50 & 39 & 84 \\ 124 & 34 & 90 & 10 & 95 & 118 & 45 & 24 & 89 \\ 240 & 200 & 109 & 66 & 95 & 116 & 81 & 101 & 84 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} 120 & 65 & 28 & 87 & 42 & 66 & 111 & 54 & 38 & 78 & 27 & 60 & 74 \\ 137 & 33 & 18 & 69 & 30 & 53 & 118 & 49 & 26 & 44 & 18 & 61 & 44 \\ 83 & 198 & 70 & 173 & 96 & 131 & 112 & 83 & 92 & 219 & 65 & 71 & 200 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} 86 & 100 & 59 & 89 & 29 & 34 & 20 & 27 & 96 & 32 & 44 & 84 & 101 & 82 \\ 81 & 107 & 29 & 94 & 10 & 21 & 13 & 15 & 98 & 9 & 24 & 74 & 91 & 65 \\ 126 & 96 & 180 & 89 & 107 & 88 & 51 & 76 & 112 & 126 & 125 & 140 & 160 & 160 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 3.18. (K) Uue sulami tegemiseks segatakse kokku neli erinevat sulamit, mis sisaldavad muuhulgas vaske (Cu), niklit (Ni), tsinki (Zn) ja rauda (Fe).

Esimene sulam sisaldab 80% Cu ja 20% Ni, teine sulam sisaldab 60% Cu, 20% Ni ja 20% Zn.

Kolmas sulam sisaldab 30% Cu, 60% Ni ja 10% Fe, neljas sulam sisaldab 20% Ni, 40% Zn ja 40% Fe. Kui palju on igat sulamit vaja, et lõppsulamis oleks 56 g vaske, 28 g niklit, 10 g tsinki ja 6 g rauda? Koostage ning lahendage lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul $Ax = B$.

Praktikum 4

Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid

4.1 Maatriksi astaku leidmine

Definitsioon 4.1

Valime maatriksist A välja k suvalist rida ja k suvalist veergu, $k \leq m, n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti M nimetatakse maatriksi A **k -järku miinoriks**.

Definitsioon 4.2

Maatriksi A **astakuks** $\text{rank}(A)$ nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku.

Maatriksi astaku leidmiseks kasutame ridade elementaarteisendusi, mille abil teisendame kõik elemendid ühel pool peadiagonaali nullideks.

Ülesanne 4.1. Millised alljärgnevatest on (4×4) -maatriksi $A = (a_{ij})$ miinorid? Milline neist on maatriksi A esimese rea ja teise veeru elemendile vastav miinor?

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} b_{14} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} c_{42} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$

(k) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Ülesanne 4.2. Leidke maatriksi astak.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ülesanne 4.3. Leidke maatriksi astak sõltuvalt parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtustest.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{array} \right)$

(c) $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2 & -4 & 5 \\ a & a & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{array} \right)$

4.2 Crameri valemid

Lineaarvõrrandisüsteem on kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul on $Ax = b$.

Lause 4.1

Kui lineaarvõrrandisüsteemi puhul on tegemist **Crameri peajuhuga** (s.t võrrandite arv on võrdne tundmatute arvuga $m = n$ ja $|A| \neq 0$), siis on süsteemil $Ax = b$ täpselt **üks lahend**.

Crameri valemid lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks Crameri peajuhul

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus D_i on saadud maatriksi A i -nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga b .

Ülesanne 4.4. Lahendage võrrandisüsteemid Crameri valemite abil.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} 2x - 3y + 2z = -8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} 3x + 4y + z + 2u = 3 \\ x + -5z + u = 0 \\ 3y - 2z + u = 4 \\ y - 4z = 4 \end{cases} \end{array}$$

4.3 Võrrandisüsteemi üldlahend ja erilahend

Definitsioon 4.3

Võrrandisüsteemi **üldlahendiks** nimetatakse lõplikust arvust parameetritest sõltuvat lahendite kogumit, millest parameetritele suvalisi reaalarvulisi väärtusi omistades saadakse kõik süsteemi lahendid. Võrrandisüsteemi **erilahendiks** nimetatakse sellist lahendit, mis saadakse üldlahendist vabadele parameetritele konkreetsete arvuliste väärtuste andmise teel.

Teoreem 4.1

Kronecker-Capelli teoreem. Lineaarvõrrandisüsteem kujul $Ax = b$ on lahenduv siis ja ainult siis, kui selle süsteemi maatriksi A astak on võrdne selle süsteemi laiendatud maatriksi $L = (A|b)$ astakuga, s.o $\text{rank}(A) = \text{rank}(L)$.

Olgu tundmatute arv n , võrrandite arv m ja astak r . Kui kehtib $\text{rank}(A) = \text{rank}(L) = r$, kus $L = (A|b)$, siis võrrandisüsteem on lahenduv ning lahendite arv sõltub suurustest n, m ja r .

1. $r = n$ korral täpselt üks lahend

$r = n = m$ korral Crameri peajuht; $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).

2. $r < n$ korral lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)

$r < m \leq n$ korral astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust; $r = m < n$ korral võrrandeid tundmatutest vähem.

Homogeense võrrandisüsteemi $Ax = 0$ laiendatud maatriks $(A|b)$ erineb süsteemi maatriksist nullveeru poolest, mis astakut ei mõjuta. Süsteemi rahuldab alati triviaalne lahend $x = 0$. Kui $n = m$ ja $D = 0$, siis astak $r < n$ ja süsteemil $Ax = 0$ on lõpmata palju lahendeid, vabu tundmatuid on $n - r$.

Ülesanne 4.5. Lineaarse võrrandisüsteemi $AX = b$ laiendatud maatriks $L = (A|b)$ on elementaarteisendustega viidud allpool antud kujule. Kontrollige (nn astakutingimuse põhjal), kas süsteem on lahenduv. Lahenduvuse korral leidke võrrandisüsteemi lahend.

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\text{(c)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{(d)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{(b)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$(e) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(g) \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$(i) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(f) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$(h) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

4.4 Gaussi elimineerimise meetod

Gaussi meetod. Teisendame ridade elementaarteisenduste abil laiendatud maatriksi elemendid allpool peadiagonaali nullideks. Viimasest võrrandist saame avaldada tundmatu x_n . Asendame selle eelviimasesse võrrandisse, saame avaldada x_{n-1} jne.

Ülesanne 4.6. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas antud süsteem on lahenduv või mitte. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend.

$$(a) \begin{cases} x - y + 2z + 2v = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 3y + v = -1 \\ 3z - 2v = -2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y + 5z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1 \end{cases}$$

Ülesanne 4.7. Tehke kindlaks, kas võrrandisüsteem on lahenduv ning lahenduvuse korral lahendage see.

$$(a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 3y - 26z + 22v = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19v = 0 \\ x + 2y + 4z - 3v = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4v = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + z + 2u - v = 4 \\ y + z + u + v = 3 \\ x - 2y - z + u - 3v = 0 \\ 2x + y + 3z + 2u - v = 5 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 4y + z = 13 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 4.8. Leidke milliste parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtuste korral süsteemil: 1) on üks lahend, 2) on lõpmata palju lahendeid, 3) lahendid puuduvad. Punkti 2) korral leidke lahend.

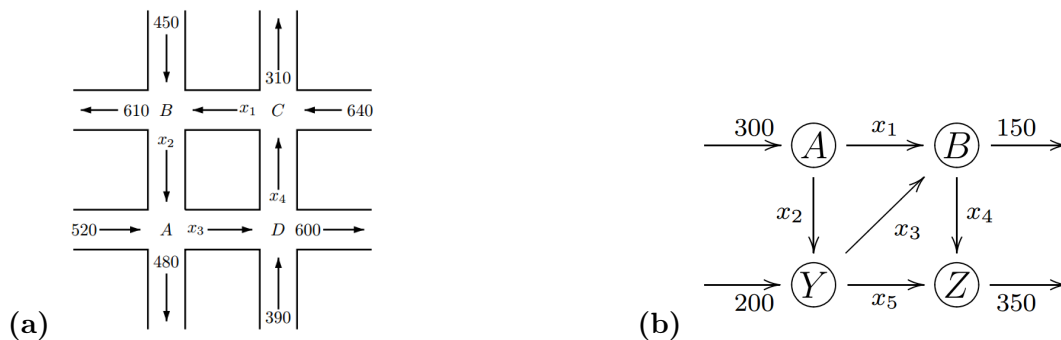
$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -2 \\ 2x + y + az = 1 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y + 2z - w = 4 \\ ay + z + 2w = 0 \\ -x + 2y + z + w = -4 \end{cases} & \text{(i)} \begin{cases} 2x + 3y + 2w = 3 \\ x + y + az - 2w = -6 \\ 2x - y + 2z + w = 9 \\ x + 3z + w = 6 \end{cases} \\
 \text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 5 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ 2x + 2y + az = -1 \end{cases} & \text{(j)} \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x - y + 2z = 1 \\ x + 2y + az = b \end{cases} \\
 \text{(c)} \begin{cases} 2x - ay + z = 0 \\ 4x - 2y + az = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases} & \text{(g)} \begin{cases} 6x + 2y + 3w = 16 \\ 3x + y + 2z + aw = 14 \\ x - y - z + 3w = 1 \\ -x + y + 2z - w = 2 \end{cases} & \text{(k)} \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + az = 3 \\ 2x + 3y + z = b \end{cases} \\
 \text{(d)} \begin{cases} 2x + y + az = 5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 3x + 6y + z = 3 \end{cases} & \text{(h)} \begin{cases} ax + 3y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + y + 7z = 14 \end{cases} & \text{(l)} \begin{cases} ax + y + 4z = 2 \\ 2x - y + a^2z = 2 \\ x - 3z = a \end{cases}
 \end{array}$$

Ülesanne 4.9. Leidke millise parameetri $a \in \mathbb{R}$ väärtuste korral on süsteemil: 1) ainult triviaalne lahend, 2) mittetriviaalsed lahendid. Punkti 2) korral leidke mittetriviaalne lahend.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - 9y + z = 0 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ -8x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + az = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

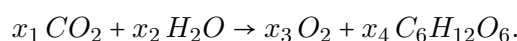
4.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 4.10. Joonisel on toodud tänavaliikluse keskmised sõidukite arvud (ühes tunnis). Leidke arvud x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5 .



Ülesanne 4.11. (B) Mäletseja päevategevuse võib jagada jämedalt kolmeks tegevuseks: söömine, liikumine (uude söögikohta või kiskja eest põgenemine) ja puhkamine. Olgu söömisest saadav puhkaseenergia 200 kalorit tunnis. Liikumisel kaotatakse 150 cal/h ja puhkamisel 50 cal/h. Kuidas tuleks ööpäev jaotada nende kolme tegevuse vahel, et energiat kuluks sama palju, kui energiat saadakse? Kas selline jaotus on ühene? Kui loom peab ööpäevas puhkama vähemalt 6 tundi, kuidas peaks siis tegevused olema jaotunud? Kui ülesöömise vastu peaks loom liikuma ja sööma sama pikalt, kuidas on jaotus siis?

Ülesanne 4.12. (K) Taimed kasutavad fotosünteesis päikeseenergiat, et toota süsihappegaasist (CO_2) ja veest (H_2O) glükoosi ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$) ja hapnikku (O_2). Leidke iga aine kogused x_1, x_2, x_3 ja x_4 , kui keemiline reaktsioon on kirja pandav võrrandiga



5.1 Funktsionaalsed sõltuvused

Definitsioon 5.1

Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv y , siis öeldakse, et hulgal $X \subset \mathbb{R}$ on defineeritud **funktsioon** $y = f(x)$.

Kui suurus y on võrdeline (proportsionaalne) suurusega $f(x)$, siis seda sõltuvust iseloomustab funktsioon $y = kf(x)$, kus k on mingi konstant (võrdetegur).

Ülesanne 5.1. Kirjutage välja järgmised funktsionaalsed sõltuvused.

- (a) Ümara lati tugevus S on võrdeline tema jämeduse h neljanda astmega
- (b) Delfiini energiakulu E ujudes on proportsionaalne tema liikumiskiiruse v kuubiga
- (c) Teekonna keskmine kiirus v on pöördvõrdeline kulutatud ajaga t
- (d) Kahe keha vaheline gravitatsioonijõud G on pöördvõrdeline nende kehade vahelise kauguse ruuduga

Ülesanne 5.2. (K) Keemilise elemendi erisoojus s on energia hulk kalorites, mida on vaja 1 grammi elemendi 1 kraadiliseks soojendamiseks.

Otsustage järgmise tabeli põhjal, kas erisoojus s on võrdeline või pöördvõrdeline aatommassiga w . Kui seos kehtib, leidke vastav võrdetegur k .

element	Li	Mg	Al	Fe	Ag	Pb	Hg
w	6,9	24,3	27,0	55,8	107,9	207,2	200,6
s	0,92	0,25	0,21	0,11	0,056	0,031	0,033

5.2 Funktsioonide graafikud

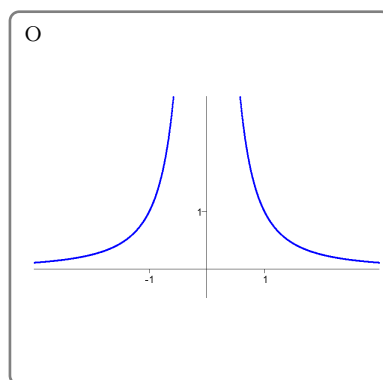
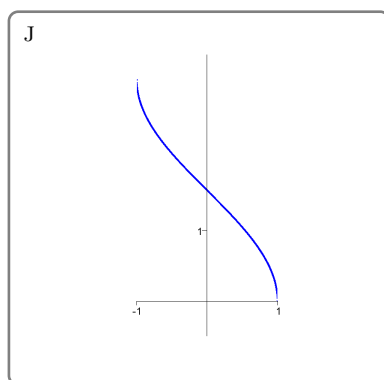
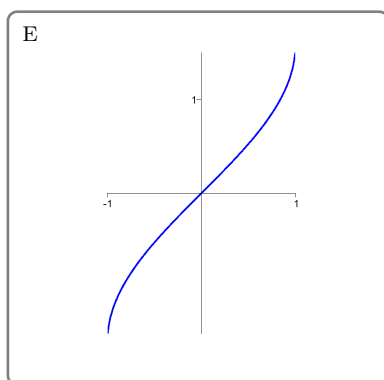
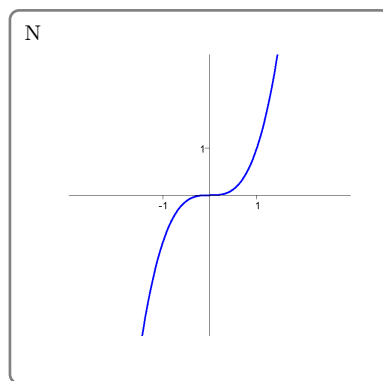
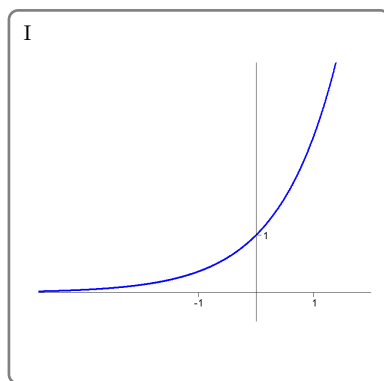
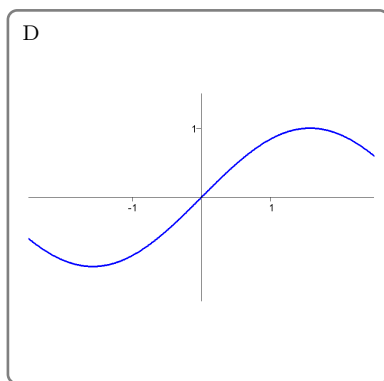
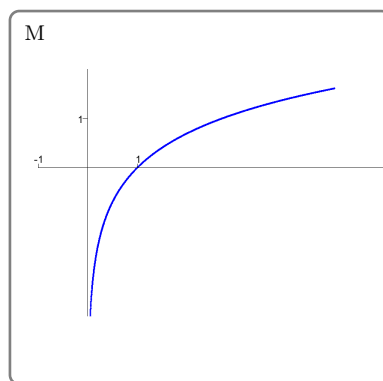
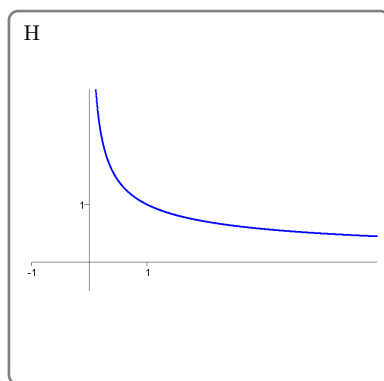
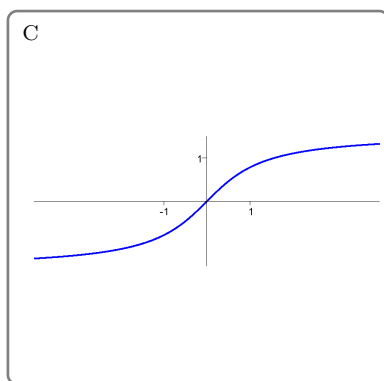
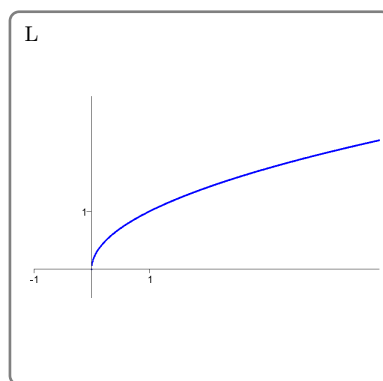
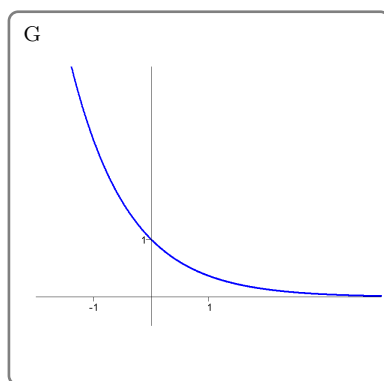
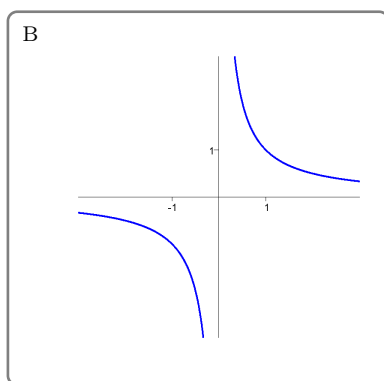
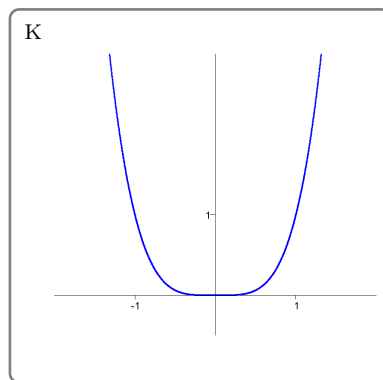
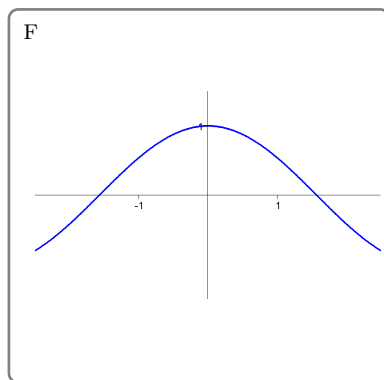
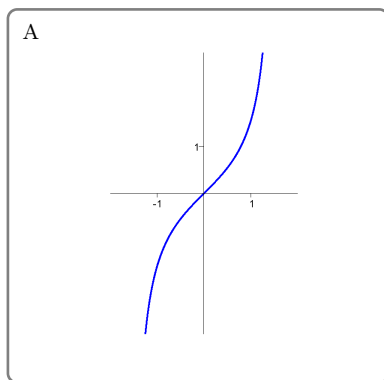
Ülesanne 5.3. Selgitage, kas funktsioonide $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ korral kehtib võrdus $f = g$? Skitseerige nende funktsioonide graafikud.

Ülesanne 5.4. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud.

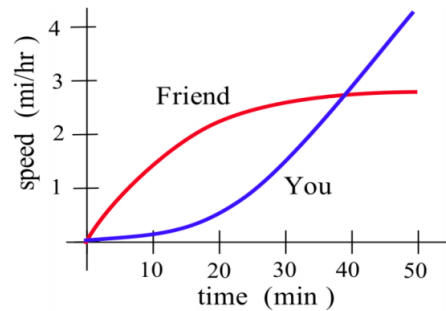
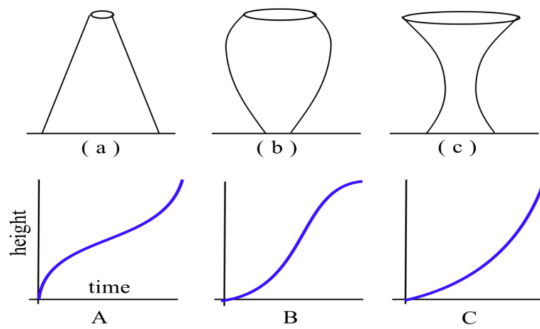
- (a) $f(x) = -x^2 + 1$
- (b) $f(x) = \log(-x)$
- (c) $f(x) = \sin(x - \pi)$
- (d) $f(x) = \arcsin x + \pi/2$
- (e) $f(x) = e^{-2x}$
- (f) $f(x) = \cos x$
- (g) $f(x) = \cos 2x$
- (h) $f(x) = \cos 3x$
- (i) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$
- (j) $f(x) = \sin \frac{x}{4}$
- (k) $f(x) = \tan 2x$
- (l) $f(x) = \tan(x - 2\pi)$

Ülesanne 5.5. (IT) Multiprotsessoriga arvuti suudab töötada S korda kiiremini, kui ühe protsessoriga arvuti. Skitseerige S graafik protsessorite arvu n järgi, kui $S = \frac{5n}{4+n}$.

Ülesanne 5.6. Milliste põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud on kujutatud järgmistel joonistel?



Ülesanne 5.7. Kolmel graafikul on toodud anuma veega täitumise kõrgus, kui veevool on ühtlane. Milline anum vastab millisele graafikule?



Ülesanne 5.8. Graafikul (ülal paremal) on toodud teie ja sõbra liikumise kiirus ajas. Liikumist alustatakse samast punktist ja liigutakse samas sihis.

- (a) Kes liigub kiiremini hetkel $t = 20$? (c) Millal on teie vahemaa suurim?
 (b) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 20$? (d) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 50$?

5.3 Funktsioonid ja nende omadused

Definitsioon 5.2

Kõikide elementide $x \in X$ hulka, mille puhul funktsioon $y = f(x)$ on määratud, nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**. Funktsiooni f kõik väärtused kuuluvad hulka

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\},$$

mida nimetatakse funktsiooni f **muutumispiirkonnaks**.

Definitsioon 5.3

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse

1. **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas X , kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral;
2. **paarituks funktsiooniks**, kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral;
3. **perioodiliseks**, kui leidub arv $T > 0$ nii, et $f(x + T) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 5.9. Leidke järgmiste funktsioonide määramis- ja muutumispiirkonnad.

- (a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (d) $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$ (f) $f(x) = \arcsin(2x-1)$
 (b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ (e) $f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$ (g) $f(x) = \arccos \frac{2}{1+x}$
 (c) $f(x) = \log(x-6)$

Ülesanne 5.10. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised on paaritud funktsioonid.

- (a) $f(x) = \frac{3}{x} - x^3$ (b) $f(x) = x(5^{2x} - 5^{-2x})$ (d) $f(x) = \sin x - x \cos x$
 (c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arctan x}$ (e) $f(x) = \sin x - \cos x$

Ülesanne 5.11. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on perioodilised, leidke vähim periood T .

- (a) $f(x) = \sin 2x$ (b) $f(x) = \cos 3x$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = \tan \frac{x}{2} + 3$

Praktikum 6

Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmifunktsioon

6.1 Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon

Funktsiooni $y = f(x)$ **pöördfunktsiooni** $x = f^{-1}(y)$ leidmiseks tuleb avaldada võrrandist $y = f(x)$ muutuja x muutuja y kaudu ning vahetada tähised x ja y , saame $y = f^{-1}(x)$.

Definitsioon 6.1

Funktsiooni $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks**, kui iga paari $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ülesanne 6.1. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$ | (d) $f(x) = 1 + \log x - 2 $, $x \in (-\infty, 2)$ |
| (b) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ | (e) $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3}$, $x \in [-3, 0]$ |
| (c) $f(x) = 10^x + 1$ | (f) $f(x) = 1 + \arccos(1 - x)$ |

Ülesanne 6.2. Määrake, kas funktsioon f on üksühene.

- | | |
|---------------------|--|
| (a) $f(x) = 3x - 2$ | (d) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$ |
| (b) $f(x) = 2^x$ | (e) $f(x) = x^3$ |
| (c) $f(x) = x^2$ | (f) $f(x) = \sin x$ |

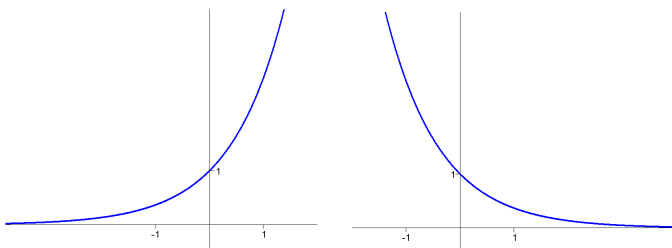
Ülesanne 6.3. Järgmised parameetrilisel kujul antud funktsioonid kirjutage ilmutatud kujul $y = f(x)$ või $x = g(y)$.

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (a) $x = t + 5$, $y = t + \ln t$ | (b) $x = t^5 + t$, $y = e^t$ |
|-----------------------------------|-------------------------------|

Ülesanne 6.4. Leidke järgmised ilmutamata kujul antud funktsioonid $y = f(x)$.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| (a) $\ln(y - \sin x) = x$ | (b) $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$ |
|---------------------------|-------------------------------|

6.2 Eksponentfunktsioon



Eksponentfunktsioon on $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Funktsiooni $y = e^x$ korral räägitakse eksponentsiaalsest kasvust ja $y = e^{-x}$ korral eksponentsiaalsest langusest.

Omadus 6.1

Eksponentfunktsioonil on järgmised tähtsamad omadused:

(a) $a^0 = 1$

(c) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(e) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

(g) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

(b) $a^x > 0$

(d) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(f) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ülesanne 6.5. Lihtsustage avaldis $\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$, kui $f(x) = Ae^{kx}$.

Ülesanne 6.6. Turule investeeritakse 300 eurot intressiga 3 % aastas. Leidke investeeringu suurus 10 aasta pärast.

Ülesanne 6.7. (K) Mõõtesead registreerib jões 1 km eemal kemikaali lekkekohast 620 osakest miljoni kohta (ppm) ning seadme näitajad suurenevad 12,5 % iga kilomeetri kohta lekkekohast eemal. Kui kaugel on seadme näit 100 ppm?

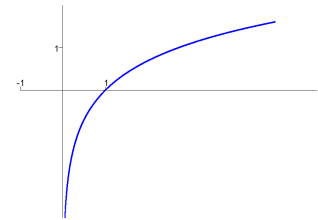
6.3 Logaritmifunktsioon

Definitsioon 6.2

Positiivse arvu x **logaritmiks alusel** a ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse arvu c , millega alust a astendades saadakse arv x , s.t.

$$\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x.$$

Logaritm- ja eksponentfunktsioon on teineteise pöördfunktsioonid.

**Omadus 6.2**

Logaritmifunktsioonil on järgmised tähtsamad omadused:

(a) $\log 1 = 0$

(d) $\log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y|$

(g) $a^{\log_a x} = x$

(b) $\ln e = 1$

(e) $\log x^a = a \log |x|$

(h) $e^{\ln x} = x$

(c) $\log xy = \log |x| + \log |y|$

(f) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

Ülesanne 6.8. Lihtsustage järgmised avaldised.

(a) $e^{5 \ln x}$

(b) $\ln \frac{1}{e^{3x}}$

(c) $e^{(3 \ln 9)/2}$

(d) $4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln x^{1/3}$

(e) $16^{\log_2 \sqrt[4]{48} - 1}$

(f) $\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}}$

(g) $-\log_8 \log_4 \log_2 16$

(h) $e^{2 \ln \cos x} + (\ln e^{\sin x})^2$

Ülesanne 6.9. Lihtsustage järgmised avaldised.

(a) $5 \log_5 25 + 8 \log_2 64 - 4 \log_3 27 + \log_2 2 + \log_5 1$

(b) $3^{1 - \log_3 7} + 5^{\log_5 8 + 1} - 2,4^{\log_{2,4} 10 + 1}$

(c) $\log_2 12 + \log_2 25/3 + 2 \log_2 4/5 - \log_2 2^7$

(d) $4 \cdot (81^{1/4 - 1/2 \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8})$

Ülesanne 6.10. Vesi kuumutatakse nõus 90 kraadini ja asetatakse ruumi, mille temperatuur on 0 kraadi. Newtoni jahtumisseadusest tuletatakse võrrand $\ln T = \ln 90 - 0,23t$, kus T on vee temperatuur ja t on aeg minutites. Esitage T ajast t sõltuva funktsioonina.

Ülesanne 6.11. (F) Kahe tähe näivheledused m_1 ja m_2 on seotud nende tegelike heledustega b_1 ja b_2 järgmise logaritmilise seose abil:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log_{10} \frac{b_2}{b_1}.$$

Avaldage b_2 .

Siiriuse näivheledus on $-1,4$ ning veel silmaga nähtavate tähtede näivheledus on u. 6,0. Mitu korda on Siiriuse tegelik heledus suurem, kui veel silmaga nähtavatel tähtedel?



Ülesanne 6.12. (K) Putukamürk DDT keelati USA-s 1972. aastal. Olgu A_0 alghetkel piirkonda pritsitud DDT kogus ning A hetkel t (aastat) veel lagundamata DDT kogus. Neid kahte suurust seob võrrand

$$\log_{10} A = \log_{10} A_0 + 0,1t \log_{10} 0,8.$$

Avaldage A kui aja t -funktsioon.

Ülesanne 6.13. (M) Näidake, et kehtib võrdus $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

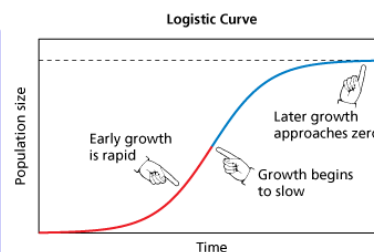
Ülesanne 6.14. (M) Arvutage b^b , kui $a^b = 8$, $b^c = 10$ ja $a^c = 2$.

6.4 Logistiline kõver

Logistiline S-kõver

$$y = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} = \frac{L}{1 + b e^{-kx}}$$

on laialt kasutusel populatsiooni modelleerimisel. Siin L on kõvera maksimaalne väärtus, k iseloomustab kasvu kiirust ja x_0 on keskpunkti asukoht. Logistilist kõverat kasutatakse palju ka statistikas ja IT-s masinõppes, kuna lubab modelleerida 0 ja 1 tüüpi väärtusi.



Joonis: <http://www.math.andyou.com/161>

Ülesanne 6.15. Ülikoolilinnakus on 5000 tudengit. Üks tudeng naaseb puhkuselt linnakusse kaua kestva gripiviirusega. Viiruse levikut modelleeritakse parajasti logistilise mudeliga $y = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}}$, kus t on aeg päevades ja y näitab nakatunud tudengite arvu. Mitme päeva pärast tuleb õppetöö lõpetada, kui eeskirja järgi tehakse seda olukorras, kus on vähemalt 40 % nakatunuid.

Praktikum 7

Funktsiooni piirväärtus

Definitsioon 7.1

Öeldakse, et punkt $a \in \mathbb{R}$ on hulga $X \subset \mathbb{R}$ **kuhjumispunkt**, kui punkti a iga ümbrus (vahemikud $(a - \delta, a + \delta)$, kus $\delta > 0$) sisaldab temast erinevaid hulga X punkte.

Definitsioon 7.2

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

kui punktidele a piisavalt lähedastes määramispiirkonna X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kui tahes vähe.

Määramatused:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Piirväärtuse märgi all olevat avaldist teisendada nii, et määramatus saaks kõrvaldatud.

7.1 Piirväärtuse omadused

Teoreem 7.1

Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning eksisteerigu **lõplikud** piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Siis eksisteerivad ka piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot A, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{kui } B \neq 0.)$$

Teoreem 7.2

Kui $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ja funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses, siis $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Teoreem 7.3

Keskmise muutuja omadus. Kui punkti a mingis ümbruses kehtivad võrratused $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ja leiduvad lõplikud piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, siis leidub ka piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Teoreem 7.4

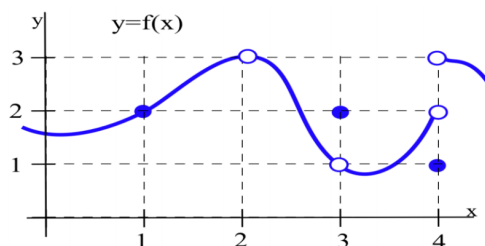
Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Teoreem 7.5

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, siis piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ eksisteerib parajasti siis, kui kehtivad võrdused

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L.$$

Ülesanne 7.1. Leidke joonise põhjal järgmised piirväärtused.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ |

Ülesanne 7.2. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b .

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 3, \end{cases}$	$a = 1$	$b = 2$	(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$	$a = 0$	$b = 1$
--	---------	---------	--	---------	---------

Ülesanne 7.3. Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning olgu $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -5$. Millistele piirväärtuse omadustele tuginedes on tehtud järgmised teisendused?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7) \right)^{2/3}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7 \right)^{2/3}} = \frac{7}{4}.$$

Ülesanne 7.4. Kas kehtib võrdus $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{1/x}$? Põhjendage!

Ülesanne 7.5. Leidke järgmised piirväärtused.

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - 5)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos 2x$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ x }{x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 7}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x}{x}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ | (k) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4+x}{2 + e^{\frac{-1}{\sin x}}}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right)$ | |

7.2 Piirväärtuse arvutamine

Ülesanne 7.6. Leidke järgmised piirväärtused.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - 1}{2x-2}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(2x^2 - 8)x^2}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ |

(g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

(i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

(k) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{(x+4)^2}$

(h) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{x-4}$

Ülesanne 7.7. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3}-1}{\sqrt{x}-1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$

(c) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{y+16}}{y}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2+5x}}$

Ülesanne 7.8. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log 2x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-7x+1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{x^2-x+1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{(4x+3)^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

7.3 Tähtsad piirväärtused

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \end{aligned}$$

Ülesanne 7.9. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 4x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 5x}{(x-x^3)^2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{3/x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{3x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x-2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$

7.4 Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded

Ülesanne 7.10. Leidke järgmised piirväärtused.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 + x - 2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} + x)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 6x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1 - \sqrt{x+3}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x}{(x+1)^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 5x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x - 1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2}{x} - 1 \right)$$

7.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 7.11. (B) Loomade õppimisvõime uurimiseks teostas üliõpilane eksperimendi, kus rotid lasti korduvalt läbida labürinti. Mõõtmistulemused näitasid, et n -dal korral läbis rott labürindi ajaga $T(n) = (5n + 17)/n$ minutit. Mis juhtub labürindi läbimiseks kuluva ajaga, kui katsete arv tõkestamatult kasvab?

Ülesanne 7.12. (B) Teatud inimese silma pupilli pindala avaldub seosega $S = \frac{36 + 24y^3}{1 + 4y^3}$ (mm^2), kus y on valguse heledus luumenites. Milliste väärtuste vahel võib pupilli pindala teoreetiliselt muutuda?

Ülesanne 7.13. (F) Einstein'i erirelatiivsusteooria järgi on liikuva keha mass leitav valemiga $M(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, kus c on valguse kiirus, $m > 0$ on seisumass ja v on keha liikumise kiirus. Arvutage järgmiste avaldiste väärtused. Mis on vastavate tulemuste füüsikaline sisu?

$$(a) M(0)$$

$$(b) M\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$(c) \lim_{v \rightarrow c-} M(v)$$

$$(d) \lim_{v \rightarrow c+} M(v)$$

Ülesanne 7.14. (F) Punktmassi liikumist aja t järgi kirjeldab seos $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$. Leidke punktmassi liikumise kiirus hetkel $t = 2$, s.t leidke piirväärtus $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$.

Ülesanne 7.15. On ennustatud, et t aasta pärast on eeslinna populatsioon $p = p(t)$ tuhat inimest, kus $p(t) = 20 - \frac{7}{t+2}$. Keskkonnaameti uuring näitas, et keskmine süsihappegaasi tase on c osakest miljoni osakese kohta, kus $c(p) = \frac{2\sqrt{p^2 + p + 21}}{5}$. Mis juhtub süsihappegaasi tasemega pikas perspektiivis, kui $t \rightarrow \infty$?

Ülesanne 7.16. (K) Analüüsige vesiniku aatomi $3s$ -orbiidi lainefunktsiooni radiaalse osa $R_{3s}(r)$ väärtusi protsessides $r \rightarrow 0+$ ja $r \rightarrow \infty$. Siin N ja a_0 on konstandid, r on elektroni kaugus tuumast:

$$R_{3s}(r) = N \cdot \left(27 - \frac{18}{a_0}r + \frac{2}{a_0^2}r^2 \right) \cdot e^{-\frac{r}{3a_0}}.$$

1. Maatriksid

1. Maatriksite liigid. Maatriksite omadused.
2. Tehted maatriksitega.
3. Pöördmaatriks.
4. Maatriksvõrrandite lahendamine.
5. Maatriksi astaku leidmine.

2. Determinandid

1. Determinantide põhiomadused.
2. Determinantide arendamine rea või veeru järgi.

3. Lineaarvõrrandite süsteemid

1. Gaussi meetod.
2. Lineaarvõrrandite süsteemi lahend, üldlahend ja erilahend.
3. Crameri peajuht ja valemid.

4. Funktsioonid

1. Määramispiirkond, muutumispiirkond, paaris- ja paaritufunktsioon, üksühene funktsioon.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, nende skitseerimine.
3. Eksponent ja logaritmifunktsioonide omadused.
4. Pöördfunktsiooni leidmine.

9.1 Pidevad ja katkevad funktsioonid

Definitsioon 9.1

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks punktis** a (ehk kohal a), kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Teoreem 9.1

Iga elementaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas.

Definitsioon 9.2

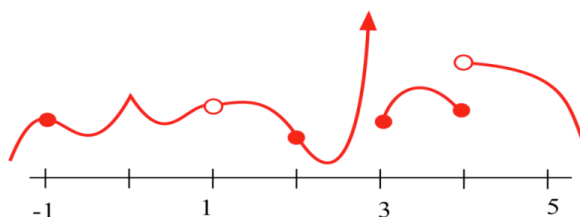
Funktsiooni **katkevuspunktiks** nimetatakse tema määramispiirkonna kuhjumispunkti, milles funktsioon ei ole pidev.

Definitsioon 9.3

Olgu a funktsiooni f katkevuspunkt.

- Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **esimest liiki katkevus**, kui eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$. Kui seejuures need ühepoolsed piirväärtused on võrdsed, siis öeldakse, et katkevus punktis a on **kõrvaldatav**.
- Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **teist liiki katkevus**, kui vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ on lõpmatu või ei eksisteeri.

Ülesanne 9.1. Leidke joonise põhjal intervallid, kus funktsioon on pidev ja punktid, kus ta ei ole pidev.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

Ülesanne 9.2. Joonestage ühe funktsiooni f graafik, mis rahuldab järgmisi tingimusi.

- | | |
|--|--|
| (a) funktsioon f on määratud lõigus $[0, 5]$ | (c) $f(1) = 0$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ | (d) funktsioon f on tõkestatud lõigus $[4, 5]$ |
| | (e) funktsioon f ei ole pidev punktis $x = 3$ |

Ülesanne 9.3. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

$$(a) f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 4x, & x > 2 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{2x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 9.4. Leidke parameetrite a ja b väärtused, mille korral järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 7x-2, & x \leq 1 \\ ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 3+ax^2, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} bx^2, & x \leq 2 \\ 2x+b, & x > 2 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x-a, & x < 1 \\ \cos \pi x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ülesanne 9.5. Määrake järgmiste funktsioonide katkevuste liigid. Kui võimalik, siis kõrvaldage katkevused.

$$(a) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$(d) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(g) f(x) = \ln |\sin x|$$

$$(b) f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$(e) f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$$

$$(h) f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

$$(c) f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$$

$$(f) f(x) = \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

$$(i) f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$$

Ülesanne 9.6. Töötaja leping näeb ette, et tema esialgne palk on 1000 € ning eduka töö korral ootab teda iga poole aasta tagant palgatõus 3%. Joonistage töötaja palga graafik järgmise 5 aasta jaoks ning uurida palgafunktsiooni pidevust.

9.2 Funktsiooni tuletis

Definitsioon 9.4

Olgu $X \subset \mathbb{R}$ (tõkestatud või tõkestamata) intervall, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, ning olgu a hulga X sisepunkt. Funktsiooni f **tuletiseks** punktis a nimetatakse (lõplikku või lõpmatut) piirväärtust

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Ülesanne 9.7. Lähtudes definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$(a) f(x) = 6x - 1$$

$$(c) f(x) = x^3$$

$$(e) f(x) = \cos x$$

$$(b) f(x) = 2x^2 - 5$$

$$(d) f(x) = \sqrt{3x}$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{x}$$

Ülesanne 9.8. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$(a) f(x) = 3x^5$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2e$$

$$(e) f(x) = \log_2 |x| + \sin x$$

$$(b) f(x) = x + 6x^{\frac{1}{3}}$$

$$(d) f(x) = 2^x - e^x$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{2x} - 3 \arccos x$$

$$(g) \quad f(x) = 21x^{-7} - \frac{\arcsin x}{2}$$

$$(h) \quad f(x) = -\ln|x| + \frac{x^3}{6}$$

$$(i) \quad f(x) = 3\pi^2 + 6\sqrt[3]{x^4}$$

Teoreem 9.2
Tehetega seotud diferentseerimisreeglid

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad lõplikud tuletised punktis x , siis ka funktsioonidel $u + v, u - v, u \cdot v, \frac{u}{v}$ eksisteerivad lõplikud tuletised punktis x , kusjuures

$$(cu)' = cu', \quad c = \text{const},$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Ülesanne 9.9. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a, b ja α on konstandid).

$$(a) \quad f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$(f) \quad f(x) = -\frac{5x}{x - 6}$$

$$(b) \quad f(x) = x^a b^x$$

$$(g) \quad f(x) = \frac{e^x a^x}{1 + \ln a}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{x \tan \alpha}{1 + x^2} + x \ln x$$

$$(d) \quad f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$$

$$(i) \quad f(x) = \arccos x \arcsin x$$

$$(e) \quad f(u) = \frac{\sin u}{u} - \ln u \cdot \cos u$$

$$(j) \quad f(x) = \frac{1}{\sin x} + a^2 \arctan x$$

Ülesanne 9.10. Leidke funktsiooni $f(x) = (3x - 1)(3x + 1)(x^2 - 4)$ tuletis

(a) kasutades korrutise tuletise valemit

(b) korrutades sulud läbi

Ülesanne 9.11. Arvutage järgmiste funktsioonide tuletised punktis t .

$$(a) \quad f(t) = 15t^3 e^t \quad \text{ja} \quad t = 1$$

$$(b) \quad f(t) = \frac{t^2(1 - 2t)}{3t - 7} \quad \text{ja} \quad t = -1$$

Ülesanne 9.12. (F) Laserite teoorias avaldub kiirgusvõimsus valemiga

$$P = \frac{kf^2}{\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2},$$

kus f on sagedus ning a, k ja ω on teatud konstandid. Leidke $\frac{dP}{df}$.

Ülesanne 9.13. (IT) Arvutisüsteem töötleb N bitti andmeid ajaga t , mis on võrdeline arvuga $N \ln(N)$. Leidke aja muutumise kiirus bittide arvu suhtes $\frac{dt}{dN}$.

Ülesanne 9.14. (K) Termodünaamikas seob temperatuuri T , rõhku p ja gaasi ruumala V valem, kus a, b ja R on konstandid. Leidke $\frac{dT}{dV}$, kui rõhk on konstantne ja

$$T = \left(p + \frac{a}{V^2}\right) \left(\frac{V - b}{R}\right).$$

9.3 Liitfunktsiooni tuletis

Valem 9.1

Kui $y = f(g(x))$, siis $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Ülesanne 9.15. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

- (a) $y = (4x - 3)^5 + (-3x)^2$ (d) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ (g) $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right)$
 (b) $y = 5(3x^6 - 4)^{\frac{2}{3}}$ (e) $y = \ln(x + \ln x)$
 (c) $y = (\sin x)^{-1}$ (f) $y = 6\sqrt{x} + 4^{6x}$ (h) $y = \frac{e^{0,5x}}{2x}$

Ülesanne 9.16. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

- (a) $y = \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^2$ (f) $y = \frac{\cos^2 3x}{1 + 2\sin^2 2x}$
 (b) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{4x+1}}$ (g) $y = \ln \tan 2x + \ln \cot 2x$
 (c) $y = \ln(4x - 3)^3$ (h) $y = 6 \arcsin \sqrt{2 - x}$
 (d) $y = \cos(-9x + 2) + \sin^3 4x^5$ (i) $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}$
 (e) $y = \frac{1}{\cos(-7x)} + \frac{1}{\sin(-7x)}$ (j) $y = \arccos x \cdot \ln \arctan x$

Ülesanne 9.17. Tabelis on antud funktsioonide f ja g ning nende tuletiste väärtused kohal $x = 3$. Leidke funktsiooni $u(x) = \sqrt{f(x)^2 + 2 \cdot g(x)^2}$ tuletise väärtus punktis $x = 3$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	3	4	6	-5

Ülesanne 9.18. (F) Laine kiirus sügavas vees on arvutatav seaduse $v = k \cdot \sqrt{\frac{L}{m} + \frac{a}{L}}$ alusel (a, k ja m on konstandid, L laine pikkus). Leidke L väärtused, mille korral $v'(L) = 0$.

Ülesanne 9.19. (B) Näidaku funktsioon $y = y(t)$ mingi liigi isendite, taime osade, rakkude arvu vms ajahetkel t . Sel juhul tuletist $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ nimetatakse ka absoluutseks kasvukiiruseks hetkel t . Absoluutne kasvukiirus võib erisuurustes organismide vahel palju erineda ja see ei anna meile infot nn efektiivsuse kohta. Olgu kasvukiirus $y'(t) = G(t)$, s.t. ajast sõltuv funktsioon. Sel juhul jagades mõlemat poolt suurusega y saame

$$\frac{y'(t)}{y} = \frac{G(t)}{y}.$$

Jagatist $R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ nimetatakse suhteliseks kasvukiiruseks ja see iseloomustab nn materjali efektiivsust toota uut materjali (näiteks metsa kasv). Sookase (*Betula pubescens*) ja mägivahter (*Acer pseudoplatanus*) seemned istuti maha ja kasvanud taimed kärbiti iga kahe nädala tagant. Esimese 18 nädalaga selgus mõõtetulemustest, et puud kasvasid seaduste

$$W_{kask}(t) = 0,0441 e^{0,3041 t}, \quad W_{vahter}(t) = 0,3837 e^{0,2243 t}$$

alusel, kus t ühikuks olid nädalad ja W ühikuks grammid. Kirjutage välja mõlema liigi suhtelised kasvukiirused $R(t)$. Milline liik taastoodab ennast efektiivsemalt?

Ülesanne 9.20. (K) Kui gaasi ruumala muutub väga kiiresti, siis rõhk P muutub ligikaudu pöördvõrdeliselt ruumala $3/2$ -astmega. On teada mõõtmistulemus, et 300 kPa rõhuga $V = 100 \text{ cm}^3$. Leidke rõhu P muutumise kiirus ruumala V järgi hetkel, mil $V = 100 \text{ cm}^3$.

9.4 Kõrgemat järku tuletis

Funktsiooni $y = f(x)$ teist järku tuletis on

$$y'' = (y')'.$$

Üldisemalt n -järku tuletis on

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = (y')^{(n-1)}.$$

Ülesanne 9.21. Leidke järgmised kõrgemat järku tuletised.

(a) $f(x) = \ln x$, leidke f''

(c) $f(x) = 2x^5 + 6x^2$, leidke $f^{(10)}$

(b) $f(x) = \sin x$, leidke $f^{(13)}$

(d) $f(x) = \tan x$, leidke f''

Ülesanne 9.22. Leidke nõutud kõrgemat järku tuletised, kui funktsioon $u = u(x)$ on vajalik arv kordi diferentseeruv.

(a) $f(x) = u(x^2)$, leidke f''

(c) $f(x) = u(x)^2$, leidke f'''

(b) $f(x) = u(e^x)$, leidke f'''

(d) $f(x) = \frac{u(x^2)}{x}$, leidke f''

Ülesanne 9.23. Arvutage nõutud kõrgemat järku tuletise väärtus.

(a) $f'''(\frac{\pi}{4})$, kui $f(x) = \cos^2 x$

(b) $f^{(4)}(2)$, kui $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$

Ülesanne 9.24. Leidke

(a) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, kui $y = \frac{\ln x}{x}$

(c) $\frac{d^3 s}{dt^3}$, kui $s = \frac{t}{2+3t}$

(b) $\frac{d^2 p}{dq^2}$, kui $p = qe^{q^2}$

9.5 Logaritmiline diferentseerimine

Logaritmilise diferentseerimise võte on vältimatu $[u(x)]^{v(x)}$ tüüpi funktsioonide korral, kuid see on abiks ka siis, kui f sisaldab palju korrutisi ja jagatisi.

1. Kirjutame

$$|y| = |f(x)|$$

2. Võtame võrdusest logaritmi

$$\ln |y| = \ln |f(x)|$$

3. Võtame mõlemast poolest tuletise

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln |f(x)|)'$$

4. Saadud seosest avaldame y'

$$y' = y \cdot (\ln |f(x)|)'$$

Ülesanne 9.25. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $f(x) = x^x$, kui $x > 0$

(d) $f(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x$

(b) $f(x) = x^{\sin x}$, kui $x > 0$

(e) $f(x) = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

(c) $f(x) = (\ln x)^x$, kui $x > 1$

Praktikum 10

Diferentsiaal

10.1 L'Hospitali reegel

Valem 10.1

L'Hospitali reegel määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ korral,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ kui leidub } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ülesanne 10.1. Leidke l'Hospitali reegli abil järgmised piirväärtused.

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 1}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9}{5x^2 - x}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^{4x}}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5}{x^4 + 5x^3 - 6}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin 6x}{\ln \sin 3x}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$ |

Ülesanne 10.2. Leidke järgmised piirväärtused.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{(\pi - x)^2}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \ln x$ | (g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-} (1 - \sin x) \tan x$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 1+} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$ |

10.2 Funktsiooni diferentsiaal

Definitsioon 10.1

Anname argumentidele x muudu Δx . Korrutist $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni f **diferentsiaaliks** punktis x . Tähistame dy või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{ehk} \quad dy = f'(x)dx. \quad (10.1)$$

Ülesanne 10.3. Leidke funktsioonide diferentsiaalid.

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|--|
| (a) $y = x^5 + 4x$ | (d) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{8x}$ | (g) $y = 6x\sqrt{1 - 4x}$ |
| (b) $y = 3x^2 + 6$ | (e) $y = xe^x$ | (h) $y = \frac{x}{5x + 2}$ |
| (c) $T = \frac{2}{r^5} + 3\pi^2$ | (f) $R = \sqrt{\frac{6u}{1 + 2u}}$ | (i) $y = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x - 1}}$ |

Ülesanne 10.4. Arvutage funktsioonide diferentsiaalid ette antud väärtustel.

(a) $y = 7x^2 + 4x$, $x = 4$, $\Delta x = 0,2$

(d) $f(x) = x\sqrt{1+4x}$, $x = 12$, $\Delta x = 0,06$

(b) $y = (x^2 + 2x)^3$, $x = 7$, $\Delta x = 0,02$

(e) $y = \frac{x}{\sqrt{6x-1}}$, $x = 3,5$, $\Delta x = 0,025$

(c) $y = (x^2 + 1)^2$, $x = 1$

(f) $f(x) = \tan x$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

10.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine

Funktsiooni $y = f(x)$ muut on $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Kui Δx on küllalt väike, siis

$$\Delta y \approx dy \quad \text{ehk} \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Ülesanne 10.5. Avaldage ringi pindala S raadiuse funktsioonina. Leidke selle funktsiooni muut ΔS ning diferentsiaali definitsiooni põhjal funktsiooni diferentsiaal dS . Leidke suurus, mille võrra erinevad funktsiooni muut ja diferentsiaal.

Ülesanne 10.6. Arvutage, kui palju ligikaudu suureneb kera pinna pindala, kui raadiust pikendada 50 sentimeetrilt 51 sentimeetrini.

Ülesanne 10.7. Arvutage ligikaudu, kui palju on vaja värvi, et katta 55 m raadiusega poolkera-kujuline klaasist kuppel 0,5 mm paksuse värvikihiga.

Ülesanne 10.8. Ilmajaam ripub raadiusega 3,5 m kerakujulise õhupalli otsas. Õhupall kattub ühtlase jää kihiga, mille paksus on 1,2 mm. Leidke jää ligikaudne ruumala.

10.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ülesanne 10.9. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $\sqrt{1,08}$

(d) $\sin 46^\circ$

(g) $\sqrt[3]{1,02}$

(i) $\arctan 1,05$

(b) $\sqrt{15,93}$

(e) $\log 11$

(h) $\sqrt{\frac{2,92^2 - 5}{2,92^2 + 7}}$

(c) $(3,02)^5$

(f) $e^{0,1}$

Ülesanne 10.10. Esitage ligikaudne valem funktsiooni väärtuse arvutamiseks etteantud punkti a ümbruses ning arvutage saadud valemi põhjal funktsiooni väärtus kohal b .

(a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 8}$, $a = 2$, $b = 1.92$

(b) $f(x) = x^2(x+1)^4$, $a = -2$, $b = -1.87$

Ülesanne 10.11. (B) Inimese ellujäämise tõenäosus y põletushaavade korral $x\%$ kehast on ligikaudselt esitatav valemiga $y = \frac{300}{0,0005x^2 + 2} - 50$. Esitage y ligikaudse arvutamise valem kohal $x = 50\%$. Arvutage saadud valemi põhjal inimese ellujäämise tõenäosus y , kui kehal on põletushaavu 45%.

Praktikum 11

Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine

11.1 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus

Ülesanne 11.1. Naftatankeris tekib ringikujuline leke, kus vee pinnal olev õliringi raadius r suureneb kiirusega 10 m minutis. Kui kiiresti suureneb reostatud ala (ringi pindala) hetkel, kui $r = 25$ m?

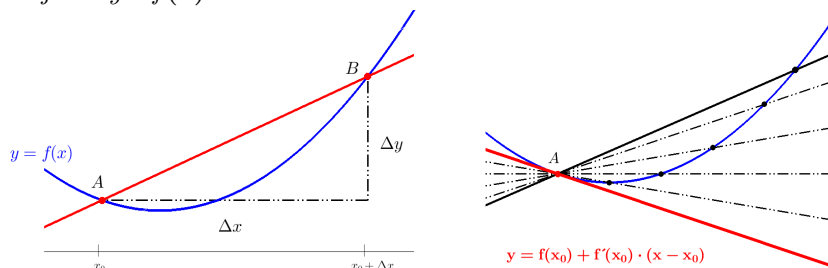
Ülesanne 11.2. Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega $20 \text{ cm}^3/\text{min}$. Kui kiiresti suureneb kera raadius r , kui enne õhu juurde pumpamist $r = 6$ cm?

Ülesanne 11.3. Silindri kõrgus h suureneb kiirusega 7 m/sek ja aluse raadius r suureneb 3 m/sek. Kui kiiresti suureneb silindri ruumala, kui $h(0) = 5$ m ja $r(0) = 6$ m?

11.2 Joone puutuja ja normaal

Definitsioon 11.1

Joone **puutujaks** punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$.



Funktsiooni f tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (11.1)$$

Definitsioon 11.2

Joone $y = f(x)$ **normaali** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand punktis $(x_0, f(x_0))$ avaldub järgmiselt

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (11.2)$$

Ülesanne 11.4. Leidke funktsiooni graafiku puutuja ja normaal nõutud punktis $(x_0, f(x_0))$.

(a) $y = x^2 + 2x$ punktis $(2, 8)$

(c) $y = 4 - x^2$ punktis $(3, -5)$

(b) $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x$ punktis $(3, -6)$

(d) $y = \frac{1}{x^2+1}$ punktis $(-1, \frac{1}{2})$

Ülesanne 11.5. Leidke funktsiooni graafiku puutuja või normaal etteantud tõusuga.

(a) $y = x^2 - 2x$ puutuja, tõusuga 2

(c) $y = (2x - 1)^3$ normaal, tõusuga $-\frac{1}{24}$, $x > 0$

(b) $y = \sqrt{2x - 9}$ puutuja, tõusuga 1

(d) $y = \frac{x^4}{2} + 1$ normaal, tõusuga 4

Ülesanne 11.6. Arvutamängus liiguvad lennukid ekraanil vasakult paremale eeskirja $y = 2 + \frac{1}{x}$ järgi. Lennukite relvadeks on raketid, mida tulistatakse ainult liikumise suunas. Sihtmärgid asuvad x -teljel: $x = 1, 2, 3, 4$. Kas punktist $(1, 3)$ lastud rakett tabab ühte sihtmärkidest?

Ülesanne 11.7. Näidake, et joone $y = x + 2x^2 - x^4$ puutuja punktis $(1, 2)$ on selle joone puutujaks ka punktis $(-1, 0)$.

Ülesanne 11.8. Käiaga terariistu teritades lendavad sädemed mööda käia välispinna puutujat. Leidke punktist $(3, 4)$ lenduva sädeme trajektoori (sirge), kui käi on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ kujuga.

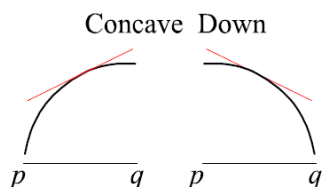
11.3 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõguspiirkonnad

Teoreem 11.1

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f'(x) > 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kasvav** selles vahemikus, ja kui $f'(x) < 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kahanev** selles vahemikus.

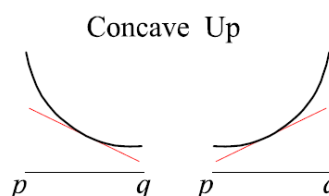
Definitsioon 11.3

Funktsiooni f nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni f puutuja asub ülalpool graafikut.



Definitsioon 11.4

Funktsiooni f nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni f puutuja asub allpool graafikut.

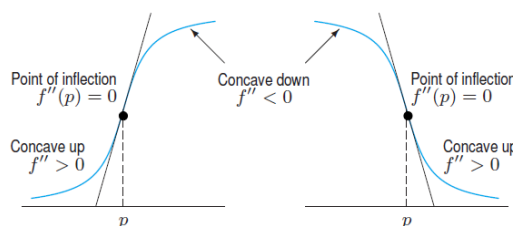


Teoreem 11.2

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f''(x) < 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **kumer** selles vahemikus ja kui $f''(x) > 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **nõgus** selles vahemikus.

Definitsioon 11.5

Kui funktsioon f on kumer vahemikus (a, c) ja nõgus vahemikus (c, b) (või nõgus vahemikus (a, c) ja kumer vahemikus (c, b)), siis punkti c nimetatakse **käänupunktiks**.



Ülesanne 11.9. Leidke järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

(c) $f(x) = x - \sin x$

(e) $f(x) = \arccos(1 + x)$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(f) $f(x) = xe^{-x}$, kus $x > 0$

Ülesanne 11.10. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute $y = f(x)$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

(c) $f(x) = \arctan x - x$

(f) $f(x) = x^3 - 6x^2$

(b) $f(x) = \frac{3}{x-4}$

(d) $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$

(g) $f(x) = \ln(1+x^2)$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$

(h) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

Ülesanne 11.11. Skitseerige pidevate funktsioonide $y = f(x)$ graafikud, millel on nimetatud omadused.

(a) $f(0) = -1$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) > 0$, kui $x > 0$

(c) $f(0) = 1$; $f'(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral; $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f''(x) > 0$, kui $x > 0$

(b) $f(1) = 0$; $f'(x) > 0$ ja $f''(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral

(d) $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$; $f'(x) < 0$, kui $x < -1$; $f'(x) > 0$, kui $x > -1$; $f''(x) < 0$, kui $0 < x < 2$; $f''(x) > 0$, kui $x < 0$ või $x > 2$

11.4 Ekstreemumid

Definitsioon 11.6

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ korral.}$$

Definitsioon 11.7

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**. Punkte x_0 , kus $f'(x_0) = 0$, nimetatakse **statsionaarseteks punktideks**.

Lause 11.1

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv punktis x_0 . Siis funktsioonil f on argumendi väärtusel x_0 **lokaalne maksimum**, kui

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) < 0,$$

funktsioonil f on argumendi väärtusel x_0 **lokaalne miinimum**, kui

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) > 0.$$

Ülesanne 11.12. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$

(f) $f(x) = e^x (\sin x - \cos x)$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(g) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

(c) $f(x) = x \ln x$

(h) $f(x) = x - \arctan x$

(d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$

(e) $f(x) = x \ln^2 x$

(j) $f(x) = \ln(x^4 + 4x^3 + 30)$

$$(k) \quad f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$$

$$(l) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ \cos x, & \text{kui } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(m) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x > 0, \\ -1, & \text{kui } x = 0, \\ -x^2 - 2, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$$

Funktsiooni f **globaalsed ekstreemumid** on funktsiooni suurim ja vähim väärtus mingis piirkonnas.

Globaalsete ekstreemumite leidmine:

1. Leida lokaalsed ekstreemumid.
2. Arvutada funktsiooni väärtused piirkonna otspunktides.
3. Saadud funktsiooni väärtustest suurim on globaalne maksimum ja vähim on globaalne miinimum.

Ülesanne 11.13. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

$$(a) \quad f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x \in [0, 5]$$

$$(e) \quad f(x) = \sin^2 x, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$(b) \quad f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x \in (0, 5)$$

$$(f) \quad f(x) = \arccos x$$

$$(c) \quad f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in [-2, 3]$$

$$(g) \quad f(x) = e^{-x^2}$$

$$(d) \quad f(x) = x - \ln x, \quad x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

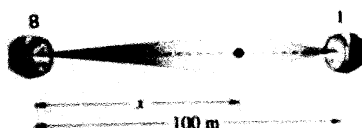
11.5 Optimiseerimine

Ülesanne 11.14. Risttahukakujuline karp on tehtud nii, et on võetud 12×8 mõõtmetega papist ristkülik, lõigatud igast nurgast välja $x \times x$ ruut ning keeratud vastavad servad üles. Koostage karbi ruumala arvutamiseks funktsioon, mis sõltub argumentist x . Skitseerige ruumala $V = V(x)$ graafik. Leidke x väärtus nii, et sellise karbi ruumala oleks suurim.

Ülesanne 11.15. Lennukompanii lubab pardale käsipagasi, mille laiuse, kõrguse ja pikkuse summa ei ületa 1,2 meetrit. Kui koti laiuse ja pikkuse suhe on 2,5, siis mis mõõdus koti ruumala oleks suurim?

Ülesanne 11.16. (B) Katsed näitavad, et kui inimene köhib, siis õhu kiirus kõris on $v = kr^2(a-r)$, kus a on kõri raadius normaalasendis ja k on konstant. Leidke r väärtus, mille korral kiirus v on suurim.

Ülesanne 11.17. (F) Valgusallika valgustihedus mingis punktis võrdub valgusallika tugevusega jagatud kauguse (valgusallikast) ruuduga.



Kui 8 ja 1 valgustugevuse ühikuga valgusallikad asuvad üksteisest 100 m kaugusel, siis millises punktis nende vahel on valgustihedus kõige väiksem? Näpunäide: valgustihedused liidetakse.

Ülesanne 11.18. (K) Teatud kemikaali reageerimiskiirus R mg/s sõltub kemikaali hulgast m mg. Leidke kogus m , et reageerimiskiirus R oleks maksimaalne, kui $R = 12\sqrt{m}(27-m)$.

11.6 Graafiku asümptoodid

Definitsioon 11.8

Sirget $x = a$ nimetatakse funktsiooni f graafiku **püstasümptoodiks**, kui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Definitsioon 11.9

Sirget

$$y = ax + b, \quad a \neq 0 \quad (11.3)$$

nimetatakse funktsiooni f graafiku parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, mis tähendab, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right). \quad (11.4)$$

Parempoolse (vasakpoolse) **kaldasümptoodi** $y = ax + b$ võrrandi saamiseks leiame piirväärtused:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right), \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \right). \end{aligned}$$

Kaldasümptoot puudub, kui piirväärtus on lõpmatus.

Ülesanne 11.19. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$

(f) $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$

Ülesanne 11.20. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

(b) $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2}$

(d) $f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2}$

(f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$

(g) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Ülesanne 11.21. (F) Eeldades lihtsustatult, et vihmapiisk on kerakujuline ja langedes piisa raadius väheneb ühest kuni r_0 millimeetrini, siis piisa kiirus avaldub valemiga

$$v = k \left(r - \frac{1}{r^3} \right) \quad \text{mm/s.}$$

Skitseerige kiiruse graafik juhul, kui $k = 1$.

Praktikum 12

Määramata integraal

12.1 Määramata integraali mõiste

Definitsioon 12.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **alg-funktsiooniks** vahemikus (a, b) , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 12.2

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$ nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ülesanne 12.1. Veenduge, et järgmised valemid kehtivad.

$$(a) \quad (\int f(x) dx)' = f(x) \qquad (b) \quad \int f'(x) dx = f(x) + C \qquad (c) \quad \int d f(x) = f(x) + C$$

Ülesanne 12.2. Leidke järgmiste funktsioonide algfunktsioonid.

$$(a) \quad 12x^5 + 6x \qquad (b) \quad 4\sqrt{x} + 3 \qquad (c) \quad \frac{5}{2}x^{3/2} \qquad (d) \quad 3(R^2 + 1)^2(2R)$$

Ülesanne 12.3. Miks on nii, et $(x+5)^3$ on funktsiooni $3(x+5)^2$ algfunktsiooniks, aga $(2x+5)^3$ ei ole funktsiooni $3(2x+5)^2$ algfunktsiooniks?

12.2 Määramata integraali leidmine

Valem 12.1

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \int 0 dx = C & (5) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & (9) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\ (2) \quad \int dx = x + C & (6) \quad \int e^x dx = e^x + C & (10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \\ (3) \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, & (7) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C & (11) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ a \neq -1 & (8) \quad \int \cos x dx = \sin x + C & (12) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \\ (4) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C & & \end{array}$$

Omadus 12.1

Määramata integraal on lineaarne:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Valem 12.2

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Ülesanne 12.4. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (2)-(4)

(a) $\int \frac{y^3}{3} dy$

(d) $\int \sqrt{x}(x^2 - 5x) dx$

(g) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx$

(b) $\int \frac{4}{\sqrt{x}} dx$

(e) $\int (2x^{-2/3} + 3^{-2}) dx$

(h) $\int \frac{3x^2 - 4x + 5\sqrt{x}}{x^2} dx$

(c) $\int 5x\sqrt{x} dx$

(f) $\int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2}{t^2} \right) dt$

(i) $\int \frac{x^2 - 2x + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

Ülesanne 12.5. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (5) ja (6)

(a) $\int (2^x 5^x + e) dx$

(b) $\int (e^x + \ln 2)^2 dx$

(c) $\int \frac{dx}{e^x}$

(d) $\int \frac{2^x}{4^x} dx$

Ülesanne 12.6. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (11) ja (12)

(a) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$

(c) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$

(e) $\int \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2x^2} dx$

(b) $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$

(d) $\int \sqrt{1 + \frac{x^2 + x^4}{1 - x^4}} dx$

Ülesanne 12.7. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int (2 \cos^2 x - \cos 2x) dx$

(c) $\int \tan^2 x dx$

(e) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

(b) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

(d) $\int (\sin \alpha + 3 \cos(\pi + x)) dx$

12.3 Diferentsiaali märgi alla viimine

Valem 12.3

(12.1) $f'(x) dx = d f(x)$

(12.4) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$

(12.6) $\frac{dx}{x} = d \ln |x|$

(12.2) $dx = d(x + b)$

(12.5) $x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1},$
 $n \neq -1$

(12.7) $\cos x dx = d \sin x$

(12.3) $dx = \frac{1}{a} da$

(12.8) $\sin x dx = -d \cos x$

Ülesanne 12.8. On antud funktsiooni diferentsiaal. Leidke see funktsioon.

(a) $3 dx$

(c) $2\sqrt{x} dx$

(e) $-\frac{3 dx}{x}$

(g) $e^2 x dx$

(b) $x dx$

(d) $\frac{dx}{x^3}$

(f) $\frac{dx}{\cos^2 x}$

(h) $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Ülesanne 12.9. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (12.2)-(12.4).

(a) $\int \cos(x+2) dx$

(c) $\int (3x-2)^7 dx$

(e) $\int e^{-2x+8} dx$

(g) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-5)}$

(b) $\int \sin 3x dx$

(d) $\int \sqrt[3]{7-2x} dx$

(f) $\int \frac{dx}{3x+5}$

(h) $\int \sin^2 x dx$

Ülesanne 12.10. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (12.5) ja (12.6).

(a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$

(c) $\int x^2 e^{x^3} dx$

(e) $\int \frac{\ln x^3}{2x} dx$

(b) $\int \frac{3\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$

(d) $\int \frac{(2x+7) dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(f) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

Ülesanne 12.11. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (12.7) ja (12.8).

(a) $\int \cos^2 x \sin x dx$

(b) $\int \tan x dx$

(c) $\int \cos^3 x dx$

(d) $\int \tan^3 x dx$

Ülesanne 12.12. Leidke integraalid diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

(a) $\int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx$

(e) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(i) $\int \frac{4z - 4}{\sqrt{z^2 - 2z}} dz$

(b) $\int \frac{2x dx}{x^4 + 3}$

(f) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$

(j) $\int (x^2 + 4x + 4)^{1/3} dx$

(c) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 5}$

(g) $\int x \cos x^2 \sin^2 x^2 dx$

(k) $\int (x^2 - x) \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right)^8 dx$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

(h) $\int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x)}$

Ülesanne 12.13. (IT) Karpe kokkupaneev robot peab avaldama jõudu $F = 6 \int e^{\sin(\pi t)} \cos(\pi t) dt$ N, kus t on aeg sekundites. Milline funktsioon $F = F(t)$ tuleb lisada arvuti programmi, kui $t = 1.5$ s korral peab jõud $F = 0$?

Ülesanne 12.14. (Maj) Ettevõtte andmed näitavad, et x generaatori tootmisel muutub päevase kasumi p (eurodes) kiirus ligikaudu seaduse $\frac{dp}{dx} = \frac{600(30 - x)}{\sqrt{60x - x^2}}$ alusel. Leidke x generaatori tootmise kasum p , kui null generaatori tootmisel saadakse 5000 eurot kahjumit.

12.4 Muutujavahetus

Lause 12.1

Kui $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv funktsioon muutumispiirkonnaga U ja f on pidev määramispiirkonnas U , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (12.1)$$

Ülesanne 12.15. Leidke järgmised integraalid märgitud muutuja vahetusega.

(a) $\int x \sqrt{1-x} dx, t = \sqrt{1-x}$

(d) $\int \frac{dx}{\sin 2x}, t = \tan x$

(b) $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx, t = \sqrt{1-x^2}$

(e) $\int \tan^3 x dx, t = \cos x$

(c) $\int \sqrt{1-x^2} dx, x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(f) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, x = t - \frac{1}{t}, t > 0$

Ülesanne 12.16. Leidke sobiva muutuja vahetusega järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

(c) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx$

(d) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1 + e^x}}$

13.1 Ositi integreerimine

Valem 13.1

Ositi integreerimise valem:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (13.1)$$

ehk

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (13.2)$$

Ülesanne 13.1. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int xe^x dx$

(d) $\int x3^{-x} dx$

(g) $\int \ln x dx$

(b) $\int x \cos x dx$

(e) $\int \arctan x dx$

(h) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

(c) $\int x \sin(2x + 1) dx$

(f) $\int \arcsin x dx$

(i) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

Ülesanne 13.2. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise valemi mitmekordsel rakendamisel.

(a) $\int x^2 \sin x dx$

(c) $\int x^3 e^{-2x} dx$

(e) $\int e^{2x} \cos x dx$

(b) $\int x^3 e^x dx$

(d) $\int e^x \sin x dx$

(f) $\int \sin \ln x dx$

Ülesanne 13.3. (K) Et leida teatud tüüpi molekulide keskmine läbimõõt, tuleb leida integraal $\int x^3 e^{-x^2/8} dx$. Leidke antud integraal.

Ülesanne 13.4. Leidke viga järgmises lahenduskäigus. Et $e^{-x}e^x = 1$, siis $\int dx$ on võimalik integreerida ositi, võttes $u = e^{-x}$ ja $dv = e^x dx$. Siis $du = -e^{-x} dx$ ja $v = e^x$ ning ositi integreerimise valemist saame

$$\int dx = e^{-x}e^x + \int e^{-x}e^x dx \quad \text{ehk} \quad \int dx = 1 + \int dx.$$

Pärast ühesuguste integraalide koondamist saame vastuolu: $0 = 1$.

13.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Definitsioon 13.1

Kui polünoomi $f(x)$ aste on väiksem polünoomi $g(x)$ astmest, siis ratsionaalfunktsiooni $\frac{f(x)}{g(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

Valem 13.2

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise valem.

Olgu $\frac{f(x)}{g(x)}$ lihtmurd. Kui

$$g(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + p_1x + q_1)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole nullkohti), siis

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + p_1x + q_1)^m} + \dots,$$

kus konstandid $A_1, \dots, A_k; B_1, \dots, B_l; \dots; C_1, \dots, C_m; D_1, \dots, D_m; \dots$ on reaalarvud, mis tuleb leida nii, et võrdus kehtiks.

Ülesanne 13.5. Lahutage ratsionaalmurrud osamurdude summaks ja integreerige.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| (a) $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} dx$ | (e) $\int \frac{dt}{t^3 - t^2}$ | (i) $\int \frac{2 dx}{x^4 - x^2}$ |
| (b) $\int \frac{x-2}{x(x+1)} dx$ | (f) $\int \frac{2 dx}{x^2(x^2-1)}$ | (j) $\int \frac{(x-2)(x+2) dx}{x^3(x-1)}$ |
| (c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ | (g) $\int \frac{(y-9) dy}{2y^2-3y+1}$ | (k) $\int \frac{(x+4) dx}{x(x^2+2x+2)}$ |
| (d) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$ | (h) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ | (l) $\int \frac{(16x+32) dx}{x^4-16}$ |

Ülesanne 13.6. Miks ei saa integraali $\int \frac{x^2 dx}{(x-2)(x+3)}$ leidmisel kirjutada

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}?$$

Ülesanne 13.7. Eraldage murru täisosad, lahutage lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|--|---|
| (a) $\int \frac{x^2+3}{x^2+3x} dx$ | (b) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$ | (c) $\int \frac{(x^3+x+2) dx}{(x-1)(x+1)}$ | (d) $\int \frac{(x^3+4x^2) dx}{x^2+3x+2}$ |
|------------------------------------|-------------------------------------|--|---|

Ülesanne 13.8. Leidke järgmised integraalid

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\int \frac{\sin 2x dx}{(3 - \sin x)^3}$ | (d) $\int \frac{2r^3 dr}{r^4 + 2r^2 + 1}$ | (g) $\int \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^3} dx$ |
| (b) $\int \frac{(2x^3 + 3x - 5) dx}{(x^2 + x - 2)^2}$ | (e) $\int \frac{(x+1) dx}{x^3 - 1}$ | (h) $\int \frac{3x+4}{x^2+2} dx$ |
| (c) $\int \frac{(2x^3 + x^2 + 8x + 10) dx}{(x^2+1)(x^2+6x+10)}$ | (f) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2-1)} dx$ | (i) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+2} dx$ |

Praktikum 14

Diferentsiaalvõrrandid

14.1 Harilikud diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 14.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 14.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon $y = f(x)$ sõltub ühest argumendist x .

Ülesanne 14.1. (B) Olgu mingis levialas küülikute arv hetkel t aastat märgitud funktsiooniga $R = R(t)$. Ühendage vastav diferentsiaalvõrrand vastava kirjeldusega (igale olukorrale vastab ainult üks diferentsiaalvõrrand).

- | | |
|---|--------------------------|
| (a) Küülikute arv on konstantne | (a) $R = 0$ |
| (b) Igal aastal sünnib 10 uut küülikut | (b) $dR/dt = 10 R$ |
| (c) Keskmiselt toodab iga küülik 10 uut küülikut aastas | (c) $dR/dt = 10$ |
| (d) Igal aastal toodab iga küülik 10 küülikut juurde, kuid 100 saab surma | (d) $dR/dt = 0$ |
| (e) Levialas küülikuid ei ole | (e) $dR/dt = 10 R - 100$ |

14.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 14.3

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks mittetühjas vahemikus (a, b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, kui ta on selles vahemikus pidevalt diferentseeruv ning tema asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles vahemikus.

Ülesanne 14.2. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x$ lahendid?

- | | | | |
|---------------|-------------------|---------------------|------------------|
| (a) $y = x^2$ | (b) $y = x^2 + 1$ | (c) $y = x^2 - 0.5$ | (d) $y = (5x)^2$ |
|---------------|-------------------|---------------------|------------------|

Ülesanne 14.3. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y'' - 3y' + 2y = 0$ lahendid?

- | | | |
|--------------------|------------------|-------------------------|
| (a) $y = e^x$ | (d) $y = 4e^x$ | (g) $y = e^{2x} - 3$ |
| (b) $y = e^{-x}$ | (e) $y = -7e^x$ | (h) $y = e^x + e^{2x}$ |
| (c) $y = e^{0.5x}$ | (f) $y = e^{2x}$ | (i) $y = 2e^x - e^{2x}$ |

Ülesanne 14.4. Näidake, et antud diferentsiaalvõrrandi lahend on vastav funktsioon. Siin C, C_1, C_2, C_3 on suvalised reaalarvud.

(a) $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2, y = (Cx)^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

(b) $y'' = x + \sin x, y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

(c) $y'' - y' = x, y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$

(d) $y' \tan x - y = 1, y = C \sin x - 1$

(e) $xy' = y \ln \frac{y}{x}, y = x e^{Cx+1}$

(f) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$

(g) $(y')^2 - y' - xy' + y = 0, y = Cx + C - C^2$

(h) $y''' + \frac{3}{x} y'' = 0, y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$

(i) $xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}, y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1 + C}$

14.3 Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 14.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles diferentsiaali dx kordaja $f(x)$ ja diferentsiaali dy kordaja $g(y)$ on antud funktsioonid, mis sõltuvad vastavalt ainult muutujast x ja ainult muutujast y .

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$. Võrrandi üldlahend ilmutamata kujul on

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

kus C on suvaline konstant

Definitsioon 14.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

milles diferentsiaalide dx ja dy kordajad on kahe etteantud funktsiooni korrutised, millest üks sõltub ainult muutujast x ja teine sõltub ainult muutujast y .

Muutujate eraldamiseks jagatakse diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooli avaldisega

$$g_1(y)f_2(x),$$

mille tulemusena saadakse eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Erilahendi saamiseks asendatakse algtingimus üldlahendisse ja avaldatakse saadud võrdusest konstant C .

Ülesanne 14.5. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Joonistage mõned integraaljooned.

- | | | | |
|-------------------------|---------------------------|------------------------|----------------------|
| (a) $dy = 2dx$ | (d) $dy = e^x dx$ | (g) $xy' = x + 1$ | (i) $y' = 2\sqrt{y}$ |
| (b) $dy = \cos x dx$ | (e) $\frac{1}{x^4}y' = 1$ | (h) $y' = \frac{1}{y}$ | (j) $xy' = y + 1$ |
| (c) $dy = \frac{dx}{x}$ | (f) $yy' - x = 5$ | | |

Ülesanne 14.6. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

- | | | |
|----------------------------------|--|--|
| (a) $x(yy' - x + 1) = -1$ | (d) $xy' = y(y - 1)$ | (g) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$ |
| (b) $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$ | (e) $x(x + 1)y' + y = y^2$ | |
| (c) $y(x - 1)y' - 1/(y + 1) = 0$ | (f) $(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$ | (h) $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$ |

Ülesanne 14.7. Leidke algtingimusega ülesande lahend.

- | | |
|--|---|
| (a) $y(x^2 - 1)y' = xy^2 + x, y(2) = -1$ | (d) $yxdy + (x^2 - 1)dx = 0, y(1) = 0$ |
| (b) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, y(0) = 0$ | (e) $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)/(1 + x^2), y(0) = 1$ |
| (c) $y^2y' + 2x = 1, y(2) = -1$ | |

14.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 14.8. (Maj) Pangaarvel olev raha teenib intresse. Eeldades, et raha hulga R kasvamise kiirus on võrdeline raha hulgaga pangaarvel antud ajamomendil t , väljendage see seos diferentsiaalvõrrandi abil. Leidke selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

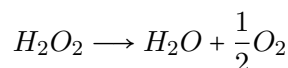
Ülesanne 14.9. (B) Olgu $y(t)$ teatud bakterite arv ajamomendil t . Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k y,$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne. Leidke bakterite arvu $y(t)$ üldavaldis, kui ajahetkel $t = 0$ on meil u. 10^7 bakterit.

Ülesanne 14.10. (B) Katseklaasis oli esialgselt N_0 bakterit. Ühe tunni pärast ($t = 1$) oli bakterite hulk $\frac{3}{2}N_0$. Eeldades, et bakterite kasvamise kiirus on võrdeline bakterite arvuga antud ajahetkel, leidke, kui kaua võtab aega, et bakterite arv kolmekordistuks.

Ülesanne 14.11. (K) Esimest järku reaktsiooni integraalne kiirusevõrrand. Vesinikperoksiidi lagunemine



on esimest järku reaktsioon, st vastav kineetiline võrrand on kujul

$$\text{lagunemise kiirus} = -\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k[H_2O_2] \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{min}},$$

kus $[H_2O_2] = [H_2O_2]_t$ on aine molaarne kontsentratsioon ajahetkel t ning k on kiiruskonstant. Olgu $k = 0,51 \text{ min}^{-1}$ ja aine algkontsentratsioon $[H_2O_2]_0 = 10 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. Leidke H_2O_2 kontsentratsioon aja t funktsioonina ja poolestusaeg $t_{1/2}$ (aeg, mille jooksul kontsentratsioon väheneb pooleni esialgselt).

Ülesanne 14.12. (F) Hubble'i seaduse kohaselt paisub universum kiirusega

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3c^2}} \cdot a,$$

kus a on kaugus kahe vaadeldava objekti vahel ja ρ on universumi energiatihedus. Kasutades erinevaid stsenaariume, lahendage võrrand ning analüüsige lahendi käitumist.

- (a) Eeldades, et universum koosneb enamasti ainest, siis $\rho = \frac{k}{a^3}$.
- (b) Kui universum koosneb enamasti kiirgusest, siis $\rho = \frac{k}{a^4}$.
- (c) Kui universum koosneb enamasti tumedast energiast (Einstein), siis $\rho = \text{Const.}$

Ülesanne 14.13. (M) Sotsioloogid kasutavad informatsiooni levimise kohta populatsiooni sees väljendit "sotsiaalne difusioon". Informatsioon ise võib olla kuulujutt, pärimus või uudis uuest tehnilisest leiutisest. Olgu piisavalt suure populatsioonis informatsiooni kuulnud inimeste arv x (hetkel t). Uudise levimise kiirus on võrdeline uudist kuulnud inimeste arvuga korda uudist veel mitte kuulnud inimeste arvuga:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

kus N on inimeste arv populatsioonis. Olgu t päevade arv, $k = 1/250$ ja kaks inimest on kuulnud kuulujuttu ajahetkel $t = 0$ ning $N = 1000$. Leidke x ajast t sõltuva funktsioonina. Mis hetkeks on mudeli järgi pool elanikkonnast seda kuulujuttu kuulnud?

Ülesanne 14.14. (K) Leidke n -ndat järku keemilise reaktsiooni toimumisel ühe lähteainega antud algtingimusel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = -kx^n, \quad x(0) = a, \quad n > 1.$$

Ülesanne 14.15. (K) Leidke kolmandat järku keemilise reaktsiooni $A + 2B$ toimumisel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - 2x)^2,$$

kus a ja b on vastavalt lähteainete A ja B algkogused. Algtingimuseks on $x(0) = 0$.

Ülesanne 14.16. (B) Kahe liigi kooslus (kiskjad ja saakloomad). Olgu $x(t)$ jäneste ja $y(t)$ huntide arv ajamomendil t . Modelleerime nende kahe populatsiooni koeksisteerimise lihtsustatud kujul, kus jäneseid on huntide ainsaks toiduks ja neil pole teisi looduslikke vaenlasi, jäneste toidulaua ei ole piiranguid, kuna hundid ei lase neil liialt paljuneda. Jäneste ja huntide koeksisteerimist saab kirjeldada diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + b_1xy}{ax - a_1xy},$$

kus a, a_1, b, b_1 on mingid positiivsed konstandid. Leidke diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Praktikum 15

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

15.1 Lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 15.1

Diferentsiaalvõrrandit nimetatakse lineaarseks, kui ta on lineaarne otsitava funktsiooni ja selle tuletiste suhtes.

Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$y'(x) + p(x)y = q(x),$$

kus $p(x)$ ja $q(x)$ on ette antud pidevad funktsioonid vahemikus (a, b) ja $y = y(x)$ on otsitav funktsioon.

Ülesanne 15.1. Millised on lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid?

(a) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $y' = 3x^2 + 1$

(e) $y \ln xy' + y^2 = xy$

(b) $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(d) $y' - \sin x = xy^2$

(f) $y'' - xy' = \frac{1}{x}$

15.2 Lineaarse esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod):

a) Lahendame vastava homogeense võrrandi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0,$$

saadud üldlahendis

$$y_h = C e^{-\int P(x) dx}$$

asendame integreerimiskonstandi C , uue otsitava funktsiooniga $C(x)$

$$y = C(x) e^{-\int P(x) dx}$$

b) Leiame tuletise otsitavast funktsioonist, arvestades, et $C(x)$ sõltub argumentidist x

c) Asendame lineaarsesse võrrandisse y ja y' , lahendades leiame otsitava $C(x)$.

Üldlahendi leidmise valem

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right),$$

kus C on suvaline konstant

Ülesanne 15.2. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - 3\frac{y}{x} = x$

(d) $y' - y \cos x = x^2 e^{\sin x}$

(h) $x e^x y' + y e^x = 1$

(b) $\frac{dy}{dx} - y = x^2$

(e) $(1 + x^2)y' = 2xy$

(i) $y' = \frac{y+1}{x}$

(c) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

(f) $xy' + x^2 - y = 0$

(j) $y' + 2y = 4x$

(g) $y' - y = x - 1$

(k) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(m) $x^2y' + xy = -1$

(p) $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$

(n) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

(q) $xy' + \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0$

(l) $y' + y = x$

(o) $y' \cos x + y \sin x = 1$

15.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 15.3. (F) Newtoni jahtumisseadus. Esimene seadus keha jahtumise kohta konvektsiooni teel avaldati Isaac Newtoni poolt 28. mail 1701, mis lihtsustatult kõlas “keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnaühiku kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega.”

Matemaatiliselt kirjeldatuna tähendab see järgmist. Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T . Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_0 . Aega tähistame nagu ikka t -ga. Sel juhul

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0),$$

kus k on mingi konstant. Hetkel, kui kook ahjust võeti oli tema temperatuur 150°C . Kolm minutit hiljem oli koogi temperatuur 93°C . Kui kaua võtab aega koogi jahtumine toatemperatuurini 21°C ?

Ülesanne 15.4. (F) Kraadiklaas viiakse soojast 20°C toast õue, kus temperatuur on 5°C . Ühe minuti pärast näitab kraadiklaas 12°C . Kasutades Newtoni jahtumisseadust, vastake järgmistele küsimustele:

(a) Palju näitab kraadiklaas kaks minutit pärast õueviimist?

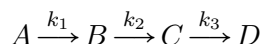
(b) Millal näitab kraadiklaas 6°C ?

Ülesanne 15.5. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktioonipool induktiivsusega L . Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktioonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a \sin(\omega t)$.

Ülesanne 15.6. (K) Esimest järku keemiliste reaktsioonide protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:



ja modelleeritakse järgmiste võrranditega

$$\frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x), \quad \frac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2y, \quad \frac{dz}{dt} = k_2y - k_3z.$$

Leidke aine C kontsentratsioon sõltuvalt ajast t .

Aine A kontsentratsioon alghetkel $t = 0$ on a ja ajahetkel t on $a - x$. Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on y . Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on z . Alustada tuleks esimese võrrandi lahendamisest, saadud lahend asendada teise võrrandisse, seejärel lahendada teine võrrand ja saadud lahend asendada kolmandasse.

1. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

1. Piirväärtuse arvutamine, määramatuste ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$) avamine (tegurdamine).
2. Piirväärtuse omadused (teoreemid 7.1, 7.2 ja 7.3).
3. Tähtsad piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4. Funktsiooni pidevuse uurimine.

2. Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal

1. Tuletise leidmine definitsiooni põhjal (näiteks astmefunktsioonidest).
2. Tuletiste tabel, diferentseerimise reeglid.
3. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
4. Graafiku puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
5. Funktsiooni diferentsiaali leidmine.

3. Tuletise ja diferentsiaali rakendused

1. Funktsiooni muudu või funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.
2. L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks.
3. Lokaalsete ja globaalsete ekstreemumite leidmine.
4. Funktsiooni uurimine ja graafiku skitseerimine. Kasvamise ja kahenemise piirkonnad, ekstreemumid, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.

4. Määramata integraal

1. Algfunktsiooni leidmine. Integraal põhilistest elementaarfunktsioonidest (integraalide tabel).
2. Diferentsiaali märgi alla viimise võte (muutuja vahetus).
3. Ositi integreerimine.

Praktikum 17

Riemanni summad ja numbriline integreerimine

17.1 Riemanni summad

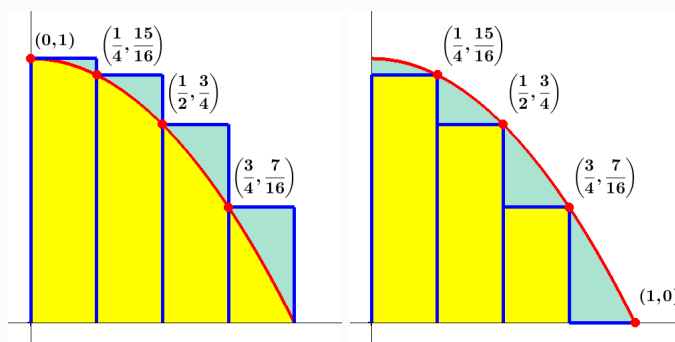
Definitsioon 17.1

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon $y = f(x)$. Jaotame lõigu osalõikudeks pikkustega $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Valime igast osalõigust suvaliselt ühe punkti $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Summat

$$S_n = f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \quad (17.1)$$

nimetatakse funktsiooni f **Riemanni summaks** lõigus $[a, b]$.

Pindala leidmine lõplikke summade abil. Funktsiooni $y = 1 - x^2$ graafiku ja x -telje vahelise ala pindala leidmiseks ligikaudselt leiame vasakpoolsete ja parempoolsete ristkülikute pindalade summana (joonisel).



Ristkülikute alusteks on vastavad osalõigud (pikkustega Δx_i) ja kõrgusteks on funktsiooni väärtused osalõikude vasakpoolses (parempoolses) otspunktis (punktides c_i).

Ülesanne 17.1. Järgnev tabel näitab mudelrongi kiirust esimese 10 sekundi jooksul.

Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)	Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)
0	0	6	28
1	30	7	15
2	56	8	5
3	25	9	15
4	38	10	0
5	33		

Leidke rongi poolt läbitud teepikkus, moodustades 10 osalõiku pikkusega 1 ning summeerides kord vasak-, kord parempoolsete ristkülikute pindalad.

Ülesanne 17.2. Leidke järgmiste joontega ja x -teljega määratud kujundite pindalad ligikaudselt, jagades toodud osalõigud n võrdseks osaks ning summeerides tekkinud ristkülikud. Ristkülikuid saab tekitada erinevat moodi. Valige ise sobiv meetod ja proovige erinevaid võimalusi.

(a) $y = 3x$, $x \in [0, 3]$, $n = 3$ ja $n = 10$

(c) $y = 4x - x^2$, $x \in [1, 4]$, $n = 6$ ja $n = 10$

(b) $y = x^2$, $x \in [0, 2]$, $n = 5$ ja $n = 10$

(d) $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$, $n = 3$ ja $n = 12$

Ülesanne 17.3. Koostage järgmiste joontega piiratud tasandiliste kujundite pindala arvutamiseks õiged integraalid (või nende summad). Integraale ei ole vaja välja arvutada, kuid joonise tegemine võib olla abiks.

(a) $y = x^2, x + y = 2$

(c) $y = x^2, y = x^3$

(e) $y = 4 - x^2, y = -x + 2$

(b) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0$

(d) $y = \frac{x^2}{4}, y = 1, y = x$

(f) $y = \frac{x^3}{3} - x, y = \frac{x}{3}$

Ülesanne 17.4. Visandage integraalimärgi all olevast funktsioonist graafik ning arvutage integraali väärtus, kasutades tuntud geomeetriliste kujundite pindala leidmise valemeid.

(a) $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$

(b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

(c) $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

(d) $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

17.2 Numbriline integreerimine

Trapetsvalem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 1, \dots, n$.

Simpsoni valem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Valemit saab kasutada vaid paarisarvulise n jaoks.

Ülesanne 17.5. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused trapetsmeetodiga märgitud osalõikude n korral.

(a) $\int_0^1 (1 - x^2) dx, \quad n=3$

(b) $\int_1^4 (1 + \sqrt{x}) dx, \quad n=6$

(c) $\int_3^8 \sqrt{1+x} dx, \quad n=5$

Ülesanne 17.6. Kahe alajaama vaheline vahemaa on täpselt 100 m. Alajaamade ühendamiseks vajaminev telefonikaabli pikkus L (arvestades lõtku) arvutatakse valemiga

$$L = 2 \int_0^{50} \sqrt{6.4 \cdot 10^{-7} x^2 + 1} dx.$$

Kasutades 10 osalõiku $n = 10$, arvutage trapetsmeetodiga kaabli pikkus L .

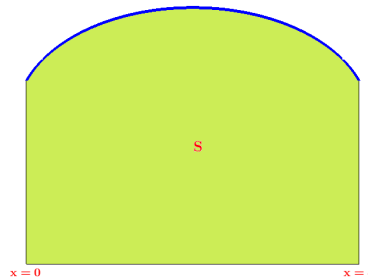
Ülesanne 17.7. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused Simpsoni meetodiga märgitud osalõikude n korral.

(a) $\int_0^2 (1 + x^3) dx, \quad n=2$

(b) $\int_0^8 x^{1/3} dx, \quad n=4$

(c) $\int_0^2 x \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad n=4$

Ülesanne 17.8. Raudteetunneli ristlõige on kujuga, mis tekib ülalt kaarega $y = 4 + \sqrt{1 + 8x - 2x^2}$, alt x -teljega ja külgedelt sirgetega $x = 0$ ja $x = 4$ piiratud alast. Kui tunnel on 100 m pikkune ja kõik muud ühikud on samuti meetrites, siis kui mitu kuupmeetrit tulvavett on võimalik vajaduse korral tunnelisse lasta (eeldame, et tunnelit saab mõlemalt poolt sulgeda)? Arvutage ruumala trapetsmeetodiga ja Simpsoni meetodiga $n = 8$ jaoks. Kumb tulemus võiks olla täpsem?

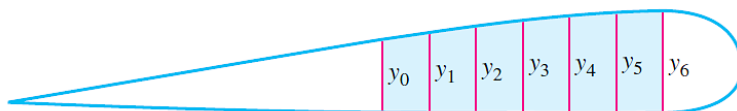


Ülesanne 17.9. Lennuki üks tagumistest tiibadest (stabilisaator) on kujuga, mida piirab x -telg ja funktsiooni $y = f(x)$ graafik, kus

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{0.6}.$$

Koostage pindala arvutamiseks integraal. Arvutage lennuki tiiva pindala trapetsmeetodiga ja Simpsoni meetodiga $n = 6$ osalõigu korral.

Ülesanne 17.10. (F) Uue lennuki tootmiseks on igasse lennuki tiiba vaja konstrueerida kütusemahuti (joonisel näidatud alas), millesse mahub 22240 N kütust tihedusega 6600 N/m³.



Leidke Simpsoni meetodiga, kui sügav peab olema kütusemahuti, kui

$$y_0 = 0.457, \quad y_1 = 0.488, \quad y_2 = 0.549, \quad y_3 = 0.579, \quad y_4 = 0.610, \quad y_5 = y_6 = 0.640.$$

Ühikud on meetrites ja lõigu pikkus on siin 0.3048 m.

Ülesanne 17.11. (K) Gaasi paisumisel 2 cm³-st 10 cm³-ni tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$W = \int_2^{10} 500 V^{-1.4} dV$$

Arvutage töö W Simpsoni meetodiga $n = 6$ osalõigu korral.

Ülesanne 17.12. (IT) Robotkäsi on disainitud liikuma trajektooriga

$$\begin{cases} x(t) = \frac{20}{3} + 0.3 \cdot t + 3.9 \cdot t^2 - 2.3 \cdot t^3 \\ y(t) = \frac{10}{3} + 0.3 \cdot t + 0.9 \cdot t^2 - 2.7 \cdot t^3 \end{cases}.$$

Robotkäe poolt esimese 2 sekundiga läbitud teepikkus arvutatakse valemiga

$$s = \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Arvutage läbitud teepikkus s Simpsoni meetodiga $n = 6$ osalõigu korral. Kirjutage programm üldise ajavahemiku $[t_1, t_2] \subset [0, 2]$ jaoks, kasutades n osalõiku (n on suvaline paarisarv).

Praktikum 18

Määratud integraali arvutamine

18.1 Newton-Leibnizi valem

Valem 18.1

Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \quad (18.1)$$

Ülesanne 18.1. Arvutage integraalid kasutades Newton-Leibnizi valemit.

(a) $\int_{-3}^2 (2x^2 + 1) dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

(e) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin^3 2x}{(\cos x)^3} dx$

(b) $\int_{-5}^{-1} \frac{(x+5) dx}{x^2}$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

18.2 Määratud integraali omadused

Omadus 18.1

Integraali aditiivsus rajade suhtes

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \text{kus } c \in [a, b]. \quad (18.2)$$

Omadus 18.2

Integraali lineaarsus integreeritava funktsiooni suhtes

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \text{kus } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (18.3)$$

Omadus 18.3

Integraal sümmeetriliselt paiknevate rajade korral. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[-a, a]$.

Kui f on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (18.4)$$

Kui f on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (18.5)$$

Ülesanne 18.2. Integreerige, kasutades määratud integraali aditiivsuse omadust.

(a) $\int_{-1}^2 |x| dx$

(c) $\int_{-1}^3 |x(x-2)| dx$

(e) $\int_{-1}^2 x\sqrt{(x^2-1)^2} dx$

(b) $\int_0^4 |2-x| dx$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} dt$

(f) $\int_{-5}^3 |x^2+2x-3| dx$

Ülesanne 18.3. Leidke integraalid sümmeetriliselt paiknevate rajade korral.

(a) $\int_{-1}^1 (8x^{2021} + \sin x) dx$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - \cos x) dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2} dx$

18.3 Muutujavahetus määratud integraalis

Teoreem 18.1

Kui g' on pidev lõigus $[a, b]$ ja f on pidev funktsiooni g muutumispiirkonnas (muutujavahetusel $u = g(x)$), siis kehtib võrdus

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Ülesanne 18.4. Arvutage integraalid muutuja vahetuse või diferentsiaali märgi alla viimise teel.

(a) $\int_{-1}^0 (x+2)^5 dx$

(d) $\int_{-1}^1 x^3(2x^4-5)^6 dx$

(g) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3x+4}$

(e) $\int_{0,1}^e \frac{|\ln 5x| dx}{x}$

(h) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

(c) $\int_0^3 x\sqrt{x^2+1} dx$

(f) $\int_{-\pi/4}^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x dx$

Ülesanne 18.5. Arvutage integraalid märgitud muutuja vahetusega.

(a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}, t = x+1$

(c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx, x = \sin t$

(b) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}, t = \sqrt{1+3x}$

(d) $\int_0^2 \frac{6x}{(1+2x)} dx, t = 1+2x$

Ülesanne 18.6. Integreerige, võttes integreerimisloiguks funktsiooni määramispiirkonna.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{kui } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos^{-2} x, & \text{kui } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin^{-2} x, & \text{kui } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Praktikum 19

Määratud integraali arvutamine 2

19.1 Ositi integreerimine

Valem 19.1

Ositi integreerimise valem

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Ülesanne 19.1. Arvutage integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx$

(c) $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$

(e) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

(b) $\int_1^e \ln x \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} x^3 \cos \frac{x}{2} \, dx$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x \, dx$

19.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Ülesanne 19.2. Eraldage liigmurru täisosa, lahutage saadud lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x^2 + 1} \, dx$

(c) $\int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} \, dx$

(e) $\int_0^2 \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 3x + 2} \, dx$

(b) $\int_1^2 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3x} \, dx$

(d) $\int_2^3 \frac{x^3 + x + 2}{(x-1)(x+1)} \, dx$

(f) $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x(x^2 - 1)} \, dx$

Ülesanne 19.3. Arvutage integraalid

(a) $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \, dx$

(e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \, dx$

(f) $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} \, dx$

(c) $\int_{-1}^0 (x+4)\sqrt{x^2+8x+7} \, dx$

(g) $\int_1^3 x^x (1 + \ln x) \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} e^{-x} \cos 2x \, dx$

(h) $\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx$

Praktikum 20

Pindala arvutamine

20.1 Kõvertrapetsi pindala

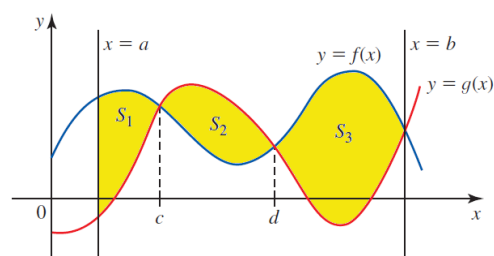
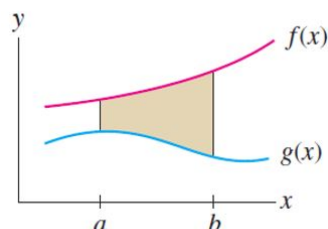
Kõvertrapetsi pindala. Kui kõvertrapets on piiratud joonega $y = f(x)$, x -teljega ja püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$, siis pindala avaldub valemiga

$$S = \int_a^b f(x) dx, \text{ kui } f(x) \geq 0.$$

Kui kõvertrapets on piiratud joontega $y = f(x)$, $y = g(x)$ ja püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$, siis pindala avaldub valemiga

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Kui f ja g graafikud lõikuvad, siis tuleb leida lõikepunktid ja arvutada kogu pindala osade kaupa.



Ülesanne 20.1. Leidke järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad.

(a) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$

(b) $y = x$, $y = 3 - x$, $x = 0$

(c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, $x = 0$, $y = 4$ ($x > 0$)

(d) $y = 8 - 2x^2$, $y = 0$

(e) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

(f) $y = x^2$, $y = x^3$

(g) $y = \frac{3}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$

(h) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 3-x$, $y = 0$

(i) $y = \frac{1}{2}x^5$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$

(j) $y = x^2$, $y = x^{1/3}$, $x = -2$, $x = 2$

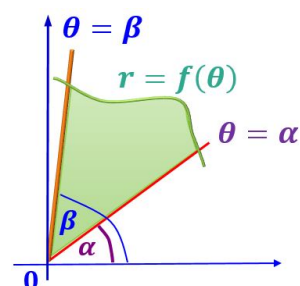
(k) $y^2 = x^4(1-x^3)$

20.2 Kõversektori pindala

Definitsioon 20.1

Läbige nullpunkti kaks sirget, mis moodustavad x -telje positiivse suunaga vastavalt nurgad α ja β .

Kõversektoriks nimetatakse tasandilist kujundit, mis on piiratud kahe sirgela ja pideva mittenegatiivse funktsiooni $r = f(\theta)$ graafikuga, kus θ on nurk radiaanides.



Kõversektori pindala. Pideva mittenegatiivse funktsiooni $r(\theta)$ poolt määratud kõversektori pindala

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta,$$

kus θ on nurk radiaanides.

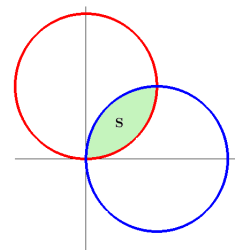
Kahe kõveraga piiratud **kõversektori pindala**, kui $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta.$$

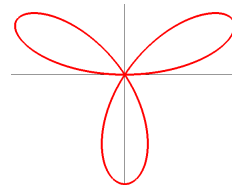
Ülesanne 20.2. Leidke joontega $r = 2 \sin \theta$ (ringjoon), $\theta = \frac{\pi}{4}$ ja $\theta = \frac{\pi}{2}$ piiratud kujundi pindala.

Ülesanne 20.3. Leidke kardiodi $r = 2(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ pindala.

Ülesanne 20.4. Leidke kahe ühikringi $r = 2 \sin \theta$ ja $r = 2 \cos \theta$ poolt piiratud kujundi pindala S .



Ülesanne 20.5. Leidke kolmelehelise roosi $r = 2 \sin 3\varphi$ pindala. Nurk $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ joonistab välja ühe õie. Kas sama tulemuse saaksime, kui võrrandiks oleks $r = 2 |\sin 3\varphi|$?



Ülesanne 20.6. Pindala, mis jääb kardiodi $r = \cos \theta + 1$ sisse, kuid ringist $r = \cos \theta$ välja, ei võrdu avaldisega

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((\cos \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta) d\theta = \pi.$$

Miks? Põhjendage oma vastust. Leidke tegelik pindala.

20.3 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral

Olgu funktsioon antud parameetriliselt võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$, kus $t \in [\alpha, \beta]$. Funktsiooni graafiku ja x -telje vahelise kõvertrapetsi pindala on

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t) x'(t)| dt.$$

Ülesanne 20.7. Leidke joone $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$ ja x -telje vahele jääva ala pindala.

Ülesanne 20.8. Leidke ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala funktsiooni parameetrilise esituse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ korral.

Ülesanne 20.9. Leidke tsükloidi $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ja x -telje vahelise kujundi pindala.

Praktikum 21

Joone pikkuse ja keha ruumala arvutamine

21.1 Joone pikkus

Valem 21.1

Lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f joone pikkus avaldub võrdusega

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Valem 21.2

Funktsiooni graafiku parameetrilise esituse korral $x = x(t)$, $y = y(t)$, kus x ja y on diferentseeruvad lõigus $[\alpha, \beta]$, joone pikkus avaldub võrdusega

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ülesanne 21.1. Leidke järgmiste joonte pikkused.

(a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 1, x \in [0, 2]$

(d) $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}, 2 \leq y \leq 3$

(b) $x = y^{3/2}, 0 \leq y \leq 4$

(e) $y = \ln(\sin x), 0 < a \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, 1 \leq x \leq 2$

(f) $y = x^2, x \in [-1, 1]$

Ülesanne 21.2. Kasutage sirglõigu $y = 3 - 2x, 0 \leq x \leq 2$, pikkuse leidmiseks joone pikkuse valemit. Kontrollige oma vastust, leides sirglõigu pikkuse kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkuse.

Ülesanne 21.3. Leidke ringjoone $x = r \cos(t), y = r \sin(t), t \in [-5/4\pi, -9/4\pi]$ pikkus.

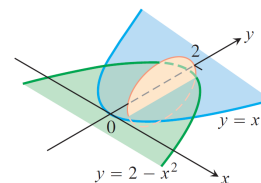
Ülesanne 21.4. Leidke astroidi $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ pikkus.

21.2 Keha ruumala ristlõigete kaudu

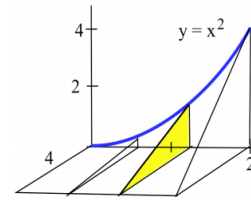
Keha ruumala ristlõigete pindalade $S(x)$, $S(y)$ ja $S(z)$ kaudu:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx, \quad V = \int_{y_1}^{y_2} S(y) dy, \quad V = \int_{z_1}^{z_2} S(z) dz.$$

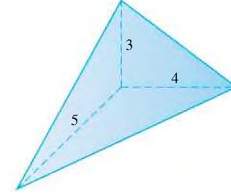
Ülesanne 21.5. Keha asetseb x -teljega ristuvate tasandite $x = -1$ ja $x = 1$ vahel. Ristlõiked on risti x -teljega ning moodustavad ringid, mille diameetrite otspunktid asuvad paraboolidel $y = x^2$ ja $y = 2 - x^2$. Leidke keha ruumala.



Ülesanne 21.6. Leidke ruumala kujundile, millel on kolmnurksed ristlõiked ja mille kõrgus jälgib joone $y = x^2$ kuju. Kolmnurkade alused on pikkusega 4 ja vaatlеме lõiku $x \in [0, 2]$.



Ülesanne 21.7. Joonisel on kujutatud kolmnurksete külgedega püramiid, mille kolm külge on omavahel risti ning mille servade pikkused on 3, 4 ja 5. Leidke püramiidi ruumala.



21.3 Pöördkeha ruumala

Pöördkeha ruumala pöörlemisel ümber x - ja y -telje:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx, \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} f^2(y) dy.$$

Ülesanne 21.8. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x -telje.

(a) $y = 2x, y = 0, x = 3$

(d) $y = x^4, x = 0, y = 1$

(b) $y = \sqrt{x}, x = 0, y = 2$

(e) $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0$

(c) $y = x^2 + 1, y = x + 1$

(f) $xy = 2, y = 0, x = 1, x = 3$

Ülesanne 21.9. Leidke pöördkoonuse ruumala. Koonus tekib sirge $y = ax$ ($a > 0$) pöörlemisel ümber x -telje ja on kõrgusega $h > 0$.

Ülesanne 21.10. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber y -telje.

(a) $y = 2x^{1/3}, x = 0, y = 2$

(d) $y^2 = x, y = 5, x = 0$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 1}, y = 0, x = 3$

(e) $y = \sqrt{4 - x^2}, I$ veerand

(c) $y = 3\sqrt{x}, x = 0, y = 3$

(f) $y = 8 - x^3, x = 0, y = 0$

Ülesanne 21.11. Kerakujulisest kõrvitsast raadiusega 22 cm valmistati kaanega anum, lõigates ära poole raadiuse kõrgune osa ning uuristades ülejäänu tühjaks. Mitu liitrit vedelikku mahub saadud anumasse, kui kõrvitsa koore paksus oli 2 cm?

Ülesanne 21.12. Poolkerakujuline kauss raadiusega R täidetakse veega kõrguseni h . Leidke kausis oleva vee ruumala.

Praktikum 22

Määratud integraali füüsikalised rakendused

22.1 Teepikkus

Valem 22.1

Olgu s sirgjooneliselt liikuva keha poolt läbitud teepikkus ja Δs nihe (kaugus algpunktist). Siis

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt, \quad \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (22.1)$$

Ülesanne 22.1. Lennuk lendab tugevnevas vastutuules kiirusega $v = 50(12-t)$ km/h. Kui kaugele jõuab lennuk oma algpunktist kahe tunniga?

Ülesanne 22.2. Rongi kiirus v (m/s) alates pidurdamise algusest on antud valemiga

$$v(t) = \sqrt{400 - 20t}.$$

Leidke rongi pidurdusteed (pidurdamise algusest seiskumiseni).

Ülesanne 22.3. Ralliauto kiiruslegend ütleb, et kõigepealt tuleb liikuda 6 minutit kiirusega $v(t) = 2000t - 1000t^2$ km/h, seejärel hoida saavutatud kiirust 12 minutit ning siis aeglustada kiirusega $190 - 900t$ km/h (siin aega on hakatud lugema pidurduse algusest). Kui kaugele on ralliauto esimese 24 minutiga jõudnud?

Ülesanne 22.4. Eelmisel õhtul jõulupeolt tulnud tudeng näeb jõuluvana, kes liigub sirgel rajal kiirusega $v(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$ m/s 40 meetri kaugusel oleva postkasti poole. Kui pika vahemaa läbib jõuluvana 6 sekundi jooksul? Kas ta jõuab selle ajaga postkastini?

Ülesanne 22.5. Postiljon seisab postkasti juures ning märkab suurt koera, mille peale hakkab ta jooksma kiirusega

$$\begin{cases} v = at + v_0, & 0 \leq t \leq 4, \\ v = \text{const}, & 4 < t \leq 10. \end{cases}$$

(a) Avaldage postiljoni poolt läbitud teepikkus s ja kiirus v esimese nelja sekundi jaoks kiirenduse a kaudu.

(b) Leidke kiirendus a kui on teada, et 10 sekundi jooksul läbis postiljon 56 meetrit.

Ülesanne 22.6. Langevarjurid A ja B asuvad 1950 m kõrgusel lendavas helikopteris. Langevarjur A hüppab esimesena, avades langevarju 4 sekundit pärast hüpet. Seejärel tõuseb helikopter 2130 m kõrguseni. Langevarjur B hüppab 45 sekundit A-st hiljem, avades langevarju 13 sekundit pärast hüpet. Mõlemad hüppajad langevad avatud langevarjudega ühtlasel kiirusel 5 m/s. Jätame lihtsuse mõttes õhutakistuse arvestamata.

(a) Millisel kõrgusel avaneb A langevari?

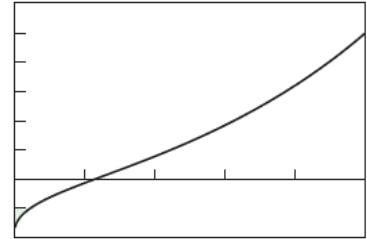
(c) Kumb langevarjur maandub esimesena?

(b) Millisel kõrgusel avaneb B langevari?

Ülesanne 22.7. Osake alustab liikumist punktist $s(0) = 9$ ja liigub kiirusega

$$v(t) = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Leidke läbitud teepikkus ja kui kaugele algpunktist osake liikus.



22.2 Kiirus ja kiirendus

Ülesanne 22.8. Võõrkeha sattumisel verre luuakse konkreetses mudelis organismi kaitseks antikehi kiirusega $r(t) = \frac{t}{t^2+1}$ tuhat antikeha minutis. Leidke antikehade arv 5 minutit pärast võõrkeha sattumist verre, kui alghetkel antikehi ei ole.

Ülesanne 22.9. (F) Õhupall tõuseb õhku kiirusega 4 m/s.

Leidke õhupallilt alla visatud liivakoti kiirus 1.5 sekundi pärast selle lahti laskmist.

Ülesanne 22.10. Auto (aeglustav) kiirendus avarii korral on 250 m/s^2 (maksimaalne lubatud kiirendus, et inimene võiks ellu jääda). Kui auto sõidab kiirusega 96 km/h , siis millise vahemaa vältel peab avanema õhkpadid, et viimasest midagi ka kasu oleks?

Ülesanne 22.11. Maantee ehitamiseks tuleb planeerida kõrvalteelt peateele sõitmiseks kiirendusrada. Leidke minimaalne kiirendusraja pikkus, kui kiirendusrajale sõidetakse kiirusega 25 km/h ja 12 sekundiga tuleb raja lõpus saavutada kiirus 95 km/h .

Ülesanne 22.12. Lennuki katapult võib lendurile anda kahe sekundiga kiiruseks 260 km/h . Leidke, mitu $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ väärtust on sel juhul lenduri keskmine kiirendus.

Ülesanne 22.13. (IT) Arvuti riistvara usaldatavuse R (protsentides) muutumise kiirus avaldub valemiga

$$\frac{dR}{dt} = -2.5(0.05t + 1)^{-1.5},$$

kus t on aeg tundides. Leidke R kahe ööpäeva jaoks, kui $R(0) = 100$.

Ülesanne 22.14. (Maj) Kui eeldada, et $K(t)$ tähistab firma kapitali ning $I(t)$ investeringute muutumise kiirust, siis kehtib valem

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Leidke firma kapitali muut ΔK ajaperioodil $1 \leq t \leq 8$, teades et, investeringute muutumise kiirus allub seaduspärasusele $I(t) = 1 + 3\sqrt[3]{t^2}$.

Ülesanne 22.15. Raudteejaamast väljuv elektrirong liigub esimese tunni jooksul kiirusega $v(t) = 90t^2 - 20t^3 \text{ km/h}$, kus t on rongi liikumise aeg tundides. Arvutage elektrienergia kulu W (kWh) esimese sõidutunni jooksul, kui

$$W(T) = \int_0^T (a(t) + 2)v(t) dt.$$

22.3 Töö

Valem 22.2

Muutuva jõu $F(x)$ toimel sirgjooneliselt mööda x -telge punktist $x = a$ punkti $x = b$ liikumisel on jõu poolt tehtav töö

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (22.2)$$

Ülesanne 22.16. (F) Kui palju tehakse tööd vedru kokku surumisel 0.25 m võrra, kui konstant $k = 16 \text{ N/m}$?

Ülesanne 22.17. (F) Kui osake massiga m asub punktis $(x, 0)$, tõmmatakse teda nullpunkti poole jõuga, mille moodul on k/x^2 . Kui osake alustab asendist $x = b$ ja talle ei mõju ükski teine jõud, siis leidke tehtud töö hetkel, mil osake jõuab asendisse $x = a$, $0 < a < b$.

Ülesanne 22.18. (F) Mägironija sikutab üles 50 m pikkust rippuvat köit. Kui palju tööd selleks kulub, kui köis kaalub 0.624 N/m ?

Ülesanne 22.19. (F) Lift massiga 680 kg on kinnitatud trosside otsa, mille mass ühe meetri kohta on 18 kg. Leidke, kui palju tehakse tööd, tõstes lifti keldrikorrusele teisele korrusele (kokku 7 m).

Ülesanne 22.20. (K) Ideaalse gaasi kokku surumisel või paisumisel tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV,$$

kus $P = \frac{nRT}{V}$ on rõhk ja V on gaasi ruumala. Liikuva kolviga silindri läbimõõt on 20 cm ja pikkus 80 cm. Silindris on gaas $10\,000 \text{ g/cm}^3$ rõhu all. Arvutage töö, mis kulub konstantsel temperatuuril T selle gaasi kokkusurumiseks kuni ruumala kahekordse vähenemiseni. Siin n ja R on konstandid.

22.4 Vedelike pumpamisel tehtav töö

Anumate tühjendamiseks tehtav töö. Olgu anuma ristlõike pindala kõrgusel y võrdne pideva funktsiooniga $S(y)$. Olgu vedeliku tihedus ρ , siis erikaal $\gamma = \rho g$. Kui anuma sisu asub kõrguste a ja b vahel, siis selle vedeliku pumpamiseks kõrgusele $h > b$ tehtav töö avaldub

$$A = \gamma \int_a^b S(y)(h - y) dy.$$

Ülesanne 22.21. (F) Vertikaalse ümarsilindri kujulise anuma kõrgus on 9 m ja diameeter on 6 m. See on ääreni täidetud petrooleumiga, mis kaalub 8048.6 N/m^3 . Kui palju tööd kulub petrooleumi pumpamiseks anuma ülemise ääreni?

Ülesanne 22.22. (F) Joone $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ kaare pööramisel ümber anum, mis täidetakse Surnumerest pärit mereveega (kaaludes ligikaudu $11\,475.6 \text{ N/m}^3$). Kui palju tööd kulub merevee pumpamiseks anuma ülemise ääreni?

Ülesanne 22.23. (F) Ümarsilindri kujuline anum lebab horisontaalselt, selle kõrgus on 4 m ja raadius on 2 m ning see on täidetud diiselkütusega kaaluga 8331.6 N/m^3 . Kui palju tööd kulub kogu kütuse pumpamiseks 6 m kõrgusele üle anuma ääre?

Praktikum 23

Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

23.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Paarisarvulise astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel kasutame võrduseid

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (23.1)$$

Paaritu astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel teisendame

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx = \int \sin^{2k} x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx.$$

Ülesanne 23.1. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 2x \, dx$

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$

(b) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(e) $\int_0^1 8 \cos^4 2\pi x \, dx$

(h) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^6 x \, dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \, dx$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^4 x} \, dx$

Kui integreeritav funktsioon on ratsionaalfunktsioon trigonomeetrilistest funktsioonidest kujul $R(\sin x, \cos x)$, siis muutujavahetus on

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{kui } x \in (-\pi, \pi). \quad (23.2)$$

Sel juhul

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad (23.3)$$

ning

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (23.4)$$

Ülesanne 23.2. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(d) $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$

(g) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

(b) $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$

(e) $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$

(h) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$

(c) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

(f) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$

(i) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}$

Ülesanne 23.3. Proovides asendusi $t = \sin x$, $t = \cos x$ või $t = \tan x$, leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

(c) $\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$

(e) $\int \tan^3 x dx$

(b) $\int \frac{\cos^3 x}{3 + \sin x} dx$

(d) $\int \frac{\sin^3 x}{(1 - \cos x)^2} dx$

(f) $\int \frac{1 + 9 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} dx$

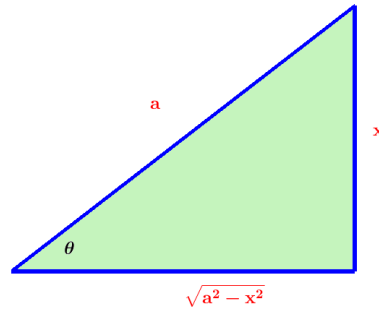
23.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine

Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > |x|,$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = a \sin \theta \quad \text{või} \quad x = a \cos \theta.$$

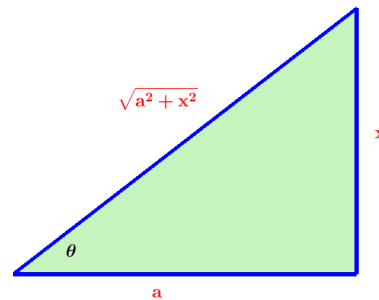


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = a \tan \theta \quad \text{või} \quad x = a \cot \theta.$$

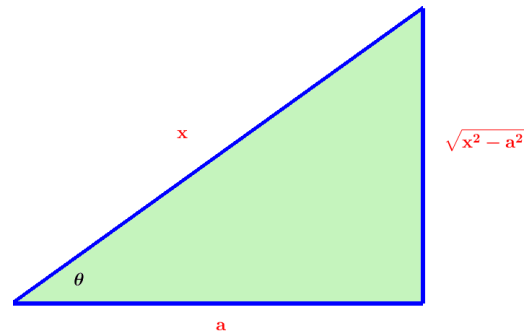


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad |x| > a,$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = \frac{a}{\cos \theta} \quad \text{või} \quad x = \frac{a}{\sin \theta}.$$



Ülesanne 23.4. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

(f) $\int \frac{3 dz}{z^2 \sqrt{z^2 + 9}}$

(k) $\int_0^4 \frac{9}{(t^2 + 9)^{3/2}} dt$

(b) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

(g) $\int \frac{6 dx}{x \sqrt{4 - x^2}}$

(l) $\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$

(c) $\int x \sqrt{16 - x^2} dx$

(h) $\int \frac{6 dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$

(m) $\int \frac{6 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

(d) $\int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2 - 36}}$

(i) $\int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

(n) $\int_{2.5}^3 \frac{dy}{y \sqrt{4y^2 - 9}}$

(e) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$

(j) $\int_0^{0.5} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Praktikum 24

Päratud integraalid 1

24.1 Lõpmatute rajadega integraalid

Definitsioon 24.1

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$ iga $b \in (a, \infty)$ korral.

Päratu integraal piirkonnas $[a, \infty)$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (24.1)$$

Definitsioon 24.2

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$, iga $a \in (-\infty, b)$ korral.

Päratu integraal piirkonnas $(-\infty, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (24.2)$$

Definitsioon 24.3

Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis päratu integraal defineeritakse järgmiselt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad \text{kus } c \in \mathbb{R} \text{ on suvaline.}$$

Ülesanne 24.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

(a) $\int_0^\infty (x^2 + 1) dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 4)^{3/2}}$

(m) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^n x}, n \in \mathbb{N}$

(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$

(h) $\int_0^\infty e^{-x/2} dx$

(n) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

(i) $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx$

(o) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{x^2 + 1}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

(j) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

(p) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

(e) $\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^5} dx$

(k) $\int_{-\infty}^0 \cos^2 x dx$

(q) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$

(f) $\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$

(l) $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$

(r) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$

25.1 Integraalid tõkestamata funktsioonist

Definitsioon 25.1

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti b ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_a^M f(x) dx$$

iga $M \in [a, b)$ korral. Päratu integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse seosega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow b-} \int_a^M f(x) dx. \quad (25.1)$$

Definitsioon 25.2

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti a ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_M^b f(x) dx,$$

iga $M \in (a, b]$ korral. Päratu integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse seosega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow a+} \int_M^b f(x) dx. \quad (25.2)$$

Definitsioon 25.3

Kui funktsioon f on tõkestamata punktis $c \in (a, b)$, kuid pidev piirkonnas $[a, c) \cup (c, b]$, siis päratu integraal defineeritakse järgmiselt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ülesanne 25.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

- | | | | |
|--|--|---|--|
| (a) $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$ | (f) $\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ | (k) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$ | (p) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$ |
| (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | (g) $\int_{-2}^2 \frac{x^2+1}{x^3-8} dx$ | (l) $\int_{-1}^1 \frac{\ln x}{x} dx$ | (q) $\int_0^1 \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}}$ |
| (c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ | (h) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/5}}$ | (m) $\int_1^e \frac{\ln^n x}{x} dx, n \in \mathbb{N}$ | (r) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ |
| (d) $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ | (i) $\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ | (n) $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^n x}, n \in \mathbb{N}$ | (s) $\int_0^\pi \tan x dx$ |
| (e) $\int_1^2 \frac{2 dx}{\sqrt{2-x}}$ | (j) $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{ x }}$ | (o) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | (t) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ |

25.2 Päratute integraalide rakendusi

Definitsioon 25.4

Kui x on pidev juhuslik suurus, siis **tõenäosus**, et x asub arvude a ja b vahel, defineeritakse integraaliga

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx, \quad (25.3)$$

kus funktsioon p on pideva juhusliku suuruse x tihedusfunktsioon või ka lihtsalt tihedus.

Definitsioon 25.5

Pideva juhusliku suuruse **keskväärtuseks** ja **dispersiooniks** nimetatakse suurusi

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (25.4)$$

ja

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 p(x) dx. \quad (25.5)$$

Ülesanne 25.2. (F) Signaalitöötles kasutatakse ajast sõltuva signaali $f(t)$ jaoks Fourier' teisendust

$$F(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\sigma t} dt,$$

kus σ on sagedus hertsides. Niimoodi seatakse signaalile f vastavusse tema spekter, kus iga sageduse σ Hz jaoks vastab võnkumise amplituud $|F(\sigma)|$ ja faas $\arg(F(\sigma))$. Olgu signaaliks

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & , \text{ kui } t \in [0, \infty) \\ 0 & , \text{ kui } t \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Leidke selle signaali Fourier' teisendus $F(\sigma)$ suvalise reaalarvulise sageduse σ jaoks.

Ülesanne 25.3. (F) Füüsikas kasutatakse diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks Laplace'i teisendust

$$L(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Leidke funktsioonide $f(t) = \sin t$ ja $f(t) = \cos t$ Laplace'i teisendused.

Ülesanne 25.4. (F) Lambi eluiga on eksponentsiaalse jaotusega, keskmise elueaga 1000 töötundi:

$$p(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000}, \quad t \geq 0.$$

Milline on tõenäosus, et lambi eluiga on suurem kui 2000 töötundi?

Ülesanne 25.5. (IT) Juhuslikult lõigust $[-1, 1]$ arvu valimisele vastab ühtlane jaotus

$$p(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Leida ühtlase jaotuse keskväärtus ja tõenäosus, et valides $n \in \{10, 15, 20\}$ juhuslikku arvu lõigust $[-1, 1]$, nende arvude keskväärtus $\bar{x}$ kuulub lõiku $[-0.5, 0.5]$? Vihje: keskväärtuse tõenäosus jaotub normaaljaotusega, mille keskväärtus on leitud μ ning standardhälve on $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{n}$:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-\mu)^2/\sigma_0^2}.$$

Ülesanne 25.6. IQ testide tulemused on tavaliselt jaotunud normaaljaotusega

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kus keskväärtus $\mu = 100$ ja standardhälve $\sigma = 15$. Leidke (arvuti abiga), mitmel protsendil elanikkonnast on mudeli järgi IQ vahemikus 85 kuni 115. Mitmel % elanikkonnast on IQ suurem kui 140?

Praktikum 26

Vektorite skalaarkorrutis

26.1 Vektorite skalaarkorrutis

Definitsioon 26.1

Olgu $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$ ja $\varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vaheline nurk. Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in E$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse arvu

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Vektori $\vec{x}$ pikkus:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Ülesanne 26.1. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

- | | |
|---|--|
| (a) $ \vec{a} = 8$, $ \vec{b} = 6$, $\varphi = 2\pi/3$ | (d) $ \vec{a} = 1$, $ \vec{b} = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ |
| (b) $ \vec{a} = 2$, $ \vec{b} = 3$, $ \vec{a} + \vec{b} = 4$ | (e) $ \vec{a} = 3$, $ \vec{b} = 1$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ |
| (c) $ \vec{a} = 4$, $ \vec{b} = 12$, $ \vec{a} - \vec{b} = 10$ | (f) $ \vec{a} = 3$, $ \vec{b} = 1$, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ |

Ülesanne 26.2. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

- | | |
|---|--|
| (a) $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (4, 2)$ | (c) $\vec{a} = (7, -4, 2)$, $\vec{b} = (3, 1, 0)$ |
| (b) $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (4, 2, -5)$ | (d) $\vec{a} = (0, 0, 0)$, $\vec{b} = (-2, 6, 0)$ |

Ülesanne 26.3. Arvutage skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- (a) $\vec{a} = (\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1)$, $\vec{b} = (\beta + 1, \gamma + 1, \alpha + 1)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
- (b) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, kus $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid

Ülesanne 26.4. Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad 60° . Leidke vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pikkus, kui $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ ja $|\vec{c}| = 6$.

Ülesanne 26.5. Leidke koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest $A(1, 1)$ ja $B(3, 7)$ võrdse kaugusel.

Ülesanne 26.6. Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x, y)$ koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsetel kaugustel punktidest $A(7, -3)$ ja $B(-2, 1)$?

Ülesanne 26.7. Näidake, et vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = \sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ sobivad mingi ruudu külgedeks, kui $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 26.8. (F) Jõud $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$, mis mõjuvad 120° nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leidke resultantjõu $\vec{R}$ arväärtus $|\vec{R}|$, kui $|\vec{P}| = 7$ ja $|\vec{Q}| = 4$.

26.2 Vektorite vaheline nurk

Vektorite vahelise nurga koosinus avaldub skalaarkorrutise valemi kaudu:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Vektori $\vec{a}$ projektsioon vektorile $\vec{b}$ on

$$\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Ülesanne 26.9. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke vektorite $\vec{C}A$ ja $\vec{C}B$ vaheline nurk.

- (a) $A(5, 3), B(4, 8), C(2, 4)$ (c) $A(2, -1, 4), B(1, -6, 8), C(0, -2, 6)$
 (b) $A(-2, 6, 7), B(-4, 5, 5), C(-3, 0, 2)$ (d) $A(0, 4, -3), B(2, 5, 3), C(5, 1, 1)$

Ülesanne 26.10. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke, millised kahest antud vektorist on risti, kollineaarsed, moodustavad teravnurga või nürinurga.

- (a) $\vec{a} = (2, -7), \vec{b} = (5, 2)$ (c) $\vec{a} = (2, 1, -8), \vec{b} = (7, 2, 2)$
 (b) $\vec{a} = (4, 16, -12), \vec{b} = (-6, -24, 18)$ (d) $\vec{a} = (5, -3, 2), \vec{b} = (1, 3, 4)$

Ülesanne 26.11. Arvutage vektori $\vec{a}$ projektsioon vektorile $\vec{b}$.

- (a) $\vec{a} = (2, -5), \vec{b} = (3, 4)$ (c) $\vec{a} = (2, 1, -3), \vec{b} = (7, -2, 4)$
 (b) $\vec{a} = (4, -5, 7), \vec{b} = (-3, -2, 4)$ (d) $\vec{a} = (2, -3, 2), \vec{b} = (4, 3, 2)$

Ülesanne 26.12. Milline on ühikvektorite $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ vaheline nurk, kui vektorid $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ on risti?

Ülesanne 26.13. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0)$ ja $C(3, -2, 1)$. Leidke tipu B juures olev sisenurk.

Ülesanne 26.14. Leidke kuubi diagonaali ja kuubi ühe külje diagonaali vaheline nurk.

Ülesanne 26.15. $\langle * \rangle$ Tõestage, et suvalise kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in E_3$ jaoks kehtib samasus

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 2(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2).$$

Mis on selle samasuse geomeetriline tähendus?

Praktikum 27

Vektorite vektorkorrutis ja segakorrutis

27.1 Vektorite vektorkorrutis

Definitsioon 27.1

Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in E_3$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{x} \times \vec{y} \in E_3$, mis on määratud tingimustega:

- 1) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$,
- 2) $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}$, $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$,
- 3) kolmik $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ on parema käe kolmik.

Vektorkorrutise arvutamine koordinaatkujul

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

kus $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$.

Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud **rööpküliliku pindala** on $S_{\vec{x}, \vec{y}} = |\vec{x} \times \vec{y}|$.

Ülesanne 27.1. Arvutage $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

(a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

(c) $|\vec{a}| = 3$, $\vec{b} = -2\vec{a}$

(b) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -21$

(d) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Ülesanne 27.2. Olgu $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, 1, -2)$, $\vec{c} = (0, 0, 0)$. Leidke vektorid $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{a}$, $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 5\vec{b})$.

Ülesanne 27.3. Millisel arvu α väärtusel on vektorid $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ ja $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kollineaarsed, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed?

Kolmnurga ABC pindala on võrdne poolega küljevektorite vektorkorrutise pikkusest

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}^2},$$

kus $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

Ülesanne 27.4. Leidke vektorkorrutise abil kolmnurga ABC pindala.

(a) $A(4, 1, -4)$, $B(6, 3, 7)$, $C(2, 3, 1)$

(c) $A(2, 3, 1)$, $B(4, 5, 1)$, $C(3, 4, 1)$

(b) $A(0, 5, -1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-3, 4, -5)$

(d) $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$, $C(-3, 1)$

Ülesanne 27.5. Leidke vektoreile $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ ehitatud kolmnurga pindala, kui $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 6$ ja $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.

Ülesanne 27.6. Näidake, et vektorid $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sobivad mingi kuubi servadeks ning leidke selle kuubi kolmandat serva määrav vektor, kui $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ on ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 27.7. Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ja $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ning moodustab esimese baasivektoriga $\vec{i}$ nürinurga. Leidke vektori $\vec{x}$ koordinaadid teades, et $|\vec{x}| = \sqrt{138}$.

Ülesanne 27.8. On antud vektorid $\vec{a} = (11, 10, 2)$ ja $\vec{b} = (4, 0, 3)$. Leidke ühikvektor $\vec{c}$, mis on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning on suunatud nii, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parema käe kolmik.

Ülesanne 27.9. $\langle * \rangle$ Näidata, et et suvalise kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ korral

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} - (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y}.$$

27.2 Kolme vektori segakorrutis

Definitsioon 27.2

Vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ **segakorrutiseks** $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ nimetatakse arvu $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.

Vektorite $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ segakorrutise arvutamise valem

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud **rööptahuka ja tetraeedri ruumalad** avalduvad vastavalt valemitega

$$V_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} = |\vec{x}\vec{y}\vec{z}|, \quad V_{\text{tetr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \frac{1}{6} |\vec{x}\vec{y}\vec{z}|.$$

Ülesanne 27.10. Vektorite kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on vasaku käe kolmik. Arvutage $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

(a) $\vec{a} = (-3, 4, -7), \vec{b} = (1, 2, 5), \vec{c} = (1, -4, 5)$

(b) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 5, \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$

(c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 3$ ning vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on paarikaupa risti

Ülesanne 27.11. Tetraeedri tipud on $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ ja $D(4, 1, 3)$. Leidke selle tetraeedri ruumala ja tipust D tõmmatud kõrgus.

Ülesanne 27.12. Tetraeedri ruumala $V = 5$ ja kolm tippu on $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ ja $C(2, -1, 3)$. Leidke y -teljel asuva neljanda tipu D koordinaadid.

Ülesanne 27.13. Tõestage, et punktid $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ ja $D(2, 1, 3)$ asetsevad samal tasandil.

Ülesanne 27.14. $\langle * \rangle$ Tõestage, et suvalise kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ korral

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Praktikum 28

Sirge ja tasandi võrrandid

28.1 Tasandi võrrand

Definitsioon 28.1

Tasandi π üldvõrrandiks nimetatakse tasandi võrrandit kujul

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}),$$

kui $\vec{n} = (A, B, C)$ on selle tasandi normaalvektor.

Tasandite π_1 ja π_2 vaheline nurk:

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|},$$

kus $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ on vastavalt tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorid.

Tasandi normaalvektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v},$$

kui $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on tasandil asuvad mittekollineaarsed vektorid.

Punkti $P(p_1, p_2, p_3)$ kaugus tasandist π :

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ülesanne 28.1. Koostage tasandi π võrrand.

- (a) tasand π on paralleelne x -teljega ning läbib punkte $A(3, -1, 1)$ ja $B(4, -6, -1)$
- (b) tasand π on paralleelne y -teljega ning läbib punkte $C(3, 4, 0)$ ja $D(7, 5, -3)$
- (c) tasand π on paralleelne z -teljega ning läbib punkte $E(-1, -2, -3)$ ja $F(1, 3, 4)$

Ülesanne 28.2. Koostage punkte A, B , ja C läbiva tasandi võrrand.

- (a) $A(0, 0, 0), B(1, 4, 0), C(3, -2, 1)$
- (c) $A(3, -1, 2), B(4, -1, -1), C(2, 0, 2)$
- (b) $A(-3, 6, -7), B(-1, 7, -6), C(-7, 3, -8)$

Ülesanne 28.3. Koostage tasandi π võrrand.

- (a) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (2, 3, -5)$ ning tema aplikaatlõik on 6
- (b) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (-1, 4, 7)$ ning tema ordinaatlõik on 3
- (c) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (4, -1, -3)$ ning tema abstsisslõik on -5

Ülesanne 28.4. Kontrollige, kas tasanditel $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$ ja $3x + 4y + 5z - 3 = 0$ on ühiseid punkte.

Ülesanne 28.5. Leidke tasand, mis on paralleelne tasandiga $x - 2y + 3z - 7 = 0$ ning läbib punkti $A(1, -2, 1)$.

Ülesanne 28.6. Leidke tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ ja koordinaattasandite vahelised nurgad.

Ülesanne 28.7. Arvutage järgmiste tasandite vahelised nurgad.

- (a) $\pi_1: -2x + 4y - z + 5 = 0$ ja $\pi_2: 7x + 3y - 2z + 1 = 0$
- (b) xz -tasand ja $\pi: 3y - 3z + 5 = 0$

(c) $\pi_1: 6x - 3y + 12z - 23 = 0$ ja $\pi_2: 10x - 5y + 20z - 1 = 0$

Ülesanne 28.8. Leidke tasand, mis läbib tasandite $3x - 2y + z - 3 = 0$ ja $x - 2z = 0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $x - 2y + z + 5 = 0$.

Ülesanne 28.9. Leidke tasand, mis läbib tasandite $x + 5y + z = 0$ ja $x - z + 4 = 0$ lõikesirget ning moodustab tasandiga $x - 4y - 8z + 12 = 0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

Ülesanne 28.10. Arvutage punkti P kaugus tasandist π .

(a) $P(1, 2, 1)$ ja $\pi: x + 2y + 2z - 10 = 0$

(c) P on koordinaatide alguspunkt ja

(b) $P(2, 8, 5)$ ja $\pi: x - 2y - 2z = 1$

$\pi: 15x - 10y + 6z - 190 = 0$

28.2 Sirge võrrand ruumis

Definitsioon 28.2

Sirge kanoonilisteks võrranditeks nimetatakse sirge s võrrandeid kujul

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3},$$

kus sirge s läbib punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ ja sirge sihivektor on $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Sirge s ja tasandi π vaheline nurk:

$$\sin \angle(s, \pi) = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|},$$

kus $\vec{s}$ ja $\vec{n}$ on vastavalt sirge s sihivektor ja tasandi π normaalvektor.

Kahe mitteparalleelse tasandi π_1 ja π_2 ühisosaks on sirge

$$\begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Ülesanne 28.11. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, -5)$, $C(0, 4, -5)$. Koostage selle kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid.

Ülesanne 28.12. Koostage punkti $P(-3, 4, -7)$ läbiva sirge s kanoonilised võrrandid.

(a) sirge s on paralleelne x -teljega

(c) sirge s on paralleelne z -teljega

(b) sirge s sihivektor on $\vec{s} = (3, -2, 4)$

(d) sirge s on paralleelne sirgega

$$t: \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{8}$$

Ülesanne 28.13. Koostage sirge s kanoonilised võrrandid, kui sirge s läbib punkti $P(2, 3, 4)$ ja on paralleelne sirgega $t: \begin{cases} 3x + 7y - 2z + 4 = 0 \\ 2x - 6y + 7z - 13 = 0. \end{cases}$

Ülesanne 28.14. Leidke tasandi $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ja xz -tasandi lõikesirgel kõik need punktid, mis asuvad tasandist $2x + y - z + 3 = 0$ kaugusel $\sqrt{6}$ ühikut.

Ülesanne 28.15. Leidke sirge ja tasandi vaheline nurk. Juhul, kui sirge ja tasand lõikuvad, leidke nende lõikepunkt.

(a) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad 3x + 5y - z - 2 = 0$

(c) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}, \quad 5x - z - 4 = 0$

(b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}, \quad 3x - 3y + 2z - 5 = 0$

1. Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid.
2. Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid.
3. Cauchy (algtingimusega) ülesande lahendamine.

2. Määratud integraal

1. Newton-Leibnizi valem.
2. Absoluutväärtust sisaldavad avaldised.
3. Sümmeetrilised rajad.
4. Muutuja vahetus, ositi integreerimine, ratsionaalfunktsioonide, trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine.

3. Määratud integraali rakendused

1. Tasandilise kujundi pindala leidmine (kõvertrapets, kõversektor).
2. Joone pikkuse arvutamine lihtsamal juhul.
3. Keha ruumala leidmine ristlõigete pindalade kaudu, pöördkeha ruumala.
4. Läbitud teepikkus, kaugus alguspunktist (sirgjoonelisel liikumisel).
5. Töö arvutamine.

4. Päratud integraalid

1. Päratud integraalid lõpmatute rajade korral.
2. Päratud integraalid lõigus katkeva funktsiooni korral.

5. Geomeetria

1. Vektorite skalaarkorrutis, nurk kahe vektori vahel.
2. Vektorkorrutis, segakorrutis.
3. Tasandi ja sirge võrrandite koostamine ruumis.
4. Tasandite ja sirgete vastastikused asendid (nurgad nende vahel). Punkti kaugus tasandist.

Praktikum 30

Kompleksarvu algebraline kuju

30.1 Kompleksarvu algebraline kuju

Definitsioon 30.1

Kompleksarvuks nimetatakse arvu kujul

$$z = a + bi, \quad (30.1)$$

kus a ja b on reaalarvud ning i on **imaginaarühik**, $i^2 = -1$.

Kompleksarvu **reaalosaks** nimetatakse arvu a , kompleksarvu **imaginaarosaks** nimetatakse arvu bi .

Reaalarvu b nimetatakse **imaginaarosa kordajaks**.

Avaldist $a + bi$ nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks.

Kompleksarvu $a + bi$ **kaaskompleksarv** on $\bar{z} = a - bi$.

Kompleksarvu **moodul** on $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ülesanne 30.1. Kujutage komplekstasandil järgmised kompleksarvud.

- | | | | |
|--------------|---------------|-----------------------|----------------------------------|
| (a) $3 - 2i$ | (c) $-1 - i$ | (e) $-7j, j^2 = -1$ | (g) $\overline{ 3 + \sqrt{6}i }$ |
| (b) $1 + i$ | (d) $-3 + 4i$ | (f) $ 3 + \sqrt{6}i $ | (h) $1 - i\sqrt{3}$ |

Ülesanne 30.2. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| (a) $2ix + 3 = y - i$ | (b) $x^2 - y^2 + ixy = 1 + ix$ |
|-----------------------|--------------------------------|

Ülesanne 30.3. Leidke kompleksarvu moodul.

- | | | | |
|-------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| (a) -42 | (c) $2i + 2$ | (e) $4 + 3i$ | (g) $6\sqrt{3} - 6i$ |
| (b) $i + 1$ | (d) $1 + i\sqrt{3}$ | (f) $-1 - i\sqrt{3}$ | (h) $1 - i\sqrt{3}$ |

Ülesanne 30.4. Kujutage komplekstasandil kõik kompleksarvud, mis rahuldavad antud tingimusi.

- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| (a) $ z = 3$ | (b) $\frac{1}{2} \leq z \leq 3$ | (c) $ z - 1 = 1$ | (d) $\operatorname{Re} z^2 = 4$ |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|

Kuna $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$, siis

$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$, kus $k = 0, 1, 2, \dots$

Ülesanne 30.5. Kirjutage algebralisel kujul $z = a + bi$

(a) $z = i^{20}$

(f) $z = (2 + 2i)^8$

(b) $z = i^5 + i + 1$

(c) $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

(g) $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{3-i}{1+i} + 3i$

(d) $z = i^{43} + (-1)^7 - (-i)^{77}$

(h) $z = \frac{(2-i^3)^4}{(i^8-i^6)^3} + i$

(e) $z = i^{2017} - i$

30.2 Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

Liitmine ja lahutamine. Olgu $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$. Siis

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i; \quad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Korrutamine. Olgu antud kompleksarvud $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$. Siis

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Jagamine. Olgu antud kompleksarvud z_1 ja z_2 . Siis

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Ülesanne 30.6. Leidke arvude z_1 ja z_2 summa, vahe, korrutis, jagatis, moodulid ja kaaskompleksid.

(a) $z_1 = 3, z_2 = -4i$

(e) $z_1 = 2 - 7i, z_2 = 3 + 4i$

(b) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$

(f) $z_1 = -4 - i, z_2 = -7 - 4i$

(c) $z_1 = 1 + i, z_2 = -3 + 2i$

(g) $z_1 = 1 + 3i, z_2 = \frac{1}{1+3i}$

(d) $z_1 = 2 - 5i, z_2 = 3 + i$

(h) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}, z_2 = i$

Praktikum 31

Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

31.1 Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

Definitsioon 31.1

Avaldist

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (31.1)$$

nimetatakse kompleksarvu z trigonomeetriliseks kujuks. Realarv r on kompleksarvu z moodul $|z|$. Realarvu φ nimetatakse ka kompleksarvu z argumendiks ja tähistatakse $\varphi = \arg(z)$.

Definitsioon 31.2

Olgu $z = a + bi$, $\theta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right|$. Siis kompleksarvu z argument φ leitakse järgmiselt:

$$\varphi = 180^\circ - \theta$$

$$a < 0, b > 0$$

$$a < 0, b < 0$$

$$\varphi = 180^\circ + \theta$$

$$\varphi = \theta$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b < 0$$

$$\varphi = -\theta$$

Valem 31.1

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob Euleri valem

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (31.2)$$

Definitsioon 31.3

Kompleksarvu z eksponentkujuks nimetatakse järgmist esitust:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (31.3)$$

kus r on kompleksarvu moodul ja φ on argument radiaanides.

Ülesanne 31.1. Teisendage kompleksarv z algebralisele kujule $z = a + bi$ ning eksponentkujule.

(a) $z = \cos 16\pi + i \sin 16\pi$

(c) $z = 8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

(b) $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(d) $z = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{2} - i \sin \frac{5\pi}{2} \right)$

Ülesanne 31.2. Kirjutage nii trigonomeetrilisel kui ka algebralisel kujul $a + bi$.

(a) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c) e^{-i}

(e) $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(g) $e^{(i+1)i}$

(b) $64 e^{i0}$

(d) $2 e^{i\frac{\pi}{3}}$

(f) $\frac{2 e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

(h) $\frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}}$

Ülesanne 31.3. Esitage ülesandes 30.6 antud ja saadud kompleksarvud nii trigonomeetrilisel kui ka eksponentkujul.

(a) $z_1 = 3, z_2 = -4i$

(e) $z_1 = 2 - 7i, z_2 = 3 + 4i$

(b) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$

(f) $z_1 = -4 - i, z_2 = -7 - 4i$

(c) $z_1 = 1 + i, z_2 = -3 + 2i$

(g) $z_1 = 1 + 3i, z_2 = \frac{1}{1 + 3i}$

(d) $z_1 = 2 - 5i, z_2 = 3 + i$

(h) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}, z_2 = i$

31.2 Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul

Omadus 31.1

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul ning eksponentkujul

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Siis **korratamisel** moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad r_2 \neq 0.$$

Ülesanne 31.4. Leidke $z_1 \cdot z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$ kõigil kolmel erineval esitusviisil.

(a) $\begin{cases} z_1 = 4 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\ z_2 = 2 \left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi \right) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ z_2 = 3 (\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases}$

Ülesanne 31.5. Arvutage järgmised avaldised.

(a) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4$

(c) $\frac{(1+i)^2}{2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}$

(b) $\frac{(5+3i)(5-3i)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}$

(d) $\frac{\cos 69.5^\circ + i \sin 69.5^\circ}{\cos(-17.5^\circ) + i \sin(-17.5^\circ)}$

Ülesanne 31.6. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral $z^2 = \bar{z}^2$, $z = x + iy$.

Ülesanne 31.7. Millise reaalse kordajatega ruutvõrrandi lahenditeks on kompleksarvud $z_1 = 2 + i$ ja $z_2 = 2 - i$?

Ülesanne 31.8. Näidake, et kompleksarv $z = 1 - \sqrt{3}i$ on ruutvõrrandi $x^2 + 4 = 2x$ lahend.

Ülesanne 31.9. Tõestage järgmised väited.

(a) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ja $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

(c) $z \bar{z} = |z|^2$

(b) Kui $|z| = 1$, siis $\bar{z} = z^{-1}$

(d) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ iga $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ korral

Ülesanne 31.10. (F) Kaks köit hoiavad sadamas paati nii, et ping jõud on vastavalt $80 + 20i$ kg ja $100 - 50i$ kg. Arvutage kogupinge.

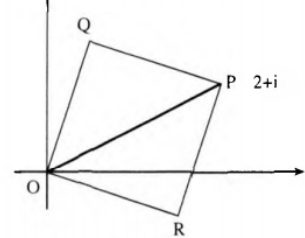
31.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 31.11. (F) Vahelduvvoolu ahelas leitakse kahe paralleelühenduses oleva elemendi näivtakistus (vt. lähemalt konspekti lisas) valemiga

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Arvutage näivtakistus Z , kui $Z_1 = 3 + 5i \, \Omega$ ja $Z_2 = 5 - 6i \, \Omega$.

Ülesanne 31.12. Ruudu diagonaal asub punktide 0 ja $2 + i$ vahel. Leidke ruudu kaks ülejäänud tippu Q ja R . NB! Lahenduse saab läbi viia puhtalt kompleksarve kasutades ja ilma kooli geomeetriata.



Ülesanne 31.13. (F) Kahe vedruga varustatud süsteem vajub raskuse mõjul

$$d = 6.03(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ) + 3.26(\cos 76.0^\circ + i \sin 76.0^\circ) \text{ cm}.$$

Teostage liitmine ning esitage vastus trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 31.14. (F) Teatud induktsioonipoolis on pinge

$$V = \frac{8.66(\cos 90.0^\circ + i \sin 90.0^\circ) \cdot 50.0(\cos 135.0^\circ + i \sin 135.0^\circ)}{10.0(\cos 60.0^\circ + i \sin 60.0^\circ)} \text{ volti}.$$

Lihtsustage avaldis ning leidke pinge moodul.

Ülesanne 31.15. (F) Kaks kaablit tõstavad portselani täis kasti. Pingejõude kaablites saab esitada avaldistega $2100 - 1200i \text{ N}$ ja $1200 + 5600i \text{ N}$. Esitage kogupinge trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 31.16. Kasutades eksponentkujut, tuletage trigonomeetrilised valemid $\cos(\alpha \pm \beta)$ ja $\sin(\alpha \pm \beta)$ kohta.

Ülesanne 31.17. (F) Radari mikrolaine signaali intensiivsus on $37(\cos 65.3^\circ - i \sin 65.3^\circ) \text{ V/m}$. Esitage see eksponentkujul.

Ülesanne 31.18. (F) Lainete liitumisel on kasutusel avaldis

$$E_1 E_2 (e^{i(\alpha - \beta)} + e^{-i(\alpha - \beta)}).$$

Näidake, et see võrdub lihtsama avaldisega $2E_1 E_2 \cos(\alpha - \beta)$.

Praktikum 32

Kompleksarvu astendamine ja juurimine

32.1 Kompleksarvu astendamine ja juurimine

Valem 32.1

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib **de Moivre'i valem**

$$z^k = r^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (32.1)$$

Valem 32.2

Igal nullist erineval kompleksarvul on n erinevat n -astme juurt, mis leitakse valemiga

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + k 360^\circ}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + k 360^\circ}{n}\right) \right), \quad (32.2)$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Märkus. Sümbol $\sqrt[n]{z}$ tähistab siin kompleksarvu z kõigi n -astme juurte hulka ning sümbol $\sqrt[n]{r}$ sellist positiivset reaalarvu, mille n -s aste on r .

Ülesanne 32.1. Kasutades de Moivre'i valemit, astendage kompleksarvud.

(a) $(\sqrt{3} - i)^{-12}$

(b) $(3 + \sqrt{3}i)^5$

(c) $[2(\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ)]^5$

(d) $[\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]^{10}$

(e) $2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^{36}$

(f) $[3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)]^4$

(g) $[0.2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)]^3$

(h) $\left(6e^{\frac{137\pi}{180}i}\right)^2$

(i) $\left(2e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^8$

(j) $\left(e^{\frac{71\pi}{90}i}\right)^{10}$

(k) $z^{273}, \quad z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$

(l) $z^{614}, \quad z = e^{\frac{3i\pi}{307}}$

Ülesanne 32.2. Leidke arvu -1 seitsmenda juure $\sqrt[7]{-1}$ kõik väärtused.

Ülesanne 32.3. Leidke arvu $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}$ kõik väärtused.

Ülesanne 32.4. Leidke ja kujutage komplekstasandil arvu $\sqrt[4]{-64}$ kõik väärtused.

Ülesanne 32.5. Leidke $\sqrt[5]{z}$, kui $z = 32\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ja kujutage tulemus komplekstasandil.

32.2 Kordamine

Ülesanne 32.6. Kirjutage eksponentkujul ja algebralisel kujul. Leidke erinevatel viisidel esitatud kompleksarvude z_1 ja z_4 korral nende summa, korrutis ja jagatis.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) & \text{(c)} \quad z_3 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ \text{(b)} \quad z_2 = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) & \text{(d)} \quad z_4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{array}$$

Ülesanne 32.7. Olgu

$$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - i, \quad w_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad w_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Arvutage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z_1^5 + w_2^8 & \text{(d)} \quad \sqrt[3]{z_1 + w_1^2} \text{ kõik väärtused} & \text{(g)} \quad \overline{w_1 + w_2} \\ \text{(b)} \quad z_1^6 z_2 & \text{(e)} \quad \frac{z_1 + w_2}{w_1} & \text{(h)} \quad |z_1^3 + z_2^2| \\ \text{(c)} \quad (z_2 w_1)^5 & \text{(f)} \quad \frac{\sqrt[4]{w_1}}{w_2} \text{ kõik väärtused} & \text{(i)} \quad \left| \frac{\overline{w_1}}{w_2} \right| \end{array}$$

32.3 Algebraliste võrrandite lahendamine

Ülesanne 32.8. Lahendage võrrandid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z^4 - 1 = 0 & \text{(f)} \quad z^3 + i = 0 & \text{(l)} \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 28 = 0 \\ \text{(b)} \quad z^2 - 1 - i = 0 & \text{(g)} \quad z^3 + 27 = 0 & \text{(m)} \quad x^4 + 6x^2 + 8 = 0 \\ \text{(c)} \quad z^2 - i = 0 & \text{(h)} \quad z^4 - i = 0 & \text{(n)} \quad x^6 - 2x^3 + 5 = 0 \\ \text{(d)} \quad z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0 & \text{(i)} \quad z^4 - \sqrt{3} - i = 0 & \text{(o)} \quad (x+1)^8 = 256(x-1)^8 \\ \text{(e)} \quad z^2 + 2(1 + \sqrt{3}i) = 0 & \text{(j)} \quad z^4 = -4i & \text{(p)} \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \\ \text{(k)} \quad x^2 - 6x + 10 = 0 & & \text{(q)} \quad (x^4 + 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 8) = 0 \end{array}$$

Ülesanne 32.9. Lahendage w suhtes järgmine võrrand:

$$w^{\frac{4}{3}} + 2i = 0.$$

Ülesanne 32.10. (IT) Programmeerijal tuleb oma programmis leida reaalarvu a jaoks n erinevat n -astme juurt. Programmi ühe osana tuleb välja selgitada, mitu nendest on reaalarvud ja mitu kompleksarvud. Selgitage, kuidas seda kindlaks teha ilma juuri endid leidmata.

Praktikum 1

Vastus 1.1. (a) 8 (b) 8 (c) 3 ?? $-c$

Vastus 1.2. (a) $x = \pm 3$ (b) $x = -2$ ja $x = 5$ (c) $x = -5$ ja $x = -1$ (d) $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = \frac{17}{3}$
 (e) $-2 < x < 2$ (f) $-\infty < x < 0$ või $2 < x < \infty$ (g) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$?? $-3 < x < -2$ või $2 < x < 3$

Vastus 1.7. $a = 0$, $b = 6$, $c = 4$

Vastus 1.8. (g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Vastus 1.9. (a) $\begin{pmatrix} -5 & 14 & 33 \\ -2 & 16 & 34 \\ -3 & 22 & 47 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 25 & 39 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ (f) F (h) F^T

Vastus 1.10. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vastus 1.11. (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vastus 1.19. $\begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3} & \sqrt{3} + 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

Praktikum 2

Vastus 2.1. (b) 40 (c) 6 (d) 100

Vastus 2.2. (a) jah (b) ei (c) jah (d) jah (e) ei (f) ei

Vastus 2.3. (a) -60 (b) 0 (c) 0

Vastus 2.4. (a) -40 (b) 80 (c) 40

Vastus 2.5. -6

Vastus 2.6. (a) -128 (b) -15

Vastus 2.7. (a) 100 (b) -30 (c) 18 (d) 90 (e) 17 (f) -34 (g) -1/2 (h) 1

Vastus 2.8. (a) 7 (b) -83 (c) 45 (d) 0 (e) $-e^t \sin t$ (f) 3 (g) 0 (h) 0 (i) 4 (j) $x^6(x^3 + 3)$ (k) $\cos t + e^{-2t}$ (l) 0

Vastus 2.9. (b) $33/2$ (c) $3/2$

Vastus 2.10. (a) 48 (b) 24 (c) 16

Vastus 2.12. (b) $x^3 - 2x$

Praktikum 3

Vastus 3.1. $A^{-1} = C$.

Vastus 3.4. E

Vastus 3.8. (a) $k = 9$ (c) $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1$

Vastus 3.9. a $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c $C^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Vastus 3.10. a $B^{-1} = B$ c $F^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ d $H^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $I^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -8 & -8 \\ -4 & 4 & 4 \\ 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Vastus 3.11. (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vastus 3.12. Pöördmaatriks on $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

Vastus 3.13. a $x = 1, y = -0,5, z = -1$ b $x = 1, y = -1, z = 1, u = -1$

Vastus 3.14. (a) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -17 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -18 \\ 17 & 16 & -39 \\ 13 & 15 & -32 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -16 & 21 & 7 \end{pmatrix}$

Vastus 3.15. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Vastus 3.16. $I = \frac{3}{17} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}^T$

Vastus 3.17. Vastusteks on M. Kolk poolt leitud aforismikillud: (a) jättes šampust ei joo

Vastus 3.18. 40 g I lahust, 30 g teist, 20 g III ja 10 g IV

Praktikum 4

Vastus 4.1. c) ja l)

Vastus 4.2. a 3 b 3 c 2

Vastus 4.4. b $x = 1/3, y = 2, z = -4/3$ c $x = 1/2, y = 2, z = -1/2, u = -3$

Vastus 4.5. (a) $x = 2, y = -1, 5$ (b) Lahend puudub (c) $x = -1 - 2C, y = C$

(d) Lahend puudub (e) $x = 8 + 6C, y = -1 - 2C, z = C$ (f) $x = 0, y = -3, z = 2$

(g) $x = 2 - 4C_1 - 3C_2, y = C_1, z = 2C_2, u = 4 - 2C_2, v = C_2$ (h) $x = 5 - 2C_1 - 3C_2, y = C_1, z = C_2$

(i) $x = -2 - 2C_1 + C_2, y = 1 - 9C_1 - 2C_2, z = C_1, u = C_2$

Vastus 4.6. (a) $x = 1, y = -1/3, z = -2/3, v = 0$ (b) $x = 1/4, y = -5/4, z = 2$ (c) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$
 (d) Lahend puudub (e) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vastus 4.7. (a) $x = -C, y = -C, z = C$ (b) $x = 8C_1 - 7C_2, y = -6C_1 + 5C_2, z = C_1, v = C_2$
 (c) $x = C_2 - C_1, y = 1 - C_1 - C_2, z = C_1, u = 2, v = C_2$ (e) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$
 (d) Lahend puudub (f) $x_1 = 1 - C_2, x_2 = -C_1, x_3 = C_1, x_4 = 2 + 2C_2, x_5 = C_2$
 (g) Lahend puudub (h) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Vastus 4.10. a $x_1 = 330 + C, x_2 = 170 + C, x_3 = 210 + C, x_4 = C$, kus $C \geq 0$

b $x_1 = 500 - a - b, x_2 = a + b - 200, x_3 = a, x_4 = 350 - b, x_5 = b$, kus üldiselt $200 \leq a + b \leq 500$

Vastus 4.12. Ained tuleb võtta vahekorras 6:6:6:1

Praktikum 5

Vastus 5.3. Ei kehti.

Vastus 5.9. (a) $X = [-4, \infty)$, $Y = [0, \infty)$ (b) $X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $Y = [0, \infty)$

(c) $X = (6, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ (d) $X = [-2, 1) \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$

(e) $X = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (f) $X = [0, 1]$, $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(g) $X = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$, $Y = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

Vastus 5.10. (a) Paaritu (b) Paaris (c) Paaris (d) Paaritu (e) Pole paaris ega paaritu

Vastus 5.11. (a) $T = \pi$ (b) $T = \frac{2\pi}{3}$ (c) Ei ole perioodiline funktsioon (d) $T = 2\pi$

Praktikum 6

Vastus 6.1. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$ (b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \in (0, \infty)$ (c) $f^{-1}(x) = \log(x-1)$, $x \in (1, \infty)$

(d) $f^{-1}(x) = 2 - 10^{x-1}$, $x \in (-\infty, \infty)$ (e) $f^{-1}(x) = 3 \sin 2x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ (f) $f^{-1}(x) = 1 - \cos(x-1)$, $x \in [1, 1+\pi]$

Vastus 6.3. (a) $y = x - 5 + \ln(x-5)$ (b) $x = \ln^5 y + \ln y$

Vastus 6.4. (a) $y = e^x + \sin(x)$ (b) $y = x \pm 2$

Vastus 6.2. (a) Üks-ühene (b) Üks-ühene (c) Ei ole üks-ühene (d) Üks-ühene (e) Üks-ühene (f) Ei ole üks-ühene

Vastus 6.7. 11,2 kilomeetri kaugusel on seadme näit 100 omk.

Vastus 6.9. (a) 47 (b) $115/7$ (c) -1 e 3 (d) 19

Vastus 6.11. Siiriuse tegelik heledus on ligikaudu 912 korda suurem kui veel silmaga nähtavatel tähtedel.

Vastus 6.12. $A = A_0 \cdot 0,8^{0,1t}$

Vastus 6.14. $b^b = 1000$

Praktikum 7

Vastus 7.1. (a) 3 (b) 3 (c) 3 (d) 3 (e) 2 (f) ei eksisteeri

Vastus 7.2. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ei eksisteeri, sest $f(x)$ pole määratud, kui $x < 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.

Vastus 7.4. Võrdus ei kehti, sest $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = \infty$, aga $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0$.

Vastus 7.5. (a) 0 (b) 3 (c) $-\frac{1}{\pi}$ (d) 0 (e) 0 (f) 4 (g) $-\infty$ (h) 1 (i) -1 (j) ei eksisteeri (k) 2

Vastus 7.6. (a) 2 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) -4 (e) $\frac{3}{8}$ (f) $-\frac{1}{3}$ (g) $-\frac{1}{2}$ (h) $-\frac{1}{3}$ (i) $-\frac{1}{2}$ (j) ei eksisteeri (k) $-\infty$ (l) ei eksisteeri

Vastus 7.7. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{32}$ (c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{8}{3}$ (f) 0 (g) $\frac{1}{2}$ (h) 0 (i) $-\frac{2}{5}$

Vastus 7.8. (a) 3 (b) ∞ (c) 2 (d) -1 (e) $-\log 2$ (f) $-\frac{1}{8}$ (g) $\frac{2}{5}$ (h) 0 (i) ∞

Vastus 7.9. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 4 (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 1 (g) $-\frac{1}{2}$ (h) 10 (i) 0 (j) 1 (k) $\frac{3}{4}$ (l) e^{-1} (m) e^{-3} (n) e^9 (o) e^{-1}

Vastus 7.10. (a) $-\frac{1}{12}$ (b) -2 (c) 1 (d) 2 (e) 0 (f) $\frac{3}{5}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) ∞ (i) $-\infty$ (j) ei eksisteeri

Vastus 7.11. Aeg läheneb viiele minutile.

Vastus 7.12. Pindala võib muutuda väärtuste 6 (mm²) ja 36 (mm²) vahel.

Vastus 7.13. $M(0) = m$ ehk kui keha seisab paigal, siis keha mass on võrdne seisumassiga; $M(\frac{c}{2}) = \frac{2m}{\sqrt{3}} \sim 1,15m$ ehk poole valguse kiirusega liikuva keha mass on 1,15 korda suurem kui seisumass; $\lim_{v \rightarrow c^-} M(v) = \infty$ ehk keha kiiruse lähenemisel valguse kiirusele tema mass kasvab tõkestamatult; $\lim_{v \rightarrow c^+} M(v)$ ei eksisteeri, sest pole teada valguse kiirusest suuremat kiirust ja $M(v)$ pole defineeritud, kui $v \geq c$.

Vastus 7.14. Punktmassi liikumise kiirus on 5.

Vastus 7.15. Kui $t \rightarrow \infty$, siis süsihappegaasi tase läheneb 8,4 osakesele miljoni osakese kohta.

Vastus 7.16. $\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{3s}(r) = 27N$ ja $\lim_{r \rightarrow \infty} R_{3s}(r) = 0$.

Praktikum 9

Vastus 9.1. Funktsioon on katkev punktides $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$, mujal on ta pidev

Vastus 9.3. (a) Funktsioon f on katkev punktis $x = 3$, mujal reaalteljel on ta pidev

(b) Funktsioon f on pidev kogu oma määramispiirkonnas $\mathbb{R} \setminus (0, 2]$

(c) Funktsioon f on pidev kogu reaalteljel

(d) Funktsioon f on katkev punktis $x = 2$, mujal reaalteljel on ta pidev

(e) Funktsioon f on pidev kogu reaalteljel

Vastus 9.4. (a) $a = 5$ (b) $b = \frac{4}{3}$ (c) $a = -1$ (d) $a = 2$ (e) $a = -1$, $b = 1$

Vastus 9.5. (a) Punktis $x = 0$ on esimest liiki katkevus, mis on kõrvaldatav, defineerides täiendavalt $f(0) = 1$

(b) Punktis $x = 0$ on esimest liiki katkevus, mis on kõrvaldatav, defineerides täiendavalt $f(0) = 0$

(c) Punktis $x = 3$ on teist liiki katkevus

(d) Punktis $x = 0$ on esimest liiki katkevus, mis on kõrvaldatav, defineerides täiendavalt $f(0) = e$

(e) Punktis $x = -1$ on esimest liiki katkevus, mis on kõrvaldatav, defineerides täiendavalt $f(-1) = 3$

(f) Punktis $x = 7$ on esimest liiki katkevus, mis on kõrvaldatav, defineerides täiendavalt $f(7) = -\frac{1}{56}$

(g) Punktides $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) on teist liiki katkevus

(h) Punktis $x = 0$ on esimest liiki katkevus, mis ei ole kõrvaldatav

(i) Punktis $x = 0$ on esimest liiki katkevus, mis on kõrvaldatav, defineerides täiendavalt $f(0) = \frac{\pi}{2}$

Vastus 9.7. (a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6(x+h)-1) - (6x-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$

(b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5) - (2x^2 - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) = 4x$

(c) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

(d) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h \cdot (\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}} = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$

(e) $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\cos t - \cos x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \left(-2 \sin \frac{t+x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{t-x}{2}}{t-x} \right) = -2 \cdot \sin \frac{x+x}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\sin x$

(f) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{xh(x+h)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$

Vastus 9.8. (a) $f'(x) = 15x^4$ (b) $f'(x) = 1 + 2x^{-\frac{2}{3}}$ (c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $f'(x) = 2^x \ln 2 - e^x$ (e) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \cos x$ (f) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) $f'(x) = -147x^{-8} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (h) $f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ (i) $f'(x) = 8x^{\frac{1}{3}}$

Vastus 9.9. (a) $f'(x) = -\frac{6x}{(x^2-1)^2}$ (b) $f'(x) = x^{a-1}b^x(a+x \ln b)$ (c) $f'(x) = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$

(d) $f'(t) = t^2 \sin t$ (e) $f'(u) = \sin u (\ln u - \frac{1}{u^2})$ (f) $f'(x) = \frac{30}{(x-6)^2}$

(g) $f'(x) = e^x a^x$ (h) $f'(x) = \frac{\tan \alpha (1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \ln x + 1$ (i) $f'(x) = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(j) $f'(x) = \frac{a^2}{x^2+1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Vastus 9.10. (a) $f'(x) = 36x^3 - 74x$ (b) $f(x) = (3x-1)(3x+1)(x^2-4) = 9x^4 - 37x^2 + 4$

Vastus 9.11. (a) $f'(1) = 60e$ (b) $f'(-1) = \frac{71}{100}$

Vastus 9.12. $\frac{dP}{df} = \frac{2kf(\omega^2 - \omega f + a^2)}{(\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2)^2}$

Vastus 9.13. $\frac{dt}{dN} = \alpha(\ln N + 1)$, kus α on võrdetegur

Vastus 9.14. $\frac{dT}{dV} = \frac{2ab - aV + pV^3}{RV^3}.$

Vastus 9.15. (a) $20(4x-3)^4 + 18x$ (b) $\frac{60x^5}{\sqrt[3]{3x^6-4}}$ (c) $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(d) $\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\frac{x+1}{x^2+x\ln x}$ (f) $\frac{6\sqrt{x}\ln 6}{2\sqrt{x}} + 6 \cdot 4^{6x} \ln 4$

(g) $-\frac{1}{4\left(\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$ (h) $\frac{0.25e^{0.5x}(x-2)}{x^2}$

Vastus 9.16. (a) $-\frac{14(2x+1)}{(3x-2)^3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2x+1}(4x+1)^{3/2}}$ (c) $\frac{12}{4x-3}$

(d) $60x^4(\sin 4x^5)^2 \cos 4x^5 + 9 \sin(2-9x)$ (e) $\frac{7 \tan 7x}{\cos 7x} + \frac{7 \cot 7x}{\sin 7x}$ (f) $-\frac{3 \sin 6x}{1+2(\sin 2x)^2} - \frac{4 \sin 4x(\cos 3x)^2}{(1+2(\sin 2x)^2)^2}$

(g) 0 (h) $-\frac{3}{\sqrt{2-x}\sqrt{x-1}}$ (i) $-\frac{1}{x^2+1}$ (j) $\frac{\arccos x}{(x^2+1)\arctan x} - \frac{\ln \arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$

Vastus 9.17. $u'(3) = \frac{2f(3)f'(3) + 4g(3)g'(3)}{2\sqrt{f(3)^2 + 2g(3)^2}} = -\frac{22}{\sqrt{41}}$

Vastus 9.18. $L = \sqrt{a \cdot m}$

Vastus 9.19. $R_{\text{kask}}(t) = 0,3041$, $R_{\text{vahter}}(t) = 0,2243$, järelikult sookask taastoodab ennast efektiivsemalt.

Vastus 9.20. $P'(V) = -4.5 \text{ kPa/cm}^3$

Vastus 9.21. (a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $\cos x$ (c) 0 (d) $\frac{2 \tan x}{(\cos x)^2}$

Vastus 9.22. (a) $f''(x) = 4x^2 u''(x^2) + 2u'(x^2)$ (b) $f'''(x) = e^{3x} u'''(e^x) + 3e^{2x} u''(e^x) + e^x u'(e^x)$
(c) $f'''(x) = 6u'(x)u''(x) + 2u(x)u'''(x)$ (d) $f''(x) = 4xu''(x^2) + \frac{2x^2 u'(x^2) - 2u(x^2)}{x^3}$

Vastus 9.23. (a) 4 (b) $-\frac{93}{4}$

Vastus 9.24. (a) $\frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ (b) $(4q^3 + 6q)e^{q^2}$ (c) $\frac{108}{(3t+2)^4}$

Vastus 9.25. (a) $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ (b) $f'(x) = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right)$
(c) $f'(x) = (\ln x)^x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$ (d) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{3}{x} + 2x + 2 \cot 2x \right)$
(e) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x-5} \right)$ (f) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{4x}{3(x^2-1)} \right)$

Praktikum 10

Vastus 10.1. (a) ∞ (b) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{5}{3}$ (e) 0 (f) 0 (g) $\frac{1}{2}$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) 2 (j) 0 (k) 1 (l) ∞

Vastus 10.2. (a) ∞ (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 0 (g) 0 (h) $\frac{2}{\pi}$

(i) ei leidu (valides $x_n = 2n\pi \rightarrow \infty$, on $x_n \sin x_n = 0 \rightarrow 0$, aga valides $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$, on $x_n \sin x_n = 1 \rightarrow 1$)

Vastus 10.3. (a) $dy = (5x^4 + 4)dx$ (b) $dy = 6xdx$ (c) $dT = -\frac{10}{r^6}dr$
(d) $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{8x^2} \right)dx$ (e) $dy = (e^x + xe^x)dx$ (f) $dR = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{u}(1+2u)^{3/2}} du$
(g) $dy = \frac{6(1-6x)}{\sqrt{1-4x}}dx$ (h) $dy = \frac{2}{(5x+2)^2}dx$ (i) $dy = \frac{3x-4}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}dx$

Vastus 10.4. (a) $dy = 12$ (b) $dy = 3810,24$ (d) $df(x) = 0,6257$ (f) $df(x) = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Vastus 10.6. $\Delta S \approx dS = 400\pi$

Vastus 10.8. $\Delta V \approx dV \approx 185 \text{ L}$

Vastus 10.9. (a) 1,04 (b) 3,99 (c) 251,1 (d) 0,72 NB! Argumendi muut peaks olema radiaanides. (e) 1,04 (i) 0,81

Vastus 10.10. (a) $f(x) \approx \frac{11}{3}x - \frac{4}{3}$

Vastus 10.11. $f(x) \approx -\frac{240}{169}x + \frac{550}{13}$

Praktikum 11

Vastus 11.4. (a) $y = 6x - 4$, $y = -\frac{1}{6}x + 8\frac{1}{3}$ (b) $y = 4x - 18$, $y = -\frac{1}{4}x - 5\frac{1}{4}$ (c) $y = -6x + 13$, $y = \frac{1}{6}x - 5\frac{1}{2}$ (d) $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -2x - 1\frac{1}{2}$

Vastus 11.5. (a) $y = 2x - 4$ (b) $y = x - 4$ (c) $y = -\frac{1}{24}x + \frac{129}{16}$ (d) $y = 4x + \frac{97}{32}$

Vastus 11.6. (b) $y = -x + 4$

Vastus 11.2. $\frac{5}{36\pi}$ cm/min.

Vastus 11.9. (a) kasvav $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$ ning kahanev $[0, 2]$ (b) kasvav $(-\infty, -2]$ ja $[0, 2]$ ning kahanev $[-2, 0]$ ja $[2, \infty)$
 (c) kasvav kogu reaalteljel (d) kahanev $(0, 1)$ ja $(1, e]$ ning kasvav $[e, \infty)$
 (e) kahanev kogu määramispiirkonnas $[-2, 0]$ (f) kasvav $(0, 1]$ ning kahanev $[1, \infty)$

Vastus 11.10. (a) $(-\infty, 2]$ on graafik kumer ja $[2, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(2, 12)$
 (b) $(-\infty, 4)$ on graafik kumer ja $(4, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunktid puuduvad
 (c) $(-\infty, 0]$ on graafik nõgus ja $[0, \infty)$ on graafik kumer, käänupunkt on $(0, 0)$
 (d) $(0, \frac{1}{e}]$ on graafik kumer ja $[\frac{1}{e}, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(\frac{1}{e}, -\frac{3}{2e^2})$
 (e) $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ja $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ on graafik nõgus ning $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ on graafik kumer, käänupunktid on $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ ja $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$
 (f) $(-\infty, 2]$ on graafik kumer ja $[2, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(2, -16)$
 (g) $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on graafik kumer ning $[-1, 1]$ on graafik nõgus, käänupunktid on $(-1, \ln 2)$ ja $(1, \ln 2)$
 (h) $(-\infty, -2]$ ja $[1, \infty)$ on graafik nõgus ning $[-2, 1]$ on graafik kumer, käänupunktid on $(-2, -48)$ ja $(1, -9)$

Vastus 11.11. (a) Sobib näiteks $f(x) = -\arctan x - 1$. (b) Sobib näiteks $f(x) = 1 - e^{1-x}$. (c) Sobib näiteks $f(x) = 1 - \arctan x$.
 (d) Sobib näiteks $f(x) = \frac{2}{27} \cdot (x^4 - 4x^3 + 16x + 11)$.

Vastus 11.12. (a) punktis -1 lokaalne maksimum, punktis 1 lokaalne miinimum
 (b) punktides -2 ja 2 lokaalne maksimum ning punktis 0 lokaalne miinimum
 (c) punktis $\frac{1}{e}$ lokaalne miinimum
 (d) punktis 0 lokaalne miinimum ja punktis 2 lokaalne maksimum
 (e) punktis 1 on lokaalne miinimum ja punktis $\frac{1}{e^2}$ lokaalne maksimum
 (f) punktides $2k\pi$ lokaalne miinimum ja punktides $(2k+1)\pi$ lokaalne maksimum
 (g) punktis -1 lokaalne maksimum ja punktis 0 lokaalne miinimum (NB! punktis 0 tuletist ei eksisteeri!)
 (h) lokaalsed ekstreemumid puuduvad
 (i) punktis 0 lokaalne maksimum ja punktis 2 lokaalne miinimum
 (j) punktis -3 lokaalne miinimum (NB! punktis 0 lokaalne ekstreemum puudub)
 (k) punktis 0 lokaalne maksimum
 (l) punktis 0 lokaalne maksimum
 (m) lokaalsed ekstreemumid puuduvad

Vastus 11.13. (a) globaalne maksimum punktis 5 ja globaalne miinimum punktis 1
 (b) globaalne miinimum punktis 1 , globaalne maksimum puudub.
 (c) globaalne maksimum punktis 3 ja globaalne miinimum punktides -2 ja 1
 (d) globaalne miinimum punktis 1 ja globaalne maksimum punktis e
 (e) punktides $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ globaalne maksimum ja punktis 0 globaalne miinimum
 (f) globaalne miinimum punktis 1 ja globaalne maksimum punktis -1
 (g) globaalne maksimum punktis 0
 (h) punktis 1 globaalne maksimum ja punktis -1 globaalne miinimum

Vastus 11.14. $V(x) = 4x(6-x)(4-x)$, maksimum on punktis $x \approx 1.57$

Vastus 11.15. Ruumala tuleb 52 liitrit, mõõtudega $57.14 \times 40 \times 22.86$ cm

Vastus 11.16. $r = \frac{2a}{3}$

Vastus 11.17. Valgusallikas peab asuma $2/3$ vahemaad ehk 66.7 meetrit vasakust allikast kaugemal

Vastus 11.18. $m = 9 \text{ mg}$

Vastus 11.19. (a) $x = 2, y = 0$ (b) $x = -2, x = 2, y = 1$ (c) $x = 1$, kaldasümptoot ei ole (d) $x = -1, y = 2x - 2$ (e) $x = 0, y = 0, y = 1$ (f) $x = 0, y = 2x$

Vastus 11.20. (a) määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f kasvav ning intervallides $[-1, 0)$ ja $(0, 1]$ on f kahanev, intervallis $(0, \infty)$ on f graafik nõgus ja intervallis $(-\infty, 0)$ graafik kumer, püstasümptoot on $x = 0$ ja kaldasümptootid puuduvad

(b) määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, intervallides $(-\infty, -2]$ ja $(0, \infty)$ on f kahanev ning intervallis $[-2, 0)$ on f kasvav, intervallis $(-\infty, -3]$ on f graafik kumer ning intervallides $[-3, 0)$ ja $(0, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptoot on $y = 0$

(c) määramispiirkond on $\mathbb{R}$, intervallis $(-\infty, 0]$ on f kasvav ja intervallis $[0, \infty)$ on f kahanev, intervallis $[-1, 1]$ on f graafik kumer ning intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot ei ole, kaldasümptoot on $y = 0$

(d) määramispiirkond on $(0, \infty)$, intervallis $(0, \frac{1}{e}]$ on f kahanev ja intervallis $[\frac{1}{e}, \infty)$ on f kasvav, intervallis $(0, 1]$ on f graafik nõgus ja intervallis $[1, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptootid puuduvad

(e) määramispiirkond on $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, intervallis $(-\infty, 0]$ on f kahanev ja intervallis $[2, \infty)$ on f kasvav, intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptootid puuduvad, kaldasümptootid on $y = x - 1$ ja $y = -x + 1$

(f) määramispiirkond on $\mathbb{R}$, intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[1, 2]$ on f kahanev ning intervallides $[0, 1]$ ja $[2, \infty)$ on f kasvav, intervallides $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$ ja $[2, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptootid puuduvad, kaldasümptootid on $y = x - 1$ ja $y = -x + 1$

(g) määramispiirkond on $(0, \infty)$, intervallis $(0, 1]$ on f kasvav ning intervallis $[1, \infty)$ on f kahanev, intervallis $(0, \sqrt{e})$ on f graafik kumer ning intervallis $(\sqrt{e}, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptoot on $y = 0$

Vastus 11.21. v määramispiirkond on $[r_0, 1]$, v kasvav, kumer

Praktikum 12

Vastus 12.2. (a) $2x^6 + 3x^2 + C$ (b) $\frac{8}{3}x^{3/2} + 3x + C$ (c) $x^{5/2} + C$ (d) $(R^2 + 1)^3 + C$

Vastus 12.4. (a) $\frac{y^4}{12} + C$ (b) $8\sqrt{x} + C$ (c) $2x^{5/2} + C$ (d) $\frac{2}{7}x^{7/2} - 2x^{5/2} + C$ (e) $6x^{1/3} + \frac{x}{9} + C$
(f) $\frac{t^3}{6} + \frac{2}{t} + C$ (g) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3x\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{4} + C$ (h) $3x - 4\ln|x| - 10x^{-1/2} + C$ (i) $\frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} - \frac{6x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{15\sqrt[15]{x^{13}}}{13} + C$

Vastus 12.5. (a) $\frac{10^x}{\ln 10} + ex + C$ (b) $\frac{e^{2x}}{2} + (2\ln 2)e^x + (\ln^2 2)x + C$ (c) $-\frac{1}{e^x} + C$ (d) $-\frac{1}{2^x \ln 2} + C$

Vastus 12.6. (a) $x - \arctan x + C$ (b) $\ln|x| + 2\arctan x + C$ (c) $\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$ (d) $\arcsin x + C$ (e) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \arcsin x + C$

Vastus 12.7. (a) $x + C$ (b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C$ (c) $\tan x - x + C$ (d) $x \sin \alpha - 3 \sin x + C$ (siin kasutati omadust $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$)
(e) $-2 \cot 2x + C$

Vastus 12.8. (a) $3x + C$ (b) $\frac{x^2}{2} + C$ (c) $\frac{4}{3}x^{3/2} + C$ (d) $-d\frac{1}{2x^2} + C$
(e) $-3\ln|x| + C$ (f) $\tan x + C$ (g) $\frac{1}{2}e^{2x^2} + C$ (h) $\frac{1}{3} \arcsin 3x + C$

Vastus 12.9. (a) $\sin(x + 2) + C$ (b) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$ (c) $\frac{1}{24} (3x - 2)^8 + C$ (d) $-\frac{3}{8} \sqrt[3]{(7 - 2x)^4} + C$
(e) $-\frac{1}{2}e^{-2x+8} + C$ (f) $\frac{1}{3} \ln|3x + 5| + C$ (g) $\frac{1}{2} \tan(2x - 5) + C$ (h) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Vastus 12.10. (a) $\sqrt{x^2 + 5} + C$ (b) $\frac{2 \cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} + C$ (c) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ (d) $7 \arcsin x - 2\sqrt{1 - x^2} + C$ (e) $\frac{3}{4} \ln^2 x + C$ (f) $\ln|\ln x| + C$

Vastus 12.11. (a) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$ (b) $-\ln|\cos x| + C$ (c) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ (d) $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$

Vastus 12.12. (a) $-\frac{1}{3}\ln|5 - e^{3x}| + C$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$ (c) $x - \sqrt{5}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (d) $\arcsin\frac{x}{2} + C$
 (e) $\arctan(x+1) + C$ (f) $-2\sqrt{2+\cos^2 x} + C$ (g) $\frac{1}{6}\sin^3 x^2 + C$ (h) $\ln|\ln\ln x| + C$
 (i) $4\sqrt{z^2-2z} + C$ (j) $\frac{3}{5}(x+2)^{5/3} + C$ (k) $\frac{1}{27}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)^9 + C$

Vastus 12.13. $F(t) = \frac{6}{\pi}e^{\sin(\pi t)} - \frac{6}{e\pi}$

Vastus 12.14. $p(x) = 600\sqrt{60x - x^2} - 5000$

Vastus 12.15. (a) $-\frac{2}{15}(1-x)^{3/2}(3x+2) + C$ (b) $-\frac{1}{15}(1-x^2)^{3/2}(3x^2+2) + C$ (c) $\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$
 (d) $\frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$ (e) $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$ (f) $\ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C$

Vastus 12.16. (a) $2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C, t = \sqrt{x}$ või $t = 1 + \sqrt{x}$ (b) $2\arctan\sqrt{e^x-1} + C, t = \sqrt{e^x-1}$
 (c) $4\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln(1 + \sqrt[4]{x^3})\right] + C, t = \sqrt[4]{x^3}$ (d) $\frac{4}{21}(1+e^x)^{3/4}(3e^x-4) + C, t = \sqrt[4]{1+e^x}$

Praktikum 13

Vastus 13.1. (a) $e^x(x-1) + C$ (b) $x \sin x + \cos x + C$ (c) $\frac{1}{4}(\sin(2x+1) - 2x \cos(2x+1)) + C$
 (d) $-\frac{1+x \ln 3}{3x \ln^2 3} + C$ (e) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ (f) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
 (g) $x \ln x - x + C$ (h) $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C$ (i) $\frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1) + C$ (alternatiivne kuju $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{\ln x}{x+1} + C$)

Vastus 13.2. (a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ (b) $e^x(x^3 - 36x^2 + 6x - 6) + C$ (c) $-\frac{1}{8e^{2x}}(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3) + C$
 (d) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ (e) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x - 2 \cos x) + C$ (f) $\frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$

Vastus 13.3. $-(4x^2 + 32)e^{-x^2/8} + C$

Vastus 13.4. $\int dx - \int dx = C$

Vastus 13.5. (a) $2 \ln|1-x| - \ln|x+1| + C$ (b) $3 \ln|x+1| - 2 \ln|x| + C$ (c) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$
 (d) $2 \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{3}{x-2} + C$ (e) $\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + \frac{1}{t} + C$ (f) $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{2}{x} + C$
 (g) $\frac{17}{2} \ln|2y-1| - 8 \ln|y-1| + C$ (h) $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| + C$ (i) $\frac{2}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{1+x} \right| + C$
 (j) $-\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 \ln \left| \frac{x}{1-x} \right| + C$ (k) $\ln \frac{x^2}{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + C$ (l) $\ln \frac{(x-2)^2}{x^2+4} - 2 \arctan \frac{x}{2} + C$

Vastus 13.6. Tegemist on liigmurruga

Vastus 13.7. (a) $x + \ln|x| - 4 \ln|x+3| + C$ (b) $x + \frac{1}{x} + 2 \ln|1-x| - \ln|x| + C$ (c) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x-1| + C$ (d) $\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x+1| - 8 \ln|x+2| + C$

Vastus 13.8. (a) $\frac{2 \sin x - 3}{(3 - \sin x)^2} + C$ (b) $\frac{3}{x+2} + \ln|x^2+x-2| + C$ (c) $\ln(x^2+6x+10) + \arctan x - 6 \arctan(x+3) + C$
 (d) $\frac{1}{r^2+1} + \ln(r^2+1) + C$ (e) $\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln(x^2+x+1) + C$ (f) $x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$ (g) $\ln|x+2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$
 (h) $\frac{3}{2} \ln(x^2+2) + 2\sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ (i) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

Praktikum 14

Vastus 14.2. Differentsiaalvõrrandi lahendid on (a), (b) ja (c).

Vastus 14.3. Differentsiaalvõrrandi lahendid on (a), (d), (e), (f), (h) ja (i).

Vastus 14.5. (a) $y = 2x + C$ (b) $y = \sin x + C$ (c) $y = \ln x + C$ (d) $y = e^x + C$
 (e) $y = \frac{1}{5}x^5 + C$ (f) $y^2 = x^2 + 10x + C$ (g) $y = \ln|x| + x + C$ (h) $y^2 = 2x + C$
 (i) $\sqrt{y} = x + C, y = 0$ (j) $y = Cx - 1$

Vastus 14.6. (a) $y^2 = x^2 - 2x - 2 \ln|x| + C$ (b) $y - 2 = C(x+1)$ (c) $\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \ln|x-1| + C$
 (d) $y = \frac{1}{1+Cx}$ (e) $(y-1)(x+1) = Cxy$ (f) $\arcsin y - \arctan x = C$ (g) $\arcsin y - \arcsin x = C$ (h) $\frac{t+x}{tx} - \ln \frac{x}{t} = C$

Vastus 14.7. (a) $1 + y^2 = C(x^2 - 1); C = 2/3$ (b) $e^x + e^{-y} = C; C = 2$ (c) $y = (C + 3x(1-x))^{1/3}; C = 5$
 (d) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2; C = e$ (e) $y = \frac{1+x}{1-x}$

Vastus 14.9. $10^7 e^{kt}$

Vastus 14.11. $[H_2O_2]_t = 10e^{-0,51t} \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{min}}, t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,51} \approx 1,36 \text{ min}$

Vastus 14.13. $x(t) = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ inimest; $t_{1/2} = \frac{\ln 499}{4} \approx 1,6 \text{ päeva}$

Praktikum 15

Vastus 15.2. (a) $y = Cx^3 - x^2$ (b) $y = Ce^x - 2 - 2x - x^2$ (c) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ (d) $y = e^{\sin x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$
 (h) $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{xe^x}$ (i) $y = Cx - 1$ (j) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ (k) $y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$
 (l) $y = x - 1 + Ce^{-x}$ (p) $y = \frac{1}{x}(e^x + C)$, $C = ba - e^a$ (q) $y = \frac{x}{x+1}(x - \ln|x+1| + C)$, $C = -1$

Vastus 15.6. $z = \frac{ak_1k_2}{k_2 - k_1} \left[\frac{e^{-k_1t} - e^{-k_3t}}{k_3 - k_1} - \frac{e^{-k_2t} - e^{-k_3t}}{k_3 - k_2} \right]$

Praktikum 17

Vastus 17.1. 245 cm ja 245 cm

Vastus 17.2. (a) Kui $n = 3$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 9, parempoolsed 18 ja keskmised 13.5. Kui $n = 10$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 12.15, parempoolsed 14.85 ja keskmised 13.5.

(d) Kui $n = 3$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 4.146, parempoolsed 5.146 ja keskmised 4.677. Kui $n = 12$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 4.540, parempoolsed 4.790 ja keskmised 4.667.

Vastus 17.3. (a) $S = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$ (b) $S = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ (c) $S = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$
 (d) $S = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$ (e) $S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx$ (f) $S = \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}x\right) dx + \int_0^2 \left(\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3}\right) dx$

Vastus 17.4. (a) 21 (b) $\frac{9}{2}\pi$ (c) 1 (d) $\frac{\pi}{2}$

Vastus 17.5. (a) 0.648 (b) 7.661 (c) 12.660

Vastus 17.6. 100.027

Vastus 17.7. (a) 6.0 (b) 11.655 (c) 3.392

Vastus 17.8. trapetsmeetod annab 2568.25 ja simpson 2581.29, täpsem on muidugi simpson

Vastus 17.9. trapetsmeetod annab 4.322 ja simpson 4.478

Vastus 17.10. 3.238 m

Vastus 17.11. 452.130

Vastus 17.12. 19.398

Praktikum 18

Vastus 18.1. (a) $85/3$ (b) $4 - \ln 5$ (c) $2 + \pi/2$ (d) $\pi/2 - 1$ (e) 0

Vastus 18.2. (a) 2,5 (b) 4 (c) 4 (d) 3 (e) $9/4$ (f) 32

Vastus 18.3. (a) 0 (b) $2/5\pi^5$ (c) 0

Vastus 18.4. (a) 10,5 (b) $\frac{1}{3}\ln 7$ (c) $\frac{1}{3}(10\sqrt{10} - 1)$ (d) 0 (e) $\frac{\ln^2 2 + \ln^2 5e}{2}$ (f) $-1/6$ (g) $\pi/4$ (h) $2\ln 2 - 1$

Vastus 18.5. (a) $1/24$ (b) 4 (c) $\pi/2$ (d) $6 - \frac{3}{2}\ln 5$

Vastus 18.6. (a) $5/3$ (b) 2

Vastus 18.5. $P = \frac{m v^2}{3}$

Praktikum 19

Vastus 19.1. (a) 2π (b) 1 (c) $\sqrt{3} - \pi/3$ (d) $2(48 - 24\pi + \pi^3)$ (e) $0,5(1 + e^\pi)$ (h) $(-2 + \pi + 2\ln 2)/12$

Vastus 19.2. (a) $8 - \pi$ (b) $1 + \ln\left(\frac{512}{625}\right)$ (c) $\frac{7}{4} + \ln\left(\frac{9}{2}\right)$

Vastus 19.3. (a) $1 - \frac{5}{4}\ln 3$ (b) $2(\sqrt{2} - 1)$ (c) $7\sqrt{7}/3$
(f) $-\pi/2$ (d) $\frac{1}{5}(1 - e^{-\pi})$ (e) $(8 - \sqrt{2})/6$ (f) $(3\pi + 4\ln 2)/8$ (g) 26

Praktikum 20

Vastus 20.1. (a) 2 (b) $9/4$ (c) $8/3$ (d) $64/3$ (e) e^{-1} (f) $1/12$

Vastus 20.2. $\pi/4 + 1/2$

Vastus 20.4. $\pi/2 - 1$

Vastus 20.5. π

Vastus 20.6. $5/4\pi$

Vastus 20.7. $3 - e$

Vastus 20.8. $ab\pi$

Vastus 20.7. 108π

Praktikum 21

Vastus 21.1. (a) $2\sqrt{6} - 8/3$ (b) $(80\sqrt{10} - 8)/27$

Vastus 21.2. $2\sqrt{5}$

Vastus 21.7. 10

Vastus 21.8. (a) 36π (b) 8π (c) $7/15\pi$

Vastus 21.10. (a) $2/7\pi$

Praktikum 22

Vastus 22.1. 1100 km

Vastus 22.7. Osake liikus 35 pikkusühikut paremale ja läbis kokku u. 42.6 pikkusühikut.

Vastus 22.9. -10.71 m/s.

Vastus 22.10. 1.4 m

Vastus 22.11. 200 m. Möistlik on modelleerida läbi keskmise kiirenduse.

Vastus 22.12. 3.7 g

Vastus 22.13. $100\sqrt{\frac{5}{17}}$

Vastus 22.16. $1/2$ J

Vastus 22.17. $\frac{k}{b-a}$

Vastus 22.19. 51021.81 J

Vastus 22.21. $9.2 \cdot 10^6$ J

Vastus 22.22. 384551 J

Praktikum 23

Vastus 23.1. (a) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$, (b) $\left(-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x\right) \Big|_0^\pi = \frac{4}{15}$, (c) $\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16}$,
 (d) $\left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{15}$, (e) $\left(3x + \frac{1}{\pi} \sin 4\pi x + \frac{1}{8\pi} \sin 8\pi x\right) \Big|_0^1 = 3$, (f) $\frac{2}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 2$, (g) $\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32}$, (h) $\left(\frac{5}{128}x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{192} \sin 6x - \frac{1}{1024} \sin 8x\right) \Big|_0^\pi = \frac{5\pi}{128}$, (i) $\frac{3}{4}$

Vastus 23.2. (a) $\ln|\tan \frac{x}{2}| + C$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) + C$ (e) $-\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{3}{4} \tan \frac{x}{2} + \frac{9}{4}\right| - \ln\left|\frac{3}{4} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|\right) + C$
 (g) $\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{3}\right) + C$ (i) $\ln|\tan \frac{x}{2} - 1| + C$

Vastus 23.3. (a) $\frac{(\cos x - 2)^2}{2} + 6 \ln(\cos x + 2) + C$ (c) $-\frac{\cos x}{2} + \frac{3}{2^{\frac{5}{2}}}(\ln|2 \cos x - \sqrt{2}| - \ln|2 \cos x + \sqrt{2}|) + C$ (e) $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

Vastus 23.4. (a) $\arcsin \frac{x}{4} + C$ (b) $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$ (c) $-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2}$
 (d) $2 \ln\left|\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{x^2-36}}{6}\right| + C$ (e) $\sqrt{x^2-25} - 5 \arccos \frac{5}{x} + C$ (f) $-\frac{1}{3 \sin(\arctan \frac{z}{3})} + C$
 (g) $3 \ln\left|\tan\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2}\right)\right| + C$ (h) $\frac{3x}{2\sqrt{4-x^2}} + C$ (i) $4\left(\frac{(\sqrt{x^2+9})^3}{3} - 9\sqrt{x^2+9}\right) + C$
 (j) $-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$ (k) $\frac{4}{5}$ (l) $\ln 2 - \frac{3}{5}$
 (m) $6 \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$ (n) $\frac{1}{3}(\arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{3}{5})$

Praktikum 24

Vastus 24.1. (a) integraal hajub (b) integraal hajub (c) 1000
 (d) Kui $\alpha \leq 1$, siis integraal hajub. Kui $\alpha > 1$, siis vastus on $\frac{1}{\alpha-1}$.
 (e) $\frac{5}{4}$ (f) integraal hajub (g) 0 (h) 2
 (i) 1 (j) $\frac{1}{2}$ (k) integraal hajub (l) $\frac{1}{2}$
 (m) Kui $n > 1$, siis algfunktsioon on $\frac{\ln^{1-n} x}{1-n}$ ja vastus $-\frac{\ln^{1-n} 2}{1-n}$ Kui $n = 1$, siis integraal hajub
 (n) integraal hajub (o) integraal hajub (p) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (q) $\ln(1 + \frac{\pi}{2})$ (r) $\frac{\pi}{2}$

Praktikum 25

Vastus 25.1. (a) integraal hajub (b) 2 (c) integreeritav funktsioon ei ole integreerimispiirkonnas kõikjal defineeritud (d) -4.5 (e) 4 (f) $4\sqrt{2}$ (g) integraal hajub (h) $5(\sqrt[5]{2} - 1)$ (i) $2 + \pi/2$ (j) 6 (k) 1000 (l) integraal hajub (m) $\frac{1}{n+1}$ (n) integraal hajub (o) π (p) $\sqrt{3}$ (q) π (r) integraal hajub (s) integraal hajub (t) 2

Vastus 25.2. $F(\sigma) = \frac{1}{1 + \pi^2 \sigma^2} (1 - (\pi \sigma) i)$. Lisaks igale sagedusele $\sigma \in \mathbb{R}$ vastab amplituud $|F(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 \sigma^2}}$.

Vastus 25.3. Siinusfunktsiooni Laplace'i teisendus on $\frac{1}{1 + x^2}$ ja koosinusfunktsiooni oma $\frac{x}{1 + x^2}$. Mõlemad on määratud vaid positiivsete argumentide korral.

Vastus 25.4. Umbes 13.5%.

Vastus 25.5. $\mu = 0$ ja $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 10 arvu korral satub ca iga 162., 15 arvu korral ca iga 1256. ja 20 arvu korral ca iga 9259. keskvaartus lõigust välja.

Vastus 25.6. Vahemikus 85-115: umbes 68%. Üle 140: umbes 0.4%.

Praktikum 26

Vastus 26.1. (a) -24 (b) $3/2$ (c) 30 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) -3 (f) 3

Vastus 26.2. (a) 2 (b) -3 (c) 17 (d) 0

Vastus 26.3. (a) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 3$ (b) 9

Vastus 26.4. 10

Vastus 26.5. $A(14, 0)$, $B(0, 14/3)$

Vastus 26.6. sirge $18x - 8y - 53 = 0$

Vastus 26.7. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{6}$

Vastus 26.8. $\sqrt{37}$

Vastus 26.9. (a) $\arccos(\sqrt{2}/10)$ (b) $\arccos(44/\sqrt{2170})$ (c) $\arccos(-2/\sqrt{21})$ (d) $\arccos(19/5\sqrt{58})$

Vastus 26.10. (a) nürinurga (b) kollineaarsed (c) risti (d) teravnurga

Vastus 26.12. $\pi/3$

Vastus 26.13. $\pi/4$

Praktikum 27

Vastus 27.1. (a) $6\sqrt{3}$ (b) 28 (c) 0 (d) 0

Vastus 27.2. $(5; 9; 17), \vec{0}, 17(5; 9; 17)$

Vastus 27.3. -15

Vastus 27.4. (a) $2\sqrt{77}$ (b) $5\sqrt{3}$

Vastus 27.5. $72\sqrt{2}$

Vastus 27.6. $\vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}, \vec{c} = \pm(\sqrt{5}/5)(\vec{a} \times \vec{b})$

Vastus 27.7. $(-8, 7, 5)$

Vastus 27.8. $(\sqrt{5}/25)(6, -5, -8)$

Vastus 27.10. (a) -48 (b) -30 (c) -24

Vastus 27.11. $V = 3, h_D = 6/\sqrt{59}$

Vastus 27.12. $D(0, 8, 0), D(0, -7, 0)$

Praktikum 28

Vastus 28.1. (a) $2y - 5z + 7 = 0$ (b) $3x + 4z - 9 = 0$ (c) $5x - 2y + 1 = 0$

Vastus 28.2. (a) $4x - y - 14z = 0$ (b) $x - y - z + 2 = 0$ (c) $3x + 3y + z - 8 = 0$

Vastus 28.3. (a) $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ (b) $x - 4y - 7z + 12 = 0$ (c) $4x - y - 3z + 20 = 0$

Vastus 28.4. $L(-4/11; -5/11; 13/11)$

Vastus 28.5. $x - 2y + 3z - 8 = 0$

Vastus 28.6. xy -tasand: $\arccos(|C|/|\vec{n}|)$, xz -tasand: $\arccos(|B|/|\vec{n}|)$, yz -tasand: $\arccos(|A|/|\vec{n}|)$, $\vec{n} = (A; B; C)$

Vastus 28.7. (a) $\pi_1 \perp \pi_2$ (b) $\varphi = \pi/4$ (c) $\pi_1 \parallel \pi_2$

Vastus 28.8. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

Vastus 28.9. $x + 20y + 7z - 12 = 0, x - z + 4 = 0$

Vastus 28.10. (a) 1 (c) 10 (b) $\frac{25}{3}$

Vastus 28.11. $AB: \begin{cases} x-2=0 \\ 8y+3z-17=0 \end{cases}, AC: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-8}, BC: \begin{cases} y-4=0 \\ z+5=0 \end{cases}$

Vastus 28.12. (a) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{0}$ ehk $\begin{cases} y-4=0 \\ z+7=0 \end{cases}$ (b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{4}$ (c) $\frac{x+3}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{1}$ ehk $\begin{cases} x+3=0 \\ y-4=0 \end{cases}$ (d) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{8}$

Vastus 28.13. $\frac{x-2}{37} = \frac{y-3}{-25} = \frac{z-4}{-32}$

Vastus 28.14. $P_1(17/10; 0; 2/5), P_2(-31/10; 0; 14/5)$

Vastus 28.15. (a) $\arcsin(\sqrt{26/35})$, $L(0; 0; -2)$ (b) paralleelsed, ei lõiku (c) $\arcsin(3/(2\sqrt{3003}))$, $L(2; 4; 6)$

Praktikum 30

Vastus 30.2. (a) $x = -\frac{1}{2}, y = 3$ (b) $x = \pm\sqrt{2}, y = 1$

Vastus 30.3. (a) 42 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 2 (e) 5 (f) 2 (g) 12 (h) 2

Vastus 30.5. (a) 1 (b) $1 + 2i$ (c) 0 (d) -1 (e) 0 (f) 4096 (g) $-1 + 6i$ (h) $-\frac{7}{8} + 4i$

Vastus 30.6. (a) $z_1 + z_2 = 3 - 4i, z_1 - z_2 = 3 + 4i, z_1 \cdot z_2 = -12i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}i, |z_1| = 3, |z_2| = 4, \overline{z_1} = 3, \overline{z_2} = 4i.$

(b) $z_1 + z_2 = 2, z_1 - z_2 = -2i, z_1 \cdot z_2 = 2, \frac{z_1}{z_2} = -i, |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}, \overline{z_1} = z_2 = 1 + i, \overline{z_2} = z_1 = 1 - i.$

(c) $z_1 + z_2 = -2 + 3i, z_1 - z_2 = 4 - i, z_1 \cdot z_2 = -5 - i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 - 5i}{13}, |z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{13}, \overline{z_1} = 1 - i, \overline{z_2} = -3 - 2i.$

(d) $z_1 + z_2 = 5 - 4i, z_1 - z_2 = -1 - 6i, z_1 \cdot z_2 = 11 - 13i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{10} - \frac{17i}{10}, |z_1| = \sqrt{29}, |z_2| = \sqrt{10}, \overline{z_1} = 2 + 5i, \overline{z_2} = 3 - i.$

(e) $z_1 + z_2 = 5 - 3i, z_1 - z_2 = -1 - 11i, z_1 \cdot z_2 = 34 - 13i, \frac{z_1}{z_2} = -\frac{22}{25} - \frac{29i}{25}, |z_1| = \sqrt{53}, |z_2| = 5, \overline{z_1} = 2 + 7i, \overline{z_2} = 3 - 4i.$

(f) $z_1 + z_2 = -11 - 5i, z_1 - z_2 = 3 + 3i, z_1 \cdot z_2 = 24 + 23i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{32}{65} - \frac{9i}{65}, |z_1| = \sqrt{17}, |z_2| = \sqrt{65}, \overline{z_1} = -4 + i, \overline{z_2} = -7 + 4i.$

(g) $z_1 + z_2 = \frac{11}{10} + \frac{27i}{10}, z_1 - z_2 = \frac{9}{10} + \frac{33i}{10}, z_1 \cdot z_2 = 1, \frac{z_1}{z_2} = -8 + 6i, |z_1| = \sqrt{10}, |z_2| = \frac{\sqrt{10}}{10}, \overline{z_1} = 1 - 3i, \overline{z_2} = \frac{1}{10} + \frac{3i}{10}.$

(h) $z_1 + z_2 = 2i, z_1 - z_2 = 0, z_1 \cdot z_2 = -1, |z_1| = 1, |z_2| = 1, \overline{z_1} = -i, \overline{z_2} = -i.$

Praktikum 31

Vastus 31.1. (a) $z = 1 + 0i = 1$, $z = e^{i0} = 1$ (b) $z = 2\sqrt{3} + 2i$, $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ (c) $z = -4\sqrt{3} - 4i$, $z = 8e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (d) $z = 0 - 3i$, $z = 3e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Vastus 31.2. (a) $\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2} = -i$ (b) $64(\cos 0 + i \sin 0) = 64$ (c) $\cos -1 + i \sin -1 \approx 0.54 - 0.84i$

(d) $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$ (e) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}i$ (f) $2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$

(g) $\frac{1}{e}(\cos 1 + i \sin 1) \approx 0.199 + 0.31i$ (h) $\tan 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = i \tan 1$

Vastus 31.4. (a) $z_1 \cdot z_2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} = 8(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) \approx -6.928 - 4i$, $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2i$

(b) $z_1 \cdot z_2 = 3e^{i3\theta} = 3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 3 \cos 3\theta + 3i \sin 3\theta$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{i\theta} = \frac{1}{3}(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1}{3} \cos \theta + i \frac{1}{3} \sin \theta$

Vastus 31.5. (a) 1 (b) $-17 + 17i$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ (d) $\cos 87^\circ + i \sin 87^\circ \approx 0.052 + 0.999i$

Vastus 31.6. $x = 0 \vee y = 0$

Vastus 31.7. $z^2 - 4z + 5 = 0$

Vastus 31.10. $180 - 30i$

Vastus 31.11. $\frac{353}{65} + \frac{101i}{65}$

Vastus 31.12. $Q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ja $R = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. Viige punkt $2 + i$ ringjoonele raadiusega $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ja korrutage/jagage saadud punkt ühikringi elemendiga $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Vastus 31.13. $d = 6.36 + 5.47i = 8.39(\cos 40.70^\circ + i \sin 40.70^\circ)$

Vastus 31.14. $V = 43.3(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$, $|V| = 43.3$ volti.

Praktikum 32

Vastus 32.1. (a) $z = \frac{1}{4096}$ (b) $288\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -432 + 144\sqrt{3}i$ (c) $32(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

(d) $32(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -16\sqrt{3} + 16i$ (e) -2 (f) $81(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

(g) $\frac{1}{125}(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$ (h) $36e^{\frac{137\pi}{90}i}$ (i) 256

(j) $e^{\frac{17\pi}{9}i}$ (k) $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (l) 1.

Vastus 32.2. $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$.

Vastus 32.3. $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}} = (2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}))^{\frac{1}{5}} = \left\{ \sqrt[5]{2} \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \right) \right) \mid k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \right\}$.

Vastus 32.4. $\sqrt[4]{-64} \in \{2 + 2i, 2 - 2i, -2 + 2i, -2 - 2i\}$.

Vastus 32.5. $\sqrt[5]{z} = 2 \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \right) \right)$, $k = 0, 1, \dots, 4$.

Vastus 32.8. (a) $z \in \{1, i, -1, -i\}$ (c) $z \in \{\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ, \cos(-135^\circ) + i \sin(-135^\circ)\}$ (m) $z \in \{2i, -2i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$