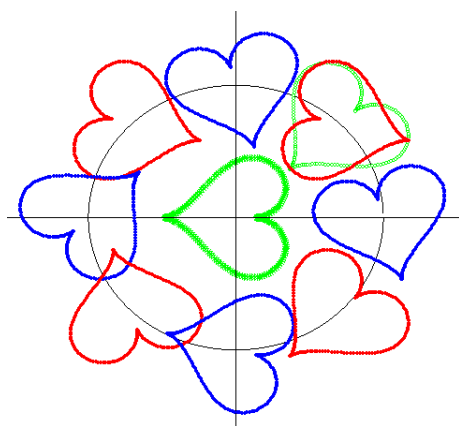


MTMM.00.340

Kõrgem matemaatika I



2020/2021 õa

LOENGUKONSPEKT

Marek Kolk, 2016

Täiendanud ja muutnud: Annely Mürk, 2018-2020

Põhjalikult ümbertöötanud: Peeter Oja, Ella Puman, 2020

Sisukord

0	Tähistused. Reaalarvud *	1
0.1	Tähistused	2
0.2	Kreeka tähestik	3
0.3	Reaalarvud	4
0.4	Summa sümbol	7
1	Maatriksid ja determinandid	9
1.1	Maatriksi mõiste	10
1.2	Tehted maatriksitega	11
1.3	Maatriksite korrutamine	13
1.4	Teist ja kolmandat järku determinant	17
1.5	Kõrgemat järku determinant	19
1.6	Determinantide omadused	20
2	Pöördmaatriks. Lineaarvõrrandisüsteemid	25
2.1	Maatriksi pöördmaatriks	26
2.2	Võrrandisüsteemi lahendi leidmine pöördmaatriksi abil	29
2.3	Pöördmaatriksi leidmine determinantide meetodil	32
2.4	Maatriksi astak	34
2.5	Lineaarvõrrandisüsteemid	37
2.6	Crameri peajuht	39
2.7	Gaussi elimineerimismeetod	40
2.8	Süsteemi üldlahend ja erilahend	42
2.9	Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem	44
3	Funktsioonid	47
3.1	Funktsiooni mõiste	48
3.2	Üksühesus ja pealekujutus	51
3.3	Liitfunktsioon	52
3.4	Pöördfunktsioon	53
3.5	Põhilised elementaarfunktsioonid	55

3.6	Elementaarfunktsioonid	62
3.7	Jadad *	62
4	Funktsiooni piirväärtus ja pidevus	65
4.1	Jada piirväärtus *	66
4.2	Funktsiooni piirväärtuse mõiste	71
4.3	Ühepoolsed piirväärtused	74
4.4	Funktsiooni piirväärtuse omadused	75
4.5	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	77
4.6	Mõned erilised piirväärtused	80
4.7	Pidevad funktsioonid	83
4.8	Funktsiooni katkevusiise	84
4.9	Pidevate funktsioonide omadused	86
5	Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal	89
5.1	Keskmine kiirus ja hetkkiirus	90
5.2	Tuletise definitsioon	92
5.3	Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised	94
5.4	Diferentseerimise reeglid	96
5.5	Liitfunktsiooni tuletis	97
5.6	Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus	98
5.7	Kõrgemat järku tuletised	99
5.8	Joone puutuja ja normaali võrrandid	101
5.9	Funktsiooni diferentsiaal	103
6	Funktsiooni uurimine	109
6.1	Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid	110
6.2	L'Hôspitali reegel piirväärtuse arvutamiseks	115
6.3	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	118
6.4	Funktsiooni ekstreemumid	119
6.5	Funktsiooni kumerus ja nõgusus	123
6.6	Funktsiooni graafiku joonistamine	126
7	Algfunktsioon ja määramata integraal	131
7.1	Sissejuhatas	132
7.2	Algfunktsioon	132
7.3	Määramata integraal	133
7.4	Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest	134
7.5	Tehetega seotud integreerimisreeglid	136
7.6	Muutujavahetus	137
7.7	Ositi integreerimine	139

7.8	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	142
8	Diferentsiaalvõrrandid	147
8.1	Sissejuhatus	148
8.2	Diferentsiaalvõrranditest üldiselt	150
8.3	Esimest järku diferentsiaalvõrrandid	151
8.4	Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	153
8.5	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	155
9	Pindala ja Riemanni integraal	161
9.1	Pindala leidmine lõplike summade abil	162
9.2	Riemanni summad	165
9.3	Määratud (Riemanni) integraal	167
9.4	Määratud integraali omadused	169
9.5	Kõvertrapetsi pindala	170
9.6	Numbriline integreerimine	173
10	Määratud integraal	177
10.1	Newton-Leibnizi valem	178
10.2	Määratud integraali arvutamine	181
10.2.1	Muutujavahetus	181
10.2.2	Määratud integraal sümmeetriliselt paiknevate rajade korral	182
10.2.3	Määratud integraal funktsiooni absoluutväärtusest	184
10.2.4	Ositi integreerimine	185
10.3	Integraalarvutuse keskvaartusteoreem	185
10.4	Määratud integraal ülemise raja funktsioonina	187
11	Määratud integraali rakendused	191
11.1	Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral	192
11.2	Kõversektori pindala	193
11.3	Joone pikkuse arvutamine	194
11.4	Keha ruumala	197
11.5	Integraali füüsikalisi rakendusi	199
11.5.1	Teepikkuse arvutamine	199
11.5.2	Töö arvutamine	200
11.5.3	Vedeliku poolt mõjuva jõu arvutamine	201
11.5.4	Masskese	203
11.5.5	Vedelike pumpamisel tehtav töö	208

12 Trigonomeetriliste ja irratsionaalfunktsioonide integreerimine. Päratud integraalid	209
12.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	210
12.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine	212
12.3 Päratud integraalid	216
12.4 Lõpmatute rajadega integraalid	216
12.5 Integraal tõkestamata funktsioonist	220
12.6 Integraalide rakendusi statistikas	222
12.7 Euleri integraalid	225
13 Vektorid ruumis	229
13.1 Suunatud lõikude hulk	230
13.2 Vabavektorid	232
13.3 Punkti ja vektori projektsioon	234
13.4 Kohavektorid	236
13.5 Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$	237
13.6 Skalaarkorrutis	239
13.7 Vektorkorrutis	243
13.8 Segakorrutis	246
14 Sirge ja tasand ruumis	249
14.1 Tasandi vektorvõrrandid	250
14.2 Tasandi võrrand üldkujul	251
14.3 Sirge vektorvõrrandid	254
14.4 Sirge võrrandid ruumis	255
14.5 Punkti kaugus sirgest	256
14.6 Punkti kaugus tasandist	258
14.7 Nurk kahe sirge vahel	260
14.8 Nurk kahe tasandi vahel	261
14.9 Nurk sirge ja tasandi vahel	262
15 Kompleksarvud. Algebraalne ja trigonomeetriline kuju	265
15.1 Sissejuhatus	266
15.2 Kompleksarvud	268
15.3 Kompleksarvu algebraalne kuju	268
15.4 Tehted kompleksarvudega	269
15.5 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju	271
15.6 Siinus ja koosinus	273
15.7 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega	274

16 Kompleksarvu juured. Eksponentkuju	277
16.1 Kompleksarvu n -astme juured	278
16.2 Kompleksarvu eksponentkuju	279
16.3 Algebraliste võrrandite lahendamisest	282
16.4 Fraktalite tutvustus	284

Peatükk 0

Tähistused. Reaalarvud *

0.1	Tähistused	2
0.2	Kreeka tähestik	3
0.3	Reaalarvud	4
0.4	Summa sümbol	7

Kontrolltöö teemad

1. Reaalarvu absoluutväärtus ja selle omadused.
2. Naturaalarvud.
3. Täisarvud.
4. Ratsionaalarvud.
5. Irratsionaalarvud.
6. Reaalarvud.
7. Summa sümbol.

0.1 Tähistused

$:=$	definitsioon (võrdub, rõhutatult)
$a \in X$	element a kuulub hulka X
$a \notin X$	a ei kuulu hulka X
$X \subset Y$	hulk X sisaldub hulgas Y (NB! mitterange kuulumine) mujal võidakse eristada $\subset$ ja $\subseteq$, meil $\subset = \subseteq$
$A \cup B$	hulkade ühend
$A \cap B$	hulkade ühisosa
$X \setminus Y$	hulgast X lahutatakse hulk Y
$\Rightarrow$	järeldub
$\Leftrightarrow$	on samaväärne (mõlematpidi järeldumine)
$\forall x$	kehtib iga x korral
$\exists x$	leidub selline x
$\mathbb{N}$	naturaalarvud $1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{N}_0$	naturaalarvud koos nulliga $0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	täisarvud $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	ratsionaalarvud $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$
$\mathbb{I}$	irratsionaalarvud
$\mathbb{R}$	reaalarvud
$\mathbb{C}$	kompleksarvud
$n!$	faktoriaal $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

0.2 Kreeka tähestik

α	alfa
β	beeta
γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ϵ, ε	epsilon
ζ	dzeeta
η	eeta
θ, Θ	teeta
i	ioota
κ	kapa
λ, Λ	lambda
μ	müü
ν	nüü
ξ, Ξ	ksii
o	omikron
π, Π	pii
ρ, ϱ	roo
σ, Σ	sigma
τ	tau
υ, Υ	üpsilon
ϕ, φ, Φ	fii
χ	hii
ψ, Ψ	psii
ω, Ω	oomega

0.3 Reaalarvud

Arvud moodustavad mingis mõttes matemaatika vundamendi. Erinevat tüüpi arvudel võivad olla erinevad omadused ja kasutusvaldkonnad. Enne reaalarvudeni jõudmist peame tutvuma veidi lihtsamate arvudega.

Definitsioon 0.1

Tähistame sümboliga $\mathbb{N}$ kõigi **naturaalarvude hulka**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

ja sümboliga $\mathbb{Z}$ kõigi **täisarvude hulka**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Definitsioon 0.2

Ratsionaalarvudeks nimetatakse arve x , mis on esitatavad kujul $x = \frac{p}{q}$, kus $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$. Kõigi ratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{Q}$.

Ratsionaalarvudeks on parajasti need arvud, mis on esitatavad lõplike kümnendmurdudena (näiteks 3.895) või **lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena** (näiteks 15.98787..., mida kirjutatakse lühemalt kujul 15.9(87)). Kümnendmurdude korral kasutatakse antud konspektis kümnendkoha eraldamiseks punkti.

Näide 0.1 Ratsionaalarvuks ei ole $\sqrt{2}$. Näitame seda.

Oletame vastuväiteliselt, et $\sqrt{2}$ on ratsionaalarv, s.t esitub kujul $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kus $q \neq 0$ ja $p, q \in \mathbb{Z}$. Seejuures eeldame, et harilik murd $\frac{p}{q}$ on antud taandatud kujul (näiteks $\frac{1}{2}$, aga mitte $\frac{2}{4}$). Siit järeldub, et p ja q ei saa mõlemad korraga olla paarisarvud (muidu saaksime kahega läbi jagada). Algsest võrdusest saame ruutu tõstmisel

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ehk} \quad p^2 = 2q^2.$$

Siit järeldub, et p on paarisarv, kuna tema ruut esitub kahekordse arvu q^2 korrutisena. Kuna p on paarisarv, siis ta esitub kujul $p = 2r$, kus r on mingi täisarv. Uuesti vaadates saame

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ehk} \quad 2 = \frac{4r^2}{q^2} \quad \text{ehk} \quad q^2 = 2r^2.$$

Viimane tähendab, et ka q peab olema paarisarv (kuna paaritu arvu ruut on ise ka paaritu). Saime vastuolu sellega, et q ja p ei tohi korraga olla paarisarvud. Järelikult eeldus $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ oli väär.

◇ ◇ ◇

Saksa matemaatiku Leopold Kroneckeri (1823 - 1891) sõnul (vabas tõlkes) on "*naturaalarvud loodud Jumala poolt. Kõik teised arvud on loodud inimese poolt.*"

Negatiivsete arvude sissetoomisega saab esitada näiteks järgmise anekdoodi: *Füüsik, bioloog ja matemaatik näevad, kuidas tühja majja siseneb kaks inimest. Hiljem väljub sealt aga kolm inimest. Füüsik mõtleb: "Tegemist on mõõtmisveaga." Bioloog arvab, et inimesed vahepeal paljunesid ja matemaatik ütleb: "Praegu on majas miinus üks inimest. Kui nüüd täpselt üks inimene siseneb majja, siis on maja uuesti tühi."*

Eksamil (ka praktikumi tunnikontrollis) võidakse näiteks küsida ratsionaalarvu definitsiooni. Proovige seda sõnastada parajasti siis, kui konspekti käepärast ei ole, ning nii, et teie vanatädi ka asjast aru saaks. Kas see, mille te sõnastasite, defineerib ikka küsitud ratsionaalarvu mõiste üheselt ära?

Analoogiliselt võidakse küsida irratsionaalarvu, reaalarvu ja kompleksarvu kohta.

Igapäevaelus saaksime hakkama ka ainult ratsionaalarve (murde) kasutades, matemaatilises teoorias aga mitte. Nagu just $\sqrt{2}$ näol näitasime, leidub veel teistsuguseid arve.

Definitsioon 0.3

Arve, mis on esitatavad lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks. Irratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{I}$.

Irratsionaalarvudeks on näiteks $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$, $\pi = 3.14159265359\dots$, $e = 2.71828182846\dots$ (naturaallogaritmi alus), $\varphi = 1.61803398875\dots$ (kuldlõike parameeter), jne.

Definitsioon 0.4

Kõik ratsionaal- ja irratsionaalarvud moodustavad reaalarvude hulga. Kõigi reaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{R}$.

Reaalarvude hulga kirjanepuudeks kasutatakse kirjutusviisi

$$\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\} \quad \text{või} \quad \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

Iga lõplikku kümnendmurdu $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ (näiteks 8.765210448) saab esitada lõpmatu kümnendmurruna kahel erineval viisil:

$$a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n00\dots \quad \text{või} \quad a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n - 1)99\dots$$

Näiteks, 2.500... või 2.499....

Märkus 0.1

Edaspidi välistame kümnendmuru esitamise kujul, mis lõpeb numbriga 9 perioodis. See eeldus võimaldab hõlpsamini defineerida reaalarvude võrdlemise eeskirjad. Seega reaalarvudeks nimetame kõiki lõpmatuid kümnendmurde, mis ei lõpe numbriga 9 perioodis.

Reaalarvude võrdlemine. Reaalarve $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$ ja $b = \beta, \beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots$ nimetame võrdseteks, kui

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n = \beta_n, \quad \dots$$

Ütleme, et reaalarv a on suurem kui reaalarv b ja kirjutame $a > b$ (ehk b on väiksem kui a ja kirjutame $b < a$), kui on täidetud üks järgmistest tingimustest: 1) $\alpha > \beta$,

2) $\alpha = \beta \geq 0$ ja leidub indeks $k \geq 1$ nii, et

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k > \beta_k.$$

3) $\alpha = \beta < 0$ ja leidub indeks $k \geq 1$ nii, et

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k < \beta_k,$$

Kuna irratsionaalarvudel on lõpmatu arv kümnendkohti, siis on selge, et päriselus ei ole võimalik lõpliku aja jooksul nende kõiki komakohti välja arvutada. Mõõtmistel võib kasutada näiteks järgmist lähenemisviisi:

$$3.14155 \leq \pi \leq 3.14165$$

või

$$|\pi - 3.1416| \leq 0.00005.$$

Arvuhulkade vahel valitseb seos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

Siinjuures ∞ ja $-\infty$ ei ole mingid arvud, nendega ei saa sooritada aritmetilisi tehteid ning nad ei asetse kuskil reaalteljel, vaid on matemaatikas abivahendina kaasatud kui „lõpmatuse“ sümbolid, mida kasutatakse reaalarvude ja nende hulkadega seotud omaduste kirjeldamisel. Antud („lõpmatuse“) sümboli kasutuselevõtt pannakse inglise matemaatiku John Wallis'e (1616-1703) arvele.

4) $\alpha = \beta = -0$ ja leidub indeks $k \geq 1$ nii, et

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k < \beta_k.$$

Reaalarv a on määratud, kui on teada eeskiri tema täiskoha ja iga kümendkoha leidmiseks. Praktikas kasutatakse irratsionaalarvude asemel nende ratsionaalarvulisi lähendeid. Näiteks saab igat reaalarvu $x \in \mathbb{R}$ esitada üheselt ahelmurruna (seda teemat antud kursus lähemalt ei vaatle)

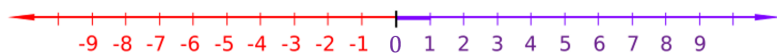
$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

kus a_0 on mingi täisarv ja a_k ($k \geq 1$) on positiivsed täisarvud. Ligikaudseks arvutamiseks võib kasutada “piisavalt” pikka ahelat.

Märkus 0.2

Reaalarve kujutatakse arvsirge punktidenä. Arvsirge punktide hulga ja reaalarvude hulga vahel on üksühene vastavus: igale reaalarvule a vastab parajasti üks punkt A arvsirgel (reaalarvu a kujutis), igale punktile A arvsirgel vastab parajasti üks reaalarv a (punkti A koordinaat). Seetõttu kasutataksegi “reaalarv a ” asemel ka väljendit “punkt a ”.

Vastaku reaalarvule a arvsirge punkt A ja reaalarvule b arvsirge punkt B . Siis arv $|a - b|$ on võrdne punktide A ja B vahelise kaugusega. Erijuhul $b = 0$, saame, et $|a|$ on punkti A kaugus nullpunktist.



Reaalarvu absoluutväärtus. Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

Absoluutväärtuse tähtsamad omadused:

1. $|a| \geq 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $\pm a \leq |a|$,
4. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$,
5. $|ab| = |a||b|$,
6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

Peame meeles, et iga reaalarvu $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Näiteks, $\sqrt{25} = 5$ ja mitte -5 , kuna juurimine on defineeritud alati üheselt mittenegatiivse arvuna. Seda ei tohi segamini ajada võrrandi lahendamisega. Võrrandil võib olla rohkem kui üks lahend, näiteks $x^2 = 25$ lahenditeks on $x_1 = 5$ ja $x_2 = -5$.

Alustades naturaalarvudest, laiendasime arvude valdkonda kuni reaalarvudeni. Sellisel juhul on näiteks võrrandil $x^2 - 2 = 0$ kaks reaalarvulist lahendit: $x_1 = \sqrt{2}$ ja $x_2 = -\sqrt{2}$. Mida teha aga võrrandiga $x^2 + 1 = 0$? Sellisel juhul tekib arvu ruut x^2 , mille väärtus on negatiivne: -1 . Meil oleks vaja, et kehtiks $x_1 = \sqrt{-1}$ ja $x_2 = -\sqrt{-1}$. Kuna ruutjuur negatiivsest arvust ei ole defineeritud, siis tulebki välja, et puhtalt reaalarvudest ei piisa ning meil tuleb arvude valdkonda veelgi laiendada. Osutub, et selline samm on väga hästi kooskõlas üldisema matemaatilise teooriaga.

0.4 Summa sümbol

Kui on vaja liita arvud $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, siis seda saab lühidalt märkida sigma sümboli (ehk *summamärgi*) abil

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

kus a_i on summa *üldliige*, i on *summeerimisindeks* ($i = 1, \dots, n$).

Summa sümbol tuleb kreeka suurtähest sigma Σ , mille väike täht on kujul σ .

Summamärgi $\sum$ abil tähistatakse ühelaadsete liidetavate summat, seejuures sümboli $\sum$ järel on näidatud, millse “kujuga” liidetavaid tuleb liita.

Näiteks

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$

korral leitakse summa antud summa üldliikme a_i põhjal, kus kõigi liidetavate saamiseks liidetakse järjest liikmed alates indeksist m kuni indeksini n , lähtudes *summeerimisrajadest* m ja n .

Näide 0.2 Esimese 100 naturaalarvu liitmistehte saab kirja panna kujul

$$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i.$$

◇ ◇ ◇

Näide 0.3 Kirjutame summa lahti

$$\sum_{n=2}^N (-1)^{n-1} \frac{n}{n+3} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{6} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{N}{N+3}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 0.4 Kirjutame summa lahti

$$\sum_{k=5}^{90} f(k) = f(5) + f(6) + \dots + f(90).$$

◇ ◇ ◇

Näide 0.5 Keerulisem näide, binoomvalem:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^{n-i} b^i = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 1

Maatriksid ja determinandid

1.1	Maatriksi mõiste	10
1.2	Tehted maatriksitega	11
1.3	Maatriksite korrutamine	13
1.4	Teist ja kolmandat järku determinant	17
1.5	Kõrgemat järku determinant	19
1.6	Determinantide omadused	20

Kontrolltöö teemad

1. Maatriksid: omadused ja tehted.
2. Maatriksi miinor, elemendile vastav miinor ja alamdeterminant.
3. Determinantide omadused.
4. Determinandi väärtuse arvutamine, arendades determinanti rea või veeru järgi.

Eksamiteemad

1. Maatriksid: mõisted, omadused, tehted.
2. Maatriksi miinor, elemendile vastav miinor ja alamdeterminant.
3. Determinandi mõiste ja omadused.
4. Determinandi arendamine rea või veeru järgi.

1.1 Maatriksi mõiste

Definitsioon 1.1

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi **elementideks**, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse **$m \times n$ maatriksist**.

Maatriksi elemendi a_{ij} esimene indeks i näitab rida (*reaindeks*) ja teine indeks j näitab veergu (*veeruindeks*), milles element asetseb. Tavaliselt tähistatakse maatriksit ladina tähestiku suure tähega (näiteks $A, B, \dots$) ning maatriksi elemente tähistatakse indeksi(te)ga varustatud väikese tähega (näiteks $a_{ij}, b_{ij}, \dots$). Lühidalt saab sama maatriksit A esitada ka kujul

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

või veelgi lühemalt

$$A = (a_{ij}).$$

Näide 1.1 Maatriksiteks on näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (5), \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -\pi \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Siinjuures $a_{12} = 8$, $b_{11} = 5$, $c_{43} = -\pi$ ja $d_{21} = 0$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.2

Kui maatriksi ridade ja veergude arv on võrdne, $m = n$, siis nimetame maatriksit **ruutmaatriksiks** või ka **n -järku** ruutmaatriksiks.

Kui maatriksis on ainult üks rida või veerg, siis nimetame seda maatriksit ka **vektoriks**, täpsemalt **reavektoriks** ja **veeruvektoriks**. Üldine $m \times n$ maatriks koosneb m reavektorist ja n veeruvektorist.

Näide 1.2 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Siin A on 3. järku ruutmaatriks, B on reavektor ja C on veeruvektor.

◇ ◇ ◇

1.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 1.3

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$$A = B, \text{ kui } a_{ij} = b_{ij} \text{ iga } i = 1, \dots, m \text{ ja } j = 1, \dots, n \text{ korral.}$$

Näide 1.3 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hoolimata sellest, et maatriksi C viimase veeru elemendid on kõik nullid, ei ole maatriksid A ja C võrdsed. Maatriksid A ja C ei ole omavahel võrdsed, sest neil on erinev arv veerge. Seejuures maatriksid A ja B on võrdsed ainult siis, kui $b_{11} = 1$, $b_{12} = 2$, $b_{21} = 4$ ja $b_{22} = 5$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.4

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis A ja B **summaks** nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad, s.t

$$C = A + B, \quad \text{kui } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Maatriksite liitmisele sarnaselt saab defineerida ka maatriksite lahutamise.

Definitsioon 1.5

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis A ja B **vaheks** nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide vahed, s.t

$$C = A - B, \quad \text{kui } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Näide 1.4 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid A ja C (ning B ja C) ei ole võimalik omavahel liita, kuna A on 2×3 maatriks ja C on 3×2 maatriks. Küll aga saame leida A ja B summa ning vahe

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 11 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.6

Maatriksi A **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga λ nimetatakse maatriksit $\lambda A = B$, mille elemendid saadakse maatriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ , s.t

$$\lambda A = B = (b_{ij}), \quad \text{kui } b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Arv λ on üldjuhul reaalarv, kuid võib olla ka kompleksne.

Maatriksi A **vastandmaatriksiks** nimetatakse maatriksit $-A$ ehk arvuga -1 korrutatud maatriksit A .

Näide 1.5 Korrutame eelmise näite maatriksit A arvuga 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ 4 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sama tulemuse saaksime, kui liidaksime $A + A = 2A$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.7

Nullmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille kõik elemendid võrduvad nulliga, s.t

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad o_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Nullmaatriksit tähistatakse sageli ka sümboliga θ .

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O kõik samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul maatrikstehete jaoks kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C, & (\text{liitmise assotsiatiivsus}) \\ A + B &= B + A, & (\text{liitmise kommutatiivsus}) \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B, \\ A + O &= A. \end{aligned}$$

Sageli on vaja antud maatriksi ridades esinevad arvud paigutada hoopis veergudesse.

Definitsioon 1.8

Maatriksi $A = (a_{ij})$, ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude äravahetamisel, s.t

$$A^T = (a_{ji}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Üleminekut maatriksilt A maatriksile A^T , kus maatriksi A read kirjutatakse A^T veergudeks, nimetatakse maatriksi A **transponeerimiseks**.

Näide 1.6 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Olgu maatriksid A ja B samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul transponeeritud maatriksite jaoks kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, \\ (A + B)^T &= A^T + B^T, \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T. \end{aligned}$$

1.3 Maatriksite korrumine

Maatriksite korrumine on samuti maatrikstehe, kuid on oluliselt keerulisem ning seetõttu pühendame sellele spetsiaalselt eraldi alapeatüki. Maatriksite korrumine ei ole kergesti tajutav. Vaatleme esiteks lihtsa näite varal, miks korrumustehe niimoodi defineeritakse, nagu me selles peatükis seda teeme.

Vaatleme lineaarseid võrrandeid

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1, \\ 7x_1 + 3x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Selle süsteemi lahendiks on $x_1 = 2$ ja $x_2 = -3$, mida saab kindlaks teha vahetu kontrolliga. Märgime süsteemi kordajad maatriksiks

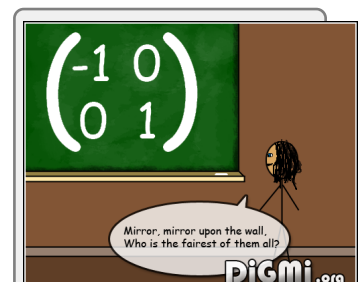
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$$

lahendi teiseks maatriksiks (veeruvektoriks)

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ja süsteemi vabaliikme

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



Tahvlil on nn. „peegeldusmaatriks“.

Teostame korrutamise järgnevalt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \\ 7 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

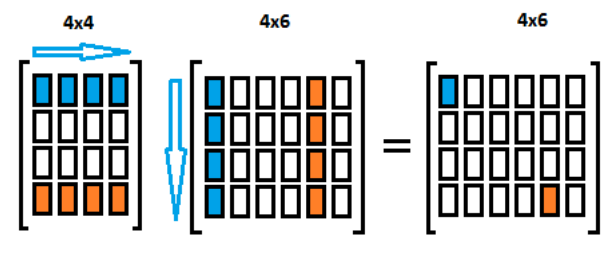
mille kirjutame lühidalt $Ax = y$. Siin näeme maatriksite A ja x korrutamise eeskirja. Kui lisaks kehtib analoogiline võrdus $Bz = x$, siis saame $ABz = y$ ehk $Cz = y$, kus $C = AB$. Tekkinud maatriksite korrutamise eeskirja esitame järgnevas ja see hõlmab juba leitud korrutist Ax .

Definitsioon 1.9

Kui maatriksi A veergude arv võrdub maatriksi B ridade arvuga, siis maatriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse maatriksit C , mille i -nda rea ja j -nda veeru elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse maatriksi A i -nda rea elemendid maatriksi B j -nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

kus $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, A on $m \times n$ maatriks ja B on $n \times p$ maatriks.



Joonis: <http://www.cmssoft.com.br/opencl-tutorial/case-study-matrix-multiplication/>

Näide 1.7 Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Näeme, et maatriks A on 2×1 maatriks, B on 1×2 maatriks ja C on 2×3 maatriks. Seega saab maatrikseid A ja B korrutada järgmiselt:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 4 \cdot 2) = (11).$$

Ei ole olemas korrutisi AC ja CA , kuna nende ridade ja veergude arv omavahel ei sobi. Küll aga saab leida korrutise BC :

$$\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 15 + 32 & 18 + 36 & 21 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 54 & 61 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Märkus 1.1

Viimasest näitest nägime, et AB ja BA andsid erineva tulemuse. Selle kohta öeldakse, et **maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne** ehk üldjuhul (ka ruutmaatriksite korral)

$$AB \neq BA.$$

Näide 1.8 Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leiame maatriksite A ja B korrutised:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 1.9 Maatriksitel on palju kasutusvaldkondi. Vaatleme ühte nendest. Olgu antud punkt tasandil koordinaatidega (x, y) . Sel juhul

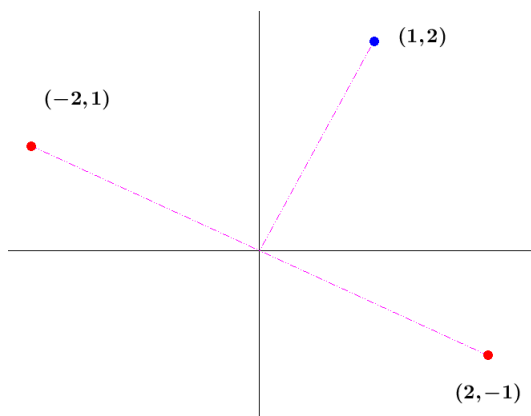
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

s.t veeruvektorit maatriksiga A (vasakult) korrutades saadakse tasandil punkt, mille kohavektor on võrreldes punkti (x, y) kohavektoriga pööratud 90° (x -telje suhtes kellaosuti liikumise suunas). Näiteks:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kui tahame punktile vastavat vektorit pöörata 270° kellaosuti liikumise suunas, siis tuleb veeruvektorit korrutada maatriksiga A kolm korda. Seega

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Sedalaadi teisendusi on rohkesti. Maatrikskuju võimaldab neid teisendusi lihtsamalt kirja panna. Näiteks järgmine maatriks pöörab punkti kohavektorit kolmemõõtmelises ruumis 30° ümber x -telje kellaosuti liikumise vastassuunas, kui vaadelda x -telje poolt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Maatriksite korrutamise omadused. Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav. Siis maatriksite korrutamisel on järgmised **omadused**:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC), & (\text{korrutamise assotsiatiivsus}) \\ (A+B)C &= AC+BC, & (\text{distributiivsus}) \\ \lambda(AB) &= (\lambda A)B = A(\lambda B), & \text{iga } \lambda \in \mathbb{R} \text{ korral} \\ (AB)^T &= B^T A^T, \\ AO &= O, \\ OA &= O. \end{aligned}$$

Enne üldise determinandi mõiste juurde minekut vaatleme eraldi teist ja kolmandat järku determinante.

1.4 Teist ja kolmandat järku determinant

Paljude sisult hoopis erinevate probleemide lahendamine viib sageli ühe ja sellesama seaduse järgi koostatud avaldistele. Sellisel juhul tasub nende avaldiste omadusi uurida omaette küsimusena. Väga paljud probleemid viivad avaldisteni, mida nimetatakse teist järku determinantideks. Olgu meil näiteks neli arvu a , b ja c , d võrdelised, s.t

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

siis $ad = cb$ ehk

$$ad - cb = 0.$$

Seda võrdust on võimalik esitada teisiti kujul

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0.$$

Definitsioon 1.10

Teist järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Toodud tabelit tuleb mõista avaldisena, mis saadakse, korrutades tabeli peadiagonaalil seisvad arvud a ja d ning lahutades tulemusest kõrvaldiagonaalil seisvate arvude b ja c korrutise.

Vaatleme näiteks võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 5x - 2y &= -11. \end{aligned}$$

Korrutades esimest võrrandit arvuga -2 , saame võrrandisüsteemi esitada kujul

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2)x + 1 \cdot (-2)y &= 1 \cdot (-2), \\ 5 \cdot 1x + (-2) \cdot 1y &= -11 \cdot 1. \end{aligned}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise

$$(2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1)x = 1 \cdot (-2) - (-11) \cdot 1,$$

näeme, et avaldades x , tekivad jagatises teist järku determinantide avaldised

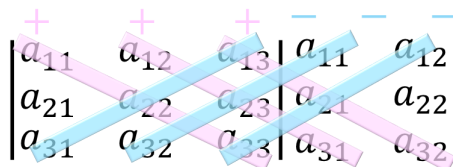
$$x = \frac{1 \cdot (-2) - (-11) \cdot 1}{2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-9} = -1.$$

Definitsioon 1.11

Kolmandat järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ilma süsteemse lähenemiseta on viimast avaldist pisut raske meelde jätta. Seetõttu kasutataksegi koolimatemaatikas pigem lihtsamat viisi: determinandi parempoolse kriipsu järele kirjutatakse esimene ja teine veerg. Sel juhul tekib kuus diagonaali (suunaga vasakult paremale), millel on täpselt kolm elementi.

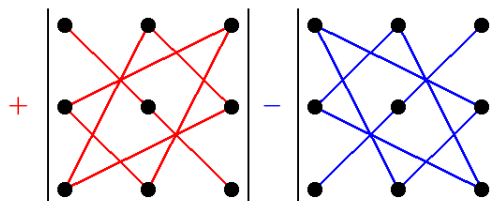


Seda determinandi arvutamise eeskirja meeldejätmise reeglit kutsutakse ka **Sarruse reegliks**, mis on nime saanud prantsuse matemaatiku Pierre Frédéric Sarrus'i (1798-1861) järgi.

Järjekorras ülevalt alla võetud diagonaali elementide korrutised liidetakse. Järjekorras alt üles võetud diagonaali elementide korrutised lahutatakse.

Sellist lisaveergude abi **ei saa kasutada** kõrgemat (alates 4.) järku determinantide korral.

Kolmandat järku determinandi arvutamise eeskirja tegelik skemaatiline esitus näeks välja aga järgmine:



Paneme tähele, et kolmnurkade väikseim külg on paralleelne suure diagonaaliga. Nüüd peaks valemi visuaalne tuleamine olema üsna lihtne.

Näide 1.10 Arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

väärtuse (n-ö kolmnurkadega graafilise esituse abil).

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \cdot 5 = 15 - 10 + 8 - 24 - 1 + 50 = 38.$$

◇ ◇ ◇

Arvutades nüüd lisaveergude abil (Sarruse reegel), näeme, et tekivad samasugused kolmeliikmelised korrutised:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \cdot 5 = 38.$$

◇ ◇ ◇

1.5 Kõrgemat järku determinant

Olgu antud n -järku **ruutmaatriks** $A = (a_{ij})$. Maatriksi A determinanti tähistame

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definitsioon 1.12

Ruutmaatriksi A **elemendile** a_{ij} vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti M_{ij} , mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Toome ära determinandi rekursiivse definitsiooni.

Definitsioon 1.13

Esimest järku ruutmaatriksi A determinant $|A| = a_{11}$.

Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant. Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse **determinandi arendamiseks** i -nda rea järgi.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinandi arendada mingi j -nda veeru järgi. Determinandi tähistusi: $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Täpsemalt öeldes, determinant on teisendus (teatud liiki funktsioon), mis seab igale ruutmaatriksile vastavusse ühe kindla arvu. Tüüpiliselt tähistatakse seda teisendust $\det A$.

$m \times n$ **maatriksi** A k -**järku miinoriks** nimetatakse sellest maatriksist väljavalitud mingi k rea ja mingi k veeru ühistest elementidest moodustatud k -järku alamruutmaatriksi determinanti $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$ (või M_k , kui rida ja veerge ei ole vaja rõhutada), kusjuures ridade ja veergude järjekord säilitatakse.

On olemas ka teistsuguseid definitsioone, kuid nende jaoks on lisaks vaja teada mitmeid uusi mõisteid.

Näide 1.11 Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele $a_{13} = 4$, $a_{21} = 2$ ja $a_{32} = 3$ vastavad järgmised miinorid:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 1.12 Leiame determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Arendame selle näiteks kolmanda veeru järgi:

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+3} \cdot \mathbf{0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot \mathbf{(-1)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{3+3} \cdot \mathbf{2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot \mathbf{0} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Esimene ja viimane liidetav on null. Edasi arvutame teise ja kolmanda liidetava kolmandat järku determinandid ning tulemuseks saame

$$D = 7 - 16 = -9.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 1.2

Determinandi väärtuse leidmiseks arendame seda maatriksi mingi rea või veeru järgi (kasulik on valida selline, kus on palju nulle). Edasi saab tekkinud ühe võrra madalamat järku determinanti omakorda arendada mistahes rea või veeru järgi, jne. Siinjuures on enne arendamist kasulik determinanti lihtsustada. Näiteks determinandi arendamisel mingi rea (või veeru) järgi on seda lihtsam teha, kui selles reas (või veerus) on ainult üks nullist erinev element.

1.6 Determinantide omadused

Omadus 1.1

Maatriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda maatriksi determinandi väärtust:

$$|A| = |A^T|.$$

Näide 1.13 Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$|A| = 0 - 24 - 10 - 0 + 36 - 20 = -18, \quad |A^T| = 0 - 10 - 24 - 0 + 36 - 20 = -18.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 1.3

Viimasest lausest järeldub, et kõik determinantide omadused, mis kehtivad ridade kohta, kehtivad ka veergude kohta. Järgmistes determinandi omaduste sõnastustes mõeldakse ridade ja veergude all maatriksi ridu ja veerge.

Omadus 1.2

Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.

Näide 1.14 Leiame

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = bc - da = -(ad - cb).$$

◇ ◇ ◇

Omadus 1.3

Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.

Põhjendus (võrdus). Olgu esialgne determinant $|A|$. Teise omaduse järgi nende kahe võrdse rea vahetamine muudab determinandi märki, s.t $|A| = -|A|$. Viimane kehtib vaid juhul, kui $|A| = 0$.

Näide 1.15 Järgmisel determinandil on I ja III rida võrdsed:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 0 - 2 - 12 - 0 = 0.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 1.4

Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.

Põhjendus. Determinandi arvutamisel nullidest rea (või veeru) järgi arendades on kasutatava summa igas liidetavas olevas korrutises teguriks alati 0.

Näide 1.16 Kuna järgneval determinandil koosneb kolmas veerg nullidest, siis determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 1.5

Mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k , korrutub determinandi väärtus arvuga k , s.t

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Näide 1.17 Teise rea elementide ühise kordaja 10 võime determinandist välja tuua:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 30 & 10 & -10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 1.6

Kui determinandi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summasid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.

Märkus 1.4

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Näide 1.18 Omaduse 1.6 põhjal on võimalik arvutusi kolmanda veeru korral teha näiteks järgmiselt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+1 \\ 2 & 0 & 2+2 \\ 2 & 5 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\ = 0 + (0 + 12 + 10 - 0 - 10 - 6) = 6.$$

Saadud determinantide summa esimeses determinandis on kaks võrdset veergu, omaduse 1.3 põhjal on selle determinandi väärtus null.

◇ ◇ ◇

Omadus 1.7

Determinandi väärtus ei muutu, kui mingile reale (või veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (või veerg).

Märkus 1.5

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 5a_3 & b_2 + 5b_3 & c_2 + 5c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Antud omadust kasutatakse arvutuste lihtsustamisel näiteks siis, kui soovitakse teatud elemendid teisenduse abil nullideks viia.

Näide 1.19 Arvutame 2. järku determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Teist järku determinandi arvutuseeskirja põhjal teame, et $D = 4 - 6 = -2$. Vaatame, kuidas toimib viimane omadus. Lahutame teisest reast kolmekordse esimese rea:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-3 & 4-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

◇ ◇ ◇

Näide 1.21 Arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \text{ I} \\ -3 \text{ I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28-26 & 33-34 & 8-8 \\ 40-39 & 54-51 & 13-12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 \text{ III} \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 1.8

Sama järku ruutmaatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega, s.t

$$|AB| = |A||B|.$$

Peatükk 2

Pöördmaatriks.

Lineaarvõrrandisüsteemid

2.1	Maatriksi pöördmaatriks	26
2.2	Võrrandisüsteemi lahendi leidmine pöördmaatriksi abil	29
2.3	Pöördmaatriksi leidmine determinantide meetodil	32
2.4	Maatriksi astak	34
2.5	Lineaarvõrrandisüsteemid	37
2.6	Crameri peajuht	39
2.7	Gaussi elimineerimismeetod	40
2.8	Süsteemi üldlahend ja erilahend	42
2.9	Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem	44

Kontrolltöö teemad

1. Pöördmaatriksi mõisted, omadused. Pöördmaatriksi leidmine valemiga ja ridade elementaarteisendustega.
2. Maatriksvõrrandite lahendamine. Maatriksi astaku leidmine.
3. Gaussi meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Süsteemi lahend, üld- ja erilahendi leidmine.

Eksamiteemad

1. Pöördmaatriksi mõisted, omadused. Ühikmaatriks. Regulaarne ja singulaarne maatriks.
2. Maatriksi astak ja selle leidmine.
3. Lineaarvõrrandisüsteemi mõiste, lahend, süsteemi maatriks ja laiendatud maatriks.
4. Kronecker-Capelli teoreemi sõnastus. Crameri peajuht.
5. Gaussi meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Süsteemi lahend, üld- ja erilahend.
6. Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem. Triviaalne lahend.

2.1 Maatriksi pöördmaatriks

Antud alapeatükis eeldame, et maatriksid on n -järku ruutmaatriksid kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definitsioon 2.1

Öeldakse, et arvud $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ asuvad maatriksi A **peadiagonaalil** ning elemendid $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ asuvad kõrvaldiagonaalil.

Definitsioon 2.2

Ruutmaatriksit E nimetatakse (n -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Märkus 2.1

Suvalise n -järku ruutmaatriksi A korral kehtib

$$AE = A, \quad EA = A,$$

kus E on n -järku ühikmaatriks.

Näide 2.1 Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$AE = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.3

Ruutmatriksi A **pöördmatriksiks** nimetatakse sellist matriksit A^{-1} , millega antud matriksit A korrutades saadakse ühikmatriks E , s.t

$$AA^{-1} = E.$$

Märkus 2.2

Matriksi korrutamine pöördmatriksiga on kommutatiivne

$$AA^{-1} = A^{-1}A.$$

Matriksi A pöördmatriks, kui ta eksisteerib, on üheselt määratud (vt. [27]).

On selge, et n -järku nullmatriksil O ei saa leiduda pöördmatriksit, kuna $OA = O$ suvalise n -järku matriksi A korral.

Näide 2.2 Matriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on aga teineteise pöördmatriksid, kuna

$$AB = \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 2.1

Olgu A ja B sama järku ruutmatriksid, millel leiduvad pöördmatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Tõestus. Näitame võrduse kehtivust, milleks kasutame matriksite korrutamise assotsiatiivsuse omadust:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E.$$

Seega pöördmatriksi definitsiooni põhjal kehtib toodud väide.

□

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks, siis saab selle leida Gauss-Jordani meetodiga, teisendades maatriksi A (ridade elementaarteisenduste abil) ühikmaatriksiks E ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks A^{-1} .

$$(A | E) \rightarrow (E | A^{-1}).$$

Meetod tuleb saksa matemaatikult Carl Friedrich Gaussilt (1777-1855) ja saksa geodeedilt (kaardistus- ja maamõõduõpetus) Wilhelm Jordani (1842-1899) nimedest.

Paremaks eristamiseks on maatriksid A ja E eraldatud püstkriipsuga.

Definitsioon 2.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt uuele maatriksile järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Näide 2.3 Leiame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi A^{-1} . Selleks kirjutame kõrvuti maatriksi A ja ühikmaatriksi E (eraldades püstkriipsuga)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Kuna soovime maatriksi A teisendada ühikmaatriksiks, siis alustame elemendist a_{11} ja teeme sellest ühe ning siis elemendi a_{21} nulliks. Selleks korrutame laiendatud maatriksi $(A | E)$ esimese rea arvuga $\frac{1}{2}$ ning tekkinud maatriksis lahutame teisest reast 4-kordse esimese rea:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) - 4I$$

kirjutame viimati märgitud teisenduse siinkohal n-ö nähtaval kujul

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 - 4 \cdot 1 & -7 - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) & 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} & 1 - 4 \cdot 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Peadagonaalile ühe saamiseks korrutame viimati saadud maatriksi teist rida arvuga -1 ning järgmises etapis teisendame elemendi $-\frac{3}{2}$ nulliks (selleks peame esimesele reale liitma $\frac{3}{2}$ -kordse teise rea)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \frac{3}{2}II$$

NB! Need teisendused on mõeldud millegi leidmiseks. Seega on nad vahetehted, abivahendid, mis ei riku otsitava leidmist. Kui te aga rakendate neid esialgsele maatriksile endale, siis maatriks muutub, s.t et näiteks üldjuhul maatriksis ei ole lubatud kahte rida omavahel vahetada.

esitame ka viimati kirja pandud teisenduse n-ö nähtaval kujul, seega

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1+0 & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} + 3 & 0 + (-\frac{3}{2}) \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Näeme, et oleme maatriksi A viinud ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks. Seega A pöördmaatriksiks on püstkriipsust paremal pool olev maatriks

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On lihtne veenduda, et $AA^{-1} = E$ (või $A^{-1}A = E$). Seega definitsiooni põhjal on maatriks A^{-1} tõepoolest maatriksi A pöördmaatriks.

◇ ◇ ◇

2.2 Võrrandisüsteemi lahendi leidmine pöördmaatriksi abil

Esitleme maatriksvõrrandite ideed näite varal. Olgu antud kolm lineaarset võrrandit

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Otsitavaks on siin tundmatud x_1, x_2 ja x_3 . Maatriksite võrdumise omadusest saaksime selle süsteemi kirja panna kujul

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Tähistades

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

näeme, et esialgne süsteem on esitatav kujul

$$Ax = b.$$

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis saaksime viimast võrdust korrutada (vasakult) pöördmaatriksiga A^{-1}

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Kuna $A^{-1}A = E$ ja $Ex = x$, siis saamegi võrrandisüsteemi lahendi

$$x = A^{-1}b.$$

Näide 2.4 Olgu vaja lahendada süsteem

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4, \\x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8, \\2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 13.\end{aligned}$$

Selle süsteemi võiksime lahendada ka asendusvõttega nii, et avaldame näiteks x_1 esimesest võrrandist ja asendame ta teise ja kolmandasse võrrandisse jne. Maatrikskujul lahendades ei pruugi töömaht olla väiksem, küll aga on lahendus ülevaatlikum. Tähistame

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Kui leidub A^{-1} , siis lahend avaldub kujul $x = A^{-1}b$. Osutub, et siin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 80 + 91 \\ 4 + 24 - 26 \\ 0 + 16 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Võrrandisüsteemi lahendiks on $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ ja $x_3 = 3$. Võib kontrollida, et tõepoolest

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = b.$$

Näitame, kuidas saadakse pöördmaatriks Gauss-Jordani meetodiga:

$$\begin{aligned}(A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -I \\ -2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ 2II \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} III \\ 2III \\ \cdot(-1) \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -4II \\ \\ \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) = (E|A^{-1}).\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.5

Vaatleme ühte lihtsat ideed salakoodi loomiseks. Vastaku eesti (lihtsas) tähestikus igale tähele naturaalarv

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

o	p	r	s	t	u	v	$\tilde{o}$	$\ddot{a}$	$\ddot{o}$	$\ddot{u}$
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Näiteks

$$\begin{pmatrix} 12 & 22 & 21 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{lõvi}.$$

On teada, et tähtedele vastavatest arvudest on koostatud sõnum, mis mahutatakse 3×6 maatriksisse S . Sõnum korrutatakse „kodeerijaga“ A (see on saatjale ja samuti teile teada)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teile jõuab kodeeritud sõnum

$$AS = \begin{pmatrix} 90 & 91 & 93 & 87 & 81 & 132 \\ 82 & 79 & 66 & 89 & 96 & 113 \\ 137 & 154 & 213 & 99 & 44 & 231 \end{pmatrix}.$$

Sõnumi saate teada, kui korrutate viimast võrdust vasakult pöördmaatriksiga A^{-1} . Leidke pöördmaatriks A^{-1} ja „muukige“ esialgne sõnum lahti.

◇ ◇ ◇

2.3 Pöördmaatriksi leidmine determinantide meetodil

Definitsioon 2.5

Ruutmaatriksit A , mille determinant ei võrdu nulliga, nimetatakse **regulaarseks**. Vastasel juhul nimetatakse ruutmaatriksit A **singulaarseks**.

Lause 2.1

Maatriksil eksisteerib pöördmaatriks parajasti siis, kui maatriks on regulaarne.

Olgu antud n -järku determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definitsioon 2.6

Elemendi a_{ij} alamdeterminandiks A_{ij} nimetatakse sellele *elemendile* vastava *miinori* M_{ij} korrutist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Näide 2.6 Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele $a_{13} = 4$, $a_{21} = 2$ ja $a_{32} = 3$ vastavad järgmised alamdeterminandid:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 2.1

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, s.o kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A on olemas pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus A_{ij} on maatriksi A determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant.

Näide 2.7 Olgu antud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leiame esiteks maatriksi A determinandi $|A|$. Selleks teisendame eelnevalt determinandis teist veergu, liites teisele reale kolmanda rea. Seejärel arendame saadud determinanti teise veeru järgi:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Kuna $|A| = 2 \neq 0$, siis maatriks A on regulaarne ja pöördmaatriks A^{-1} on olemas. Leiame maatriksi A kõigile elementidele vastavad alamdeterminandid

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Seega

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Lähtudes pöördmaatriksi definitsioonist teeme kontrolli. Selleks leiame

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

◇ ◇ ◇

2.4 Maatriksi astak

Olgu antud suvaline $m \times n$ maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definitsioon 2.7

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse **maatriksi A k -järku miinoriks**.

Näide 2.8 Vaatleme maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi A esimest järku miinoriteks on kõik tema elemendid. Kui me valime 2. ja 3. rea, siis teist järku miinoriteks on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Teist järku miinoreid on kokku 18. Kolmandat järku miinoreid on 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Kõrgemat järku miinoreid ei ole võimalik moodustada, kuna maatriksil on ainult kolm rida.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.8

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, seejuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse $\text{rank } A$, $\text{rank}(A)$ või $r(A)$.

Igale maatriksile A seatakse vastavusse üheselt määratud mittenegatiivne täisarv – maatriksi A astak.

Näide 2.9 Vaatleme maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi A kõik kolmandat järku miinorid võrduvad nulliga, kuna neis on vähemalt üks nullidest koosnev veerg.

Leiame teist järku miinorid, kus nullveerge ei ole

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega on kõik nii teist kui kolmandat järku miinorid võrdsed nulliga. Kuna esimest järku miinoriteks on maatriksi elemendid ja tegemist ei ole nullmaatriksiga, siis leidub nullist erinev esimest järku miinor $(1, 3, 4, -2, -6 \text{ ja } -8)$ ning maatriksi A astak on üks ehk $\text{rank } A = 1$. Näeme, et astaku leidmine miinorite abil võib olla töömahukas protsess.

◇ ◇ ◇

Efektiivsem viis **maatriksi astaku leidmiseks** on kasutada maatriksi ridade elementaarteisendusi, eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks.

Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.

Näide 2.10 Leiame järgmise 4×5 maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

astaku ridade elementaarteisenduste abil.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +2I \\ -6I \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3II \\ -4II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +III \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Näeme, et maatriksil B on vähemalt üks nullist erinev kolmandat järku miinor

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

mistõttu $\text{rank } B = 3$ ning samuti $\text{rank } A = 3$.

◇ ◇ ◇

2.5 Lineaarvõrrandisüsteemid

Vaatleme võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.1)$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, \dots, x_n$.

Definitsioon 2.9

Võrrandisüsteemi (2.1) nimetatakse **lineaarseks**, kuna tundmatud $x_1, \dots, x_n$ esinevad ainult esimeses astmes. Etteantud arvud a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, on võrrandisüsteemi **kordajad** ja b_i , $i = 1, \dots, m$, on võrrandisüsteemi **vabaliikmed**.

Definitsioon 2.10

Süsteemi (2.1) **lahendiks** nimetatakse sellist tundmatute $x_1, \dots, x_n$ väärtuste komplekti, mille korral on rahuldatud kõik süsteemi (2.1) võrrandid.

Definitsioon 2.11

Süsteemi, millel lahend puudub, nimetatakse vastuoluliseks.

Näide 2.12 Võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

on vastuoluline, kuna mõlemad võrrandid ei saa korraga olla rahuldatud. Näiteks, kui asendada esimesest võrrandist $x = 1 - y$ teise võrrandisse, saaksime väärade lause $1 = 2$. Seevastu ühest võrrandist koosneval süsteemil

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendeid.

◇ ◇ ◇

Märkus 2.3

Olenevalt võrrandite ja tundmatute arvust (ning kordajatest) võib süsteemil (2.1) olla üksainus lahend, mitte ühtegi lahendit või lõpmata palju lahendeid.

Definitsioon 2.12

Süsteemi (2.1) kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse selle **süsteemi maatriksiks**. Veeruvektoreid

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ja

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nimetatakse vastavalt tundmatute ja vabaliikmete vektoriks.

Süsteem (2.1) on esitatav **maatrikskujul**

$$Ax = b. \quad (2.2)$$

Teoreem 2.2

Kronecker-Capelli teoreem ([16, 18]). Süsteem (2.2) on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi A astak $\text{rank } A$ võrdub laiendatud maatriksi

$$L = (A | b)$$

astakuga $\text{rank } L$. Teisiti öeldes, süsteem (2.2) on lahenduv parajasti siis, kui

$$\text{rank } A = \text{rank } L.$$

Teoreem on nime saanud saksa matemaatiku Leopold Kroneckeri (1823-1891) ja itaalia matemaatiku Alfredo Capelli (1855-1910) järgi.

Antud teoreemi on lihtsam rakendada siis, kui oleme tutvunud Gaussi elimineerimismeetodiga.

Näide 2.13 Vaatleme juba tuttavat võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Siis

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega maatriksi A astak saab olla vaid 1 (nullist erinevate miinorite kõrgeim järk). Laiendatud maatriksil leidub aga nullist erinev teist järku miinor M

$$(A | b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Kuna A ja $(A | b)$ astakud on erinevad, siis süsteemil ei ole lahendit. Viimast nägime juba eespool.

◇ ◇ ◇

2.6 Crameri peajuht

Definitsioon 2.13

Öeldakse, et lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ korral on tegemist **Crameri peajuhuga**, kui

- 1) tundmatute arv n võrdub võrrandite arvuga m , s.t $n = m$,
- 2) süsteemi maatriks A on regulaarne, s.t $|A| \neq 0$.

Šveitsi matemaatik Gabriel Cramer (1704-1752).

Lause 2.2

Kui lineaarvõrrandisüsteemi korral on tegemist Crameri peajuhuga, siis on sellel süsteemil täpselt üks lahend [18].

Igat lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$, mille korral on tegemist Crameri peajuhuga, on võimalik lahendada **Crameri valemite** abil

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus A on süsteemi maatriks ning A_i on maatriks, mis saadakse maatriksist A tema i -nda veeru asendamisel vabaliikmete vektoriga b .

Tegemist on rohkem teoreetilise väärtusega, kuna praktikas osutub Crameri valemite kasutamine töömahukaks.

Näide 2.14 Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 2y = -11. \end{cases}$$

Arvutame

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9.$$

Sel juhul

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{-11} & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-2 + 11}{-9} = \frac{9}{-9} = -1$$

ja

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 5 & \mathbf{-11} \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-22 - 5}{-9} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

◇ ◇ ◇

2.7 Gaussi elimineerimismeetod

Vaatame järgmist kolmevõrrandilist süsteemi:

$$\begin{array}{lcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} x + 3y - 2z & = & -5 \\ 2x - y + 4z & = & 7 \\ -3x + 2y - 3z & = & -1. \end{array} \right.$$

Idee on teisendada see süsteem samaväärsele kolmnurksele kujule

$$\begin{array}{lcl} x + b_4y + c_4z & = & d_4 \\ y + c_5z & = & d_5 \\ z & = & d_6 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} x + 3y - 2z & = & -5 \\ y - \frac{8}{7}z & = & -\frac{17}{7} \\ z & = & 3, \end{array} \right.$$

kus kordajate uued indeksid näitavad, et need kordajad võivad muutuda. Nüüd saab viimasest võrrandist esimese suunas järk järgult muutujad asendada.

Gaussi elimineerimismeetod. Olgu antud lineaarvõrrandisüsteem

$$Ax = b.$$

1. Võrrandisüsteem esitatakse laiendatud maatriksina

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

2. Laiendatud maatriks $(A|b)$ teisendatakse **ridade elementaar-teisenduste** abil kolmnurksele kujule, s.t maatriksi A peadiagonaalist allpool (või ülalpool) olevad elemendid teisendatakse nullideks.

Kui ridade teisendamisega saadakse nullid maatriksi A mõlemale poole (pea)diagonaali, siis räägitakse nn *Gaussi täielikust elimineerimismeetodist* või *Gauss-Jordani elimineerimismeetodist*.

Märkus 2.4

Laiendatud maatriksi kahe rea vahetamine ei tähenda midagi muud, kui kahe võrrandi vahetamist. Nullist erineva arvuga korrutamine tähendab tegelikult ühe võrrandi vasaku ja parema poole korrutamist selle arvuga. Mingile reale mingi teise rea liitmine tähendab aga ühele võrrandile mingi teise võrrandi juurde liitmist.

Seega sisuliselt teisendatakse võrrandisüsteemi, jättes tundmatud $x_1, \dots, x_n$ ja tehtemärgid kirjutamata.

Meetod tuleb saksa matemaatikult **Carl Friedrich Gaussi** (1777-1855) järgi ja töötati välja 19. sajandi alguses. Sama meetod on lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks kasutusel ka tänapäeva arvutites.



Maali autor:
Christian Albrecht Jensen
(Wikipedia)

Gaussi panus matemaatikasse on väga märkimisväärne. Lisaks tegeles ta astronoomiaga, geodeesiaga, optikaga, statistikaga, magnetismiga jne. See on see sama Gauss, kes esitas algebra põhiteoreemi kohta esimese arvestava tõestuse. Statistikas on siiani tuntud normaaljaotus ja Gaussi kõver. Kui meil kroonil punasel 10-kupüürilisel kroonil Jakob Hurt, siis sakslastel oli kuulus 10-margane, kuhu peale oli paigutatud Carl Friedrich Gauss.



Gaussile omistatakse ilus lause:

Matemaatika on loodusteaduse kuninganna, arvuteooria - matemaatika kuninganna.

Märkus 2.5

Gaussi elimineerimismeetod võimaldab teada saada, kas antud võrrandisüsteem on lahenduv ja kui on, siis ka leida selle lahendi.

Näide 2.15 Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi $(A|b)$ ja teisendame selle Gauss-Jordani meetodi põhjal nõutud kujule

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ -3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -3 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{2}{7} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{array} \right) -\frac{1}{2}II \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.16 Vaatame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -5 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ -3x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi $(A|b)$ ja rakendame Gaussi täielikku elimineerimise meetodit

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} -2I \\ 3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 11 & -9 & -16 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 11 & -9 & -16 \end{array} \right) -11II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 0 & \frac{25}{7} & \frac{75}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} 2III \\ \frac{8}{7}III \\ \cdot \frac{7}{25} \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) -3III \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.17 Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 4x + y = 6, \end{cases}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Kasutame teisenduste jaoks Gaussi meetodit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ -3I \\ -4I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ -II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Viimane rida muutus nullideks, sest kolmas võrrand osutus esimese kahe summaks s.t viimane võrrand teises võrduseks $0 = 0$. Näeme, et $\text{rank } A = \text{rank } L = 2$ ja Kronecker-Capelli teoreemi tõttu leidub süsteemil vähemalt üks lahend, milleks on $y = 2$ ja $x = 1$. Lahend on ühene, sest $\text{rank } A = 2 = n$.

◇ ◇ ◇

2.8 Süsteemi üldlahend ja erilahend

Definitsioon 2.14

Lineaarvõrrandisüsteemi **üldlahendiks** nimetatakse lõplikust arvust parameetritest sõltuvat lahendite kogumit, millest parameetritele suvalisi reaalarvulisi väärtusi omistades saadakse kõik süsteemi lahendid. Tundmatuid, mis on valitud parameetriteks, nimetatakse *vabadeks tundmatuteks*.

Definitsioon 2.15

Lineaarvõrrandisüsteemi **erilahendiks** nimetatakse sellist lahendit, mis saadakse üldlahendist vabadele parameetritele (tundmatutele) konkreetsete arvuliste väärtuste andmise teel.

Näide 2.18 Lahendame Gaussi meetodiga süsteemi

$$\begin{cases} 4y + z = 2 \\ 2x + 6y - 2z = 3 \\ 4x + 8y - 5z = 4 \end{cases} \text{ ehk } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Erinevate etappide teisendused paneme siinjuhu kirja järjekorranumbrite 1), 2), ... abil.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -5 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} 1) I \leftrightarrow \frac{1}{2} II \\ 2) II \leftrightarrow \frac{1}{2} I \\ 3) -4I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ 2) \cdot \frac{1}{4} \\ 1) II \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad -3II \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Näeme, et maatriksite A ja $(A|b) = L$ astakud on $\text{rank } A = \text{rank } L = 2$. Seega leidub lahend, mille kirjutame välja võrrandite kujul

$$\begin{cases} x &= \frac{7}{4}z \\ y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z. \end{cases}$$

Näeme, et kõik lahendid saab avaldada muutuja z kaudu, kusjuures z võib olla suvaline reaalarv. Seetõttu nimetataksegi muutujat z ka **vabaks tundmatuks**. Võrrandisüsteemi **üldlahendiks**

$$x = \frac{7}{4}c, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}c, \quad z = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

mis on ühe vaba tundmatuga lahend (*vabade tundmatute arv* on võrdne $n - r = 3 - 2 = 1$). Üldlahendi võib ka kirja panna kujul

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{4}c, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}c, c \right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Erilahenditeks on näiteks $c = 0$, $c = 1$ ja $c = 2$ korral

$$(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, 0), \quad (x, y, z) = (\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 1), \quad (x, y, z) = (\frac{7}{2}, 0, 2).$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.19 Vaatleme vaid ühest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 6y - 2z = 3. \end{cases}$$

Siin on 3 tundmatut ja 1 võrrand. On selge, et lahendeid on lõpmata palju. Antud juhul on vabade tundmatute arvuks $n - r = 3 - 1 = 2$. Olgu vabadeks tundmatuteks x ja y . Sel juhul

$$2z = -3 + 2x + 6y \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{3}{2} + x + 3y$$

ja süsteemi üldlahend on esitatav kujul

$$(x, y, z) = (c_1, c_2, -\frac{3}{2} + c_1 + 3c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Süsteemi erilahendid on näiteks

$$(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{3}{2} \right), \quad (x, y, z) = \left(0, 1, \frac{3}{2} \right), \quad (x, y, z) = \left(1, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

◇ ◇ ◇

Märkus 2.6

Lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = b$ leidub lahend, kui kehtib $\text{rank } A = \text{rank } L = r$, kus $L = (A | b)$. Lahendite arv sõltub tundmatute arvust n , astakust r ja võrrandite arvust m .

1. $r = n$ korral on süsteemil täpselt üks lahend

$r = n = m$ korral on Crameri peajuht, $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).

2. $r < n$ korral on süsteemil lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)

$r < m \leq n$ korral on astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust, $r = m < n$ korral on võrrandeid tundmatutest vähem.

2.9 Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem

Definitsioon 2.16

Lineaarvõrrandisüsteemi

$$Ax = b$$

nimetatakse **homogeenseks**, kui kõigi tema võrrandite vabaliikmed võrduvad nulliga, s.t kui b on nullvektor: $b = 0$. Vastasel korral nimetatakse võrrandisüsteemi **mittehomogeenseks**.

Märkus 2.7

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = 0$ on alati lahend olemas. Selleks on null-lahend $x = 0$ (nullvektor), mida nimetatakse **triviaalseks lahendiks**. Null-lahend aga ei pruugi olla ainuke lahend.

Märkus 2.8

Kui võrrandisüsteemi maatriksi A determinant $|A| = 0$ (juhul $n = m$), siis maatriksi A astak r on väiksem kui tundmatute arv n . Sellisel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid ning vabu tundmatuid on $n - r$.

Näide 2.20 Vaatleme homogeenet süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Elimineerimismeetodiga lahendades saame

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-3I]{-2I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2II}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (-1) \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad -II \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Näeme, et homogeenne süsteemi korral ei ole vaja süsteemi maatriksit laiendada, sest astakutingimus on alati täidetud. Viimasest teisendusmaatriksist on näha, et $|A| = 0$. Kuna maatriksi A astak $r = 2 < 3$, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Vabu tundmatuid on $n - r = 3 - 2 = 1$. Valime vabaks tundmatuks tundmatu x_3 , s.t. $x_3 = c$, kus $c \in \mathbb{R}$ on suvaline reaalarv. Sel juhul süsteemi üldlahend avaldub kujul

$$x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Viimast võib kirja panna ka kujul

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

s.t. süsteemi lahend avaldub vektori $x = (1, -1, 1)^T$ kordsena. Kui fikseerida arv c , näiteks $c = 2$, siis süsteemi üheks erilahendiks on

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 2.3

[18] Suvalise lineaarvõrrandisüsteemi

$$Ax = b$$

üldlahend x võrdub tema mingi erilahendi x_* ning vastava homogeenne süsteemi

$$Ax_0 = 0$$

üldlahendi x_0 summaga

$$x = x_* + x_0.$$

Mõnikord võib antud teoreem osutada väga kasulikuks ja lubab süsteemi lahenduvuse uurimist veidi lihtsustada. Meie kursusel seda teadma ei pea.

Näide 2.21 Vaatleme vaid ühest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} x + y + z = 3. \end{cases}$$

Vastavaks homogeenseks süsteemiks on

$$\begin{cases} x + y + z = 0. \end{cases}$$

Lihtne on näha, et esialgse süsteemi erilahendiks sobib vektor ühtedest,

$$x_* = (1, 1, 1)^T, \quad (1 + 1 + 1 = 3).$$

Homogeensel süsteemil on kaks vaba tundmatut. Kirjutame selle üldlahendi kujul

$$x_0 = (c_1, c_2, -c_1 - c_2)^T, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sel juhul esialgse süsteemi üldlahend avaldub kahe vektori summana:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_* + x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 3

Funktsioonid

3.1	Funktsiooni mõiste	48
3.2	Üksühesus ja pealekujutus	51
3.3	Liitfunktsioon	52
3.4	Pöördfunktsioon	53
3.5	Põhilised elementaarfunktsioonid	55
3.6	Elementaarfunktsioonid	62
3.7	Jadad *	62

Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond ning nende leidmine.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud (v.a. $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ ja nende pöördfunktsioonid).
3. Paarisfunktsioon, paaritu funktsioon, pöördfunktsioon, üksühene funktsioon.
4. Eksponent- ja logaritmfunksiooni omadused.

Eksamiteemad

1. Funktsiooni mõiste. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond (väärtuste hulk).
2. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon.
3. Mõisted: üksühene funktsioon, liitfunktsioon, pöördfunktsioon.
4. Põhilised elementaarfunktsioonid (mõiste ja graafikud) ja elementaarfunktsioonid (mõiste).

3.1 Funktsiooni mõiste

Kaks muutujat võivad esineda teineteisest sõltuvatena või teineteisest sõltumatutena. Näiteks, pileti hind kahe raudteejaama vaheliseks sõiduks ei sõltu reisija kaalust, seevastu pagasi veohind samade jaamade vahel sõltub pagasi kaalust.

„Sinu eksamihinne on funktsioon ajast, mida sa panustad õpingutesse.“

Jälgides mõnda protsessi, näeme, et selle kulgemine seisneb ikka ühe mõõdetava suuruse muutumises teise mõõdetava suuruse muutumisel: õhu temperatuur muutub aja muutudes, õhurõhk muutub kõrguse muutumisel, soola lahustuvus vees muutub temperatuuri muutumisel jne.

Definitsioon 3.1

Muutujat y nimetame **sõltuvaks** muutujast x , kui x väärtustele vastavad y väärtused.

Muutujat x nimetame *sõltumatuks muutujaks*, muutujat y *sõltuvaks muutujaks*.

Mõiste *sõltumatu muutuja* asemel kasutatakse matemaatikas sõna **argument**.

Oma olemuselt on funktsioon mingi reegel (reeglite kogu, algoritm, protsess), mis igale sisendväärtusele leiab mingi väljundväärtuse. Selliselt võib mõelda igapäevases tegevuses. Matemaatikas formuleeritakse funktsiooni mõiste rangemalt.

Definitsioon 3.2

Olgu antud hulk $X \subset \mathbb{R}$. Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv y , siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud **funktsioon** f , mida märgitakse

$$y = f(x).$$

Elementi $y = f(x)$ nimetatakse elemendi x kujutiseks, elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks.

Kui läbi punkti x tõmmata vertikaalne sirge, siis joon $y = f(x)$ kujutab endast funktsiooni ainult siis, kui tõmmatud sirge lõikab joont $y = f(x)$ ainult ühes punktis. Selline omadus peab kehtima iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast.

Sellisel juhul räägitakse reaalmuutuja reaalkäärtustega funktsioonist või, lühemalt, reaalmuutuja funktsioonist.

Näide 3.1 Näiteks, seos $u = \pm\sqrt{|v|}$ ei kujuta endast funktsiooni, kuna argumentidele v on vastavusse seatud rohkem kui üks väärtus u ($\sqrt{|v|}$ ja $-\sqrt{|v|}$), kui $v \neq 0$. Küll on aga funktsiooniks $u = \sqrt{v}$, $v \in [0, \infty)$.

◇ ◇ ◇

Näide 3.2 Valem (eeskiri)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

kujutab endast funktsiooni, mille väärtuseks on raadiusega r kera ruumala V .

◇ ◇ ◇

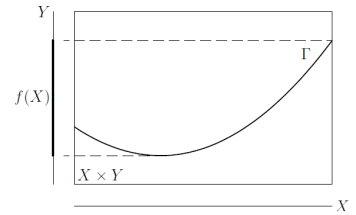
Definitsioon 3.3

Kõikide elementide hulka X , mille puhul elemendile $x \in X$ seatakse funktsiooniga f vastavusse $f(x)$, nimetakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Funktsiooni f kõikide väärtuste hulka

$$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni f **muutumispiirkonnaks** ehk väärtuste hulgaks ja seda tähistatakse $f(X)$.



(Allikas: [15])

Kasutatakse kirjutist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kuid kirjutatakse ka $f : X \rightarrow Y$, kui $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}$.

Näide 3.3 Funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

määramispiirkonnaks (reaalarvude hulgaks) on lõik $[-1, 1]$, kuna kõikide teiste reaalarvude puhul muutuks ruutjuure märgi all olev avaldis negatiivseks ja ruutjuure võtmine viiks meid kompleksarvude hulka. Funktsiooni f muutumispiirkonnaks on lõik $[0, 1]$.

◇ ◇ ◇

Märkus 3.1

Funktsiooni f saab defineerida (loomulikust) määramispiirkonnast X kitsamal hulgal $X_0 \subset X$ ning siis räägitakse funktsiooni ahendist. Sellisel juhul on oluline seda mainida.

Märkus 3.2

Kui reaalmuutuja funktsiooni korral on antud vaid teda määrav eeskiri, määramispiirkond pole aga fikseeritud, siis loetakse määramispiirkonnaks nende argumentide väärtuste hulk, mille korral funktsiooni määrav eeskiri omab mõtet (nn. loomulik määramispiirkond).

Näide 3.4 Näiteks on funktsiooni $y = \sqrt{x^2 - 4}$ määramispiirkond

$$X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2).$$

◇ ◇ ◇

Määramispiirkonna piiramine võib oluliselt muuta funktsiooni omadusi, kusjuures tulemuseks on mingi teine funktsioon. Näiteks, sirge $y = x - 1$ väärtused on rangelt positiivsed argumentide hulgal $X = (1, \infty)$, kuid ei ole seda hulgal $X = (-\infty, 1]$.

Definitsioon 3.4

Funktsiooni f **graafikuks** nimetatakse xy -tasandi punktide hulka

$$G(f) = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\}.$$

Märkus 3.3

Funktsiooni põhilised esitusviisid on järgmised:

1. Analüütiline esitus valemi(te) abil;
2. Numbriline esitus tabeli abil;
3. Geomeetiline esitus graafiku kui joonise abil.

Mainimata määramis- või muutumispirkonda võib kaasa tuua intsidendi Berkeley matemaatikainstituudi seinalle kritseldatud grafiti näol:

$$\sqrt{3} > 2$$

piisavalt “suure” 3 korral. Siin on sümbolile 3 antud huumori mõttes sõltuva muutuja roll.

Näide 3.5 Võtame näiteks funktsiooni $y = f(x)$ (esitus valemiga)

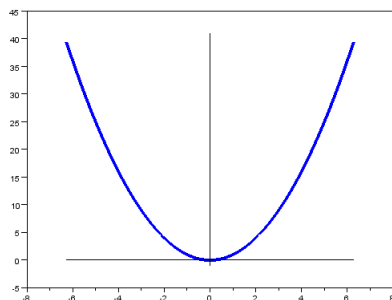
$$y = x^2.$$

Esitus tabelina (kasutatakse väga palju ligikaudses arvutamises, statistikas, andmetöötluses)

x	-10	-5	-1	0	0.1	6	20
y	100	25	1	0	0.01	36	400

Kui selles näites analüütilises esituses on funktsiooni määramispirkond $\mathbb{R}$, siis tabel kirjeldab tegelikult vaadeldava funktsiooni ahendit määramispirkonnaga $X_0 = \{-10, -5, -1, 0, 0.1, 6, 20\}$.

Esituses graafikuna näidatakse samuti vaadeldava funktsiooni ahendit, samal ajal on mõeldav, et graafikut kui joonist võib ette kujutada ka selliselt, et argument x saab kõik väärtused hulgas $\mathbb{R}$.



◇ ◇ ◇

Märkus 3.4

Funktsioon võib olla antud ka ilmutamata kujul nagu näiteks ringjoon (keskpunktiga $(0, 0)$)

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ilmutamata kuju on tegelikult võrrand ühe või mitme muutuja suhtes. Sageli ei ole võimalik sellist võrrandit üheselt lahendada ja seega ei ole võimalik funktsiooni valemiga avaldada. Ilmutatud kujul saaksime kaks funktsiooni $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{1 - x^2}$, mõlema määramispirkond on lõik $[-1, 1]$.

Eeldame, et funktsiooni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes, s.t iga $x \in X$ korral ka $-x \in X$.

Definitsioon 3.5

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas X , kui

$$f(-x) = f(x), \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarituks funktsiooniks**, kui

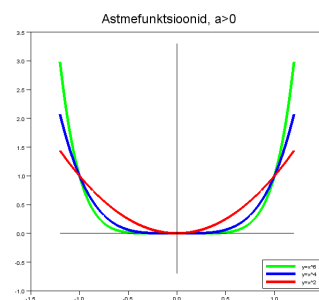
$$f(-x) = -f(x), \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Paaritud funktsioonid on näiteks $y = \sin x$ ja $y = x$, paarisfunktsioonid on näiteks $y = \cos x$ ja $y = x^2$.

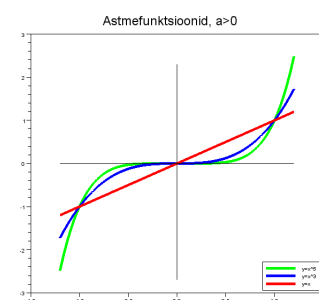
Märkus 3.5

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y -telje suhtes. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline nullpunkti suhtes.

Paaris



Paaritud



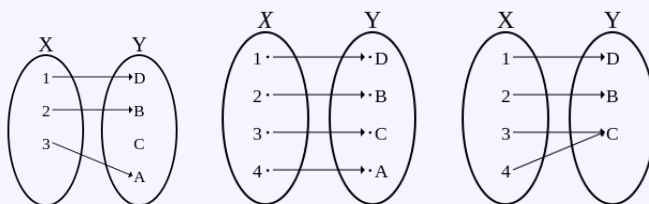
3.2 Üksühesus ja pealekujutus

Selles punktis vaatleme funktsioone, mille määramispiirkond X on suvaline hulk, samuti on suvaline hulk Y , kuhu kuuluvad funktsiooni väärtused. Funktsioon $f : X \rightarrow Y$ tähendab, et hulga X igale elemendile x on vastavusse seatud üheselt määratud element $f(x) \in Y$.

Definitsioon 3.6

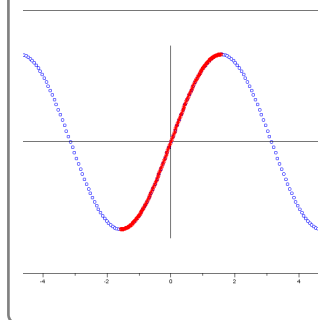
Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks funktsiooniks**, kui iga $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral ka funktsiooni väärtused on erinevad hulgas Y , s.t

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$



1) üksühene 2) üksühene 3) ei ole üksühene funktsioon (Allikas: Wikipedia)

Sinusfunktsioon $y = \sin x$ on näiteks üksühene osaloigul $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kuid ei ole üksühene tervel reaalteljel $x \in \mathbb{R}$. Samuti ei ole teised perioodilised funktsioonid üksühesed määratuna reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$.



Märkus 3.6

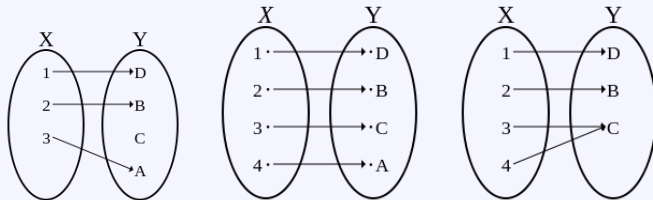
Funktsiooni üksühesus tähendab veel seda, et kui $f(x_1) = f(x_2)$, siis peab kehtima argumentide võrdsus $x_1 = x_2$. Üksühese funktsiooni kohta öeldakse ka injekttiivne funktsioon. Üksühese funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ korral ei ole ühelgi elemendil $y \in Y$ üle ühe originaali. Seega võib vabalt valitud elemendil $y \in Y$ olla parajasti üks originaal või originaali mitte olla.

Näide 3.6 Konstantne funktsioon $f(x) = 1$ on üksühene ühepunktisel hulgal $x \in \{a\}$ ja ei ole üksühene määratuna mingil suuremal hulgal. Lineaarne funktsioon $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) on alati üksühene.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 3.7

Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **pealekujutuseks**, kui $f(X) = Y$, s.t iga elemendi $y \in Y$ korral leidub originaal $x \in X$ nii, et $y = f(x)$.



1) ei ole pealekujutus 2) pealekujutus 3) pealekujutus (Allikas: Wikipedia)

Matemaatikas öeldakse pealekujutuse asemel ka *sürjektiivne funktsioon* ning üksühese pealekujutuse asemel *bijektiivne funktsioon*.

Siinusfunktsioon $y = \sin x$ on pealekujutus vaadelduna $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, kuid mitte $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

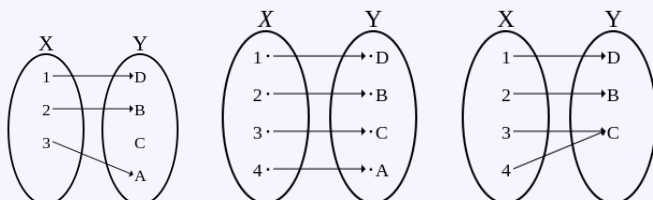
Näide 3.7 Konstantne funktsioon $f(x) = 1$ on pealekujutus kui $f : \mathbb{R} \rightarrow \{1\}$, kuid ei ole pealekujutus kui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lineaarne funktsioon $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) on pealekujutus kui funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 3.8

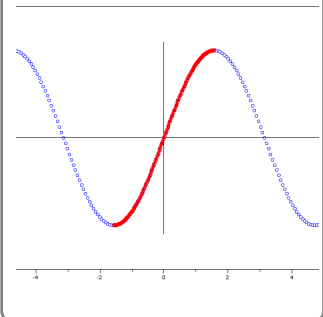
Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks pealekujutuseks** ehk üksüheseks vastavuseks, kui f on üksühene ja lisaks veel pealekujutus, s.t igal elemendil hulgast Y leidub üks ja ainult üks originaal.



1) ei ole 2) on üksühene pealekujutus 3) ei ole (Allikas: Wikipedia)

Funktsioon

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus, kuid $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ei ole.



3.3 Liitfunktsioon

Anname siin mõiste üldisel juhul. Niisiis eeldame, et on antud funktsioonid $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$.

Definitsioon 3.9

Funktsioonide f ja g **liitfunktsiooniks** ehk kompositsiooniks nimetatakse funktsiooni $h : X \rightarrow Z$, mis defineeritakse võrdusega

$$h(x) = g(f(x)), x \in X.$$

Kasutatakse kirjutisi $h = gf$ või $h = g \circ f$.

Funktsioonide liitfunktsioon on nendega järjest teisendamine ehk nende järjest rakendamine.

Näide 3.8 Vaatleme funktsioone

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2.$$

Siis saame moodustada liitfunktsioonid

$$(gf)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

$$(fg)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1.$$

Selle näite põhjal võib öelda, et isegi kui $X = Y = Z$, siis $gf : X \rightarrow X$ ja $fg : X \rightarrow X$ ei tarvitse olla võrdsed, mis tähendab, et liitfunktsiooni moodustamise tehe ei ole kommutatiivne.

◇ ◇ ◇

3.4 Pöördfunktsioon

Olgu antud funktsioon $f : X \rightarrow Y$, mis on üksühene pealekujutus. Siis igal elemendil $y \in Y$ on olemas parajasti üks originaal $x \in X : f(x) = y$.

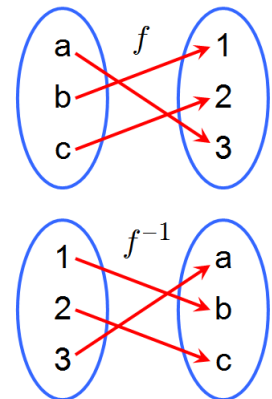
Definitsioon 3.10

Üksühese vastavuse $f : X \rightarrow Y$ pöördfunktsioon $f^{-1} : Y \rightarrow X$ määratakse võrdusega

$$f^{-1}(y) = x,$$

kus $f(x) = y$ iga $x \in X$ korral.

Pöördfunktsioon f^{-1} seab igale elemendile $y \in Y$ vastavusse selle originaali funktsiooni f mõttes (see tähendab, et $f(x) = y$). On arusaadav, et $(f^{-1})^{-1} = f$, s.t funktsiooni $f^{-1} : Y \rightarrow X$ pöördfunktsioon on $f : X \rightarrow Y$.



Allikas: Wikipedia

Märkus 3.7

Märgime, et kui $f : X \rightarrow Y$ ei ole üksühene, siis leidub $y \in Y$, millel on vähemalt kaks originaali ja toodud viisil pöördfunktsiooni defineerida ei saa. Samuti, kui $f : X \rightarrow Y$ ei ole pealekujutus, siis leidub $y \in Y$, millel ei ole originaali ja jälle pöördfunktsiooni ei ole. Niisiis on funktsioon $f : X \rightarrow Y$ pööratav parajasti siis, kui on tegemist üksühese vastavusega hulkade X ja Y vahel.

Funktsiooni pööratavus on eriti oluline võrrandite lahendamise uurimisel.

Näide 3.9 Seame Celsiuse kraadidele vastavusse Fahrenheiti kraadid

$$y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Matemaatiliselt saab selle funktsiooni defineerida tervel reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$ ja on tegemist üksühese pealekujutusega $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Selle järgi näiteks $30^\circ\text{C} = f(30) = \frac{9}{5} \cdot 30 + 32 = 86^\circ\text{F}$. Leiame funktsiooni f pöördfunktsiooni.

Selleks avaldame võrdusest

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

muutuja

$$x = \frac{5}{9}(y - 32),$$

mis tähendab, et

$$f^{-1}(y) = \frac{5}{9}(y - 32), y \in \mathbb{R}.$$

Kui soovitakse kasutada tähist x funktsiooni argumendina ja y väärtusena, siis võib kirjutada $y = f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$, $x \in \mathbb{R}$. See võimaldab funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikut kanda ühisele xy -teljestikule, milles mõlema argumendiks on $x \in X$.

◇ ◇ ◇

Näide 3.10 Leiame funktsiooni

$$y = \frac{x+1}{x}$$

pöördfunktsiooni. Näeme, et $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on üksühene pealekujutus. Nõudes, et $x \neq 0$, avaldame

$$xy - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y-1}.$$

Seega pöördfunktsioon on $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kus

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

◇ ◇ ◇

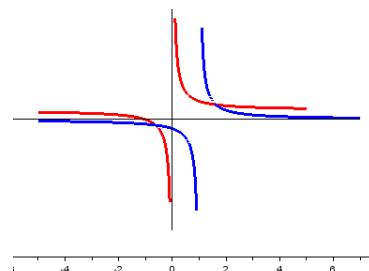
Näide 3.11 Funktsiooni $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ pöördfunktsiooniks on

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Funktsioonil $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, ei ole pöördfunktsiooni, sest ta ei ole üksühene.

◇ ◇ ◇

Näiteks, $86^\circ F = f^{-1}(86) = \frac{5}{9}(86 - 32) = \frac{5}{9} 54^\circ C = 30^\circ C$.



3.5 Põhilised elementaarfunktsioonid

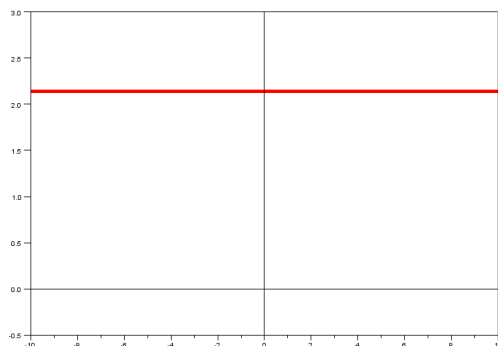
Definitsioon 3.11

Põhiliste elementaarfunktsioonide all mõistetakse järgmisi funktsioone:

1. konstantne funktsioon $y = c$,
2. astmefunktsioon $y = x^a$,
3. eksponentfunktsioon $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$),
4. logaritmifunktsioon $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$),
5. trigonomeetrilised funktsioonid
 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$,
6. arkusfunktsioonid
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

Matemaatilises analüüsis enim uuritud ja kõige sagedamini esinevad funktsioonid on elementaarfunktsioonid.

- **Konstantne funktsioon** $y = c$ tähendab seda, et igale reaalarvule $x \in \mathbb{R}$ seatakse vastavusse sama arv $c \in \mathbb{R}$ ehk $f(x) = c$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Selle graafikut saab ette kujutada järgmiselt:



Konstantne funktsioon vaadelduna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on paarisfunktsioon, ei ole üksühene; on pealekujutus vaadelduna $f : \mathbb{R} \rightarrow \{c\}$.

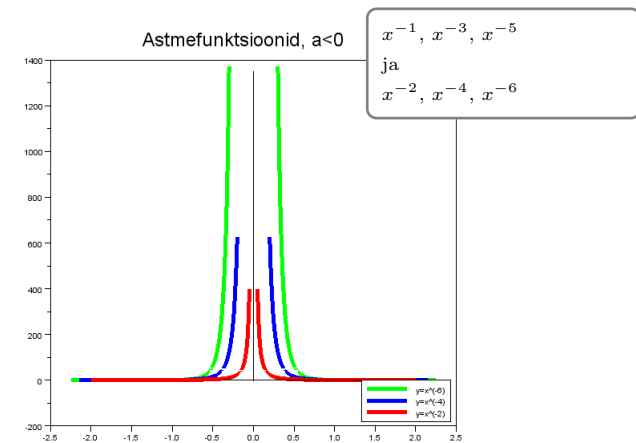
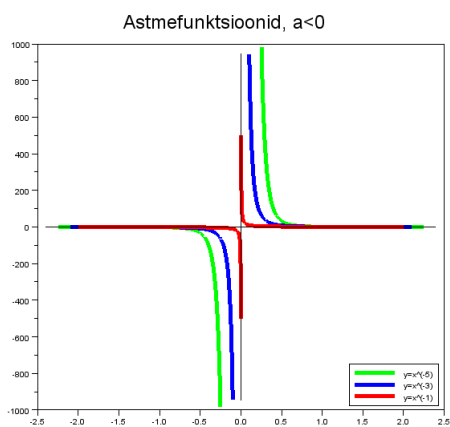
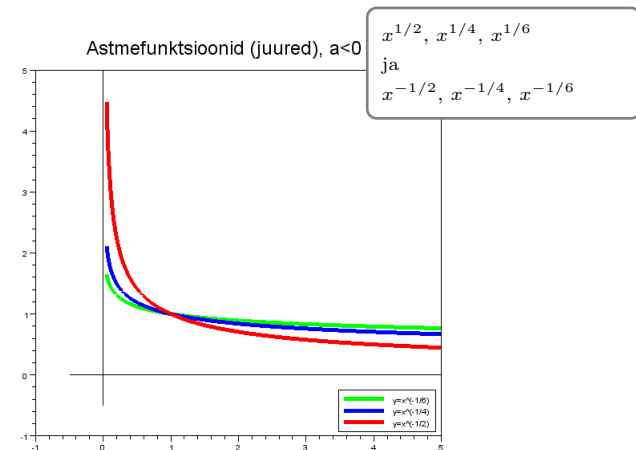
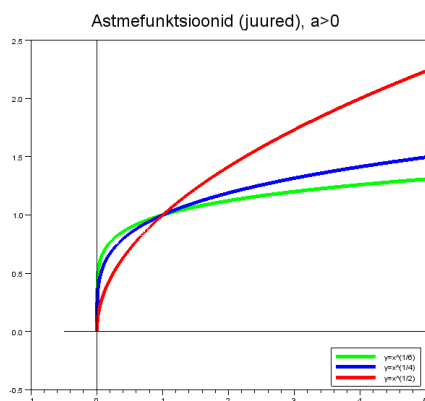
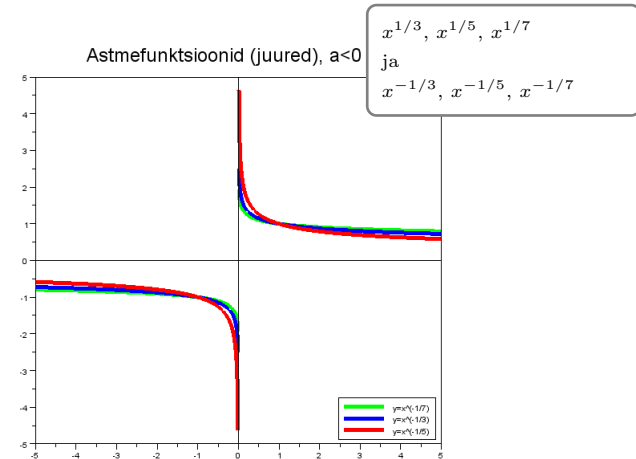
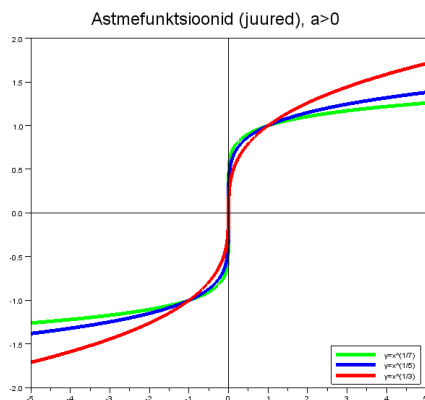
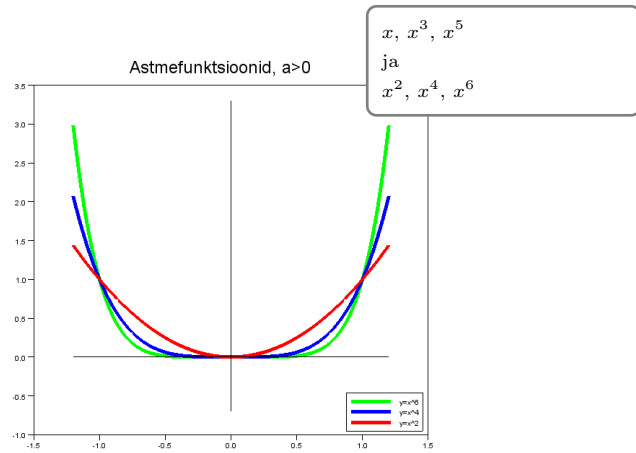
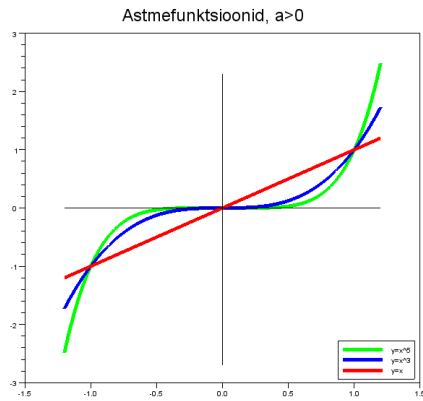
- **Astmefunktsioon** $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

Näiteks funktsioonid $y = x$ ja $y = x^3$ on üksühesed pealekujutused ja paaritud funktsioonid vaadelduna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Funktsioonid $y = x^2$ ja $y = x^4$ on paarisfunktsioonid, ei ole üksühesed kui funktsioonid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Kui $a \in (0, 1)$, siis saame juurfunktsioonid, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ loomuliku määramispiirkonnaga $[0, \infty)$; $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ loomuliku määramispiirkonnaga $\mathbb{R}$. Kui $a < 0$, siis $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ ja määramispiirkonnast jääb kindlasti välja punkt $x = 0$.

Astmefunktsioonid, sealhulgas eriti täisarvuliste astmenäitajatega, on ühed põhilistest alusfunktsioonidest, mille abil moodustatakse uusi funktsioone.



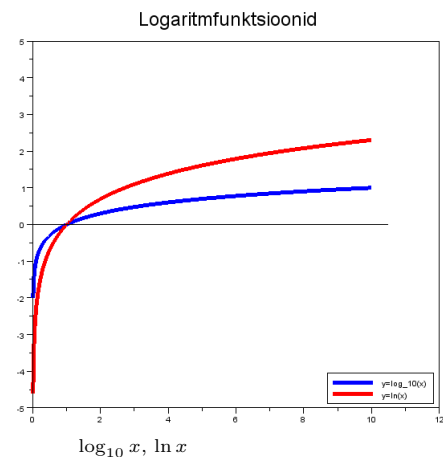
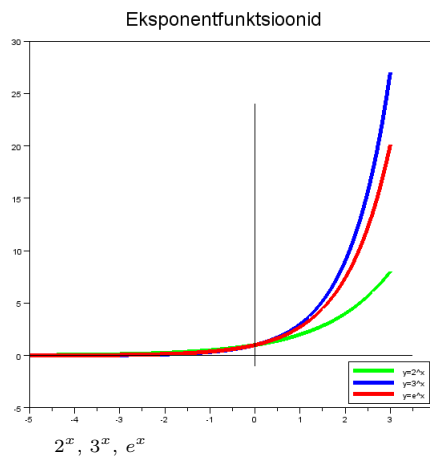
- **Ekspontentfunktsioon** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige olulisem nendest on $y = e^x$, mida kirjutatakse mõnikord ka kujul $y = \exp(x)$. Siin e on Euleri arv.

Tihti on tavaks ekspontentfunktsiooni all mõista kaht erinevat funktsiooni: $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ ($x > 0$). Seejuures $y = e^x$ väärtused argumendi x suurenedes kasvavad kiiresti (eksponentsiaalne kasv) ja $y = e^{-x}$ väärtused argumendi x suurenedes kahanevad kiiresti (eksponentsiaalne kahanemine). Mingis mõttes $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ kirjeldavad oluliselt erinevaid protsesse.

Ekspontentfunktsioonid $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ ($x > 0$) on olulisel kohal loodusprotsesside kirjeldamisel (näiteks rahvastiku (populatsiooni) eksponentsiaalne kasv või kahanemine), intresside arvutamisel finantsmatemaatikas jne.

Ekspontentfunktsioonil on järgmised omadused:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, & a^x &> 0, \\ a^{x+y} &= a^x a^y, & a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\ a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y}, & (a^x)^y &= a^{xy}, & (ab)^x &= a^x b^x. \end{aligned}$$



- **Logaritmifunktsioon** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige olulisem nendest on naturaallogaritm $y = \ln x$ (logaritmi alus on arv e , $y = \log_e x$), laialt levinud on ka kümneendlogaritm $y = \log_{10} x$. Ekspontentfunktsioon $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, ja logaritmifunktsioon $g(x) = \log_a x$, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, on teineteise pöördfunktsioonid, s.t $f^{-1} = g$ ja $g^{-1} = f$.

Vastupidiselt kiirele eksponentsiaalsele kasvule ja kahanemisele, on logaritmiline kasv ja kahanemine aeglased. Logaritmifunktsioonid on samuti olulised reaalelu protsesside kirjeldamisel.

Logaritmifunktsioonil on järgmised omadused:

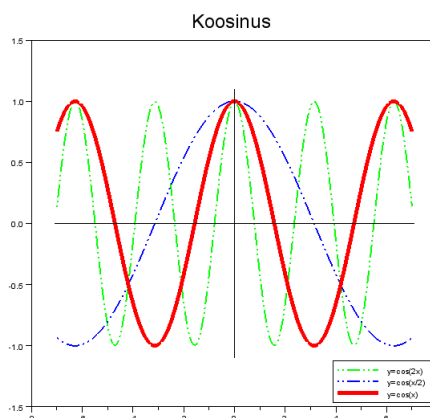
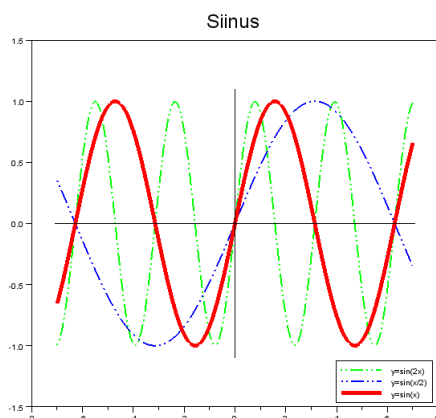
$$\log xy = \log |x| + \log |y|, \quad \log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y|, \quad (\text{siin } xy > 0),$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log x^a = a \log x, \quad x = a^{\log_a x}, \quad (\text{siin } x > 0),$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln e^{-1} = -1.$$

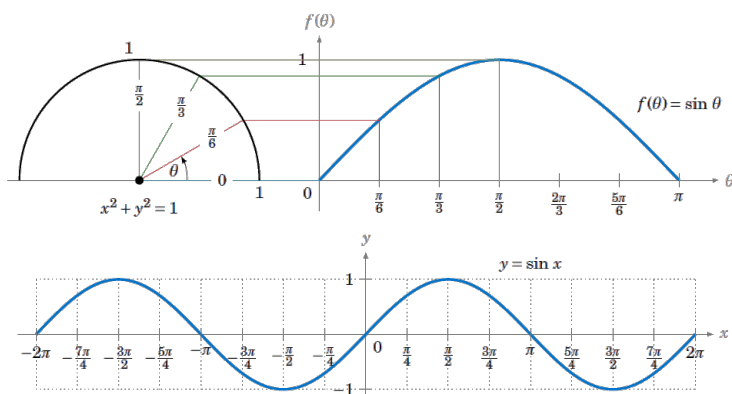
Kui tekstis ei ole midagi muud täpsustatud, siis sageli võidakse kirjutise $\log x$ all mõelda ka naturaallogaritmi $\ln x$. See on eriti levinud teaduskirjanduses. Paneme tähele, et erineva alusega logaritmid erinevad üksteisest vaid konstandi kordsuse poolest.

• **Trigonomeetrilised funktsioonid** $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

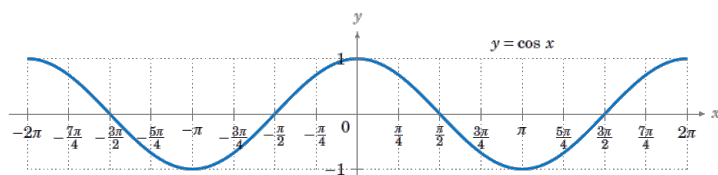


$\sin 2x$, $\sin x/2$, $\sin x$

$\cos 2x$, $\cos x/2$, $\cos x$



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)



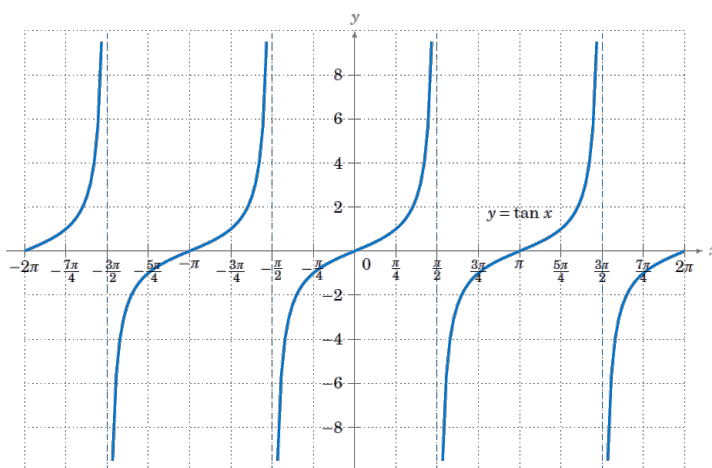
(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Siinusfunktsioon
 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus.

Kosinusfunktsioon
 $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ on paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus.



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Tangensfunktsioon

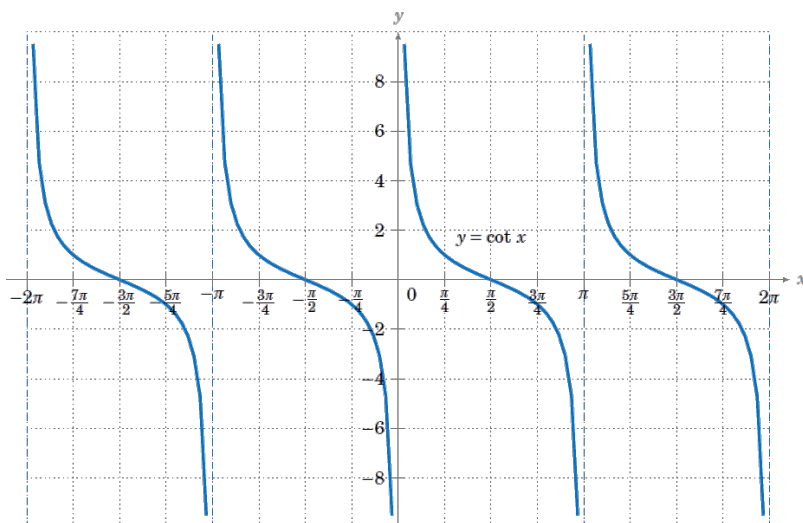
$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
on paaritu funktsioon, ei ole
üksühene.

Funktsioon $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$
on üksühene pealekujutus.

Tangensi saab esitada siinuse ja
koosinuse kaudu:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Kootangensfunktsioon

$\cot : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
on paaritu funktsioon, ei ole
üksühene.

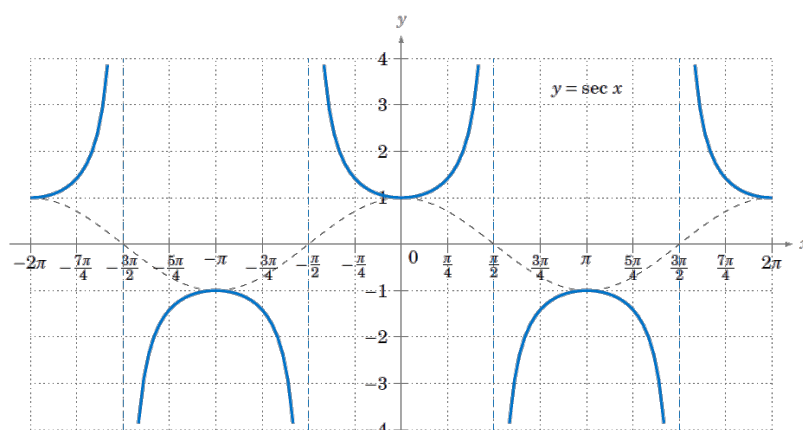
Funktsioon $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ on
üksühene pealekujutus.

Kootangensi saab esitada tan-
gensi või siinuse ja koosinuse
kaudu:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

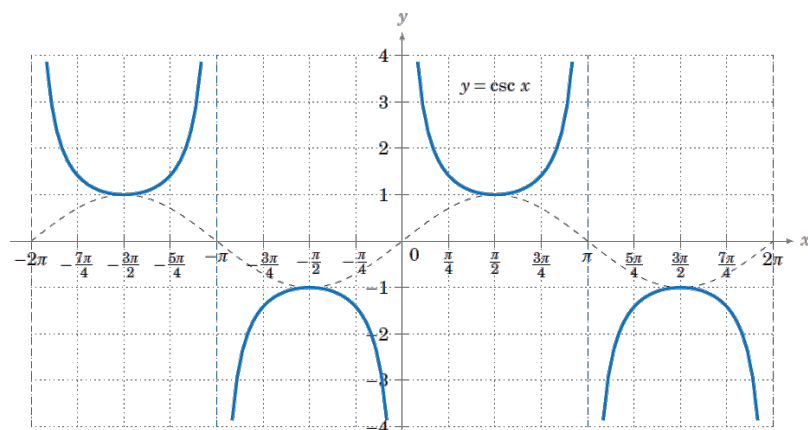
Seekans on koosinuse pöörd-
väärtus:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funktsioon

$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ on paarisfunktsioon,
ei ole üksühene.



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Kooseekans on siinuse pöördväärtus:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funktsioon

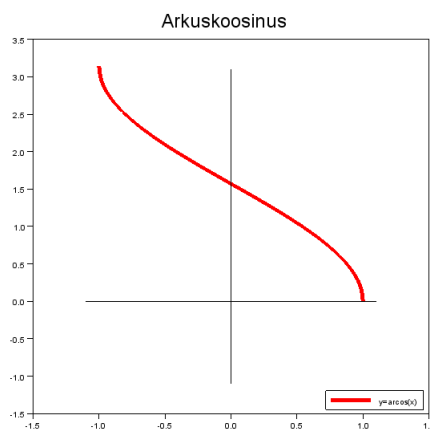
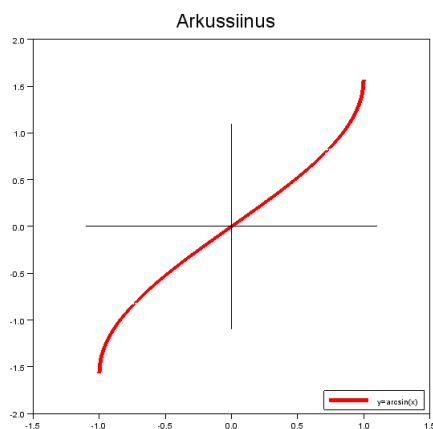
$\csc : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Märkus 3.8

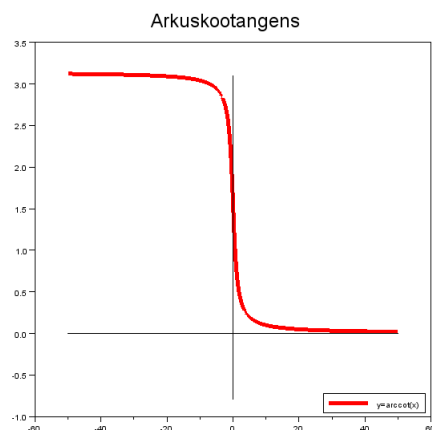
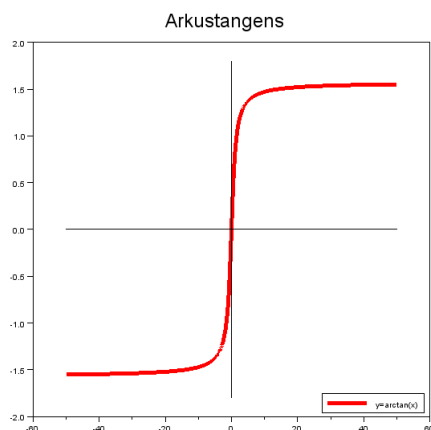
Funktsioonid $\cot x$, $\sec x$ ja $\csc x$ on avaldatavad $\sin x$ ja $\cos x$ kaudu. Seega saab ka nendeta hakkama, aga mõnikord on nende kasutamine avaldistes otstarbekam.

- **Arkusfunktsioonid** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$ on vastavate trigonomeetriliste funktsioonide $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ pöördfunktsioonid sobiva määramispiirkonna ja väärtuste hulga korral.

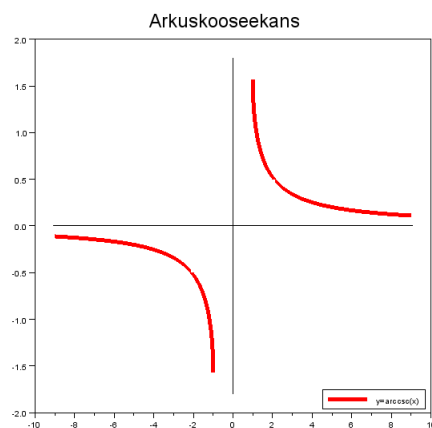
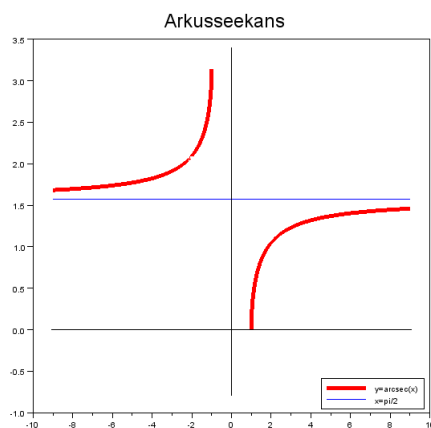
Funktsioon arkussinus $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on paaritu, üksühene pealekujutus. Funktsioon arkuskoosinus $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ on üksühene pealekujutus.



Funktsioon arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ on paaritu, üksühene pealekujutus. Funktsioon arkuskootangens $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ on üksühene pealekujutus.



Funktsioon arkusseekans $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ on üksühene pealekujutus. Funktsioon arkuskoossekans $\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ on paaritu üksühene pealekujutus.



Märkus 3.9

Kirjanduses kasutatakse arkusfunktsioonide tähistamiseks ka kirjutusviisi $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ja $\cot^{-1}x$. Viimane on tulnud $f(x)$ pöördfunktsiooni f^{-1} tähistusest. Seda ei tohi segamini ajada argumenti x pöördväärtusega $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Funktsioonide korral kirjutusviis $f^{-1}(x)$ **ei tähenda** avaldist $\frac{1}{f(x)}$, vaid pöördfunktsiooni. Segaduse vältimiseks on kasulikum kasutada nime-tusi $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ või siis $y = \operatorname{asin} x$, $y = \operatorname{acos} x$, $y = \operatorname{atan} x$, $y = \operatorname{acot} x$.

Märkus 3.10

Mõnikord läheb vaja võrduseid

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}.$$

3.6 Elementaarfunktsioonid

Definitsioon 3.12

Elementaarfunktsioonideks nimetatakse funktsioone, mis on saadavad põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel.

Mittelementaarfunktsioone leiab näiteks ridade poolt defineerituna.

Näiteks on

$$f(x) = e^{\sin(1 + \sqrt{\log(4+x^2)})}$$

elementaarfunktsioon. Mitteelementaarfunktsioon on aga näiteks integraalne siinus $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Märkus 3.11

Elementaarfunktsioonid on sealhulgas funktsioonid, millel on matemaatikas rida lihtsaid omadusi. Sõnastame need hiljem vastavate teemade all, nagu piirväärtus, pidevus, tuletise ja integraali leidmine.

3.7 Jada *

Jada on oma sisult lõpmatu järjestatud arvude loend

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

millel on esimene element ja igale elemendile vahetult järgnev element.

Näiteks:

$$2, 4, \dots, 2n, \dots$$

Definitsioon 3.13

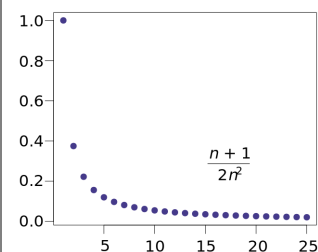
Jadaks nimetatakse naturaalarvulise argumentiga funktsiooni

$$x = x(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tähistame (x_n) . Arvu x_n nimetatakse jada (x_n) üldliikmeks (ka elemendiks). Kirjutame ka

$$(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Jadad on matemaatikas tähtsal kohal. Nende abil on tõestatud palju olulisi tulemusi ja kindlasti tõestatakse veel uusi.



Joonis: Wikipedia. Jada graafline esitus.

Näide 3.12 Funktsiooni $x = n^2$ korral saame jada

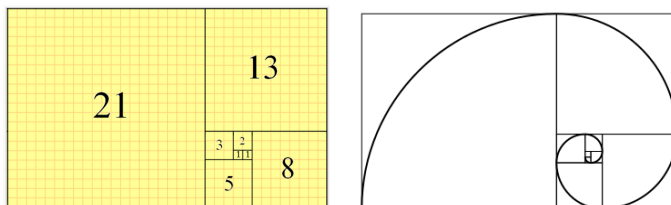
$$(x_n) = 1, 4, \dots, n^2, \dots$$

◇ ◇ ◇

Näide 3.13 Võib-olla et kõige tuntum või vähemalt mingis mõttes erilisem jada on **Fibonacci jada**, mille kaks esimest liiget on ühed ning iga järgnev liige on kahe eelneva liikme summa:

$$(F_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \dots$$

Järgnevalt on toodud graafiliselt Fibonacci spiraal, mis on väga lähedane „kuldsele“ spiraalile:



Joonised: Wikipedia.

Fibonacci arvud on seotud kuldlõikega, kus terve lõik jaotatakse kaheks osaks nii, et kogu lõigu pikkuse ja pikima osalõigu suhe on sama, mis pikima ja lühema osalõigu suhe ehk

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\dots$$

◇ ◇ ◇

Leonardo Bonacci (1170-1250) oli itaalia matemaatik, keda tuntakse ka nime all Fibonacci. Fibonacci jadaga seotud arvud esinevad üsna tihti ka looduses. Üheks põhjuseks võib olla see, et kahe järjestikuse Fibonacci arvu jagatise väärtus läheneb kuldlõike suhtele $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\dots$ ja kuldlõige on looduses erilisel kohal. On täheldatud, et kahe kohakuti asuva (taime) lehe vahel on tihti Fibonacci arv lehti.

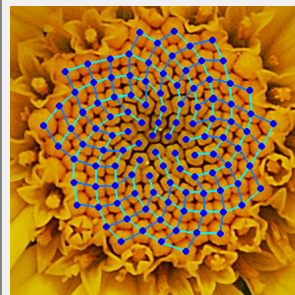


Foto: Wikipedia. Fotol on kollase kummeli õis, mille sees on struktuur, kus on 21 tumesinist ja 13 helesinist spiraali.

Peatükk 4

Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

4.1	Jada piirväärtus *	66
4.2	Funktsiooni piirväärtuse mõiste	71
4.3	Ühepoolsed piirväärtused	74
4.4	Funktsiooni piirväärtuse omadused	75
4.5	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	77
4.6	Mõned erilised piirväärtused	80
4.7	Pidevad funktsioonid	83
4.8	Funktsiooni katkevusviise	84
4.9	Pidevate funktsioonide omadused	86

Kontrolltöö teemad

- Piirväärtuse tehete seotud omadused. Piirväärtuse arvutamine.
- Piirväärtuste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ kasutamine.
- Funktsiooni pidevuse uurimine.

Eksamiteemad

- Piirväärtuse intuiitvne mõiste. Lõpmatud piirväärtused, ühepoolsed piirväärtused.
- Piirväärtuse omadused (teoreemide 4.2-4.6 sõnastused).
- Piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Pideva funktsiooni mõiste. Pideva funktsiooni muudu omadus (märkus 4.2).
- Pidevate funktsioonide omadused. Teoreem vahepealsetest väärtustest.

4.1 Jada piirväärtus *

“Kõigist suuruste muutumisviisidest on kõrgemas matemaatikas eriti tähtsad kaks: suuruste **tõkestamatu kasvamine** ja suuruste **tõkestamatu kahanemine**. Need kaks suuruste muutumisviisi on vahenditeks, mille abil luuakse kõrgema matemaatika põhilised mõisted, nagu piirväärtus, pidevus, tuletis, diferentsiaal ja integraal.”

Näide 4.1 Vaatleme naturaalarvude jada (vt. [29])

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

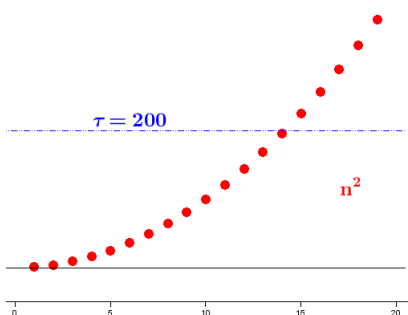
Antud jada esimene element on 1 ja sellel ei ole eelnevat elementi. Kõigil teistel elementidel on aga olemas eelnev ja järgnev element. Missuguse naturaalarvu me ka võtaksime, ikka leidub veel temale järgnev element. Seepärast naturaalarvude jadal pole viimast elementi, sel jadal pole lõppu, see jada on lõpmatu.

Jadas leidub kõige väiksem element, milleks on arv 1. Iga järgnev element on eelmisest suurem ning sellest ja veel lõpmatust jadast järel-
dub, et antud jadas ei ole kõige suuremat elementi. Näeme, et suurus n ületab kasvades iga etteantud tõkke τ . Teisiti, pole tõket, mida arv n kasvades ei ületaks ehk, lühemalt, arv n kasvab tõkestamatult.

◇ ◇ ◇

Näide 4.2 On kerge näha, et samuti kasvab tõkestamatult jada

$$1, 4, \dots, n^2, \dots$$



◇ ◇ ◇

Definitsioon 4.1

Kui jada üldliige x_n muutub nii, et ta oma **väärtuselt saab, ja siis ka jääb**, suuremaks igast etteantud (positiivsest) arvust, siis ütleme, et jada **kasvab tõkestamatult**. Kirjutame

$$x_n \rightarrow \infty.$$

“Igapäevases kõnes kasutame sageli sõnu ja ütlist, nagu lõpmatu, igavene, hetkeline, möötmatult suur, kaduvväike jt. Nii neid kui paljusid teisigi sõnu kasutatakse tavaliselt endale aru andmata, mida nad õieti tähendavad, missuguseid kujutlusi nendega tuleb siduda. Teadust saab aga rajada ainult täpselt defineeritud mõistetele.”

Toodud sissejuhatav tekst ja paljud näited pärinevad õpikust [29], G. Rägo. Kõrgem matemaatika I.



Foto: Vikipeedia.

Gerhard Johannes Rago (5. detsember 1892 - 27. juuni 1968) oli eesti matemaatik.

Piirväärtust vaatleme me lähemalt alles järgmises peatükis. Küll aga on jadade jaoks võimalik sellest rääkida veidi varem. Järgnev jada piirväärtuse mõiste ülesehitus pärineb samuti G. Rago õpikust ja on veidi „leebem“, kui seda õpetatakse matemaatikutele.

Definitsioon 4.2

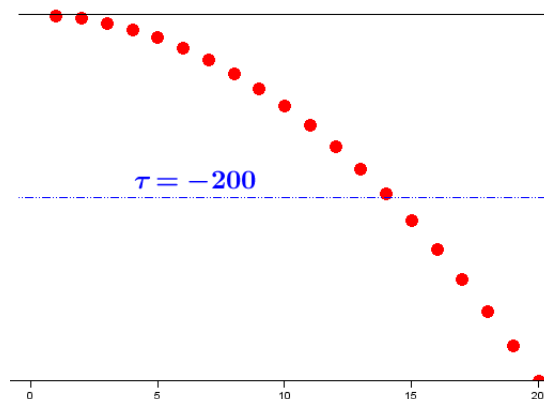
Kui jada üldliige x_n muutub nii, et ta oma väärtuselt saab, ja siis ka jääb, väiksemaks igast etteantud (negatiivsest) arvust, siis ütleme, et jada **kahaneb tõkestamatult**. Kirjutame

$$x_n \rightarrow -\infty.$$

Näide 4.3 Jada

$$-1, -4, \dots, -n^2, \dots$$

kahaneb tõkestamatult.



◇ ◇ ◇

Definitsioon 4.3

Kui jada (x_n) elemendid tõkestamatult kasvavad või kahanevad, s.t $x_n \rightarrow \infty$ või $x_n \rightarrow -\infty$, siis me ütleme, et jada (x_n) piirväärtus on lõpmatu. Viimast märgime vastavalt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{või} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Märkus 4.1

Viimast öeldakse rangemalt ka nii: jada (x_n) piirväärtus on ∞ , kui iga (positiivse) arvu τ korral leidub selline naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib

$$x_n > \tau.$$

Analoogiliselt jada (x_n) piirväärtus on $-\infty$, kui iga (negatiivse) arvu τ korral leidub naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib

$$x_n < \tau.$$

Näide 4.4 Seega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty.$$

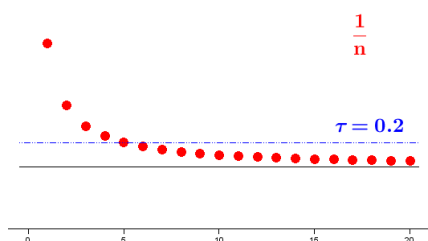
◇ ◇ ◇

Näide 4.5 Vaatleme naturaalarvude jada asemel nende pöördväärtuste jada (vt. [29])

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Antud jada esimene element on 1 ja sellel ei ole eelnevat elementi. Kõigil teistel elementidel on aga olemas eelnev ja järgnev element. Ka see jada on lõpmatu, kuid seekord järjestatud kahanevalt.

Jadas leidub kõige suurem element, milleks on arv 1. Iga järgnev element on eelmisest väiksem ning sellest ja veel lõpmatust jadast järeldub, et antud jadas ei ole kõige väiksemat elementi. Näeme, et arv $\frac{1}{n}$ jääb n kasvades väiksemaks igast etteantud tõkkest $\tau > 0$ ehk, teisiti, pole positiivset tõket, millest arv $\frac{1}{n}$ suuruse n kasvades ei jääks väiksemaks ehk, lühemalt, murd $\frac{1}{n}$ kahaneb tõkestamatult.



Viimast on lihtne näidata. Olgu τ suvaline positiivne arv (siin peetakse silmas, et võib valida kuitahes väikese positiivse arvu). Kõigi n väärtuste korral, kus

$$n > \frac{1}{\tau},$$

kehtib võrratus

$$\frac{1}{n} < \tau.$$

Seega ükskõik, millise positiivse tõkke $\tau > 0$ me ka ette ei annaks, siis mingist n väärtusest alates on arvud $\frac{1}{n}$ sellest tõkkest τ väiksemad.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 4.4

Kui jada üldliige x_n muutub nii, et ta oma **absoluutväärtuselt saab, ja siis ka jääb** väiksemaks igast etteantud positiivsest arvust, siis ütleme, et jada **piirväärtus** on 0. Viimast märgime

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{või} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

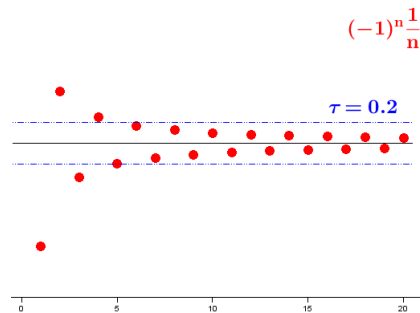
Märkus 4.2

Viimast öeldakse rangemalt nii: jada (x_n) piirväärtus on null, kui iga arvu $\tau > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib $|x_n| < \tau$.

Näide 4.6 Jada võib tõkestamatult kahaneda ka negatiivsest suunast või ka siis, kui tema väärtused on kord positiivsed ja kord negatiivsed. Näiteks on selline jada

$$(x_n) = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

◇ ◇ ◇



Definitsioon 4.5

Kui mingi reaalarvu L korral $|x_n - L| \rightarrow 0$, siis ütleme, et jada (x_n) piirväärtus on L . Viimast märgime

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

Märkus 4.3

Viimast öeldakse rangemalt nii: jada (x_n) piirväärtus on arv L , kui iga etteantud arvu $\tau > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib

$$|x_n - L| < \tau.$$

Näide 4.7 Jada

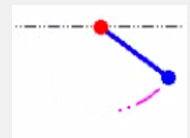
$$0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots$$

piirväärtus on $\frac{1}{3}$, kuna

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| \rightarrow 0, \quad x_n = 0.\underbrace{33\dots3}_n.$$

◇ ◇ ◇

Vaadeldes tasakaalust välja viidud rippuva laelambi edasitagasi võnkumist, näeme, et võngete amplituudid (suurim kõrvalekalle tasakaaluasendist) on vaheldumisi positiivsed ja negatiivsed, kusjuures mingist arvust võngetest alates amplituudi suurus jääb püsivalt allapoole kuitahes väikesest etteantud tõkkest. Teoreetiliselt võiksid võnked järjest vähenedes kesta igavesti. Tegelikult lõpeb liikumine juba mõnekümne võnke järel, kuna võnkuva laelambi energia kulub õhutakistuse ületamisele.



Intuitiivselt võib mõelda ka nii. Jada (x_n) piirväärtus on arv L , kui jada liikmed aina lähenevad ja lähenevad arvule L , sealjuures ei lähene aga ühelegi teisele arvule.

Märgime, et konstantse jada korral on piirväärtus ilmne, näiteks

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

Siin pole enam kuskile läheneda, „enam lähemale ei saa“.

Piirväärtuse tähistusena kasutatakse sümbolit $\lim$, mis on lühend ladinakeelsest sõnast *limes*, ja mis tähendab piiri.

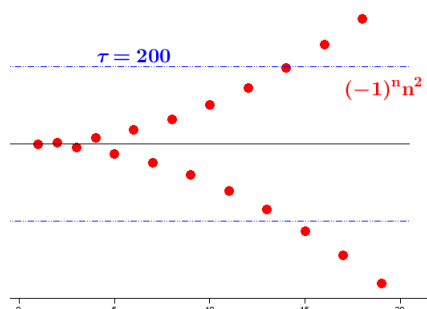
Definitsioon 4.6

Jada (x_n) nimetatakse **koonduvaks**, kui tal eksisteerib lõplik piirväärtus. Jada, mis ei koonu, nimetatakse **hajuvaks** ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ või piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ei leidu).

Näide 4.8 Igal jadal ei pruugi olla piirväärtust. Näiteks jada

$$-1, 4, \dots, (-1)^n n^2, \dots$$

hajub, kuna jada elemendid on vahelduvate märkidega ning need ei jää suuremaks etteantud positiivsest arvust ega jää ka väiksemaks etteantud negatiivsest arvust.



◇ ◇ ◇

Näide 4.9 Vaatleme jada $(x_n) = 1, 0, 1, 0, \dots$. Antud jada hajub, kuna ei leidu piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Kõige lihtsam on mõelda sellest nii, et antud jada korral tema liikmed ei lähene ühelegi kindlale arvule, vaid hoopis võnguvad, olles vaheldumisi 1 ja 0.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 4.7

Jada (x_n) nimetatakse **tõkestatuks**, kui leidub selline reaalarv $M > 0$ nii, et jada kõik elemendid on absoluutväärtuse poolest väiksemad kui arv M , s.t

$$|x_n| < M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vastasel korral nimetatakse jada **tõkestamatuks**.

Näide 4.10 On selge, et jadad (n) ja $(-n^2)$ ei saa olla tõkestatud, kuna nad tõkestamatult kasvavad. Jada $(1/n)$ on tõkestatud iga arvuga $M > 1$. Samuti on tõkestatud jada $1, -1, 1, -1, \dots$, kuigi see jada ei ole koonduv.

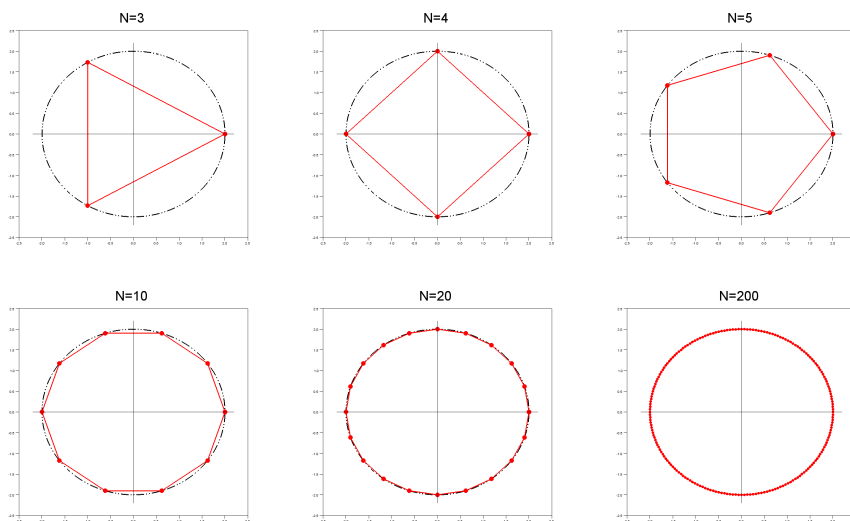
◇ ◇ ◇

4.2 Funktsiooni piirväärtuse mõiste

Paljud loodusteaduse ja tehnika küsimused seavad meid vajaduse ette uurida funktsiooni käitumist argumendi lähenemisel mõnele kindlale väärtusele. Näiteks võib meid huvitada küsimus, kuidas käitub vedeliku ruumala temperatuuri lähenemisel keemispunktile, kuidas käitub terasvarda venivus koormuse lähenemisel elastsuspiirile jne.

Piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi üks alustalasid ja see eristab matemaatilist analüüsi näiteks algebrast ja trigonomeetriast. Sellele mõistele baseerub enamus meie järgmistes loengutes vaadeldavatest mõistetest, nagu näiteks funktsiooni pidevus, tuletis, keha hetkkiirus, integraal. Samal ajal, kui tegemist on olulise mõistega, on tegemist ka keerulise mõistega. Sellest tingituna anname oma põhikursuses piirväärtuse mõiste pigem intuitiivselt, kui matemaatiliselt range eeskirja abil. Viimase kohta võib lugeda lisas leiduvast materjalist.

Vaatleme näiteks ringjoone pikkuse arvutamist. Viimast saaksime ligikaudu arvutada sirge joonlaua abil, mõõtes ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurkade külgede pikkused.



Mida suuremaks läheb hulknurga külgede arv N , seda täpsem peaks olema meie poolt mõõdetud ja arvutatud ringjoone ümbermõõt. Seega on piirväärtuse leidmisel oluline „protsess“, milleks antud olukorras on hulknurga külgede arvu suurendamine. Praktikas tuleb mingil hetkel paratamatult tunnistada, et mõõtetäpsusel on omad piirangud. Küll aga saame praktiliste mõõtmiste asemel jätkata teoreetiliste arvutustega. Saab näidata, et sellisel viisil koostatud hulknurkade külgede summa tõepoolest läheneb väärtusele $2\pi r$, mis kujutab endast ringjoone ümbermõõtu.

Newtoni aegadel ei olnud piirväärtuse mõiste veel päris selge, korrektselt range definitsioon puudus (see viimane ei seganud Newtonil ja Leibnizil andmast väga olulisi praktilisi tulemusi).

Kasutati umbes sellist lähendusviisi, et kui Δx voolab nulli, siis $2 + \Delta x$ voolab arvuks 2. Või siis, kui Δx on piisavalt väike (samal ajal ei tohi Δx võrduda nulliga), siis $2 + \Delta x$ on piisavalt lähedane arvuga 2. Paneme tähele, et need mõisted “piisavalt” ja “voolab” on üsna udused mõisted. Matemaatikas on olukordi, kus sellisest kirjeldusest ei piisa. Kui me ei saa Δx võtta võrdseks nulliga, siis me ei saa ka niisama lihtsalt tõestada, et protsessi $2 + \Delta x$ tulemus on tõesti arv 2.

Näiteks 1797. aastal üritas Joseph-Louis Lagrange tulevise mõistet edasi anda ilma piirväärtuse mõisteta, üritades läbi ajada ainult algebraliste vahenditega (astmeridadega). Lagrange mõistis, et tema väited ei olnud matemaatiliselt alati korrektsed, kuid ei pidanud neid erijuhte eriti tähtsaks.

Bernard Bolzano aastal 1817 ja Augustin-Louis Cauchy aastal 1821 andsid (ϵ, δ) -tüüpi definitsioonid, mis hülgasid geomeetrilise lähenemise ja võtsid kasutusele analüütilise. Karl Weierstrass (1815 - 1897) andis definitsioonile kaasajal laialt kasutatava sõnastuse.



Weierstrass

Karl Weierstrass
Allikas: Wikipedia

Näide 4.11 Vaatleme funktsiooni $f(x) = x - 1$. Lihtne on näha, et kui läheneme argumentiga x tõkestamatult arvule 1, siis funktsiooni väärtused $x - 1$ lähevad tõkestamatult nullile:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01

Antud juhul saab arvutada ka f väärtuse kohal $x = 1$ ja selleks on $f(1) = 0$. Viimane kujutab endast ühtlasi funktsiooni f piirväärtust argumenti x lähenemisel arvule 1.

◇ ◇ ◇

Näide 4.12 Vaatleme järgmist funktsiooni

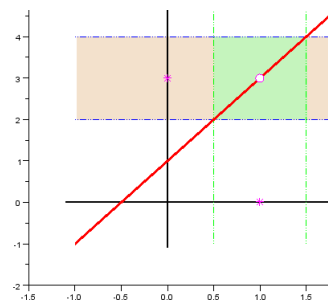
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

mis ei ole määratud $x = 1$ korral. Viimane tähendab, et me ei saa leida funktsiooni väärtust $f(1)$. Proovides argumentiga x minna arvule 1 kuitahes lähedale, saame siiski arvutada

x	0.9	0.99	0.999	...	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	...	2.001	2.01	2.1

Võib täheldada, et argumenti x lähenedes arvule 1 funktsiooni väärtused $f(x)$ lähevad arvule 2. Oma arvutusi võiksime niimoodi jätkata, võttes x väärtusi arvule 1 järjest lähemal ja lähemal. Osutub, et sel korral on argumenti x lähenemisel arvule 1 funktsiooni f piirväärtuseks arv 2, hoolimata sellest, et punktis $x = 1$ ei ole funktsioonil väärtust.

◇ ◇ ◇

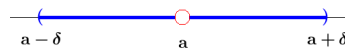


Definitsioon 4.8

Olgu antud $a \in \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$. Punkti a ümbruseks nimetatakse vahemikku $(a - \delta, a + \delta)$, seda nimetatakse veel δ -ümbruseks.

Definitsioon 4.9

Hulga $X \subset \mathbb{R}$ kuhjumispunktiks nimetatakse punkti $a \in \mathbb{R}$, kui punkti a iga ümbrus sisaldab vähemalt ühte temast erinevat hulga X punkti.



Märkus 4.4

Edaspidi vaatleme alati piirprotsesse, kus a on kuhjumispunkt, kusjuures ta ei pruugi kuuluda funktsiooni määramispiirkonda.

Esitame järgnevalt funktsiooni piirväärtuse üldise sõnastuse, mis seletab küll ära mõiste sisu, kuid ei anna konkreetset eeskirja piirväärtuse leidmiseks. Teisalt, viimane ei sega meid edaspidi piirväärtust arvutamast, kuna praktikas vajame me enamasti piirväärtuste omadusi, mitte definitsiooni ennast (vt Lisa D.1).

Definitsioon 4.10

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

kui punktide a piisavalt lähedastes määramispiirkonna X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kuitahes vähe.

Märkus 4.5

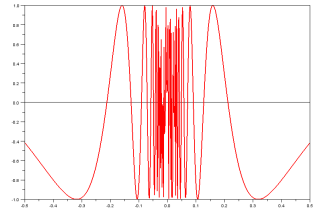
Argumendi x tõkestamatu lähenemine arvule a tähendab, et vaadeldakse kõikvõimalikke jadade koondumisi $x_n \rightarrow a$. Sellele vastavalt toimub funktsiooni väärtuste koondumine $f(x_n) \rightarrow A$.

Näide 4.13 Funktsioonil

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

puudub piirväärtus protsessis $x \rightarrow 0$, kuna kuitahes lähedalt nullile me x väärtusi ka ei võtaks, siis ikka leidub neid x väärtusi, mille korral f väärtus on 1 või -1 , s.t funktsiooni f väärtused ei lähene mingile konkreetsele arvule.

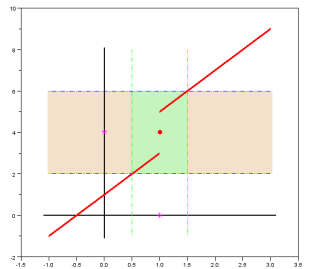
◇ ◇ ◇

**Näide 4.14** Funktsioonil

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

puudub piirväärtus protsessis $x \rightarrow 1$, sest kui argumendi x väärtused lähenevad arvule 1 vasakult poolt, siis $f(x)$ läheneb arvule 3, kui aga x väärtused lähenevad arvule 1 paremalt poolt, siis $f(x)$ läheneb arvule 5. Seega ei saa protsessis $x \rightarrow 1$ toimuda $f(x)$ lähenemist ühele kindlale arvule.

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 4.11**

Õeldakse, et funktsioonil f on piirväärtus ∞ protsessis $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, kui argumendi x lähenemine arvule a toob kaasa $f(x)$ tõkestamatu kasvamise. Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Kui aga protsessis $x \rightarrow a$ toimub $f(x)$ tõkestamatu kahanemine, siis ütleme, et funktsioonil f on selles protsessis piirväärtus $-\infty$ ja kirjutame

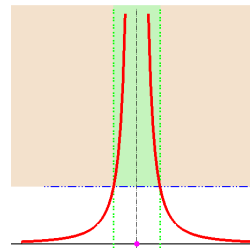
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Albert Einstein: "Ainult kaks asja on lõpmatud: universum ja inimese lollus, ning ma pole kindel esimeses."

Näide 4.15 Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

◇ ◇ ◇



4.3 Ühepoolsed piirväärtused

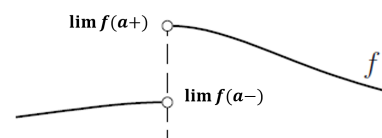
Vaatleme piirprotsesse:

1. $x \rightarrow a$, $x > a$, lähenemine toimub paremalt, s.o parempoolne piirväärtus. Tähistame

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \quad (\text{või} \quad f(a+)).$$

2. $x \rightarrow a$, $x < a$, lähenemine toimub vasakult, s.o vasakpoolne piirväärtus. Tähistame

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \quad (\text{või} \quad f(a-)).$$



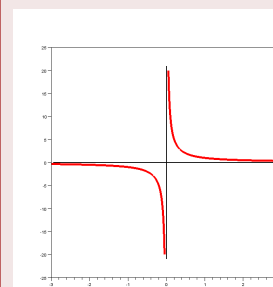
Allikas: [15]

Teoreem 4.1

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, siis (nn. kahepoolne) piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ eksisteerib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

NB! Funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ piirväärtus on kontrolltöodes sageli valesti leitud.



Näide 4.16 Funktsioonil

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

on olemas ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

kuid on selge, et ei eksisteeri kahepoolset piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

◇ ◇ ◇

Näide 4.17 Funktsioonil

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

ei ole piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$, kuna sel juhul $x-1 < 0$ ja ruutjuur ei ole defineeritud. Samas $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$.

◇ ◇ ◇

Ühepoolseteks piirväärtusteks loeme ka $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, kui need on olemas.

Näide 4.18 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1}.$$

Kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2},$$

sest $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, kui $x \rightarrow \infty$.

◇ ◇ ◇

4.4 Funktsiooni piirväärtuse omadused

Teoreem 4.2

Piirväärtuse ühesus. Vaadeldavas protsessis (kas ühe- või kahepoolses) saab funktsioonil olla ainult üks piirväärtus.

Tõestus. Tõestuse võib leida näiteks õpikust [23]. □

Definitsioon 4.12

Funktsiooni f nimetatakse tõkestatuks hulgal X , kui leidub arv $M > 0$ nii, et $|f(x)| \leq M$ iga $x \in X$ korral.

Funktsioon $f(x) = x$ on tõkestatud lõigus $[-3, 2]$, kuna näiteks $M = 100$ jaoks (tegelikult iga $M \geq 3$ jaoks) kehtib $|f(x)| = |x| \leq 100$ iga $x \in [-3, 2]$ korral. Samas ei ole f tõkestatud hulgal $\mathbb{R}$.

Teoreem 4.3

Kui funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses ja

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

siis

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0.$$

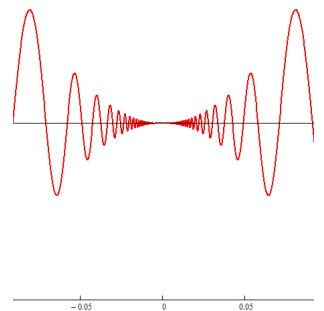
Näide 4.19 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right).$$

Siin $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Samas piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ ei eksisteeri (võnkuv funktsioon). Kuna aga $|\cos x| \leq 1$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (s.t koosinus on tõkestatud), siis viimase teoreemi järgi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$$

◇ ◇ ◇



Teoreem 4.4

Kui on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

siis kehtivad järgmised tehete seotud omadused:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cA, \quad c \in \mathbb{R};$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = AB;$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{kui } B \neq 0.$

Teoreemi eeldus lõplike piirväärtuste leidumise kohta on oluline. Piirväärtused A ja B peavad olema reaalarvud.

Märkus 4.6

Teoreemi nõue, et peavad eksisteerima lõplikud piirväärtused $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, on olulised. Vastasel juhul näiteks $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$ ja $g(x) = \frac{1}{|x|}$ korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

aga kasutades valesti teoreemi esimest omadust, saaksime

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \xrightarrow{\text{EI KEHTI}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{|x|} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = -\infty + \infty.$$

Tehe $\infty - \infty$ **ei ole defineeritud**, ei ole mõistlik defineerida näiteks $\infty - \infty$ võrdseks nulliga, tegemist on määramatusega.

Antud näitest võime ka näha, et lõpmatute piirväärtuste $\lim f(x)$ või $\lim g(x)$ korral (või ka siis, kui neid piirväärtusi ei eksisteerigi) võib funktsioonide summal $f + g$ antud protsessis lõplik piirväärtus ikkagi leiduda. Analoogiline on olukord vahe, korrutise ja jagatise korral.

Näide 4.20 Arvestades tehete seotud omadusi, saame

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x - 2)x^2 = 2 \cdot 16 = 32.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 4.5

Kahepoolse tõkke omadus. Kui kehtivad võrratused

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

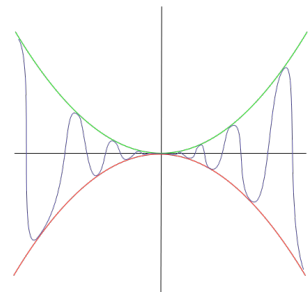
ja on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

siis on olemas ka piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ning

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Kahepoolse tõkke omadust nimetatakse ka "Squeeze Theorem" või ka "võileiva omaduseks" ("Sandwich Rule").



Allikas: Wikipedia

Nullümbri ümbruses, keskmine sinine joon $g(x)$ saab sama piirväärtuse, mis ülemine roheline $h(x)$ ja alumine punane $f(x)$.

Näide 4.21 Kasutades omadust $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, leiame piirväärtuse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6}.$$

Paneme tähele, et $n > 6$ korral kehtib

$$1 < 6 < n.$$

Samuti jäävad võrratused kehtima, kui neist võtta mingit järku juur,

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{6} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Kuna $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, siis kahepoolse tõkke omaduse tõttu järeldub, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1.$$

◇ ◇ ◇

4.5 Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

Üks võimalus on argumendi x asemele panna arvule a lähedasi arve ja vaadata, mis edasi saab. Sellist võtet kasutasime peatüki alguses. Võte võib nõuda aga ülearuseid arvutusi ja on mitterange meetod.

Teoreem 4.6

Teoreem elementaarfunktsioonide piirväärtustest. Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Märkus 4.7

Antud teoreem lubab paljudel juhtudel piirväärtuse leidmist lihtsustada. Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\cos \frac{2x-3}{x+1} + e^{4x+3} \right) = \cos \frac{3}{4} + e^{15}.$$

Samas ei saaks piirväärtust niimoodi leida, kui protsessi $x \rightarrow 3$ asemel oleks protsess $x \rightarrow -1$, kuna $\frac{2x-3}{x+1}$ ei ole määratud punktis $x = -1$, mis tähendab, et teoreemi ei saa rakendada. Protsessis $x \rightarrow -1$ sellel funktsioonil piirväärtust ei eksisteeri.

Argumendi asendamine. Asendame argumendi x suurusega $a + \Delta a$, kus $\Delta a \rightarrow 0$, ja üritame avaldist teisendada. Selline võte võib praktikas anda häid tulemusi (kuigi ettevaatlik tuleb siiski olla).

Näide 4.22 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Tegemist on elementaarfunktsiooni piirväärtusega, kuid kahjuks $x = 3$ ei kuulu tema määramispiirkonda. Asendame $x = 3 + \Delta a$ ja leiame

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{(3 + \Delta a)^2 - 9}{3 + \Delta a - 3} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{9 + 6\Delta a + (\Delta a)^2 - 9}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} (6 + \Delta a) = 6.$$

◇ ◇ ◇

Määramatuse kõrvaldamine. Mõnikord on otstarbekas avaldist teisendada nii, et algne määramatus saaks kõrvaldatud.

Märkus 4.8

Kui piirväärtuse arvutamisel tekivad määramatused

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

siis tuleb avaldist, millest leitakse piirväärtust, teisendada nii, et see määramatus saaks kõrvaldatud.

Näide 4.23 Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1}$$

arvutamisel ei saa kohe asendada $x = 1$, kuna tekib määramatus $\frac{0}{0}$. Jagamise korral võib võrdseid nullist erinevaid avaldise omavahel taandada. Siin taandatakse $\frac{x-1}{x-1}$, kus $x \neq 1$ ehk $x - 1 \neq 0$ (piirväärtus ei sõltu sellest, milline on funktsiooni väärtus punktis $x = a$ ehk siin $x = 1$, vaid väärtusest punkti a lähedal). Seega

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

◇ ◇ ◇

Polünoomide uurimise ja kasutamise korral on kasulik meelde tuletada järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), & a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \end{aligned}$$

Näide 4.24 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27.$$

◇ ◇ ◇

Sama astme polünoomide jagamisel protsessis $x \rightarrow a$ tuleks määramatuse $\frac{0}{0}$ korral võimalusel kasutada algebralisi võrduseid.

Näide 4.25 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

Siin $x = 0$ ei kuulu vaadeldava funktsiooni määramispiirkonda. Järgnevalt kasutame korrutamise võtet (idee on kasutada ruutude vahe valemit $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui lugejas või nimetajas on ruutjuur, siis määramatuse korral tuleks võimalusel sellest irratsionaalsusest vabaneda. Tüüpiline võte selleks on kasutada ruutude vahe valemit

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Näide 4.26 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Viimast saame teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2 (\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 (\sqrt{x^2 + 100} + 10)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} = \frac{1}{20} = 0.05. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.27 Kui kahe muutuja x polünoomi jagamisel protsessis $x \rightarrow \pm\infty$ tekib $\frac{\infty}{\infty}$, siis võetakse lugejas ja nimetajas sulgude ette muutuja x kõrgeima astmega liige. Näiteks

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(4 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Polünoomide jagamisel protsessis $x \rightarrow \pm\infty$ tuleks lugejas ja nimetajas sulgude ette tuua x kõrgeima astmega liige x^n . Sellisel juhul jääb sulgudesse alati tõkestatud avaldis (kuna liikmed $\frac{1}{x^m} \rightarrow 0$, kui $x \rightarrow \pm\infty$).

Näide 4.28 Vaatleme veel piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

Klassikaline viga on siin kirjutada, et $\infty - \infty$ võrdub nulliga. Selgub, et viimane on vale vastus. Piirväärtuse leiame järgmiselt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

4.6 Mõned erilised piirväärtused

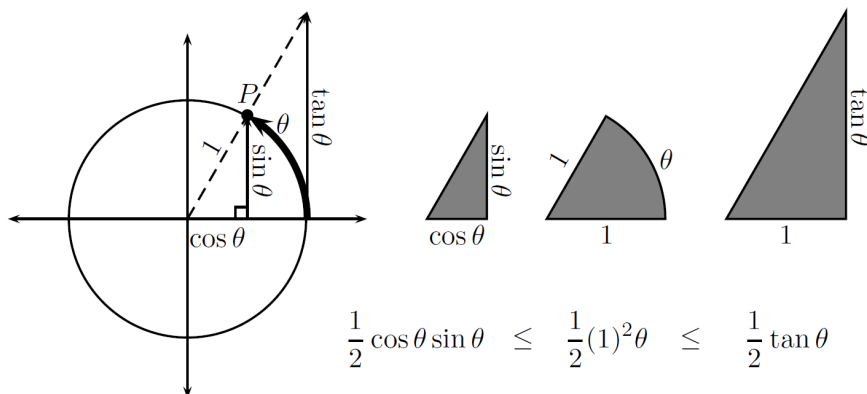
Teoreem 4.7

Kehtib valem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Punkt $x = 0$ ei kuulu funktsiooni f määramispiirkonda, kuid mujal on f määratud.

Funktsioon f on paarisfunktsioon ja piisab näidata, et $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Vaatleme ringjoont raadiusega 1. Asetame I veerandisse ringjoonele punkti P . Moodustame täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiga 1, ringi sektori kuni punktini P (kaarepikkusega x radiaani) ja täisnurkse kolmnurga külgedega 1 ja $\tan x$ (vt. joonist, joonisel kasutatud θ on meil x).



Allikas: [3]

Ühikringi pindala on π ja übermõõt 2π , millest pindala avaldub poole übermõõduga. Sama suhe jääb kehtima, kui võtame ringist sektori. Siit saame, et loodud sektori pindala on $\frac{x}{2}$. Jooniselt on selge, et moodustatud kujundite pindalade kohta kehtivad võrratused

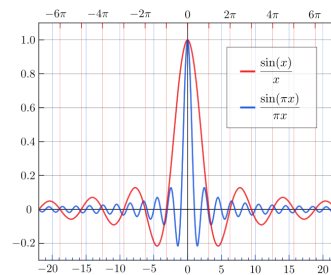
$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{\tan x}{2} \quad \text{ehk} \quad \cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kui $0 < x < \frac{\pi}{2}$, siis võime jagada võrratust positiivse arvuga $\sin x > 0$,

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Kuna $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\cos x} = 1$, siis kahepoolse tõkke omaduse põhjal saame

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{ehk} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = 1.$$



Allikas: Wikipedia

□

Järeldus 4.1

Kehtib

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Järeldub võrdusest

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Näide 4.29 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}.$$

Kui $x \rightarrow 0$, siis ka $2x \rightarrow 0$ ja me saame muutujavahetuse $u = 2x$ abil kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.30 Oluline on jälgida protsessi, milles piirväärtust leitakse.

Näiteks piirväärtuse

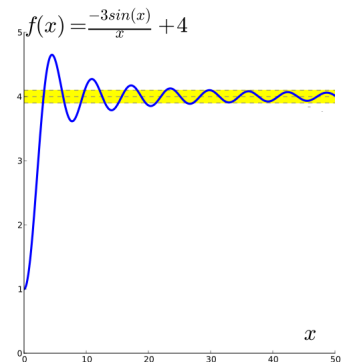
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \sin x}{x} + 4$$

korral on väga ahvatlev kasutada just vaadeldud piirväärtuse omadust (4.6), kuid kuna siin $x \rightarrow \infty$ ja mitte $x \rightarrow 0$, siis me ei saa valemit (4.6) kasutada. Küll aga märkame, et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x} \rightarrow 0$ protsessis $x \rightarrow \infty$ ja kuna $\sin x$ on tõkestatud, siis tegelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \sin x}{x} + 4 = 0 + 4 = 4.$$

Samas võib märgata, et kui oleks protsess $x \rightarrow 0$, siis saaksime valemit (4.6) kasutada ja piirväärtus oleks $-3 + 4 = 1$.

◇ ◇ ◇



Joonis: Wikipedia.

Lause 4.1

Eksisteerib piirväärtus

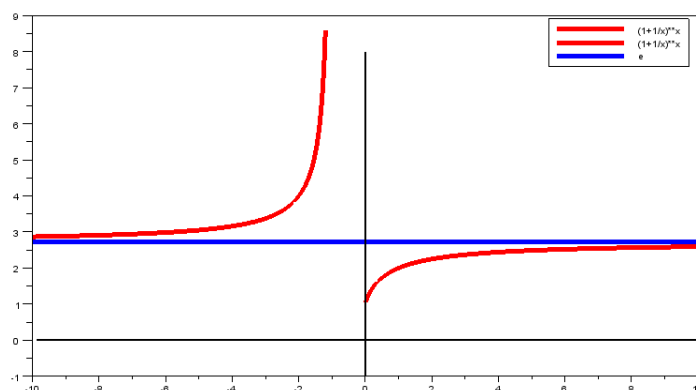
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Arv e on irratsionaalarv ja $e = 2,7182818\dots$. Tähis e on kasutusel üldlevinult.

Võrdus kehtib ka protsessis
 $x \rightarrow -\infty$.

Tõestus. Tõestus on toodud osaliselt õpikus [33].

□



Näide 4.31 Vaatleme pideva intressi mudelit. Pideva intressi korral arvutatakse intress põhimõtteliselt igal ajamomendil.

Te olete võtnud 500 eurot laenu intressiga 5% kuus ($r = 0.05$). Sel juhul n kuu möödudes on summa kasvanud

$$S_n = 500(1 + r)^n$$

euroni. Seega on ühe aastaga võlg kasvanud

$$S_{12} = 500 \cdot 1.05^{12} \approx 898 \text{ euroni.}$$

Pideva intressi korral jaotatakse see 5% igale ajaühikule laiali, ehk $r = \frac{0.05}{N}$, kus $N \rightarrow \infty$ on ühes kuus toimunud intressi arvestamiste arv. Sel juhul n kuu vältel arvestatakse intressi nN korda ehk

$$S_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{nN} = 500 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{N}{r}}\right)^{\frac{N}{r}}\right)^{nr}.$$

Kui $N \rightarrow \infty$, siis ka $\frac{N}{r} \rightarrow \infty$ ja me näeme, et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_n = e^{nr}.$$

Seega pideva intressi mudeli järgi on laen ühe aastaga kasvanud

$$e^{0.05 \cdot 12} \approx 911 \text{ euroni.}$$

◇ ◇ ◇

NB! Hoolimata sellest, et ühel korral võetakse intressiks lõpmata väike summa $\frac{r}{N} \rightarrow 0$, siis kõik kokku liites ($N \rightarrow \infty$) saame ikkagi märkimisväärse summa.

Seda on umbes 13 eurot rohkem kui diskreetse mudeliga. Pideva intressi mudel on alati kahjulikum laenu võtjale ja kasulikum laenu andjale.

Näide 4.32 Leiame piirväärtuse

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}, \end{aligned}$$

sest $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^4 = 1$. Kui $x \rightarrow \infty$, siis ka $u = x-1 \rightarrow \infty$. Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

◇ ◇ ◇

Lause 4.2

Kehtib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Tõestus. Tõestus on toodud õpikus [23].

□

4.7 Pidevad funktsioonid

Igapäevaelus on tuntud ütlused, nagu „kütusehinna hüppeline tõus“, „katkematu sündmuste ahel“, „pidevalt töötav seadeldis“ jne. Me arvame, et meil on enam-vähem selge, mida need sõnad tähendavad. Ütlused, nagu „funktsioon katkeb“ ja „funktsioon on pidev“ on matemaatilised mõisted ja vajavad seetõttu täpset piiritlemist.

Vaatleme reaalmuutuja funktsioone $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$. Olgu $a \in X$.

Definitsioon 4.13

Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks** punktis a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Praktikas on pidevad funktsioonid olulised. Mitterangelt võime pidevast funktsioonist mõelda kui funktsioonist, mille graafiku joonestamisel ei pea pliiatsit paberilt tõstma.

Märkus 4.9

Selleks, et funktsioon oleks pidev punktis a , peavad olema täidetud kõik järgmised kolm tingimust:

1. funktsioonil on olemas väärtus $f(a)$;
2. funktsioonil on olemas piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ protsessis $x \rightarrow a$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis a , kuid on määratud tema ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon f on **katkev** punktis a (punkti a nimetatakse funktsiooni f **katkevuspunktiks**). Katkevuspunktist a räägitakse ka siis, kui funktsioon f ei ole määratud punktis a , kuid eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Näide 4.33 Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{kui } x \neq 2, \\ 4, & \text{kui } x = 2. \end{cases}$$

Võib leida, et protsessis $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

Seega eksisteerib piirväärtus protsessis $x \rightarrow 2$. Samuti $f(2) = 4$. Kuna

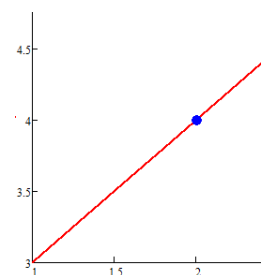
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2), \text{ siis see funktsioon on pidev punktis } 2.$$

Kui funktsioon f oleks defineeritud nii, et tal oleks punktis 2 mingi teine väärtus, siis tingimus $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ei kehtiks ja funktsioon oleks katkev punktis 2.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 4.14

Me ütleme, et funktsioon f on pidev hulgal X , kui f on pidev selle hulga igas punktis. Kui $X = \mathbb{R}$, siis ütleme, et funktsioon f on pidev kõikjal.



Analoogiliselt ühepoolsetele piirväärtustele on olemas ühepoolse pidevuse mõisted: vasakult pidev ja paremalt pidev. Sel juhul tuleb protsess $x \rightarrow a$ välja vahetada vastava ühepoolse piirväärtusega $x \rightarrow a-$ või $x \rightarrow a+$.

Anname pidevuse definitsioonile teise kuju. On selge, et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

kehtib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Tähistame argumendi muudu $\Delta x = x - a$ ning funktsiooni muudu $\Delta f = f(x) - f(a)$. Siis saame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

Märkus 4.10

Funktsioon on pidev, kui argumendi x väikesel muutmisel ka funktsiooni muut Δf muutub vähe, ehk

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

Näide 4.34 Näitame, et $f(x) = \frac{1}{x}$ on pidev igas punktis $x \neq 0$. Olgu punktis $x \neq 0$ argumendi juurdekasv Δx . Siis Δx lähenemisel nullile saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} = 0.$$

Järelikult on funktsioon pidev igas punktis $x \neq 0$.

◇ ◇ ◇

4.8 Funktsiooni katkevusi

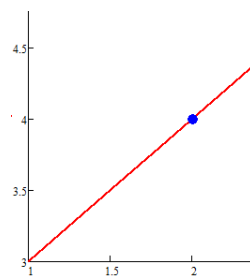
Kõrvaldatav katkevus. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Punktis $x = 2$ ei ole funktsioon määratud, kuid piirväärtus protsessis $x \rightarrow 2$ siiski eksisteerib,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Funktsioon on katkev punktis $x = 2$, kuigi tal on olemas piirväärtus protsessis $x \rightarrow 2$. Katkevus on kõrvaldatav, kuna saaksime vajadusel defineerida $f(2) = 4$ ja siis oleks kõik pidevuse nõuded täidetud.

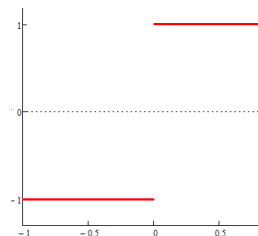


Hüppeline katkevus. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x}{|x|},$$

mis ei ole punktis $x = 0$ määratud. Leiame ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = -1.$$



Kuna parem- ja vasakpoolsed piirväärtused on erinevad, siis puudub mõlemapoolne piirväärtus protsessis $x \rightarrow 0$. Sellel funktsioonil on punktis 0 hüpeline katkevus, mis ei ole kõrvaldatav.

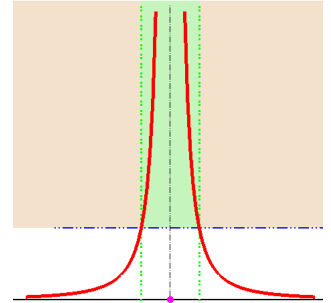
Lõpmatu katkevus. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

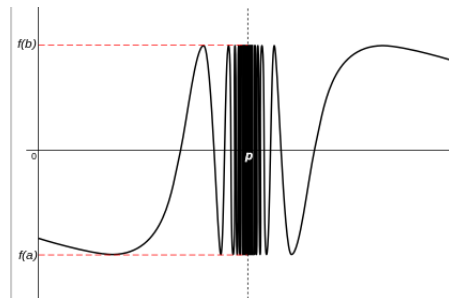
Funktsioon on määramata punktis $x = 0$ ja piirväärtus võrdub

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Funktsioon on siin katkev seetõttu, et punktis 0 ta ei ole määratud. Seejuures ei ole katkevust võimalik kõrvaldada. Märgime, et see funktsioon on katkev ainult punktis $x = 0$, mujal on ta pidev.



Ostsilleeriv katkevus. Vaatleme funktsiooni, mille graafik on



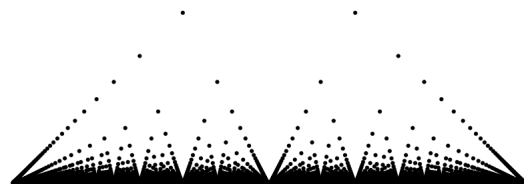
Allikas: Wikipedia.

Ilma et me teaksime selle funktsiooni avaldist, võib öelda, et see funktsioon ei ole pidev (joonise keskpunktis), kuna võnkumine toimub konstantse amplituudiga ja keskpunktis ei ole funktsioonil piirväärtust. Seda tüüpi funktsiooniks on näiteks $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, millel ei ole piirväärtust protsessis $x \rightarrow 0$. Võrdluseks märgime, et funktsioon $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ on kõikjal pidev, kui määrata $f(0) = 0$.

Märkus 4.11

Toome ühe näite funktsioonist, mille pidevust uurida on suhteliselt keeruline:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & , x \in \mathbb{Q}, \quad q > 0, \quad \left(x = \frac{p}{q} \text{ taandatud kujul}\right), \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Allikas: Wikipedia, või ka [3]

Joonisel toodud funktsiooni konstrueeris saksa matemaatik Carl Johannes Thomae (1840 - 1921) ja see on pidev irratsionaalsetes punktides x , kuid katkev kõikides ratsionaalsetes punktides x . Antud funktsiooni nimetatakse ka popkorni või siis vihmapiiskade funktsiooniks.

Igapäevaelu praktikas selliste funktsioonidega kokku ei puututa. Tegemist on matemaatiliselt teoreetilise näitega. On olemas ka funktsioone, mis on kõikjal defineeritud, kuid ei ole pidevad mitte üheski punktis, näiteks

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4.9 Pidevate funktsioonide omadused

Lause 4.3

Olgu f ja g pidevad funktsioonid punktis $x = a$. Siis ka

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x)$$

ja

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{kui } g(a) \neq 0,$$

on pidevad funktsioonid punktis $x = a$.

Tehetega seotud omadused järelduvad piirväärtuste omadustest.

Teoreem 4.8

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näide 4.35 Viimase teoreemi järgi teame, et elementaarfunktsioon $f(x) = x^2$ on pidev kogu reaalteljel. Seega $f(3.14)$ on päris hea lähisväärtus täpsele väärtusele $f(\pi)$. Argumendi muut $\Delta x = \pi - 3.14$ ei ole suur, seega ka funktsiooni muut $\Delta f = f(\pi) - f(3.14)$ ei saa olla suur. Kui me tahame täpsemat tulemust, siis piisab võtta argumendi 3.14 asemel rohkem arvu π komakohti.

Võrdluseks vaatame kirja saatmise hinna funktsiooni

$$p(x) = \begin{cases} 34 \text{ senti}, & 0 < x < 100 \text{ grammi}, \\ 57 \text{ senti}, & 100 \leq x \leq 200 \text{ grammi}. \end{cases}$$

Sellisel juhul $p(99) = 34$, aga $p(101) = 57$, s.t väike raskuse muutmine toob kaasa suure hinna kõikumise (punkti $x = 100$ ümber võime võtta kuitahes väikese raskuse muudu, aga hinna muutus jääb ikka nullist oluliselt suuremaks). Funktsioon p ei ole pidev punktis $x = 100$.

◇ ◇ ◇

Lause 4.4

Lõigus pideva funktsiooni väärtused on tõkestatud.

Lause 4.5

Lõigus pidev funktsioon omandab lõigu mingis punktis oma vähima ja mingis punktis oma suurima väärtuse kõigi lõigus olevate argumentide korral omandatavate väärtuste hulgas.

Näide 4.36 Näitame, et punktis $x = 2$ katkeva funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

saab jätkata pidevaks funktsiooniks punktis $x = 2$.

Esiteks märgime, et f kui elementaarfunktsioon on pidev punktist 2 erinevates punktides. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

Jätkatud funktsioon g on pidev punktis $x = 2$, s.t $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$, kui defineerida

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2, \\ \frac{5}{4}, & x = 2. \end{cases}$$

◇ ◇ ◇

Lõigus pidevad funktsioonid asuvad nii teoorias kui praktikas tähtsal kohal. On palju tulemusi stiilis “kui funktsioon f on pidev mingis piirkonnas, siis kehtib ...”. Toome näite, mis omab ka praktikas olulist rolli.

Teoreem 4.9

Teoreem vahepealsetest väärtustest (*Intermediate Value Theorem*, vt. [3, 13]). Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis tal on kõik väärtused $f(a)$ ja $f(b)$ vahel. Kui näiteks

$$f(a) < y < f(b),$$

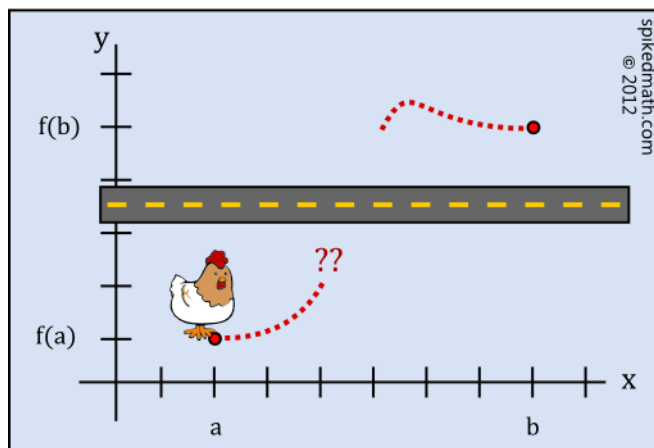
siis on olemas $x \in (a, b)$ nii, et kehtib võrdus $f(x) = y$. Analoogiliselt: kui

$$f(a) > y > f(b),$$

siis on olemas $x \in (a, b)$ nii, et kehtib võrdus $f(x) = y$.

Viimane teoreem ei ütle meile, kus asub see punkt x , et kehtiks $f(x) = y$, ja ta ei ütle meile, kui palju selliseid erinevaid väärtusi x (et kehtiks $f(x) = y$) üldse on. Küll aga on omaette väärtus ka antud infol, me teame, et selline (vähemalt üks) punkt x on tõepoolest olemas.

WHY DID THE CHICKEN CROSS THE ROAD?



THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM.

Allikas: spikedmath.com

Peatükk 5

Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal

5.1	Keskmine kiirus ja hetkkiirus	90
5.2	Tuletise definitsioon	92
5.3	Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised	94
5.4	Diferentseerimise reeglid	96
5.5	Liitfunktsiooni tuletis	97
5.6	Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus	98
5.7	Kõrgemat järku tuletised	99
5.8	Joone puutuja ja normaali võrrandid	101
5.9	Funktsiooni diferentsiaal	103

Kontrolltöö teemad

1. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul.
2. Diferentseerimise reeglid ja nende rakendamine.
3. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
4. Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste tabel kuni arkusfunktsioonideni.
Välja jäävad hüperboolsed funktsioonid.
5. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
6. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes.

Eksamiteemad

1. Tuletise definitsioon ja geomeetiline tõlgendus. Kõrgemat järku tuletise mõiste.
2. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul.
3. Diferentseeruv funktsioon. Teoreem 5.1 diferentseeruva funktsiooni pidevuse kohta.
4. Diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletis.
5. Joone puutuja ja normaali võrrandid.
6. Diferentsiaali mõiste. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes.

5.1 Keskmise kiirus ja hetkkiirus

Kui auto liigub ühtlase kiirusega, siis on auto liikumise keskmist kiirust lihtne arvutada:

$$\text{keskmise kiirus} = \frac{\text{läbitud teepikkus}}{\text{kulutatud aeg}}.$$

Definitsioon 5.1

Suhet

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse keha **keskmiseks kiiruseks**.

Oma olemuselt jaguneb matemaatiline analüüs kahte suurde - sisuliselt väga erinevasse - valdkonda: diferentsiaalarvutus (muutumiskiiruse uurimine, lokaalne omadus) ja integraalarvutus (kogumuutuse uurimine, globaalne omadus). Alustame oma teekonda esimesest suurest valdkonnast.

Seega, kui auto liigub ühe tunniga 50 km , siis tema liikumise keskmine kiirus on $v_k = \frac{50}{1} = 50 \text{ km/h}$.

Tegelikult ei liigu auto tavaliselt kunagi pikemat ajavahemikku ühtlase kiirusega. Keskmine kiirus ei ütle meile mitte midagi selle kohta, kuidas auto võis liikuda näiteks 33. minutil. Teisalt, kui me tahame teada saada auto liikumise kiirust just nimelt hetkel 33 minutit 0 sekundit, siis kuidas seda teada võiks saada?

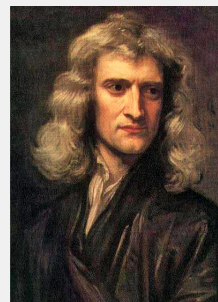
Üks võimalus on mõõta läbitud teepikkust ja kulunud aega järjest lühemal ajalõigul. Näiteks, 30 sekundit enne ja peale 33. minutit. Kuid sellisel juhul saame me teada ikkagi ainult auto liikumise keskmise kiiruse ühe minuti jooksul. See on ilmselt täpsem ja iseloomustab liikumist 33. minuti ümber paremini, kui keskmine kiirus ühe tunni jooksul, kuid jääb ikkagi ebatäpseks. Edasi võiksime mõõta läbitud teepikkust igal sekundil ... või koguni igal sajandik-, tuhandiksekundil.

Ajavahemik Δt	1 h	1 min	1 sek	0.1 sek
Läbitud teepikkus Δs	50 km	1 km	15 m	1.3 m
Keskmine kiirus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$	50 km/h	60 km/h	54 km/h	46.8 km/h

Selline idee auto puhul aitab ja praktikas see suuresti nii töötabki. Meil ei ole aga mõtet mõõta auto läbitud teepikkust näiteks miljard korda sekundis, tulemus oleks küll täpsem, kuid mõõtmiseks kulutame rohkem energiat ja saadud üleliigsete komakohtadega ei ole meil vähemalt spidomeetril midagi peale hakata.

Kuidas on lood aga üldisemalt? Ajasammu tihendamine annab meile täpsema tulemuse, aga ega me hetkkiirust ennast ikkagi kätte ei saanud. Võtame näiteks kitarril noodi la, mis tekib, kui keel võngub 440 korda sekundis. Kui mõõdetav ajavahemik oleks sekund, siis näeksime kitarrikeelt pigem paigalseisvana. Nähtav valgus aga võngub 10^{15} korda sekundis, mis tähendab, et valguse jaoks peaks mõõdetav ajavahemik Δt olema vähemalt 10^{-15} sekundit...

Matemaatilise analüüsi (*Calculus*) loojateks peetakse inglise füüsikut ja matemaatikut Isaac Newtonit (1642 - 1727)



Allikas: Wikipedia

ja saksa matemaatikut ning filosoofi Gottfried Wilhelm Leibnizi (1646 - 1716).

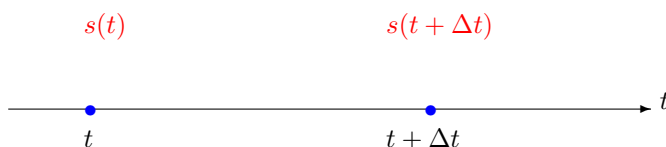


Allikas: Wikipedia

Nad töötasid teineteisest sõltumatult välja tuletisega seotud seadusi, tehteid, lisaks integraaliga seotud mõisteid. Tõsi, see kõik ei vastanud veel matemaatiliselt range teooria nõuetele, kuid andis siiski palju väga praktilisi tulemusi.

Niipalju siis reaalsest maailmast. Küll aga oleme me varem tutvunud piirväärtuse mõistega, miks mitte lasta mõõdetaval ajavahemikul minna lõpmata väikseks? Tõsi, mõningad paradoksid viitavad, et võib juhtuda, et ajamoment ei saa reaalselt olla lõpmata väike.

Vaatleme näiteks keha liikumist kindla seaduse alusel. Olgu $s = s(t)$ selle keha poolt läbitud teepikkust väljendav aja t funktsioon. Liikugu keha mingist hetkest t edasi aja Δt võrra.



Siis saab funktsiooni $s = s(t)$ muudu (tema muut annab meile läbitud teepikkuse) arvutada järgmiselt:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Definitsioon 5.2

Piirväärtust

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse keha **hetkkiiruseks** antud ajamomendil t .

Näide 5.1

Liikugu auto seaduse $s(t) = t^2$ alusel. Siis auto liikumise kiirus hetkel $t = 5$ on

$$\begin{aligned} v(5) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(5 + \Delta t) - s(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{25 + 10\Delta t + (\Delta t)^2 - 25}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{10\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + \Delta t) = 10 \quad \frac{\text{pikkusühik}}{\text{ajaühik}}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Märkus 5.1

Kiiruse mõistet saab kasutada ka teiste suuruste muutumise korral (keha soojenemise kiirus, aine lagunemise kiirus, keemilise reaktsiooni kiirus, aktsiahinna langemise kiirus, meeleolu muutumise kiirus jne).

Kui protsessi kirjeldav funktsioon on f , siis selle funktsiooni muudu Δf ja argumendi x , mille all mõeldakse aega, muudu Δx jagatise piirväärtus väljendab funktsiooni muutumise hetkkiirust argumendi x antud väärtusel:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Newtoni ja Leibnizi nimega on ajaloos seotud üks pikk vaidlus matemaatilise analüüsi esmaavastaja tiitli üle. Mõned Newtoni sõbrad süüdistasid Leibnizi plagiaadis: Newtoni ideede varastamises ja oma nime all esitamises.

See oli suhteliselt segane vaidlus, milles ei ole tänaseni täit selgust toodud. Newton kasutas oma loodud mõisteid (näiteks *fluxion*) ja meetodeid (nn. voolavusteooria) raamatus “*The Method of Fluxions and Infinite Series*”, mille ta sai valmis 1671. aastal, kuid mis avaldati alles pärast tema surma 1736. aastal.

Leibnizi esimesed märkmed *infinitesimals* kohta on dateeritud aastast 1675, kuid ta ei avaldanud midagi enne 1684. aastat. Tuleb siinjuures mainida, et Newton ja Leibniz olid omavahel tihedas kirjavahetuses ja loomulikult arutasid ka üksteise ideid.

Sellest suurest ja mõttetust vaidlusest kaotasid ilmselt rohkem inglise matemaatikud, samal aja kui Euroopa mandril jätkati rahulikult teooria arendamist.

Omaette teema oli veel teiste matemaatikute (näiteks George Berkeley) terav kriitika Newtoni ja Leibnizi esitatud mõistete kohta. Igal juhul mõjutas toimu Newtonit niipalju, et oma kuulsamais teoses “*Printsiibid*” ta eriti matemaatilise analüüsi vahendeid ei kasutanud (kuigi ta oli tulemused ise varem nende abil tuletanud) ja valis alternatiivse variandina geomeetria vahendid.

5.2 Tuletise definitsioon

Olgu antud funktsioon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Anname argumendile $a \in X$ muudu Δx , nii et $a + \Delta x \in X$, ja vastav funktsiooni muut olgu

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Definitsioon 5.3

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks punktis** a . Tähistatakse kujul $f'(a)$, $\frac{df}{dx}|_{x=a}$.

Niisiis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui see piirväärtus eksisteerib ja on reaalarv. Juhime tähelepanu sellele, et tuletise olemasolu küsimuse saab esitada vaid punktis $x \in X$, kui $(x - \delta, x + \delta) \subset X$ mingi $\delta > 0$ korral. Seda nõuab piirväärtuse mõiste.

Märkus 5.2

Kui eksisteerib

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

või

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\infty,$$

siis mõnikord öeldakse, et funktsioonil f on punktis x **lõpmatu tuletis**.

Newton lähtus ajas muutuvatest suurustest, nimetades neid voolavateks suurusteks ehk fluentideks (*fluens*). Nende muutumise hetkkiirusi nimetas ta fluksioonideks (*fluxus* - vool). Fluendi x fluksiooni tähistas ta $\dot{x}$ (vt. [26, 34]).

Kui võtta funktsiooni $y = x^2$ väike muut o , mis “voolab” nulli, siis

$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{o} = 2x + o.$$

Seega suurus $2x + o$ “voolab” suurusseks $2x$.

Leibniz tähistas sellist väikest nulli minevat suurust tähisega dx (*differentia*, erinevus, vahet). Kui Newton mõtles tuletise all eelkõige seost füüsikaliste mõistetega (liikumiskiirus, läbitud vahemaa), siis Leibniz lähtus rohkem algebralistest sümboolitest ja tehetest.

Näide 5.2 Kui $f(x) = c = \text{const}$, siis $\Delta f = 0$ ja järelikult

$$f'(x) = c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.3 Olgu $f(x) = 2x^2 - x$, siis

$$\Delta f = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (2x^2 - x) = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x$$

ja

$$(2x^2 - x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = 4x - 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\Delta x = 4x - 1.$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.4 Olgu $f(x) = \sin x$, siis

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

ja tuletise definitsioonist ning piirväärtusest $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ järeldub, et

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 5.1

Punktis lõplikku tuletist omav funktsioon on pidev selles punktis.

Tõestus. Eeldades, et $f'(a)$ on lõplik, näitame, et $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.

Kui $h \neq 0$, siis kehtib

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h.$$

Minnes piirile $h \rightarrow 0$, saame

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

□

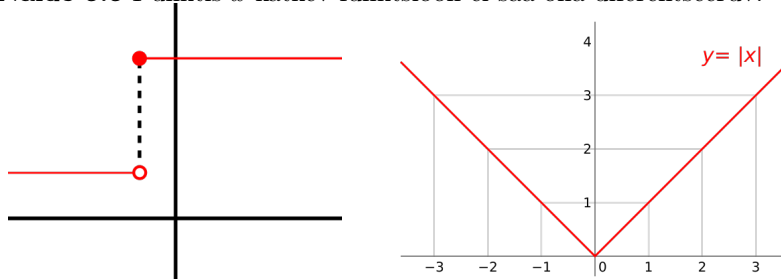
Definitsioon 5.4

Funktsiooni f tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni f **diferentseerimiseks**. Matemaatilise analüüsi osa, mis käsitleb tuletise leidmise reegleid, omadusi ja rakendusi, nimetatakse diferentsiaalarvutuseks.

Definitsioon 5.5

Me nimetame funktsiooni f **diferentseeruvaks** punktis x , kui eksisteerib tuletis $f'(x)$.

Näide 5.5 Punktis x katkev funktsioon ei saa olla diferentseeruv.



Allikas: Wikipedia

Samuti ei ole funktsioon diferentseeruv nn. nurkade korral. Näiteks $f(x) = |x|$ on pidev, kuid ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$. Siin vasakpoolne piirväärtus on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1,$$

Funktsioon f on pidev punktis a , kui

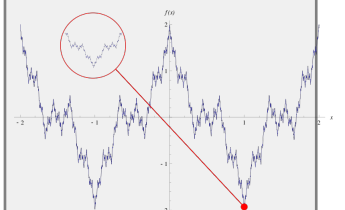
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

mis on samaväärne tingimusega

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

Piirväärtust võib teoreemis 5.1 tõestuses toodud viisil eraldi võtta vaid siis, kui leiduvad vastavad lõplikud piirväärtused. Siin on see tingimus täidetud.

On olemas pidevaid funktsioone, millel ei ole tuletist mitte üheski punktis.



Allikas: Wikipedia

Üheks selliseks on Karl Weierstrassi funktsioon (avaldati 1872. aastal), mille formaalne kuju on antud võrdusega

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$$0 < a < 1, \quad b = 2k + 1 > 0,$$

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Seda tüüpi graafikuid võib näha ka aktsiaturgudel ja mujal, kus on tegemist juhuslike suurustega.

aga parempoolne piirväärtus on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1.$$

Seega ei eksisteeri piirväärtust $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ja järelikult ei eksisteeri tuletist punktis 0.

◇ ◇ ◇

5.3 Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

Märkus 5.3

Eksisteerigu funktsioonil f tuletis hulga X igas punktis x . Siis vastavus $x \rightarrow f'(x)$ määrab funktsiooni f' , mida nimetatakse funktsiooni f tuletisfunktsiooniks. Näiteks, funktsiooni $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, tuletisfunktsiooniks on $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Konstandi tuletis on alati null, $(\text{const})' = 0$.

Astmefunktsiooni tuletis:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0.$$

Toome eraldi välja järgmised tuletised:

$$x' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

EkspONENTfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni tuletised:

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide (nt $\sin x$ ja $\cos x$) korral on oluline, et toodud tuletisfunktsioonid on antud juhul, kui argumenti x mõõdetakse radiaanides.

Kui argumenti x mõõdetakse kraadides, siis

$$x^\circ = \frac{\pi x}{180} \text{ rad.}$$

Sel juhul liitfunktsiooni tuletise reeglist saame, et

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x^\circ}{dx} &= \left(\sin \frac{\pi x}{180} \right)' = \\ &= \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \\ &= \frac{\pi}{180} \cos x^\circ. \end{aligned}$$

Siit ka põhjus, miks trigonomeetriliste funktsioonide korral opereeritakse kõikides tehetes enamasti radiaanide abil.

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonide tuletised:

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Märkus 5.4

Kõikidel põhilistel elementaarfunktsioonidel eksisteerivad tuletised kogu määramispiirkonnas, välja arvatud funktsioonid $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ (määramispiirkonna otspunktides $x = -1$ ja $x = 1$ on lõpmatud ühepoolsed tuletised) ja funktsioon $y = x^\alpha$, kus $0 < \alpha < 1$ (punktis $x = 0$ on lõpmatu tuletis või lõpmatud erimärgilised ühepoolsed tuletised). Ühepoolse tuletise mõistes võetakse ühepoolne piirväärtus avaldisest $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Two polynomials walk into a bar. The bartender, a derivative, asks them "Can I take you order?" The polynomials run out screaming "Help! The bartender threatened to kill me!" ("order" on siinjuures ka polünoomi järk, ruutpolünoom on kolmandat järku, kuuppolünoom neljandat jne. Seda nalja ei saa eesti keeles hästi edasi anda.)

* Hüperboolsed funktsioonid.

$$\begin{aligned}(\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, \\(\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & (\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \\(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & (\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\(\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, & (\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

Märkus 5.5

Teades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste leidmise valemeid, saab leida mistahes elementaarfunktsiooni tuletise.

Tuletame meelde, et suvaline elementaarfunktsioon saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, nende operatsioonidega seotud diferentseerimisreeglitega aga tutvume järgnevas.

5.4 Diferentseerimise reeglid

Teoreem 5.2

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad tuletised punktis x , siis ka funktsioonidel $u + v$, $u - v$, uv ja $\frac{u}{v}$ (lisatingimusel) eksisteerivad tuletised punktis x , kusjuures

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(uv)' = u'v + uv'$,
3. $(cu)' = cu'$, $c = \text{const}$,
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, kui $v \neq 0$.

Tõestus. Toodud omadused tulenevad piirväärtuse tehete seotud omadustest. Esitame tõestuse korrutamise reegli kohta, teised on analoogilised (vt. nt. [23, 33]). Eelduse järgi leiduvad lõplikud piirväärtused $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ ja $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$. Kirjutame

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v(x + \Delta x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u. \end{aligned}$$

Siinjuures arvestasime, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$. Viimane tuleneb sellest, et funktsioon v on diferentseeruv, järelikult ka pidev punktis x . $\square$

Näide 5.6

Leiame funktsioonide $u = x^2 + 2$ ja $v = 3 - 2x$ korrutise uv tuletise muutuja x järgi. Esiteks $u' = 2x$ ja $v' = -2$. Kirjutame

$$(uv)' = 2x(3 - 2x) + (x^2 + 2)(-2) = -6x^2 + 6x - 4.$$

Kontrolliks kirjutame lahti korrutise

$$uv = (x^2 + 2)(3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 6.$$

Leides siit tuletise muutuja x järgi, on lihtne veenduda, et saame sama tulemuse.

$\diamond \diamond \diamond$

Näide 5.7 Õõnessilindris olev rõhk p avaldub pinge T , välise diameetri D ja sisemise diameetri d kaudu valemiga

$$p = \frac{16 D T}{\pi (D^4 - d^4)}.$$

Leiame rõhu p muutumise kiiruse $p'(D)$ välise diameetri D järgi.

Kirjutame jagatise tuletise leidmise reegli abil

$$\frac{dp}{dD} = \frac{16 T \pi (D^4 - d^4) - 16 D T \pi 4D^3}{\pi^2 (D^4 - d^4)^2} = -\frac{16 T}{\pi} \frac{3D^4 + d^4}{(D^4 - d^4)^2}.$$

◇ ◇ ◇

5.5 Liitfunktsiooni tuletis

Käsitleme siin reaalmuutuja funktsioone $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$.

Teoreem 5.3

Teoreem liitfunktsiooni diferentseerimisest. Kui $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in X$, $f(X) \subset Y$ ja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $y = f(x)$, siis $h = g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x ja

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Tõestused leiab õpikutest [23, 33].

Näide 5.8

Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = (2x + 3)^2$. Funktsioon f on vaadeldav liit-funktsioonina funktsioonidest g , kus $g(x) = 2x + 3$, ja h , kus $h(y) = y^2$, s.t. $f = h \circ g$. Siis $g'(x) = 2$ ja $h'(y) = 2y$, mistõttu

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 2(2x + 3) \cdot 2 = 4(2x + 3).$$

◇ ◇ ◇

Liitfunktsiooni diferentseerimise reegli võib teoreemis 5.3 toodud juhul veel kirjutada

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$$

ja mõnevõrra tinglikult

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx},$$

kus viimases peetakse silmas, et g argument y asendatakse funktsiooni f väärtusega $f(x)$ ja tekib funktsioon, mille tähis on ikka g ja argumendiks x .

Näide 5.9

Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = \sin(5x + 1)$. Võime võtta $f(y) = \sin y$, kus $y(x) = 5x + 1$. Seega

$$f'(x) = f'(y)y'(x) = \cos y \cdot 5 = 5 \cos(5x + 1).$$

◇ ◇ ◇

5.6 Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus

Oma sissejuhatavas tekstis vaatlesime keha keskmist liikumise kiirust ja hetkkiirust. Toome veel ühe näite tuletise tõlgendamise kohta füüsikas ([33]).

Näide 5.10 Olgu $Q = f(t)$ elektrilaengute hulk, mis läbib juhtme ristlõiget ajavahemiku $[0, t]$ jooksul. Siis keskmise voolutugevuse all mõistame suhet

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Voolutugevuse $I(t)$ ajahetkel t defineerime kui piirväärtuse

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t).$$

Seega on voolutugevus elektrilaengute hulga muutumise kiirus.

◇ ◇ ◇

Märkus 5.6

Funktsiooni tuletise analoogsete rakenduste kohta võib tuua palju näiteid füüsikast, keemiast, bioloogiast jne. Üldiselt, mõistes liikumist kui mistahes nähtuse muutumist looduses, tehnikas, ühiskonnas jt, võime näiteks öelda, et funktsiooni f tuletis aja t järgi tähendab seaduse $f(t)$ alusel toimuva nähtuse muutumise kiirust.

Näide 5.11 Olgu meil vaatluse all näiteks maakera. Küsime, mida mõista aine tiheduse all mingis maakera sees võetud kohas (vt. [29])? Selle mõiste juurde jõudmiseks ümbritseme näidatud koha mingi kuhtahes väikese ja mistahes kujulise kinnise pinnaga. Olgu selle pinnaga piiratud ruumala ΔV ja sisaldugu ruumalas ΔV mass ΔM . Siis tuleb selles ruumalas ruumalaühiku kohta mass $\frac{\Delta M}{\Delta V}$. See suhe on keha aine keskmine tihedus ruumalas ΔV . Laseme nüüd mõttes ruumalal ΔV tõkestamatult väheneda ja määrame piirväärtuse, millele suujuures läheneb keskmine tihedus

$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

See arv on massi tuletis ruumala järgi, ta annabki aine tiheduse vaaeldavas kohas.

◇ ◇ ◇

Märkus 5.7

Analoogiliselt saab rääkida näiteks õhu tiheduse $\delta(h)$ muutumise kiirusest $\delta'(h)$ kõrguse h järgi, õlle viskoossuse $\eta(T)$ muutumise kiirusest $\eta'(T)$ temperatuuri T järgi, takistil eralduva soojushulga $Q(R)$ muutumise kiirusest $Q'(R)$ takistuse R järgi jne.

5.7 Kõrgemat järku tuletised

Olgu funktsioon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruv hulga X igas punktis $x \in X$. Siis vastavus $x \rightarrow f'(x)$ määrab funktsiooni f tuletisfunktsiooni $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definitsioon 5.6

Kui eksisteerib $(f')'(x)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) tuletiseks punktis x , seega

$$(f')'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Funktsiooni f teist järku tuletist tähistatakse sümbolitega f'' , $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Analoogiliselt jätkates defineeritakse n -järku tuletis

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)',$$

mida tähistatakse veel $D^n f$ või $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Näide 5.12 Leiame $y^{(4)}$, kui $y = x^5 + 3x^2 + a^x$, $a > 0$. Kirjutame

$$y' = 5x^4 + 6x + a^x \ln a,$$

$$y'' = (5x^4 + 6x + a^x \ln a)' = 20x^3 + 6 + a^x \ln^2 a,$$

$$y''' = 60x^2 + a^x \ln^3 a$$

ja lõpuks

$$y^{(4)} = 120x + a^x \ln^4 a.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 5.8

NB! Leibnizi tähistust $\frac{d^n f}{dx^n}$ tuleb käsitleda kui muutuja x järgi tuletise võtmise $\frac{d}{dx}$ korduvat rakendamist, s.t.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}} \right) \right).$$

Seega

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

Märkus 5.9

Kõrgemat järku tuletise leidmisel üldjuhul ei kehti Leibnizi tähistuse liitfunktsiooni tuletise leidmise võtte

$$\frac{d^2 \sin u}{dx^2} \neq \frac{d^2 \sin u}{d^2 u} \frac{d^2 u}{dx^2},$$

mis töötab edukalt esimest järku tuletise korral. Selle asemel tuleks kasutada diferentseerimise reegleid (kui $u = u(x)$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sin u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d \sin u}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\cos u \frac{du}{dx} \right) \\ &= \cos u \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(-\sin u \frac{du}{dx} \right) \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \frac{d^2 u}{dx^2} - \sin u \left(\frac{du}{dx} \right)^2. \end{aligned}$$

Kui liikuva objekti kiirus muutub, siis öeldakse, et objekt liigub kiirendusega. Kiirendus on kiiruse muutumise kiirus. Kiiruse muutus võib olla positiivne (igapäevaselt mõistame kiirenduse all seda juhtu, siis kiirus suureneb) või negatiivne (siis kiirus väheneb).

Liikugu objekt ajas t seaduse $s = s(t)$ alusel (s on läbitud teepikkus). Siis objekti hetkkiirus on $v(t) = s'(t)$. Analoogiliselt kiirusega, saab rääkida keskmisest kiirendusest ja hetkkiirendusest.

Definitsioon 5.7

Liikuva objekti keskmine kiirendus on võrdne kiiruse muudu ja aja muudu jagatisega ehk

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Definitsioon 5.8

Liikuva objekti hetkkiirenduseks hetkel t nimetatakse piirväärtust

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Märkus 5.10

Kokkuvõtteks saame võrdused

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ehk

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Eraldi mõistena on olemas veel “tõuge” (inglise keeles “jerk”), mis on kiirenduse muutumise kiirus ehk

$$a'(t) = s'''(t).$$

Ühtlast liikumist ei ole võimalik isoleeritud ruumis kindlaks teha, kiirendust aga küll. Kiirenduse korral mõjuvad kehale survejõud. Tõuget $a'(t)$ saab füüsiliselt tunda selle surve muutumisena.

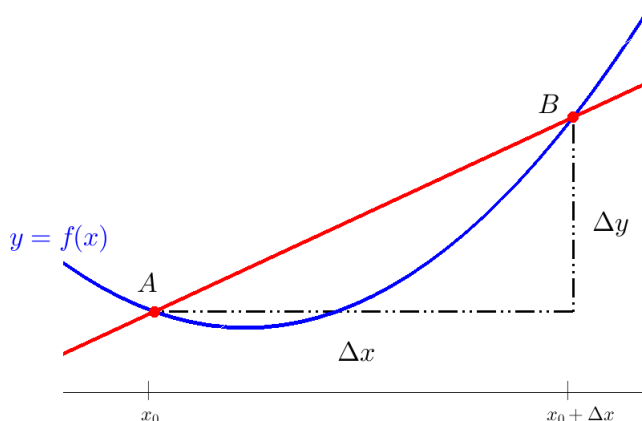
Inseneriteadustes on tõuke uurimine oluline inimestega seotud seadmetes nagu näiteks liftid, Ameerika mägede atraktsioon, kuna liiga suur tõuge võib inimesi füüsiliselt kahjustada.



Kiirenduse mõju lemmikloomale.
Allikas: funny.com

5.8 Joone puutuja ja normaali võrrandid

Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ graafikut xy -teljestikus. Võtame punktile $A = (x_0, f(x_0))$ lisaks punkti $B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



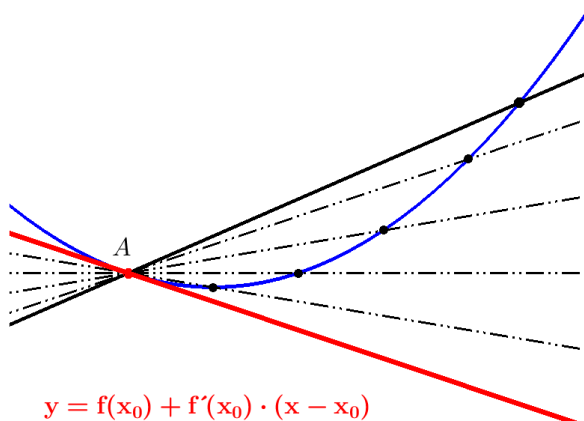
Siis lõikaja AB tõusunurga tangens (ka lõikaja tõus) avaldub täisnurksest kolmnurgast võrdusega

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Definitsioon 5.9

Joone puutujaks punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piir-seisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$. Funktsiooni f tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

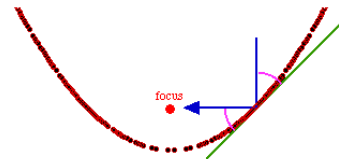


Siinjuures selgituseks, et kuna tangens on pidev oma määramispiirkonnas, siis protsessist $\alpha \rightarrow \theta$ jäeldub protsess $\tan \alpha \rightarrow \tan \theta$.

Seega, kui θ on joone puutuja tõusunurk, saame

$$\tan \theta = \lim_{B \rightarrow A} \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Näide 5.13 Päikese reflektor on parabool kujuga $y = \frac{x^2}{4}$, mille fookus asub punktis $F = (0, 1)$. Vaatame, kas vertikaalsed valguskiired läbivad punktis $x = 2$ parabooli siseseinalt peegeldumisel reflektori fookuse.



Kuna parabooli puutuja tõus suvalises punktis on $x/2$ ($y' = x/2$), siis näeme, et selle tõus punktis $x = 2$ võrdub ühega (ehk puutuja tõuseb 45° nurga all). Sel juhul tasub tähele panna, et vertikaalne valguskiir peegeldub vertikaalse telje suhtes täisnurga all (kuna kiire ja puutuja vaheline nurk omakorda on samuti 45°). Viimane tähendab aga seda, et peegeldunud kiir on paralleelne x -teljega ja see läbib fookust $F = (0, 1)$, kuna kõrgus punktis $x = 2$ on $f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$. Leiame veel parabooli puutuja võrrandi punktis $x = 2$:

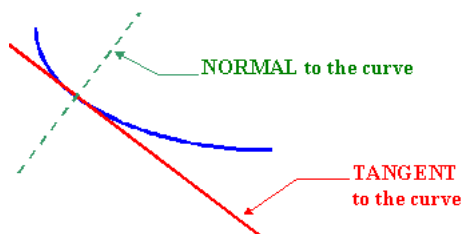
$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \quad \text{ehk} \quad y = 1 + 1 \cdot (x - 2) = x - 1.$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 5.10

Joone $y = f(x)$ **normaaliks** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Joonis: <http://www.intmath.com/applications-differentiation/1-tangent-normal.php>

Kuna puutuja tõus on $f'(x_0)$ ning on teada, et ristuvate sirgete tõusude korrutis on -1 , siis normaali tõus on $-\frac{1}{f'(x_0)}$, $f'(x_0) \neq 0$.

Näide 5.14 Leiame parabooli $y = x^2$ puutuja ja normaali võrrandid igas punktis $x_0 \neq 0$. Esiteks $(x^2)' = 2x$. Kui $x_0 = 0$, siis puutujaks on x -telg võrrandiga $y = 0$ ja normaaliks y -telg võrrandiga $x = 0$. Ülejäänud juhtudel on punktis x_0 puutuja võrrandiks

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$$

ja normaali võrrandiks

$$y = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0) = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇

5.9 Funktsiooni diferentsiaal

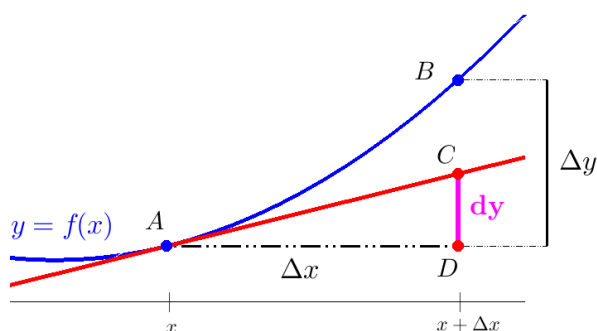
Definitsioon 5.11

Olgu antud punktis x diferentseeruv funktsioon f . Anname argumentide x muudu Δx . Korrutist

$$f'(x)\Delta x$$

nimetatakse funktsiooni f **diferentsiaaliks** punktis x . Tähistame dy (kui kasutada sõltuva muutuja tähist y ehk $y = f(x)$) või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x.$$



Punktis A on tõmmatud funktsiooni $y = f(x)$ puutuja.

Funktsiooni muut on lõigu BD pikkus ja diferentsiaal on lõigu CD pikkus.

Diferentsiaali dy arvutamise valemi võib tuletada kolmnurga ACD tõusunurga tangensi avaldisest $\tan \alpha = \frac{dy}{\Delta x}$, arvestades veel, et $\tan \alpha = f'(x)$.

Märkus 5.11

Olgu $y = f(x) = x$, siis saame

$$dy = dx = (x)' \Delta x = \Delta x.$$

Argumendi diferentsiaal võrdub argumendi muuduga. Seepärast kirjutatakse $dx = \Delta x$ ja üldise funktsiooni $y = f(x)$ korral

$$dy = f'(x)dx.$$

Jooniselt võib tähele panna, et mida väiksem on argumenti muut $\Delta x = dx$, seda lähedasemad on funktsiooni muudu Δy ja diferentsiaali dy väärtused. Praktikas kasutatakse ligikaudset võrdust $\Delta y \approx dy$, kui dx on küllalt väike.

Märkus 5.12

Võrduse $dy = f'(x)dx$ jagamisel arvuga dx eeldusel, et $dx \neq 0$, saame

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

s.t **diferentseeruva** funktsiooni tuletist saab praktikas vaadelda kui selle funktsiooni diferentsiaali ja argumendi diferentsiaali suhet.

Näide 5.15 Leiame funktsiooni $f(x) = 3x^2 + 4x$ diferentsiaali $df(x)$ väärtuse punktis $x = 2$ argumenti muudu $\Delta x = dx = 0.1$ korral,

$$df(x) = f'(x)dx = (6x + 4)dx, \quad df(2) = (12 + 4) \cdot 0.1 = 1.6.$$

Funktsiooni muut $\Delta f = f(2.1) - f(2) = 21.63 - 20 = 1.63$.

◇ ◇ ◇

Kui asendaksime muudu Δf diferentsiaaliga $df(2)$, siis teeksimme arvutustes vea 0.03. Antud juhul oli diferentsiaali arvutuslikult lihtsam leida kui funktsiooni muutu.

Teoreem 5.4

Kui funktsioonid u ja v on diferentseeruvad punktis x , siis kehtivad võrdused

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(uv) = vdu + u dv$;
3. $d(cu) = cdu$, $c \in \mathbb{R}$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$, kui $v \neq 0$.

Tõestus. Tõestame jagatise tuletise leidmise eeskirja. Kasutame arvutust, mis tugineb liitfunktsiooni diferentseerimise reeglile:

$$d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) dx = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{dx} dx = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx} dx = -\frac{dv}{v^2}.$$

Selle abil leiame

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(u \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v} du + u d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{vdu}{v^2} - u \frac{dv}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

□

Näide 5.16 Leiame

$$\begin{aligned} d(x^3 \ln x) &= (dx^3) \ln x + x^3 d(\ln x) \\ &= 3x^2 dx \ln x + x^3 \frac{1}{x} dx = (3x^2 \ln x + x^2) dx. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui Δx on küllalt väike, võime funktsiooni f muudu Δf asemel leida funktsiooni f diferentsiaali df ,

$$\Delta f \approx df. \quad (5.1)$$

Näide 5.17 Sõitva auto spidomeeter näitab kiiruseks 72 km/h. Kui pika teekonna läbib see auto järgmise sekundi jooksul?

Kiireks arvutamiseks saame kasutada ligikaudset võrdust $\Delta f \approx df$. Arvestades, et auto keskmine kiirus on läbitud teepikkuse ja kulunud ajavahemiku jagatis ning hetkkiirus on teepikkuse tuletis aja järgi, siis

$$\Delta s \approx ds = s'(t) dt.$$

Meie andmete põhjal läbib auto järgmise sekundi jooksul umbes

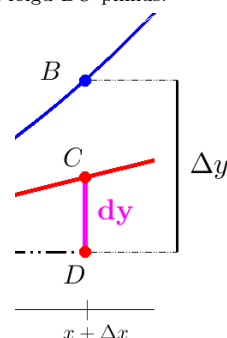
$$\Delta s \approx 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1 \text{ sek} = \frac{72 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ sek}} \cdot 1 \text{ sek} = \frac{72}{3.6} \text{ m} = 20 \text{ m}.$$

Viimane arvutus on kaunis täpne, kui auto liikus enam-vähem ühtlase kiirusega. Paneme tähele, et antud juhul me ei pea teadma auto liikumise seadust $s = s(t)$ (funktsionaalset sõltuvust) ennast.

◇ ◇ ◇

Need diferentsiaali leidmise reeglid on otseselt tuletatavad funktsiooni tuletise tehete seotud omadustest ja väljendavad diferentseerimise samu omadusi.

Muudu asendamisel diferentsiaaliga teeme vea, mille suurus on lõigu BC pikkus.



Meie joonistel on argumendi muut võetud küllalt suur, seda sellepärast, et joonis oleks jälgitav. Samas võime näha, et ligikaudse võrduse $\Delta f \approx df$ kehtivuseks peab Δx olema piisavalt väike.

Miks sellist asendust üldse teha? Osutub, et mõningatel juhtudel on diferentsiaali lihtsam arvutada ja ka programmeerida (kuna piisab puutujasirge võrandist). Näiteks polünoomide korral tuletis vähendab polünoomi astet ja arvutusi on ka ilma arvutita lihtsam teha (arvutiga arvutades ei oleks seda nii väga vaja).

Näide 5.18 Arendame eelmist näidet edasi. Firma toodab ninasarvikutele maiust, kusjuures x maiuse tootmise kasum on leitav funktsiooni

$$P(x) = -0.004x^3 + 10x^2 - 1000$$

kaudu. Kui suur oleks lisakasum, kui plaanitud 100 maiuse asemel toodetakse üks maius rohkem, (s.t 101 maiust)?

Võib leida, et $P(101) - P(100) = 1888.796$, kuid viimane sisaldab endas opereerimist suurte arvudega. Arvestades, et

$$\Delta P(100) = P(101) - P(100) \approx dP(100) = P'(100) \cdot 1,$$

siis võime leida

$$\Delta P \approx (-0.012x^2 + 20x) \Big|_{x=100} = -120 + 2000 = 1880.$$

Erinevus täpse ja ligikaudse vastuse vahel on umbes 89 ühikut, mis võrreldes arvuga 1889 on küllalt väike.

◇ ◇ ◇

Näide 5.19 Toome nüüd ühe klassikalise diferentsiaali kasutamise näite. Ringi raadiust r suurendatakse 10 ühikult 10.15 ühikule. Umbes kui palju suureneb ringi pindala $S = S(r)$?

Loomulikult saab siin arvutada täpselt,

$$\Delta S = \pi \cdot 10.15^2 - \pi \cdot 10^2 = 103.0225\pi - 100\pi = 3.0225\pi.$$

Teisalt, kasutades diferentsiaali

$$\Delta S \approx dS = (\pi r^2)' dr = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.15 = 3\pi.$$

Viga on arvutuslikult 0.0225π ruutühikut, kusjuures diferentsiaali leidmine oli lihtsam.

◇ ◇ ◇

Olgu f punktis x diferentseeruv funktsioon. Siis võime kirjutada, et

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

ehk

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (5.2)$$

Kui toodetakse x toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakasum ligikaudu võrdne kasumifunktsiooni $P(x)$ tuletisega kohal x (*Marginal Profit*). Analoogiliselt, kui toodetakse x toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakulu ligikaudu võrdne kulufunktsiooni $C(x)$ tuletisega kohal x (*Marginal Cost*). See omadus laieneb ka teistele mõistetele, kus argumenti muut Δx on võrdne ühe ühikuga.

Näiteks, kui maja ruutmeetri maksumus on arvatav funktsiooni $f(A)$ abil (A on ruutmeetrite arv), siis kavandatud A ruutmeetri asemel 1 lisamine läheb umbes maksma $f'(A)$ rahaühikut.

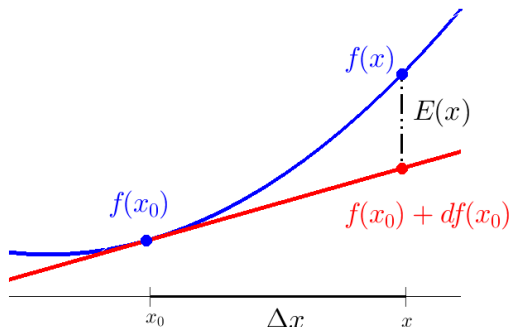
Ligikaudse arvutamise kasulikkus tuleb veel paremini välja ruumala muutumise ülesannetes.

Definitsioon 5.12

Valemi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5.3)$$

kasutamist nimetatakse ka funktsiooni f **linearseks lähendamiseks** punktis x_0 , sest $f(x)$ leitakse ligikaudselt kui lineaarse funktsiooni väärtus.



Valem (5.3) võimaldab ligikaudselt arvutada

$$f(x_0 + \Delta x)$$

väärtuse, kui x_0 on selline, et väärtused $f(x_0)$ ja $f'(x_0)$ on teada ja Δx on küllalt väike (kusjuures funktsiooni f tervikuna ei olegi vaja teada). Seejuures on ligikaudne võrdus (5.3) seda täpsem, mida väiksem on Δx .

On näha, et arvutamisel tehakse viga $E(x)$ (vt. joonis).

Näide 5.20 Arvutame ligikaudselt $\sqrt[3]{8.5}$. Antud juhul võime võtta

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x_0 = 8, \quad \Delta x = 0.5.$$

Siis $f(x_0) = 2$ ja

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} x_0^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

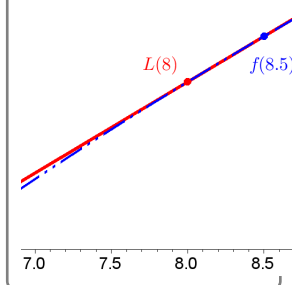
ja (5.3) põhjal

$$\sqrt[3]{8.5} \approx f(8) + f'(8) \cdot 0.5 = 2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{24} = 2.04166 \dots$$

Täpsem väärtus on $\sqrt[3]{8.5} \approx 2.04082755$.

◇ ◇ ◇

Silma järgi on graafikul isegi raske eristada puutuja ja funktsiooni väärtusi.



Näide 5.21 Arvutame ligikaudselt $f(0.005)$, kui

$$f(x) = x^{21} + 5x^9 - 8x + e^x + 7.$$

Antud juhul võime võtta

$$x_0 = 0, \quad \Delta x = 0.005.$$

Siis $f(x_0) = 8$ ja $f'(x_0) = 21x_0^{20} + 45x_0^8 - 8 + e^{x_0} = -7$ ja (5.3) põhjal

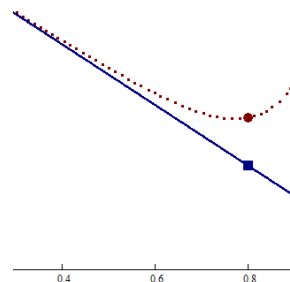
$$f(x) = 8 + (-7) \cdot 0.005 = 7.965.$$

Täpsem väärtus on $f(0.005) \approx 7.96501252$. Kui siinjuures Δx oleks palju suurem, näiteks $\Delta x = 0.8$, siis arvutus

$$f(0.8) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.8 = 8 + (-7) \cdot 0.8 = 8 - 5.6 = 2.4,$$

oleks palju ebatäpsem. Täpsem väärtus on $f(0.8) \approx 3.50585294$.

◇ ◇ ◇



Näide 5.22 Sõdur sihib maapinnal kuulipildujast 100 m kaugusel olevat vaenlase punkrit. Kui sõdur keerab 5° kraadi kuulipilduja toru horisontaalsendist ülespoole, siis kui kõrgele punkri seinal võib ta tabada?

Kui sõdur on punktis A , siis $\tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$. Siit $|BC| = |AC| \tan \alpha$. Tähistame kõrguse h ja kirjutame viimase funktsiooni kujul

$$h(\alpha) = 100 \tan \alpha.$$

Märgime, et $5^\circ = \frac{\pi}{36}$ radiaani. Arvutiga saaksime kiiresti leida vastuse $h\left(\frac{\pi}{36}\right) = 100 \tan\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx 8.75$ meetrit, aga kui arvutit käepärast ei ole, siis võime võtta

$$\alpha_0 = 0, \quad h'(\alpha) = 100 \frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} = \frac{100}{\cos^2 \alpha}.$$

Kuna $\cos 0 = 1$, siis $h'(0) = 100$ ja

$$h\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx h(0) + h'(0)d\alpha = 0 + 100 \cdot \frac{\pi}{36} \approx \frac{314}{36} = 8\frac{13}{18}.$$

Sellest saame vastuseks $h \approx 8.7$ meetrit.

◇ ◇ ◇

Näide 5.23 Tihti läheb vaja $\sqrt{3}$ ligikaudset väärtust. Näiteks siinuse, koosinuse ja tangensi leidmisel nurkadest 30° ja 60° läheb vaja arvu $\sqrt{3}$. Järgmised arvutused on ka peast tehtavad. Võtame

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

Sel juhul ligikaudne võrdus

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

on antud juhul

$$\sqrt{3} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(3 - 4) = 2 - \frac{1}{4} = 1.75.$$

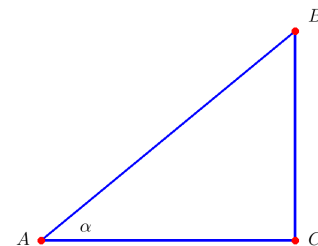
Täpsem väärtus on $\sqrt{3} \approx 1.732$, nii et tehtud viga on umbes 0.018.

Analoogiliselt võiksime leida $\sqrt{5}$ ligikaudse väärtuse

$$\sqrt{5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(5 - 4) = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$

Täpsem väärtus on $\sqrt{5} \approx 2.236$, nii et tehtud viga on umbes 0.014.

◇ ◇ ◇



Peatükk 6

Funktsiooni uurimine

6.1	Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid	110
6.2	L'Hôspitali reegel piirväärtuse arvutamiseks	115
6.3	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	118
6.4	Funktsiooni ekstreemumid	119
6.5	Funktsiooni kumerus ja nõgusus	123
6.6	Funktsiooni graafiku joonistamine	126

Kontrolltöö teemad

1. L'Hôspitali reegli kasutamine piirväärtuste arvutamisel.
2. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkondade leidmine.
3. Funktsiooni ekstreemumite leidmine. Optimiseerimise ülesanded.
4. Joone käänupunkti, kumerus- ja nõguskiirkondade leidmine.

Eksamiteemad

1. Lagrange'i keskväärtusteoreem. Selle geomeetiline ja füüsikaline sisu.
2. L'Hôspitali reegel piirväärtuse arvutamiseks.
3. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.
4. Funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid. Kriitiline punkt. Teoreem 6.7.
5. Kumer ja nõgus joon. Teoreem 6.8.
6. Joone käänupunkt.

6.1 Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid

Definitsioon 6.1

Olgu funktsioon f määratud hulgal D . Ütleme, et funktsioonil f on **maksimaalne väärtus** hulgal D punktis $c \in D$, kui

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$

Analoogiliselt ütleme, et funktsioonil f on **minimaalne väärtus** hulgal D punktis $c \in D$, kui

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$

Märkus 6.1

Lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon f saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse selles lõigus. Paneme tähele, et näiteks vahemikus (a, b) pidev funktsioon f ei pruugi saavutada maksimaalset ja minimaalset väärtust selles vahemikus. Näiteks funktsioon $f(x) = x$ ei saavuta maksimaalset (ega minimaalset) väärtust vahemikus $(0, 1)$. Kui näiteks arv $\alpha \in (0, 1)$ oleks selline, et $f(\alpha)$ oleks suurim vahemikus $(0, 1)$, siis, et $\frac{1+\alpha}{2} \in (0, 1)$ ja $f(\frac{1+\alpha}{2}) > f(\alpha)$, mis tähendab, et punktis α ei ole funktsiooni f väärtus maksimaalne.

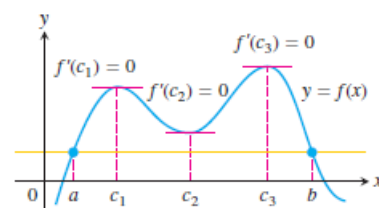
Teoreem 6.1

Fermat' teoreem, vt. [23]. Kui vahemikus (a, b) diferentseeruv funktsioonil f on olemas maksimaalne või minimaalne väärtus punktis $c \in (a, b)$, siis

$$f'(c) = 0.$$

Teoreem 6.2

Rolle'i teoreem, vt. [23]. Kui lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f korral $f(a) = f(b)$, siis eksisteerib $c \in (a, b)$, nii et $f'(c) = 0$.

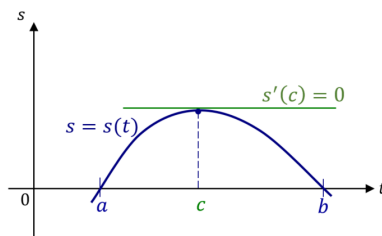


Allikas: [36]

Tõestus. Kuna konstantse funktsiooni korral on tulemus ilmne, siis võime edaspidi eeldada, et leidub punkt $x_0 \in (a, b)$ nii, et $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$. Olgu näiteks $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Lõigus pidev funktsioon f saavutab oma maksimaalse väärtuse $f(c)$, kus $c \in (a, b)$ (juhul $c = a$ või $c = b$ saaksime vastuolu tingimusega $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$). Kuna maksimaalne väärtus saavutatakse punktis $c \in (a, b)$, siis Fermat' teoreemi põhjal $f'(c) = 0$. Juhul $f(x_0) < f(a) = f(b)$ on arutelu analoogiline minimaalset väärtust kasutades. $\square$

Märkus 6.2

Olgu vaatluse all diferentseeruv funktsioon $s = s(t)$, mis kirjeldab objekti liikumist mööda sirgjoonelist teed aja t kulgemisel. Eeldame, et objekti keskmine kiirus ajaperioodil $a \leq t \leq b$ on 0, s.t $s(a) = s(b)$, mis tähendab, et objekt jõuab ajahetkeks $t = b$ samasse kohta, kust ta oli ajahetkel $t = a$. Siis Rolle'i teoreemi põhjal on olemas ajahetk $c \in (a, b)$ nii, et $s'(c) = 0$ ehk ajahetkel c on objekti hetkkiirus võrdne nulliga.



Rolle'i teoreemi idee omistatakse india matemaatikule ja astronoomile Bhaskara II (1114-1185), formaalne tõestus prantsuse matemaatikule Michel Rolle'ile (1652-1719) 1691. aastal.

Näide 6.1

Toome ühe lihtsa olukorra, kus Rolle'i teoreem võiks kasulik olla. Näitame, et võrrandil

$$x^3 + 3x - 6 = 0$$

on ainult üks reaalarvuline lahend. Funktsioon $f(x) = x^3 + 3x - 6$ on diferentseeruv (seega pidev) kogu reaalteljel. Leiame tuletise

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Kui võrrandil peaks olema kaks reaalarvulist lahendit (punktides a ja b), siis peab kehtima $f(a) = f(b) = 0$. Rolle'i teoreemi põhjal peab funktsioonil f leiduma vahemikus (a, b) vähemalt üks punkt c , et kehtib $f'(c) = 0$. Kuna $f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks, siis ei ole võimalik võrdus $f'(c) = 0$. Järelikult võrrandil ei saa olla rohkem kui ainult üks reaalarvuline lahend.

◇ ◇ ◇

Teoreem 6.3

Lagrange'i keskväärtusteoreem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis eksisteerib $c \in (a, b)$ nii, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Lihtne on näha, et $g(a) = f(a)$ ja $g(b) = f(b)$, s.t. $g(a) = g(b)$. Rolle'i teoreemi põhjal eksisteerib punkt $c \in (a, b)$ nii, et $g'(c) = 0$.

Kuna funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis ka funktsioon g kui lineaarne kombinatsioon funktsioonist f on seda. Leiame tuletise

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Omadusest $g'(c) = 0$ jäeldub, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

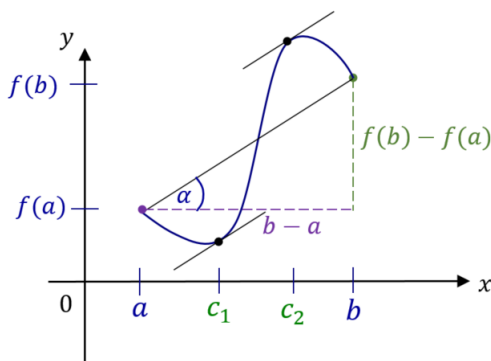
□

Märkus 6.3

Kirjeldagu funktsioon $y = f(x)$ objekti asukohta sirgel (või mingil kõverjoonel) sõltuvana ajast x . Lagrange'i teoreem väidab, et teoreemi eeldustel on olemas ajahetk $x = c$, millel objekti hetkkiirus $f'(c)$ on võrdne objekti keskmise kiirusega

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ajaintervallis $[a, b]$.

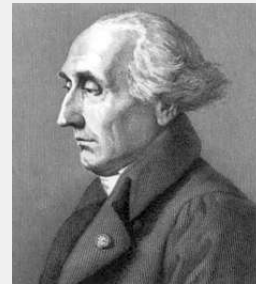


Joonisel

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c_1) = f'(c_2).$$

Lagrange'i teoreem on midagi sellist, millega võiks politsei ennast vabalt kohtus kaitsta trahvikviitungite väljakirjutamisel. Kui mõõta keskmist kiirust mingil teelõigul, siis keskmine kiirus üle 90 km/h tähendab, et mingil hetkel pidi ka hetkkiirus realselt olema üle 90 km/h (s.t. et ei ole tingimata vaja mõõta hetkkiirust). Kiirust saab mõõta ka kaudselt, lugedes näiteks sisenemise ja väljumise aega kiirteede anduritelt.

Lagrange'i teoreemi erijuhtu kirjeldas esmakordselt india matemaatik ja astronoom Parameshvara (1370-1460). Teoreemi üldistuse andis hiljem prantsuse matemaatik Augustin Louis Cauchy (1789-1857) ning see on üks tähtsamaid teoreetilisi tulemusi matemaatilises analüüsis (selle abil tõestatakse paljud teised olulised tulemused).



Joseph Louis Lagrange.
Allikas: Wikipedia

Prantsuse matemaatiku ja astronoomi Joseph-Louis Lagrange'i (1736-1813) nimi seostatakse tulemusena tavaliselt Taylorigi valemi jääkliikme Lagrange'i kuju kaudu.

Lagrange'ist sai juba 19-aastaselt Torino kuningliku suurtükiväe kooli matemaatikaprofessor. Aastal 1788 ilmus temalt mehaanikaõpik "Mécanique analytique" (Analüütiline mehaanika), milles ta esitas kehade ja punktmasside liikumisülesandeid diferentsiaalvõrrandite abil.

Viimati nimetatud raamatu eesõnas kirjutas Lagrange "Te ei leia sellest tööst jooniseid. Meetodid, mida ma siin esitan, ei vaja konstruktsioone ega geomeetrilist või mehaanikalist põhjendamist, vaid ainult algebralisi operatsioone, mille tingivad materjali järjepidev ja ühetaoline esitus.", vt [6].

Näide 6.2

Kui funktsioon on esitatud analüütiliselt, näiteks

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2,$$

siis mõnikord on võimalik täpselt leida ka see punkt $c \in (a, b)$, kus funktsiooni muutumise kiirus on võrdne muutumise keskmise kiirusega.

Leiame $c \in (0, 2)$, nii et

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

Kuna $f(2) = 12$, $f(0) = -2$ ja

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1,$$

siis

$$\frac{12 + 2}{2} = 12c^2 - 10c + 1$$

ehk

$$12c^2 - 10c - 6 = 0.$$

Viimase ruutvõrrandi lahenditeks on

$$c = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{97}{144}} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12}.$$

Vahemikus $(0, 2)$ on nendest ainult üks väärtus, $c = \frac{5 + \sqrt{97}}{12} \approx 1.237$.

◇ ◇ ◇

Näide 6.3

Lagrange'i teoreemi üks võimalikke kasutusi on funktsiooni väärtuste absoluutse vea hindamine. Näitame, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Kui $x = y$, siis võrratus kehtib. Olgu $x \neq y$. Siinusfunktsioon on pidev ja diferentseeruv kogu reaalteljel. Lagrange'i keskväärtusteoreemi järgi punktide x ja y vahel asuva mingi ξ korral

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = (\sin x)'|_{x=\xi} = \cos \xi.$$

Siit

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\cos \xi| \leq 1.$$

Viimane tähendabki, et

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Paneme tähele, et $y = 0$ korral saame sellest võrratuse

$$|\sin x| \leq |x|.$$

◇ ◇ ◇

Näide 6.4 Lagrange'i keskvaärtusteoreemi abil saab tõestada praktilistes arvutustes kasutatava Bernoulli võrratuse:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

Märgime, et võrratus kehtib $x=0$ korral. Funktsioon $f(x) = (1+x)^n$ on pidev ja diferentseeruv $x > 0$ korral. Siis Lagrange'i keskvaärtusteoreemi põhjal on olemas $c \in (0, x)$ nii, et

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

ehk

$$(1+x)^n - 1 = nx(1+c)^{n-1} \geq nx.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 6.4

Cauchy keskvaärtusteoreem. Kui funktsioonid f ja g on pidevad lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruvad vahemikus (a, b) ning $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis eksisteerib $c \in (a, b)$ nii, et kehtib võrdus

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Tõestus. Täpse tõestuse võib leida näiteks õpikust [23]. Lagrange'i keskvaärtusteoreem on tegelikult järeldus Cauchy teoreemist, võttes $g(x) = x$. Cauchy teoreemi tõestuse idee on sarnane sellega, mille esitasime Lagrange'i keskvaärtusteoreemile. □

Märkus 6.4

2012. aastal võitis Usain Bolt meeste 100 m jooksus kuldmedali ajaga 9.63. Tema keskmine kiirus võrdus läbitud teepikkus jagatud ajaga:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{100}{9.63} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 10.38 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 37.38 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Lagrange'i keskvaärtusteoreem ütleb meile, et leidus ajahetk t_* , mil Bolt jooksis just nimelt sellise hetkkiirusega $f'(t_*) = 37.38 \text{ km/h}$. Asafa Powell sai samas jooksus aja 11.99, mis on 1.245 korda aeglasem kui Boltil,

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{100}{11.99} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8.34 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 30.03 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Bolti keskmine kiirus oli sama palju, 1.245 korda, kiirem kui Powellil,

$$\frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{\frac{g(b) - g(a)}{b - a}} = \frac{37.38}{30.03} = 1.245.$$

Cauchy keskvaärtusteoreem ütleb seda, et leidus selline ajahetk c , mil Bolt jooksis just nimelt 1.245 korda kiiremini kui Powell,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{\frac{g(b) - g(a)}{b - a}}.$$



Augustin Louis Cauchy.

Allikas: Wikipedia

Cauchy õppis ehitusinseneriks ja töötas sadama ja kaitserajatiste ehitusel. Üsna varsti valiti ta Pariisi teaduste akadeemia liikmeks ja Cauchy hakkas andma loenguid Pariisi Polütehnilises Koolis.

Cauchy muutis 1820. aastatel matemaatilise analüüsi valdkonda olulisel määral, formaliseerides piirväärtuse, pidevuse, tuletise ja integraali mõisted. Lisaks rajas ta peaaegu üksinda kompleksmuutuva funktsioonide teooria alused. Aastal 1821 ilmus teedrajav raamat "Cours d'analyse" (Analüüsi kursus), vt [6].

6.2 L'Hôspitali reegel piirväärtuse arvutamiseks

L'Hôspitali reegel võimaldab tihti leida piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

juhtudel, kus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ($\frac{0}{0}$ tüüpi määramatus) või $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ($\frac{\infty}{\infty}$ tüüpi määramatus).

Teoreem 6.5

Kui mingis protsessis $x \rightarrow a$ (siin $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

siis selles protsessis kehtib võrdus

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

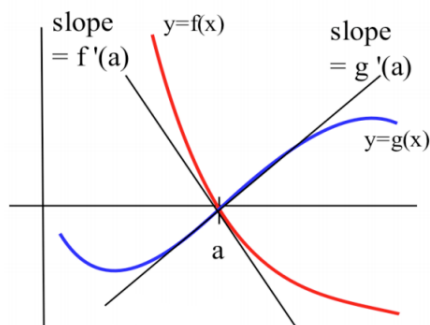
Tõestus. Detailsema tõestuse sarnase tulemuse kohta leiab õpikust [23]. Teoreem järelneb Cauchy keskvaartusteoreemist. Esitame tõestuse põhi-idee juhul, kui $f(a) = g(a) = 0$ ja $g'(x) \neq 0$ iga $x > a$ korral. Cauchy keskvaartusteoreemi põhjal on valitud $\delta > 0$ korral olemas $\xi \in (a, a + \delta)$ nii, et

$$\frac{f(a + \delta) - f(a)}{g(a + \delta) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Sellest säilib $f(a) = g(a) = 0$ tõttu võrdus

$$\frac{f(a + \delta)}{g(a + \delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

milles minnakse piirile $\delta \rightarrow 0+$. □



L'Hôspitali reegel $f(a) = g(a) = 0$ korral. Allikas: [13]

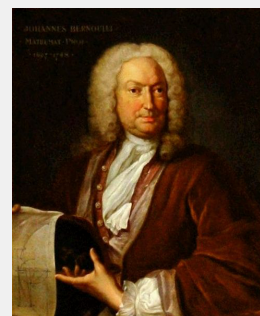
L'Hôspitali reegli nimi tuleb prantsuse matemaatiku Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôspitali (1661-1704) järgi.



Marquis de l'Hôspital. Allikas: Wikipedia

Arvatavasti tõestas l'Hôspitali reegli šveitsi matemaatik Johann Bernoulli (1667-1748). Markii l'Hôspital ise oli Bernoulli õpilane ja ühtlasi tööandja. Lepingu järgi võis l'Hôspital kasutada Bernoulli tulemusi oma nime all. L'Hôspital avaldas 1696. aastal maailma esimese trükitud raamatu diferentsiaalarvutuse valdkonnas: "Lõpmata väikeste suuruste analüüs kõverjoonte mõistmiseks", milles oli kasutatud päris mitut Bernoulli ja Leibnizi tulemust (seda mainis eessõnas ka l'Hôspital ise).

Naljatledes öeldakse, et l'Hôspitali reegel on parim (kõige kasulikum) teoreem, mida raha eest saab osta.



Johann Bernoulli. Allikas: Wikipedia

Johann Bernoulli oli seejuures ka Euleri õpetaja.

L'Hôspitali reegli võib kirjutada kujul

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vajalikel eeldustel funktsioonide f ja g jagatiste tüüpide ning piirväärtuste kohta. Muidugi võib l'Hôspitali reeglit kasutada ka korduvalt, näiteks võib eelnevas võrduses jätkata

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)},$$

kui vajalikud eeldused on täidetud.

Näide 6.5

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{4}{5}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 6.6

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Näide 6.7

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{1+7x}}{1} = 7.$$

◇ ◇ ◇

Näide 6.8

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 6.9

L'Hôspital'i reegli korral on oluline, et meil oleks vaja leida piirväärtus jagatisest $\frac{f(x)}{g(x)}$. Kui jagatist ei ole, võib selle ise tekitada. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{-\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 6.5

On oluline kontrollida, et tekiks $\frac{0}{0}$ või $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ tüüpi määramatus, vastasel korral võib saada absurdse tulemuse. Näiteks, proovides kasutada l'Hôspitali reeglit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2} = 0,$$

mis ei anna sugugi õiget piirväärtust ∞ .

Näide 6.10

L'Hôspitali reegel ei ole alati kasutatav. Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0,$$

kuna $\frac{2}{3} \in (0, 1)$. L'Hôspitali reeglga saaksime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{3^x \ln 3} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^2 2}{3^x \ln^2 3} \stackrel{\infty/\infty}{=} \dots,$$

mida võime ka jätkata. Sellega ei saa me aga selgemaks, kuidas piirväärtust leida.

◇ ◇ ◇

Näide 6.11

Märgime, et kuigi l'Hôspitali reegli kasutamisel on piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemasolu oluline, võib selle puudumisel piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ siiski eksisteerida. Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1,$$

sest

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Samas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

aga ei eksisteeri, kuna protsessis $x \rightarrow \infty$ on lõpmata palju arve x , millal $\cos x = 0$ või $\cos x = 1$ ja sel juhul murrul

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

saab olema väärtuseid 1 ja 0. Trigonomeetrilistest valemitest saab kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^2 \frac{x}{2}.$$

Tangensi väärtustest protsessis $x \rightarrow \infty$ piirväärtust ei eksisteeri.

◇ ◇ ◇

6.3 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

„Teadus loob meid ümbritsevast objektiivsest reaalsusest tõetruu pildi, vaadeldes seal toimuvaid nähtusi üksteisega seostatuna, jälgides ühe nähtuse kulgemist teise nähtuse taustal. Matemaatiliselt avaldub niisuguse vaatlemise tulemus alati kahe suuruse teatava funktsionaalse seosena kujul $y = f(x)$. Ainsaks nähtuse staatikasse puutuvaks küsimuseks on seejuures küsimus: missugune on funktsiooni väärtus argumenti etteantud väärtusel? Nähtuse dünaamikat puutuvate küsimuste hulk on märksa suurem. Siia kuuluvad meile juba tuttavad küsimused: kui suur on $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$? Kui suur on funktsiooni muutumise kiirus $f'(a)$? Siia kuuluvad aga ka küsimused, mis iseloomustavad funktsiooni muutumise kvalitatiivset külge, nagu näiteks küsimused: kas argumenti läbiminekul väärtusest a funktsioon kasvab või kahaneb? Kas kasvamine või kahanemine toimub kiirenevalt või aeglustuvalt.“ (vt [29]).

Definitsioon 6.2

Funktsiooni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **kasvavaks** hulgas X , kui suvaliste $x_1, x_2 \in X$ korral, kus $x_1 < x_2$, kehtib $f(x_1) < f(x_2)$. Kui aga $x_1 < x_2$ korral $f(x_1) > f(x_2)$, siis räägitakse **kahanevast** funktsioonist.

Teoreem 6.6

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f'(x) > 0$ iga argumenti väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kasvav** selles vahemikus, ja kui $f'(x) < 0$ iga argumenti väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kahanev** selles vahemikus.

Tõestus. Tõestame tulemuse kasvava funktsiooni kohta. Olgu $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Valime suvalised punktid $x_1, x_2 \in (a, b)$ nii, et $x_1 < x_2$. Kuna funktsioon on diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis on ta pidev osalõigis $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Kasutades Lagrange'i keskvaartusteoreemi, leiame punkti $\xi \in (x_1, x_2)$ nii, et

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Et $f'(\xi) > 0$, siis

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

mistõttu

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

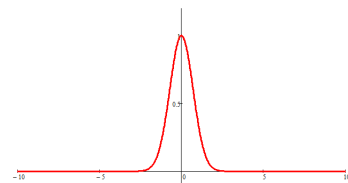
ehk $f(x_1) < f(x_2)$, s.t funktsioon f on kasvav vahemikus (a, b) . $\square$

Näide 6.12 Uurime funktsiooni $f(x) = e^{-x^2}$. Leiame tuletise

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}.$$

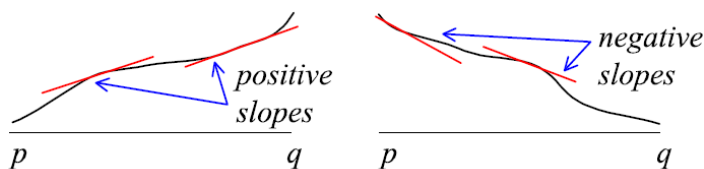
Ekspontentfunktsioon e^z on iga arvu z korral positiivne. Järelikult piirkonnas $x \in (-\infty, 0)$ kehtib $f'(x) > 0$ ja seetõttu on funktsioon kasvav ning piirkonnas $x \in (0, \infty)$ kehtib $f'(x) < 0$ ja seepärast on funktsioon kahanev selles piirkonnas.

◇ ◇ ◇



Märkus 6.6

Geomeetriliselt tähendab tingimus $f'(x) > 0$ (funktsioon kasvab) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab iga $x \in (a, b)$ korral x -telje positiivse suunaga teravnurga ja tingimus $f'(x) < 0$ (funktsioon kahaneb) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab iga $x \in (a, b)$ korral x -telje positiivse suunaga nürinurga.



Allika: [20]

6.4 Funktsiooni ekstreemumid

Definitsioon 6.3

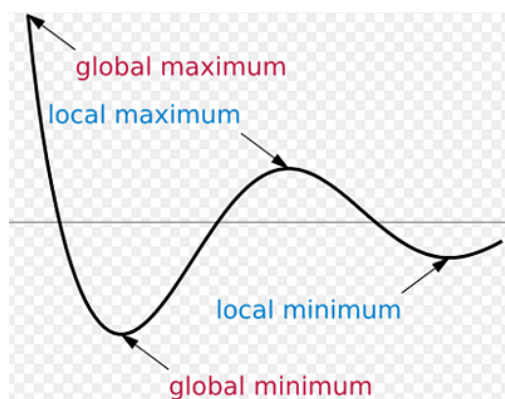
Öeldakse, et funktsioonil $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, on punktis (kohal) $a \in X$ **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii, et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis (kohal) a **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii, et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Lokaalse miinimumi ja lokaalse maksimumi kohta öeldakse kokkuvõtvalt ka **lokaalne ekstreemum**.



Joonis: Wikipedia.

Märkus 6.7

Diferentseeruva funktsiooni lokaalse ekstreemumi (maksimum või miinimum) leidumiseks punktis a on Fermat' teoreemi põhjal tarvilik, et $f'(a) = 0$. Kui funktsioon ei ole punktis a diferentseeruv (kuid on siiski määratud), siis punkt a võib ikka olla ekstreemumpunkt (näiteks $y = |x|$ korral on $x = 0$ miinimumpunkt).

Funktsiooni f niisugust argumenti väärtust a , mille korral funktsioon saavutab oma ekstreemumi, nimetatakse selle *funktsiooni ekstreemumkohaks* või *funktsiooni ekstreemumpunktiks*.

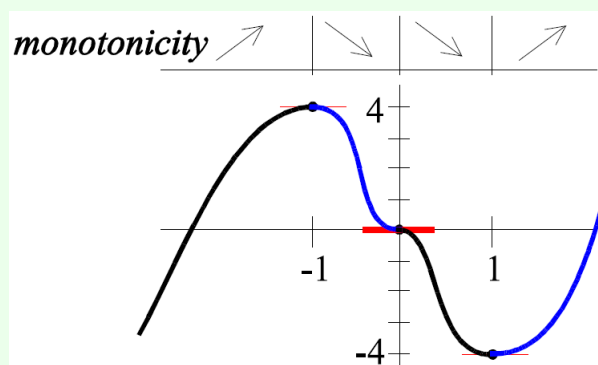
Definitsioon 6.4

Määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$, ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**.

Teoreem 6.7

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikes $(a - \delta, a)$ ja $(a, a + \delta)$ mingi $\delta > 0$ korral ning **pidev** kriitilises punktis a . Siis kehtivad väited:

1. Kui punkti a läbimisel (positiivses suunas) $f'(x)$ märk muutub $+$ $\rightarrow$ $-$, siis on funktsioonil f punktis a lokaalne maksimum (funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks);
2. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk muutub $-$ $\rightarrow$ $+$, siis on funktsioonil f punktis a lokaalne miinimum (funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks);
3. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk ei muutu, siis punktis a ekstreemumit ei ole.



Allika: [20]

Näide 6.13 Funktsioon $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ on pidev kogu reaalteljel, kuid ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$, s.t 0 on funktsiooni kriitiline punkt. Leiame tuletise

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Samas, $f'(x) < 0$, kui $x < 0$, ja $f'(x) > 0$, kui $x > 0$. Seega on $x = 0$ funktsiooni f lokaalne miinimumpunkt.

◇ ◇ ◇

Märkus 6.8

Peale lokaalsete ekstreemumite eristame veel **globaalseid ekstreemume** (funktsiooni suurim või väikseim väärtus mingis piirkonnas). Viimaste leidmiseks võib leida kõik lokaalsed ekstreemumid, kusjuures eraldi tuleb arvutada funktsiooni väärtused punktides, kus tuletist ei ole, näiteks piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga). Saadud suurim või väikseim väärtus ongi funktsiooni globaalseks ekstreemumiks. Kui ei ole eraldi rõhutatud, siis mõistame **ekstreemumite** all kõiki lokaalseid ja globaalseid ekstreemume.

Näide 6.14 Lennukompanii arvestab pileti hinnaks iga istekoha eest 300 eurot, lisades baashinnale juurde 2 eurot iga välja müümata istekoha eest. Mitu kohta tuleks 200-istmelises lennukis välja müüa, et lennukompanii tulu oleks suurim?

Esmapilgul tundub, et tuleks müüa 200 piletit ja tulu $200 \cdot 300 = 60000$ eurot võiks olla vastus, aga nii lihtne see päriselt ei ole. Olgu x müüdud piletite arv, $200 - x$ müümata piletite arv. Siis ühe pileti hind on

$$p(x) = 300 + 2(200 - x) = 700 - 2x.$$

Kõikide müüdud piletite pealt saab tulu

$$T(x) = x \cdot p(x) = 700x - 2x^2.$$

Tulufunktsiooni $T(x)$ maksimumi leidmiseks leiame tuletise ja pane-me ta võrduma nulliga (kuna maksimum võib leiduda vaid kriitilises punktis või siis piirkonna otspunktides):

$$700 - 4x = 0.$$

Saame, et $x = 175$ istekohta. Sel juhul teenib lennukompanii $T(175) = 175(300 + 2 \cdot 25) = 175 \cdot 350 = 61250$ eurot. Kuigi erinevus ei ole väga suur, saame siiski mingi ettekujutuse optimeerimise võimalustest.

Päris elus kogu mudel muidugi nii lihtne ei ole. Lisada tuleb veel tegurid, mis arvestavad turu olukorda, konkurentsi, tarbijate ostujõudu jne.

◇ ◇ ◇

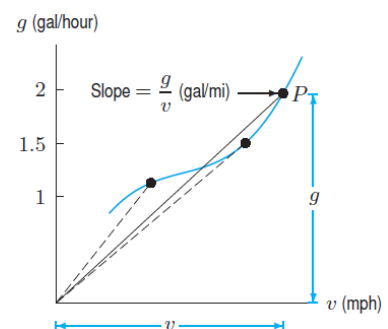
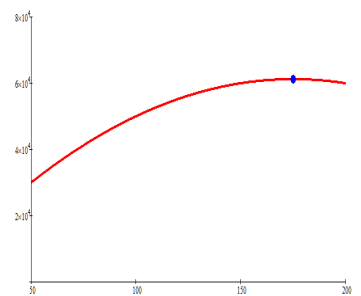


Figure 4.35: Graphical representation of gas consumption per mile, $G = g/v$

Allikas: [14]

Näide 6.15

Teatud optimaalseid väärtusi võib välja lugeda ka graafikult, ilma et peaks teadma konkreetseid funktsioone. Olgu v auto liikumise kiirus ja g kütuse kulu ajaühikus. Vaatleme graafikut, kus ühel teljel on v ja teisel teljel on g . Oleme huvitatud kütusekulust pikkusühiku kohta $G = \frac{g}{v}$ (siin gallonit miili kohta, näide pärineb õpikust [14]).

Soovime leida G minimaalset väärtust. Võttes graafikul joone peal punkti P , tekib täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on g ja teine v , üks nurkadest asub nullpunktis. Seega hüpotenuus asub sirgel, mille tõus on $\frac{g}{v}$. On lihtne aru saada, et $G = \frac{g}{v}$ on minimaalne punktis, kus vastava sirge tõus on minimaalne (kõige väiksem teravnurk).

Kõrvalolevat joonist silmas pidades saame, et kiiruse $v = 50$ korral on kütuse kulu miili kohta kõige väiksem. Sedasi saab andmeid lugeda suhte $\frac{f(x)}{x}$ kohta suvalise funktsiooni f korral. Meie tehtud analüüs on sisuliselt sama, mis leida funktsiooni $\frac{f(x)}{x}$ tuletis ja lahendada võrrand $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$. See annab

$$\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0$$

ehk

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

◇ ◇ ◇

Lause 6.1

Olgu funktsioon kaks korda diferentseeruv punktis c . Siis funktsioonil f on argumenti väärtusel c lokaalne maksimum, kui

$$f'(c) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(c) < 0,$$

ja funktsioonil f on argumenti väärtusel c lokaalne miinimum, kui

$$f'(c) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(c) > 0.$$

Näide 6.16 Leiame antud ruumalaga V silindrikujulise kinnise anuma mõõtmed nii, et anuma valmistamiseks kuluv materjali kogus oleks minimaalne. Olgu silindri aluse raadius r ja silindri kõrgus h . Siis kahe põhja pindala on $2\pi r^2$ ja külje pindala $2\pi r h$. Anuma kogupindala on

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Silindri ruumala on $V = \pi r^2 h$, millest $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Seda arvestades saame

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

ja meid huvitab r väärtus, kus S on minimaalne. Leides tuletise

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2},$$

näeme, et $S'(r) = 0$ parajasti siis, kui

$$2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \quad \text{ehk} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

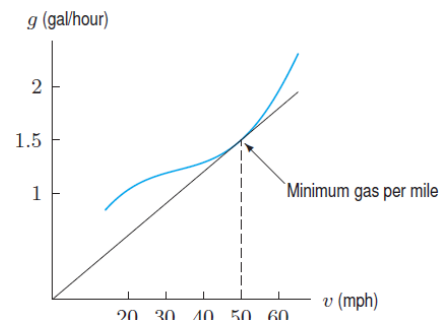
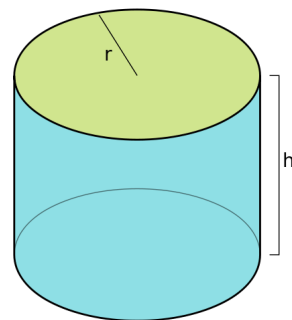


Figure 4.36: Velocity for maximum fuel efficiency

Allikas: [14]



Joonis: Wikipedia.

Lisaks,

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0,$$

mis tähendab, et leitud r väärtus on miinimumpunkt. Seejuures

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

ning $h = 2r$.

◇ ◇ ◇

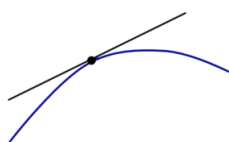
6.5 Funktsiooni kumerus ja nõgusus

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Varasemast teame, et igas punktis $x \in (a, b)$ on funktsiooni graafikul olemas puutuja.

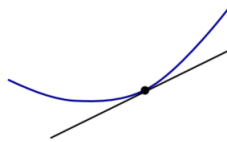
Definitsioon 6.5

Funktsiooni f nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni f puutuja asub ülalpool graafikut.

Funktsiooni f nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni f puutuja asub allpool graafikut.



kumer funktsioon



nõgus funktsioon

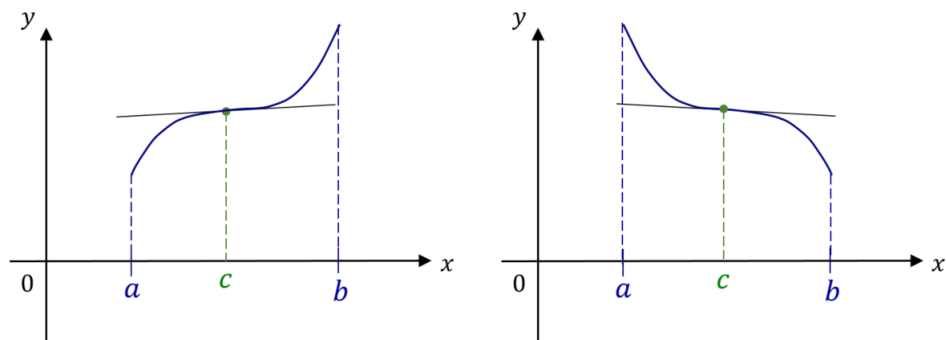
Teoreem 6.8

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f''(x) < 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis f on kumer selles vahemikus. Kui $f''(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis f on nõgus selles vahemikus.

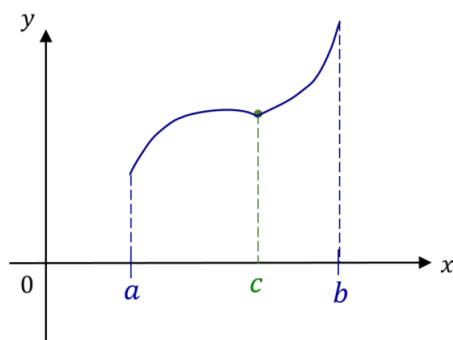
Definitsioon 6.6

Olgu funktsioon f diferentseeruv vähemalt vahemikes (a, c) ja (c, b) ning pidev punktis c . Kui funktsioon f on kumer vahemikus (a, c) ja nõgus vahemikus (c, b) (või nõgus vahemikus (a, c) ja kumer vahemikus (c, b)), siis punkti c nimetatakse **käänupunktiks**.

Geomeetriline tõlgendus. Kui puutuja leidub, siis käänupunktis puutuja lõikab joont. Puutuja võib ka puududa, kui funktsiooni tuletise graafikul on teravad nurgad.



Mõlemal joonisel on käänupunktiks c .



Ka siin on käänupunkt vaatamata sellele, et tuletis ei ole pidev funktsioon.

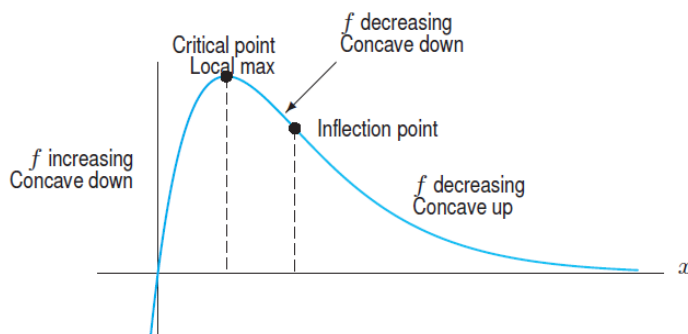
Näide 6.17 Vaatleme funktsiooni $f(x) = x e^{-x}$. Leiame kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid (kui need leiduvad). Esimest järku tuletis on

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$$

ja teine tuletis

$$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) e^{-x} = (x - 2) e^{-x}.$$

Näeme, et $f'(x) = 0$, kui $x = 1$. Siinjuures $f''(1) < 0$, seepärast asub punktis $x = 1$ lokaalne maksimum. Piirkonnas $x < 2$ on $f''(x) < 0$ ja funktsioon on kumer. Piirkonnas $x > 2$ on $f''(x) > 0$ ja funktsioon on nõgus. Kuna punkt $x = 2$ eraldab kumerat ja nõgusat piirkonda, siis on punkt $x = 2$ käänupunktiks.

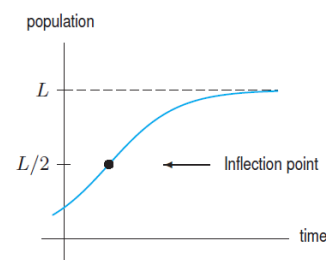


Näide 6.18 Vaatleme logistilist kõverat, mis iseloomustab populatsiooni kasvu ajas, kusjuures populatsiooni piiriks on L ja käänupunkt asub kõrgusel $\frac{L}{2}$.

Enne punkti $\frac{L}{2}$ on joon nõgus, s.t kasvamise kiiruse muutumise kiirus (ehk kiirendus) on positiivne.

Seega nõgus ja kasvav funktsioon näitab, et kasvamise kiirus on igas järgmises punktis suurem kui eelmises ja kõige suurem on see käänupunktis $\frac{L}{2}$. Edasi hakkab kasv aeglustuma, s.t kumer ja kasvav funktsioon näitab, et kasvamise kiirus igas järgmises punktis on väiksem kui eelmises (kiirendus ehk funktsiooni teist järku tuletis on negatiivne).

◇ ◇ ◇



Allikas: [14]

Märkus 6.9

Analooiliselt võib analüüsida kõiki nelja põhitüüpi: kasvav-kiirendav, kasvav-aeglustav, kahanev-kiirendav ja kahanev-aeglustav.

$$\begin{array}{l} f' > 0 \\ f'' > 0 \end{array}$$

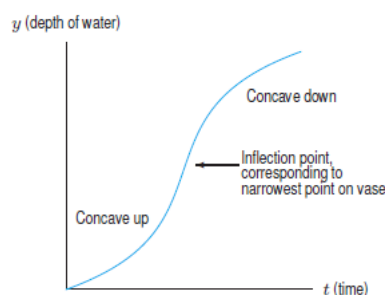
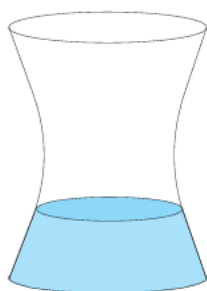
$$\begin{array}{l} f' > 0 \\ f'' < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f' < 0 \\ f'' > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f' < 0 \\ f'' < 0 \end{array}$$

Allikas: [3]

Näide 6.19 Pildil toodud kujuga vaasi valatakse vett konstantse kiirusega. Vee taseme tõusu kui aja funktsiooni graafikul on näha funktsiooni nõgususe (vaasi ristlõike pindala väheneb) ja kumeruse (vaasi ristlõike pindala suureneb) piirkonnad, samuti käänupunkt, s.o. ajahetk, kus vee tase vastab vaasi vähimale ristlõike pindalale.



Allikas: [14]

◇ ◇ ◇

6.6 Funktsiooni graafiku joonistamine

Üldjuhul on kasulik jälgida järgmist skeemi:

1. Leiame funktsiooni määramispiirkonna (kui võimalik, siis ka muutumispiirkonna) ja katkevuspunktid. Teeme kindlaks, kas funktsioonil on iseloomulikke omadusi, näiteks paaris või paaritu funktsioon, perioodiline funktsioon.
2. Leiame asümptootid (sirged, millele funktsiooni graafik võiks mingis protsessis läheneda, vt. allpool).
3. Leiame kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid (miinimum- ja maksimumkohad). Üldiselt, leiame info, mille annab meile funktsiooni esimest järku tuletis.
4. Leiame antud funktsiooni kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid. See on info, mida saab funktsiooni teist järku tuletise kaudu.
5. Joonistame saadud tulemuste põhjal graafiku.

Definitsioon 6.7

Sirget $x = a$ nimetatakse funktsiooni f graafiku **püstasümptoodiks**, kui

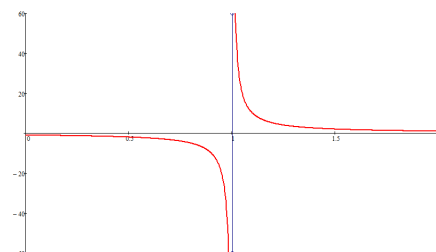
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

On selge, et graafikul saab püstasümptoot olla vaid katkevuspunktides.

Näide 6.20 Joone $y = \frac{1}{x-1}$ vasak- ja parempoolseks püstasümptoodiks on sirge $x = 1$, sest

$$f(1-) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

◇ ◇ ◇



Definitsioon 6.8

Sirget

$$y = ax + b, \quad a \neq 0,$$

nimetatakse funktsiooni f graafiku parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, mis tähendab, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right).$$

Lihtne on tuletada, et kaldasümptoodi tõus a peab võrduma piirväärtusega

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right).$$

Siinjuures parempoolse kaldasümptoodi korral peetakse silmas protsessi $x \rightarrow \infty$ ja vasakpoolse kaldasümptoodi korral protsessi $x \rightarrow -\infty$.

Seejuures

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \right).$$

Näide 6.21 Leiame funktsiooni $f(x) = x \arctan x$ graafiku kaldasümptoodid. Esiteks leiame sirge tõusu (mõlemad lõpmatud protsessid korraga)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Parempoolse kaldasümptoodi korral $a = \frac{\pi}{2}$ ja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arctan x - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$\stackrel{0/0, L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1.$$

Vasakpoolse kaldasümptoodi korral $a = -\frac{\pi}{2}$ ja analoogiliselt

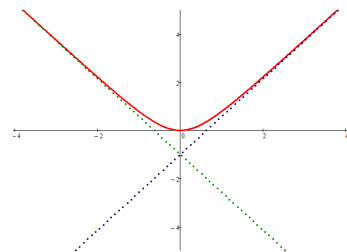
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \arctan x + \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$\stackrel{0/0, L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Seega nii parem- kui ka vasakpoolne kaldasümptoot on olemas ja on vastavalt

$$y = \frac{\pi}{2} x - 1, \quad y = -\frac{\pi}{2} x - 1.$$

◇ ◇ ◇



Näide 6.22 Joonistame funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

graafiku (vt. [23]).

1. Funktsiooni määramispiirkonnaks on $X = \mathbb{R} \setminus (0, 2]$. Lihtne on kontrollida, et funktsioon ei ole paaritu ($f(-x) \neq -f(x)$) ega paaris ($f(-x) \neq f(x)$) ja f ei ole perioodiline. Kuna $f(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral, siis funktsiooni graafik asub ülalpool x -telge.

2. Sirge $x = 2$ on funktsiooni f parempoolseks püstasümptoodiks ($f(2+) = \infty$). Leiame kaldasümptoodid $y = ax + b$. Selleks arvutame

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \pm 1.$$

Leiame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = 1 \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x-2} - \sqrt{x})}{\sqrt{x-2}} = -1.$$

Saime, et parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot on vastavalt

$$y = x + 1, \quad y = -x - 1.$$

3. Leiame funktsiooni tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \left(\frac{3}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x-2| \right)' = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{2(x-2)} \right) \\ &= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} (x-3). \end{aligned}$$

Tuletis ei ole määratud punktis $x = 0$, kuid võrrandist $f'(x) = 0$ saame kriitiliseks punktiks $x = 3$. Lokaalseks miinimumiks saame $f(3) = \sqrt{27}$, kuna $f'(x) < 0$ piirkonnas $x \in (2, 3)$ (kahaneb) ja $f'(x) > 0$ piirkonnas $x \in (3, \infty)$ (kasvab). Kui $x < 0$, siis $f'(x) < 0$ ja funktsioon on kahanev. Kuna $f(0) = 0$, siis $x \leq 0$ jaoks asub punktis $x = 0$ globaalne miinimum.

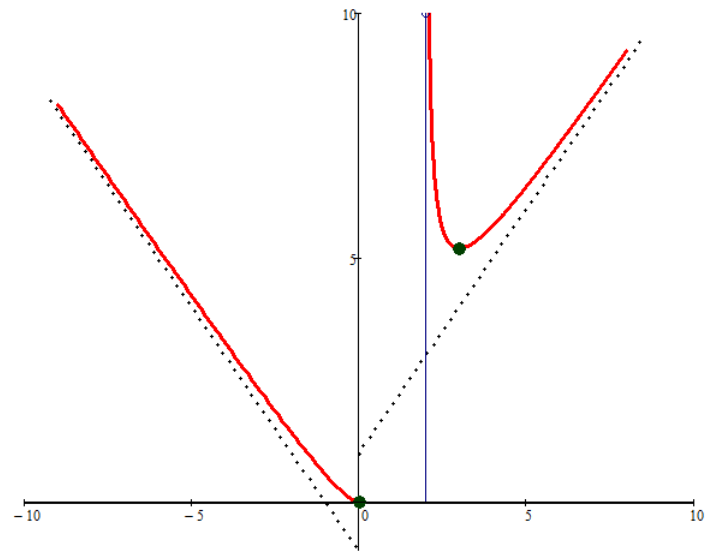
4. Leiame funktsiooni teise tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x) \left(\frac{1}{2} \ln|x| + \ln|x-3| - \frac{3}{2} \ln|x-2| \right)' \\ &= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} (x-3) \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{2(x-2)} \right) \\ &= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} (x-3) \frac{6}{2x(x-3)(x-2)} = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}. \end{aligned}$$

Piirkonnas $x < 0$ kehtib $f''(x) > 0$ ning $x > 2$ korral $f''(x) > 0$ ja funktsioon on nõgus hulgal $\mathbb{R} \setminus [0, 2]$.

◇ ◇ ◇

5. Joonistame graafiku, konspekti jaoks küll arvuti abiga.



◇ ◇ ◇

Peatükk 7

Algfunktsioon ja määramata integraal

7.1	Sissejuhatus	132
7.2	Algfunktsioon	132
7.3	Määramata integraal	133
7.4	Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest	134
7.5	Tehetega seotud integreerimisreeglid	136
7.6	Muutujavahetus	137
7.7	Ositi integreerimine	139
7.8	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	142

Kontrolltöö teemad

1. Määramata integraali seos kiirenduse, kiiruse ja teepikkusega.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid.
3. Muutuja vahetuse võte määramata integraali leidmisel.
4. Ositi integreerimise reegel ja selle kasutamine.
5. Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine lihtsamal juhul.

Eksamiteemad

1. Algfunktsiooni mõiste.
2. Määramata integraali mõiste.
3. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid
4. Muutuja vahetuse võte määramata integraali leidmisel.
5. Ositi integreerimise reegel ja selle kasutamine.
6. Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine.

7.1 Sissejuhatus

Vaatleme objekti liikumist seaduse $s = s(t)$ alusel, kus s näitab läbitud teepikkust ajahetkel t . Funktsiooni s tuletis andis meile hetkkiiruse $v(t) = s'(t)$ hetkel t ja teine tuletis kiirenduse $a(t) = s''(t)$,

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Vaatleme nüüd olukorda, kus me näiteks teame objekti kiirust $v(t)$ igal ajamomendil. Meid huvitab, kas kiiruse $v(t)$ alusel saab teada objekti asukoha $s(t)$ igal ajahetkel t . Osutub, et teatud tingimustel on see võimalik. Sellist vastupidise suunaga info leidmist me nimetamegi määramata integraali leidmiseks (sõnastame täpsemalt allpool). Kohe näeme, et kiirenduse või kiiruse teadmisel kehtivad **skemaatiliselt** järgmised omadused:

$$v(t) = \int v'(t) dt = \int a(t) dt, \quad s(t) = \int s'(t) dt = \int v(t) dt.$$

Seos kiiruse, kiirenduse ja läbitud teepikkusega kehtib rangelt võttes konstandi täpsusega. Täpselt korrektne oleks need seosed anda järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int v(t) dt &= s(t) + s_0, \\ \int a(t) dt &= v(t) + v_0. \end{aligned}$$

7.2 Algfunktsioon

Definitsioon 7.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **algfunktsiooniks** vahemikus (a, b) , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a, b)$ korral.

Näide 7.1 Funktsiooni $y = x^3$ üheks algfunktsiooniks on funktsioon $y = \frac{x^4}{4}$, üldiselt iga funktsioon kujul

$$y = \frac{x^4}{4} + C,$$

kus C on suvaline konstant. Tõepoolest,

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = x^3.$$

◇ ◇ ◇

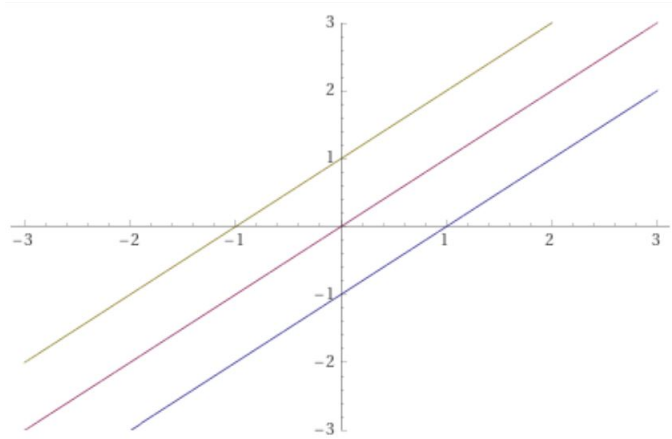
Näide 7.2 Arvestades sissejuhatuses toodud kommentaare, on lihtne näha, et kiirenduse a algfunktsiooniks on kiirus v ja kiiruse algfunktsiooniks on teepikkus s . Matemaatiliselt kehtib väide vähemalt siis, kui a ja v on pidevad funktsioonid aja t järgi.

Olgu näiteks punkti liikumise kiirus konstantne $v(t) = 1$. Sel juhul v algfunktsiooniks on $s(t) = t + C$ (sest $(t + C)' = 1$). Kui me liikumise kohta rohkem infot ei tea, siis v algfunktsiooniks võib olla iga sirge $t + C$, mille tõus on üks, kuid lõikepunkt y -teljega suvaline

Funktsiooni f algfunktsiooni leidmine on sama, mis leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x)$$

lahend $y = y(x)$. Diferentsiaalvõrrandid on loodusteasdukes modelleerimisel väga levinud vahend.



Kui me näiteks teame, et alghetkel $t = 0$ objekti asukoht oli punktis 1, siis võrdustest

$$s(0) = 1 \quad \text{ehk} \quad 0 + C = 1$$

saame, et $C = 1$ ja punkti liikumisseaduseks on üks konkreetne sirge $s(t) = t + 1$. Kui $s(0)$ oli midagi muud, siis saame mingi teise paralleelse sirge.

◇ ◇ ◇

Märkus 7.1

Funktsiooni f kõik algfunktsioonid avalduvad kujul $F + C$, kus F on funktsiooni f mingi algfunktsioon ja $C \in \mathbb{R}$ on suvaline konstant.

7.3 Määramata integraal

Definitsioon 7.2

Olgu F funktsiooni f mingi algfunktsioon. Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F + C$, kus $C \in \mathbb{R}$ on suvalise konstandi tähis, nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**. Kasutatakse kirjutist

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Definitsioon 7.3

Funktsiooni määramata integraali leidmist nimetatakse mõnikord selle funktsiooni **integreerimiseks**.

Tihti kasutatakse sõna “integraal” määramata integraali tähenduses.

Näide 7.3 Leiame

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide. Auto sõidab maanteel kiirusega 60 km/h. Kui suur peab olema auto konstantne aeglustus (negatiivne kiirendus a), et auto peatuks 73 meetri pärast?

Tähistame auto liikumise seaduse $s = s(t)$. Siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$s''(t) = a$$

tingimustega $s(0) = 0$ ja $s'(0) = v(0) = 60$.

Saadud diferentsiaalvõrrandi lahendamine seisneb algfunktsioonide leidmises.

Esimesena saame $s'(t) = at + C_1$ ehk $v(t) = at + C_1$ ja seejärel $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + C_1t + C_2$, kus C_1 ja C_2 on üldjuhul suvalised reaalarvud. Tingimus $s'(0) = 60$ annab $C_1 = 60$, seejärel saame $s(0) = 0$ abil, et $C_2 = 0$. Niisiis toimub liikumine eeskirja $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + 60t$ kohaselt (siin aega mõõdetakse tundides ja läbitud teepikkust kilomeetrites, seda näitas algiiruse 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Kiiruse muutumine nulliks aja t jooksul annab võrrandi $v(t) = at + 60 = 0$, millest $t = -\frac{60}{a}$. Selle aja jooksul läbib auto 0.073 km, mis viib võrrandini $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + 60t = 0.073$. Asendades siin $t = -\frac{60}{a}$, saame

$$\frac{a}{2} \left(-\frac{60}{a} \right)^2 - \frac{60^2}{a} = 0.073,$$

mille lahend on negatiivne kiirendus a . Selle teisendamine tavapärastesse ühikutesse annab $a \approx -1.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Märkus 7.2

Määramata integraali definitsioonist järelduvad järgmised võrdused:

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$,
2. $d(\int f(x) dx) = f(x)dx$,
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Seega diferentseerimine ja integreerimine on teineteise pöördteisendus-
teks (konstantse liidetava täpsusega). Inglise keeles kasutatakse mõnes
kirjandusallikas tuletise jaoks väljendit “derivative” ja määramata in-
tegraali jaoks “antiderivative”, mis on loomulikum, kui eestikeelne “in-
tegraal”.

Märkus 7.3

Funktsioonil f on olemas määramata integraal parajasti siis, kui sellel
funktsioonil on olemas algfunktsioon.

Teoreem 7.1

Igal vahemikus (a, b) pideval funktsioonil on olemas algfunktsioon selles
vahemikus.

7.4 Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest

Konstantne funktsioon

$$\int c dx = cx + C, \quad \text{kus } c \in \mathbb{R}$$

Astmefunktsioonid

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{kui } \alpha \neq -1$$

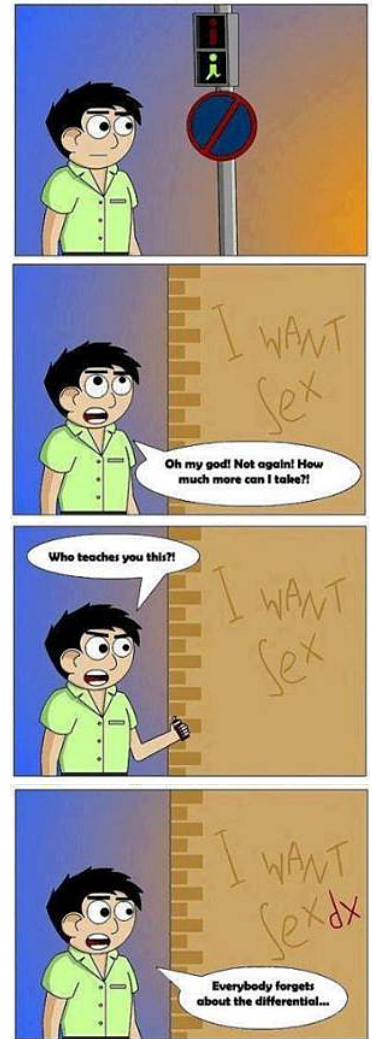
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Esimese võrduse erijuhtudena saame

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

EkspONENTfunktsioonid

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int e^x dx = e^x + C$$



Allikas: internet

Trigonomeetrilised funktsioonid

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid kui algfunktsioonid

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arccot} x + C$$

Hüperboolsed funktsioonid

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \qquad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = -\operatorname{cth} x + C$$

Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid kui algfunktsioonid

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsh} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arch} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{arth} x + C \qquad \int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{arch} x + C$$

Märkus 7.4

Kõikidel funktsioonidel ei pruugi olla algfunktsiooni elementaarfunktsioonidena (selliste funktsioonide väärtusi leitakse üldreeglina ligikaudsete meetoditega). Näiteks järgmisi integraale ei saa esitada elementaarfunktsioonide abil:

$$\int e^{-x^2} \, dx, \quad \int \cos x^2 \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

7.5 Tehetega seotud integreerimisreeglid

Teoreem 7.2

Kui on olemas integraalid $\int f(x) dx$ ja $\int g(x) dx$, siis kõikide reaalarvude $k, l \in \mathbb{R}$ korral on olemas integraal $\int (k f(x) + l g(x)) dx$, kusjuures

$$\int (k f(x) + l g(x)) dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx.$$

Tõestus. Eelduse järgi leiduvad algfunktsioonid F ja G , nii et $F' = f$ ja $G' = g$. Tuletise leidmise omaduste põhjal

$$(k F + l G)' = k F' + l G' = k f + l g.$$

Viimane ütlebki, et funktsiooni $k f + l g$ algfunktsiooniks on

$$k F + l G.$$

□

Näide 7.4 Leiame määramata integraali

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + 10 \sin x - \frac{2}{x} \right) dx &= \int x^5 dx + 10 \int \sin x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^6}{6} - 10 \cos x - 2 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.5 Auto sõidab konstantse kiirendusega a . Leiame läbitud teepikkuse seaduse, kui auto algkiirus oli $v(0) = v_0$ ja esialgne asukoht $s(0) = s_0$.

Avaldame kiiruse

$$v(t) = \int a dt = a t + C,$$

kus tingimusest $v(0) = v_0$ saame, et $C = v_0$. Leiame teepikkuse

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (a t + v_0) dt = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + C,$$

kus tingimusest $s(0) = s_0$ saame, et $C = s_0$. Seega auto liigub seaduse

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

alusel. Kui liikumine ei ole konstantse kiirendusega, siis saaksime mingi muu liikumise seaduse.

◇ ◇ ◇

7.6 Muutujavahetus

Märkus 7.5

Tuletise leidmisel kasutasime korrutamise ja jagamise reegleid, liit-funktsiooni leidmise reeglit jne. Integraali leidmisel selliseid universaalseid reegleid eriti palju ei ole. Paljudel juhtudel taandub integreerimine algfunktsiooni äraarvamisele, mille järel saab teatud abitulemustega näidata, et vastus tuleb see, mis ta peab tulema.

Seoses sellega on integreerimise jaoks välja töötatud palju erivõtteid (mõnikord ainult kindlat tüüpi funktsioonide jaoks), millest tutvustame siinkohal ainult kahte kõige olulisemat: muutujavahetus ja ositi integreerimine.

Lause 7.1

[23, 36]. Kui φ on diferentseeruv funktsioon muutumiskiirkonnaga U ja f on pidev määramiskiirkonnas U , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (7.1)$$

Tõestus. Funktsioon f on pidev, seega tal leidub algfunktsioon F ja järelikult

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Meie eeldustel saab moodustada funktsioonide φ ja F liitfunktsiooni $F\varphi$, mis on diferentseeruv (kui kahe diferentseeruva funktsiooni liitfunktsioon) ja kehtib

$$(F\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Saime, et funktsiooni $(f\varphi)\varphi'$ algfunktsiooniks on $F\varphi$, mistõttu

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = (F\varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Seega

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(u) + C,$$

mis annab võrduse (7.1). □

Näide 7.6 Leiame integraali

$$\int e^{2x-3} dx.$$

Teeme muutujavahetuse $u = 2x - 3$. Sel juhul $du = d(2x - 3) = 2dx$ ja $dx = \frac{du}{2}$. Järelikult

$$\int e^{2x-3} dx = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{e^u}{2} + C.$$

Asendades $u = 2x - 3$ tagasi, saame

$$\int e^{2x-3} dx = \frac{e^{2x-3}}{2} + C.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 7.6

Muutujavahetuse võtte erijuhuks on diferentsiaali märgi alla viimise võtte. Seda kasutatakse siis, kui on lihtne leida diferentsiaali $du(x) = u'(x) dx$.

Näide 7.7 Leiame integraali

$$\int \cos 4x dx.$$

Teame, et koosinuse algfunktsiooniks on siinus. On näha, et $d(4x) = 4 dx$. Seega võime kirjutada

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4} \sin 4x + C,$$

mille võib leida ka muutujavahetuse $u = 4x$ abil

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.8 Leiame integraali

$$\int (x-3)^2 dx.$$

Teame, et ruutfunktsiooni algfunktsiooniks on teatav kuupfunktsioon.

On näha, et $d(x-3) = dx$. Seega võime kirjutada

$$\int (x-3)^2 dx = \int (x-3)^2 d(x-3) = \frac{(x-3)^3}{3} + C,$$

mille võib leida ka muutujavahetuse $u = x - 3$ abil

$$\int (x-3)^2 dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x-3)^3}{3} + C.$$

◇ ◇ ◇

$$\int \text{devil} = \text{evil} + C$$

Näide 7.9 Leiame integraali

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx.$$

Näeme, et $d \sin x = \cos x \, dx$. Seega võime kirjutada

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Kontrolliks võib leida, et

$$\left(\frac{\sin^3 x}{3} + C \right)' = \frac{3 \sin^2 x}{3} \cos x = \sin^2 x \cos x.$$

◇ ◇ ◇

7.7 Ositi integreerimine

Lause 7.2

[23]. Olgu funktsioonid u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad ja eksisteerigu integraal

$$\int u'(x) v(x) \, dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x) v'(x) \, dx$$

ja kehtib võrdus

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) \, dx. \quad (7.2)$$

Tõestus. Tehtud eeldustel on korrutis uv diferentseeruv ja

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Eelduse kohaselt on olemas integraal $\int u'v \, dx$. Muidugi

$$\int (uv)' \, dx = uv + C$$

ja seepärast on olemas integraal $\int u v' \, dx$. Võrdusest

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

saamegi

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx.$$

□

Märkus 7.7

Võrdust (7.2) nimetatakse määramata integraali ositi integreerimise valemiks. Kuna $u'(x) dx = du$ ja $v'(x) dx = dv$, siis esitatakse see võrdus sageli kujul

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Näide 7.10 Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^x dx}_{\mathbf{dv}} = \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} \underbrace{dx}_{\mathbf{du}} = x e^x - e^x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.11 Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{\cos x dx}_{\mathbf{dv}}.$$

Kui integraali märgi all on polünoomi ja mingi funktsiooni korrutis, siis on tihti lootust leida vastus ositi integreerimise teel.

Üldiselt võetakse funktsiooniks v selline funktsioon, millest on lihtne leida integraali ja funktsiooniks u selline, mille tuletis lihtsustaks avaldist. Kuna tuletis alandab polünoomi astet ja integreerimine tõstab, siis kasulik on valida

$$u = x, \quad dv = \cos x dx.$$

Siit

$$u'(x) = x' = 1 \quad \text{ja} \quad du = dx$$

ning võrduse $dv(x) = \cos x dx$ integreerimisel saame

$$\int dv(x) = \int \cos x dx, \quad \text{millest valime} \quad v(x) = \sin x.$$

Seega ositi integreerimise valemi abil leiame

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.12 Vaatleme ühte sageli esinevat integraali

$$\int \sin^2 x dx.$$

Leiame selle integraali mitmel erineval moel. Esiteks ositi integreerimisega, võttes $u = \sin x$ ja $dv = \sin x dx$. Siis

$$du = \cos x dx, \quad v(x) = -\cos x.$$

Saame

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx.\end{aligned}$$

Siit saab leida, et

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C - \int \sin^2 x \, dx.$$

Viies $\int \sin^2 x \, dx$ paremalt poolt vasakule, saame

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C.$$

Järelikult

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Märgime, et lõpptulemuses ei kirjutata $\frac{C}{2}$, sest C ja $\frac{C}{2}$ omandavad mõlemad suvalisi reaalarvulisi väärtusi.

◇ ◇ ◇

Näide 7.13 Teine võimalus $\int \sin^2 x \, dx$ leidmiseks on kasutada trigonomeetrilist valemit

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int 2 \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.14 Kolmas võimalus on kasutada siinusfunktsiooni kompleksarvulist esitust (imaginaarühik i (s.t. $i^2 = -1$) käitub siin kui konstant),

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx = \int \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{-4} \right) dx.$$

Arvestades, et

$$\int e^{i2x} \, dx = \int \frac{1}{2i} e^{i2x} d(2ix) = \frac{e^{i2x}}{2i} + C,$$

siis

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right) + \frac{x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Analoogiliselt leitakse eraldi $\int \cos^2 x \, dx$, kuid praegu saame ka trigonomeetrilise valemi abil leida

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

7.8 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Vaatleme järgnevalt lihtsamaid juhte polünoomide $P(x)$ ja $Q(x)$ jagatise

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

integreerimisel. Siinjuures eeldame, et murd on antud taandatud kujul (lugejas olev x kõrgeim aste on väiksem kui nimetajas olev x kõrgeim aste). Põhiidee on murd $\frac{P(x)}{Q(x)}$ esitada osamurdude summana. Viimane on võimalik, sest igat polünoomi saab esitada korrutisena liikmetest kujul $x - a$ ja $x^2 + bx + c$. Tutvustame seda ideed näidete varal.

Definitsioon 7.4

Kui polünoomi $P(x)$ aste on väiksem polünoomi $Q(x)$ astmest, siis ratsionaalfunktsiooni $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise eeskiri.

Olgu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lihtmurd. Kui

$$Q(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + px + q)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole reaalseid nullkohti), siis kehtib võrdus

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} \\ & + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} \\ & \dots \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + px + q)^m} + \dots, \end{aligned} \quad (7.3)$$

kus $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, \dots, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m, \dots$ on mingid reaalarvud.

Kui nimetajas on polünoom, millel on kordsed nullkohad, siis tuleb välja kirjutada ka kõik madalama astmega polünoomid. Polünoomil x^2 on kordne nullkoht $x = 0$ ja seega peame kirjutama osamurrud $\frac{A_1}{x}$ ja $\frac{A_2}{x^2}$.

Kui nimetajas on ilma reaalsete nullkohtadeta ruutpolünoom, siis lugejas peab konstandi asemel olema lineaarne funktsioon $Bx + C$.

Märgime, et esitatavad näited ei hõlma kõiki tehnilisi võtteid osamurdude integreerimiseks, osa komplitseeritumaid juhte jääb vaatluse alt välja (vt. [17]). Järgnevas toome näiteid ratsionaalfunktsioonide osamurdudeks lahutamise ja nendest integraalide leidmise kohta.

Mõned tüüpilisemad näited sisalduvad järgmises tabelis.

Ühekordsed nullkohad.

$$\frac{7-x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

$$\frac{6x^2-14x-11}{(x+1)(x-2)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2x+1}.$$

Kordsed nullkohad.

$$\frac{7-x}{x(x+3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)^3}.$$

Kui ei ole reaalseid nullkohti.

$$\frac{x^3+3x^2+2x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Näide 7.15 Olgu vaja leida integraal

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx.$$

Näeme, et integraalialuse ratsionaalfunktsiooni nimetaja on esitatav $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$. Seepärast otsime lahutust

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Arvude A ja B leidmine toimub määramata kordajate meetodil, esitades siin parema poole ühisel nimetajal

$$\frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Võrreldes seda algse ratsionaalfunktsiooniga, saame võrdsused $A+B=5$ (muutuja x kordajate võrdsus) ja $-2A+B=-1$ (vabaliikmete võrdsus), millest $A=2$ ja $B=3$. Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = 2 \int \frac{d(x+1)}{x+1} \\ &+ 3 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.16 Leiame integraali

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx.$$

Integraalialuse ratsionaalfunktsiooni esitame

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

Parem pool ühisel nimetajal on

$$\frac{A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}.$$

Muutuja x astmete võrdlemisel (alates kõrgemast astmest) selles murrus ja algselt antud murrus saame võrdused

$$A + B + C = 1,$$

$$4A + 2B = 4,$$

$$3A - 3B - B = 1,$$

millest saab leida A , B ja C . Teine võimalus on võtta mõlemas murrus x väärtuseks nimetaja nullkohad ja võrrelda saadud väärtuseid (selliselt võrreldatakse tegelikult piirväärtusi, täpsemalt, väärtusi piirile lähenemisel). Selle võttega saame $x = 1$ korral (täpsemalt, kui $x \rightarrow 1$), et $8A = 6$, millest $A = \frac{3}{4}$; $x = -1$ korral $-4B = -2$ ehk $B = \frac{1}{2}$; $x = -3$ korral $8C = -2$ ehk $C = -\frac{1}{4}$. Niisiis esitub esialgne integraal

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.17 Leiam

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx.$$

Siin otsime lahutust

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Parem pool ühisel nimetajal on

$$\frac{A(x^2+4) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+4)},$$

millest muutuja x astmete võrdsus annab võrrandid

$$A + B = 0, \quad C = 0, \quad 4A = 1$$

ja sellest omakorda $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Niisiis,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2+4)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2+4} d(x^2+4) \\ &= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.18 Olgu vaja leida

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx.$$

Lahutus tuleb siin

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

ja parem pool ühisel nimetajal on

$$\frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}.$$

Kordajate määramiseks tulevad võrrandid

$$A + C = 2, \quad -A + B = 0, \quad -B = 1,$$

millest $A = B = -1, C = 3$. Nüüd leiame

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.19 Leiame

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

Ratsionaalfunktsiooni nõuetekohane lahutus on siin

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Võrduse parem pool annab

$$\frac{A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x}{x(x^2 + 1)^2}.$$

Valides $x = 0$ (ikka piiril), saame $A = 1$. Seepärast võime viimase murru lugeja kirjutada

$$x^4 + 2x^2 + 1 + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex.$$

Võrreldes vastavaid muutuja x astmeid algses ratsionaalfunktsioonis olevatega, leiame $B = -1, C = 0, D = -1$ ja $E = 0$. Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 8

Diferentsiaalvõrrandid

8.1	Sissejuhatus	148
8.2	Diferentsiaalvõrranditest üldiselt	150
8.3	Esimest järku diferentsiaalvõrrandid	151
8.4	Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	153
8.5	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	155

Kontrolltöö teemad

1. Esimest järku eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine.
2. Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine.

Eksamiteemad

1. Diferentsiaalvõrrandi ja tema lahendi mõiste.
2. Esimest järku diferentsiaalvõrrand.
3. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne.
4. Esimest järku eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand.
5. Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamise skeem.
6. Esimest järku lineaarne diferentsiaalvõrrand.
7. Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamise skeem.

8.1 Sissejuhatus

Diferentsiaalvõrranditel on teaduse arengus olnud suur mõju. Kui Newton avaldas oma tuntud seaduse

$$F = m a,$$

tekis võimalus hakata protsesside käitumist ette ennustama. Näiteks saab vaadeldavale Newtoni seadusele tuginedes leida keha poolt läbitud teepikuse, teades kiirendust ja jõudu, lahendades võrrandi

$$ms''(t) = F(t).$$

Sarnaselt on paljusid seadusi oluliselt lihtsam ja läbipaistvam kirjeldada kiiruseid või kiirendusi kasutades kui kirjeldada neid funktsioonide abil, millest ei ole võetud tuletisi. Sellised seaduste formuleeringud on oma siult diferentsiaalvõrrandid, kus otsitavaks on funktsioon, aga võrrandis esinevad selle tuletised.

Näide 8.1 Vaatame ühte lihtsat protsessi, mida saab vaadelda kui diferentsiaalvõrrandit.

Analüütik teenib oma tööga 10 eurot tunnis. Mitu eurot on ta teeninud kahe tööpäeva ehk 16 tunni möödudes, kui alghetkeks oli tal teenitud 500 eurot?

See on küll lihtne arvutus, kuid vaatame, kuidas seda diferentsiaalvõrrandi abil kirja panna. Olgu $y = y(t)$ analüütiku poolt teenitud summa eurodes hetkel t tundi, mis on möödunud alghetkest $t = 0$. Antud 10 eurot tunnis saab vaadelda kui teenitud raha hulga muutumise kiirust ajas (eurot/tunnis). Seega analüütiku teenistus muutub (konstantse) kiirusega

$$y'(t) = 10.$$

Selle võrrandi lahendamiseks võime võrrandi mõlemat poolt integreerida (y on funktsiooni y' algfunktsioon):

$$y(t) = 10t + C.$$

Saime võrrandi lahendiks sirge, mis sisaldab tundmatut konstanti C . See lahend kirjeldab kõikvõimalikke teenitud summasid erinevate algsummade $y(0)$ korral. Kuna meil on antud tingimus, et $y(0) = 500$, siis

$$y(0) = 10 \cdot 0 + C \quad \text{ehk} \quad C = 500,$$

mille asendamisel saamegi leida küsitud summa

$$y(16) = 10 \cdot 16 + 500 = 660.$$

◇ ◇ ◇

See tähendab, et keha massiga m liigub kiirendusega a , kui talle mõjub jõud suurusega F . Viimast võib lugeda ka nii: selleks, et keha massiga m liiguks kiirendusega a , peab talle mõjuma jõud suurusega F . Newtoni seadus antud kujul on ühe ajamomendi kohta.

Selle näite korral ei olnud tähtis niivõrd see, et me ilmtin-gimata peame antud protsessi kirja panema diferentsiaalvõrrandi abil, kuivõrd pigem see, et näidata diferentsiaalvõrrandi olemust, ja kui lihtsalt te-kivad diferentsiaalvõrrandid kiiruste kaudu või siis kuidas saab protsesse kirja panna kiiruste abil isegi selliste protsesside kohta, mille peale me igapäevast ei tule.

Näide 8.2 Järgmine näide on diferentsiaalvõrranditele iseloomulikum. Oletame, et võtame laenu 1000 eurot (liit)intressiga 5% aastas. Soovime teada, milliseks kujuneb antud intressi korral laenatud summa suvalisel ajahetkel t aastat (ehk kui suureks meie laen kasvab). Selle suuruse arvutamine ei ole raske, aga enam mitte nii lihtne, kui eelmises näites. Antud ülesande saame kirja panna järgmiselt.

Olgu laenu suurus hetkel t tähistatud $y = y(t)$. Laenu summa kasvab kiirusega 5% iseendast ehk

$$y' = 0.05y.$$

Lisaks on antud $y(0) = 1000$. Sellisena on laenu summa suuruse arvutamise seadust lihtne meelde jätta. Nagu hiljem selgub, on seda ülesannet suhteliselt lihtne lahendada.

◇ ◇ ◇

Protsendid kirjutame tihti skaalas $[0, 1]$ ehk siin $5\% = 0.05$. Seega esimese aasta lõpuks muutub summa y eurolt $y + 0.05y$ eurole.

Näide 8.3 Bioloogilise liigi arvukus. Olgu $y = y(t)$ mõne liigi isendite (näiteks teatud bakterite) arv ajamomendil t .

Malthuse seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus y' on võrdeline isendite arvuga:

$$y' = k y \quad \text{või teisiti} \quad \frac{dy}{dt} = k y,$$

kus k on võrdeegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete hea kättesaadavuse korral, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne.

Antud võrrandiga $y'(t) = k y(t)$ kirjeldatakse liigi arvukuse muutumise kiirust igal ajamomendil t , otsitavaks on liigi arvukus $y(t)$ ise.

Diferentsiaalvõrranditel on tavaliselt lõpmata palju lahendeid. Selleks, et ülesanne oleks korrektselt püstitatud ja saaks välja valida mudelile sobiva(d) lahendi(d), peavad olema antud veel mingid lisatingimused, näiteks antud olukorras bakterite arv mingil algmomendil $t = t_0$. Tihti võib algmomendi võtta $t_0 = 0$. Näiteks võib siis algtingimuseks olla $y(0) = 10^6$ bakterit mingis keskkonnas.

Märgime, et algtingimuse $y(0) = y_0$ korral on esialgse võrrandi lahendiks

$$y(t) = y_0 e^{k t}.$$

Näeme, et $k > 0$ korral toimub liigi eksponentsiaalne kasv ja $k < 0$ korral liigi eksponentsiaalne kahanemine.

◇ ◇ ◇

Thomas Robert Malthus
(1766 - 1834)



Allikas: Wikipedia
Malthus oli inglise demograaf ja majandusteadlane.

8.2 Diferentsiaalvõrranditest üldiselt

Kui eelnevalt vaatlesime vaid lihtsamaid diferentsiaalvõrrandite näiteid, siis tegelikult on diferentsiaalvõrrandite liike ja nendega seotud ülesandeid palju ja neil kõigil on oma olemuselt ja lahendamismeetoditelt olulised erinevused.

Märkus 8.1

Diferentsiaalvõrrandite korral peame paratamatult mainima mitme muutuja funktsioone, mida me ei ole veel õppinud. Esituses teeme seda nii vähe kui võimalik. Olgu öeldud, et sarnaselt ühe muutuja funktsioonile, nimetatakse antud eeskirja $z = f(x, y)$ kahe muutuja funktsiooniks f , kui igale argumentide paarile x ja y seatakse vastavusse üks ja ainult üks arv z .

Meie vajadusi rahuldab esialgu intuiivselt tajutav, aga tegelikkuses täpsustamist vajav definitsioon.

Definitsioon 8.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon ning see võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 8.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Definitsioon 8.3

Hariliku diferentsiaalvõrrandi **lahendiks** intervallis (a, b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, mis on selles intervallis diferentseeruv ning mille asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles intervallis.

Märkus 8.2

Antud kursuses tegeleme põhiliselt esimest järku harilike diferentsiaalvõrranditega. Seega kõik vaadeldavad mõisted käivad **esimest järku harilike diferentsiaalvõrrandite** kohta ning edaspidi kirjutame lihtsalt “diferentsiaalvõrrandid”. Diferentsiaalvõrrandi järku määrab ära võrrandis esinevate tuletiste kõrgeim järk.

8.3 Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 8.4

Esimest järku normaalkujuliseks diferentsiaalvõrrandiks nimetakse võrrandit

$$y' = f(x, y),$$

kus otsitavaks on funktsioon $y = y(x)$.

Normaalkujust üldisem on esimest järku diferentsiaalvõrrand

$$F(x, y, y') = 0.$$

Näide 8.4 Võrrandid

$$y' = \frac{y^2}{x} - 1, \quad y'' = \frac{y^2}{x} - 1$$

on vastavalt 1. järku ja 2. järku diferentsiaalvõrrandid.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 8.5

Ülesannet, milles otsitakse võrrandi

$$y' = f(x, y) \tag{8.1}$$

sellist lahendit $y = y(x)$, mis rahuldab **algtingimust**

$$y(x_0) = y_0, \tag{8.2}$$

nimetatakse **Cauchy ülesandeks** või ka **algtingimusega ülesandeks**.

Olgu võrrandis (8.1) funktsioon f määratud mingis piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definitsioon 8.6

Võrrandi (8.1) **üldlahendiks** piirkonnas D nimetatakse ühest parameetrist C sõltuvat lahendit (täpsemalt, lahendite peret) $y = y(x, C)$, milles iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral saab leida parameetri C sellise väärtuse C_0 , et $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust (8.2).

Definitsioon 8.7

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ **erilahendiks** nimetatakse mistahes funktsiooni $y = y(x, C_0)$, mis saadakse üldlahendist $y = y(x, C)$, kui anda selles parameetrile C konkreetne väärtus C_0 .

Näide 8.5 Võrrandi

$$y' = 8$$

üldlahendiks on $y = 8x + C$, kus C on suvaline reaalarv. Siin iga $C \in \mathbb{R}$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$y'(x) = (8x + C)' = 8$$

ning iga $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ korral tingimus $y(x_0) = y_0$ ehk $8x_0 + C_0 = y_0$ määrab parameetri C sobiva väärtuse C_0 . Niisiis on tegemist üldlahendiga piirkonnas $\mathbb{R}^2$.

Kui võtame näiteks $C = 1$ ja $C = -1$, siis saame erilahendid $y(x) = 8x + 1$, $y(x) = 8x - 1$, mis graafiliselt on mõlemal juhul sirged tõusuga 8.

◇ ◇ ◇

Märkus 8.3

Kui lahendatakse konkreetset Cauchy ülesannet (8.1), (8.2), siis võrrandi üldlahendi leidmisel ei pöörata tihti erilist tähelepanu võimaliku piirkonna D väljaselgitamisele, oluline on vaid, et oleks olemas mingi piirkond D , kus $(x_0, y_0) \in D$.

Näide 8.6 Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1.$$

Võrrandi $y' = -y^2$ üldlahendiks on funktsioon $y(x) = \frac{1}{x+C}$, kuna

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x+C} \right)' = -\frac{1}{(x+C)^2} = -y^2(x).$$

Konstandi C saame leida algtingimusest

$$y(0) = \frac{1}{0+C} = 1 \quad \text{ehk} \quad C = 1.$$

Seega Cauchy ülesande lahendiks on funktsioon $y(x) = \frac{1}{x+1}$, mis on määratud hulgal $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

◇ ◇ ◇

8.4 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 8.8

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f(x) dx + g(y) dy = 0. \quad (8.3)$$

Kui algselt on antud normaalkujuline võrrand

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

siis saab selle kirjutada kujul

$$f(x) dx - g(y) dy = 0,$$

seejuures tuleb muidugi eraldi analüüsida punktihulka, kus $g(y) = 0$, sest algvõrrandis $g(y) \neq 0$.

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi (8.3) lahendamiseks tuleb leida määratud integraalid ja lahendid saadakse (üldjuhul ilmutamatult) võrdusega

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C,$$

millest määratakse (vähemalt lokaalselt) funktsioonid $y = y(x)$ või $x = x(y)$. Me ei anna siin formaalselt üldlahendi mõistet, kuid see on analoogiline normaal kujulise võrrandi puhul antuga: teatava piirkonna igat punkti läbiva lahendi saab parameetri C konkretiseerimisel.

Näide 8.7 Võrrand

$$dx + dy = 0$$

on eraldatud muutujatega võrrand. Selle lahenditeks on määramata integraalide leidmisel saadud

$$x + y = C,$$

kus $C \in \mathbb{R}$ on suvaline.

◇ ◇ ◇

Näide 8.8 Eraldatud muutujatega võrrandiks on

$$x dx + y dy = 0,$$

mille integreerimine annab

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

ehk

$$x^2 + y^2 = C,$$

kus $C = 2C_1 > 0$. Siin on selge, et ei saa lubada juhtumit $C < 0$, aga $C = 0$ korral saadakse ainult punkt $(0, 0)$, mida ei ole mõistlik lugeda võrrandi lahendiks.

◇ ◇ ◇

Näide 8.9 Võrrand

$$\frac{1}{y} y' = x + 1$$

on eraldatud muutujatega võrrand kirjutatuna

$$\frac{1}{y} dy = (x + 1) dx.$$

Integreerides saame

$$\ln |y| = \frac{(x + 1)^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

millest

$$|y| = e^{C_1} e^{\frac{(x+1)^2}{2}} = C_2 e^{\frac{(x+1)^2}{2}}, \quad C_2 \in (0, \infty).$$

Sellest omakorda tulevad lahendid

$$y(x) = C e^{\frac{(x+1)^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

mis on kooskõlas sellega, et algvõrrandis ei ole lubatud juhtum $y = 0$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 8.9

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f_1(x)g_1(y) dx + f_2(x)g_2(y) dy = 0.$$

Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamiseks teisendatakse see eraldatud muutujatega võrrandiks

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0,$$

mille lahendamist juba käsitlesime. Eraldi tuleb analüüsida punktihulki, kus $f_2(x) = 0$ või $g_1(y) = 0$. Need võivad anda lisalahendeid, sest kui $f_2(x_0) = 0$, siis sirge $x = x_0$ on algvõrrandi lahend, sest siis $dx = 0$ (konstantse funktsiooni tuletis on 0), samuti $g_1(y_0) = 0$ korral on lahendiks $y = y_0$, sest siis $dy = 0$.

Võrrandi vasakul pool on liige $\frac{y'}{y}$, mille sisuks on näidata muutuja y suhtelist kasvukiirust (efektiivsus ennast taas toota, kui $y = y(x)$ rollis on mingi bioloogiline protsess ajas x). Siin suhteline kasvukiirus on lineaarne. Lineaarse kasvukiirusega muutujaks osutub selline lahend, nagu me allpool saame.

Näide 8.10 Lahendame võrrandi

$$xyy' = \frac{x^2 + 2}{y - 1}.$$

Selles muutujate eraldamine viib kujuni

$$(y^2 - y) dy = \left(x + \frac{2}{x}\right) dx.$$

Integreerimine annab

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| + C,$$

millest funktsiooni $y = y(x)$ ilmutamine ei ole tehniliselt väga elementaarne.

◇ ◇ ◇

8.5 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 8.10

Esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x), \quad (8.4)$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Funktsioone p_0 ja p_1 nimetatakse võrrandi (8.4) kordajateks, funktsiooni f aga **vabaliikmeks**.

Teoreem 8.1

Olgu võrrandi (8.4) kordajad p_0 ja p_1 ning vabaliige f pidevad funktsioonid vahemikus (a, b) , kusjuures $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Olgu $x_0 \in (a, b)$ ja $y_0 \in \mathbb{R}$ mingid etteantud arvud. Siis on võrrandil (8.4) olemas parajasti üks lahend y , mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Märkus 8.4

Vahemiku (a, b) all võib siin mõelda ka tõkestamata intervalli, s.o (a, ∞) , $(-\infty, b)$ või $(-\infty, \infty)$.

Märkus 8.5

Kui $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis võib selle kordajaga esialgse võrrandi läbi jagada ning sel juhul on esimest järku lineaarne võrrand kujul

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad (8.5)$$

kus p ja f on antud funktsioonid ning y on otsitav.

Järgnevas esitame võrrandi (8.4) lahendamise eeskirja, mille käigus tõestame ühtlasi teoreemi 8.1.

Definitsioon 8.11

Võrrandile (8.4) **vastavaks homogeeneks võrrandiks** nimetatakse võrrandit

$$p_0 y' + p_1 y = 0$$

ehk peale jagamistehet (eeldusel, et $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral)

$$y' + py = 0, \quad (8.6)$$

$$\text{kus } p = \frac{p_1}{p_0}.$$

Võrrandit (8.6) vaatleme eralduvate muutujatega võrrandina, mis peale muutujate eraldamist saab kuju

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0.$$

Selle integreerimine annab

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

ehk

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Siin kirjutises $\int p(x)dx$ all peame silmas ühte funktsiooni p algfunktsiooni. Lisaks sellele on võrrandi (8.6) lahendiks $y = 0$, mis jäi vaatluse alt välja muutujate eraldamisel. Seega on võrrandi (8.6) lahendiks

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (8.7)$$

Selle aruteluga oleme saanud, et viimati toodud võrduses on esindatud võrrandi (8.6) kõik lahendid: iga lahendi y korral jõuame esituseni (8.7). Kirjutiste lühendamiseks tähistame

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Võrrandi (8.5) lahenditeks on

$$y = y_h + y_* = Ce^{-\int p(x)dx} + y_*, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (8.8)$$

kus y_* on võrrandi (8.5) üks konkreetne lahend.

Näitame, et iga $C \in \mathbb{R}$ korral on (8.8) võrrandi (8.5) lahend. Saame

$$(y_h + y_*)' + p(y_h + y_*) = y_h' + py_h + y_*' + py_* = f.$$

Võrrandi (8.5) lahendi y_* leidmiseks on olemas nn. parameetri (või konstandi) C varieerimise meetod: funktsioon y_* leitakse kujul

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $C = C(x)$ on otsitav funktsioon. Asetades selle võrrandisse (8.5), saame

$$\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

ehk

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

millest jääb alles

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

ehk

$$C'(x) = e^{\int p(x)dx} f(x).$$

Selle integreerimisel (piisab ühest funktsioonist $C = C(x)$) saame

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx$$

(ka siin peame silmas ühte konkreetset algfunktsiooni) ja

$$y_*(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx.$$

Selle asendamisel esituses (8.8) saame

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (8.9)$$

Kui nõutakse võrrandi (8.5) (või (8.4)) lahendit, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, siis (8.8) annab võrduse

$$C e^{-\int p(x)dx} \Big|_{x=x_0} + y_*(x_0) = y_0,$$

millest C saab üheselt määrata, sest eksponentfunktsiooni väärtus ei võrdu nulliga. Teoreemi 8.1 tõestamist silmas pidades oleme näidanud algtingimustega ülesande lahendi olemasolu iga väljavalitud $x_0 \in (a, b)$ ja $y_0 \in \mathbb{R}$ korral. Lahendi ühesuses veendumiseks oletame, et algtingimustega ülesandel on 2 lahendit y_1 ja y_2 , s.t

$$\begin{cases} y_1' + py_1 = f, \\ y_1(x_0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2' + py_2 = f, \\ y_2(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Siis $y = y_1 - y_2$ rahuldab võrduseid

$$\begin{cases} y' + py = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

milles diferentsiaalvõrrandi lahend esitub (8.7) abil, aga $C = 0$, sest eksponentfunktsiooni väärtus $x = x_0$ korral erineb nullist. Niisiis $y = 0$ ehk $y_1 = y_2$.

Teoreemi 8.1 arvestades võib öelda, et (8.9) on võrrandi (8.5) üldlahend piirkonnas $(a, b) \times \mathbb{R}$. Muidugi on ka (8.7) võrrandi (8.6) üldlahend samas piirkonnas.

Lineaarse võrrandi üldlahend on vastava homogeense võrrandi üldlahendi ja algvõrrandi ühe konkreetse lahendi summa

Näide 8.11 Vaatleme võrrandit

$$y' = k y,$$

mis on juba homogeenne kujul (8.6), kus $p(x) = -k$. Siis $-\int p(x)dx = kx$ ja võrrandi üldlahend on

$$y(x) = C e^{kx}, C \in \mathbb{R},$$

ja seda piirkonnas $\mathbb{R}^2$. Nägime eespool, et vaadeldav võrrand kirjeldab liigi arvukuse muutust.

◇ ◇ ◇

Näide 8.12 Lahendame lineaarse mittehomogeense võrrandi

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

Siin

$$p(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad -\int p(x)dx = \int \frac{2dx}{x+1} = \ln(x+1)^2$$

ja

$$e^{-\int p(x)dx} = (x+1)^2,$$

mistõttu vastava homogeenuse võrrandi üldlahend on

$$y = C(x+1)^2, C \in \mathbb{R}. \quad (8.10)$$

Algvõrrandi üks konkreetne lahend on

$$y_* = (x+1)^2 \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} dx = \frac{(x+1)^4}{2}$$

ning üldlahend

$$y = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}, C \in \mathbb{R}, \quad (8.11)$$

ja seda hulgal $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}$. Täpsemalt öeldes, (8.11) (ja ka (8.10)) esitavad kumbki kaks üldlahendit vastavalt piirkondades $\{(x, y) | x > -1, y \in \mathbb{R}\}$ ja $\{(x, y) | x < -1, y \in \mathbb{R}\}$.

◇ ◇ ◇

Näide 8.13 Keha temperatuuri $T = T(t)$ muutumist ajas t kirjeldab ligikaudselt võrrand

$$T' = k(T - T_*),$$

kus T_* on ümbritseva õhu temperatuur, k aga konstantne kordaja.

Siin vastav homogeenne võrrand on

$$T' = kT$$

ja selle üldlahend on näites 8.11 toodu põhjal

$$T(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Algvõrrandi üheks lahendiks sobib $T(t) = T_*$, $t \in \mathbb{R}$, seega on võrrandi üldlahend $T(t) = Ce^{kt} + T_*$, $C \in \mathbb{R}$. Kui algmomendil $t = 0$ on keha temperatuur T_0 , siis tingimus $T(0) = T_0$ annab võrduse $C + T_* = T_0$, millest $C = T_0 - T_*$ ja algtingimusega ülesande lahend on

$$T(t) = (T_0 - T_*)e^{kt} + T_*.$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 9

Pindala ja Riemanni integraal

9.1	Pindala leidmine lõplike summade abil	162
9.2	Riemanni summad	165
9.3	Määratud (Riemanni) integraal	167
9.4	Määratud integraali omadused	169
9.5	Kõvertrapetsi pindala	170
9.6	Numbriline integreerimine	173

Kontrolltöö teemad

1. Riemanni integraali omadused.
2. Kõvertrapetsi pindala ja selle leidmine.

Eksamiteemad

1. Riemanni summa mõiste.
2. Riemanni integraali mõiste.
3. Teoreemid 9.1 ja 9.2.
4. Määratud integraali omadused.
5. Kõvertrapets ja selle pindala.
6. Trapetsvalem.

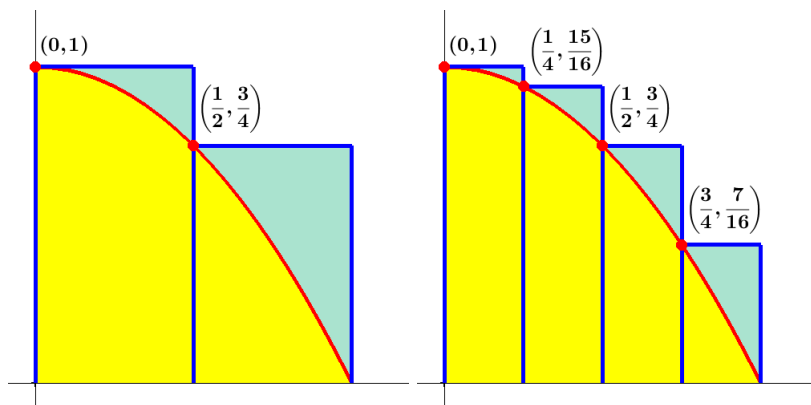
9.1 Pindala leidmine lõplike summade abil

Määratud integraalil on matemaatikas oluline roll ning siin on palju rakendusi, mida kasutatakse laialt praktikas (näiteks kujundi pindala, keha ruumala ja pinna pindala, keha massikeske, töö arvutamine, vedelike poolt avaldatav rõhk jne). Enne määratud integraali juurde minekut tutvume tasandilise kujundi pindala leidmise probleemiga. Viimane on tihedalt seotud määratud integraali olemusega.

Vaatleme näiteks funktsiooni

$$y = 1 - x^2$$

graafikut. Kuidas leida graafiku joonega ning x - ja y -teljega piiratud tasandilise kujundi (paremal oleval joonisel märgitud kollase värviga) pindala S ? Geomeetrias ei leidu (üldisemate) seda tüüpi kujundite pindalade arvutamiseks lihtsat valemit. Täpse pindala leidmise asemel võime selle arvutada ligikaudselt. Jagades lõigu $[0, 1]$ näiteks kaheks, saame kaks osalõiku $[0, 0.5]$ ja $[0.5, 1]$. Moodustame mõlema osalõigu kohal ristküliku, mille alusteks on vastavad osalõigud ja mille kõrgusteks on funktsiooni $y = 1 - x^2$ väärtused osalõikude vasakpoolsetes otspunktides.



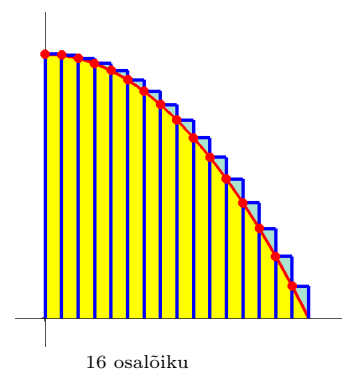
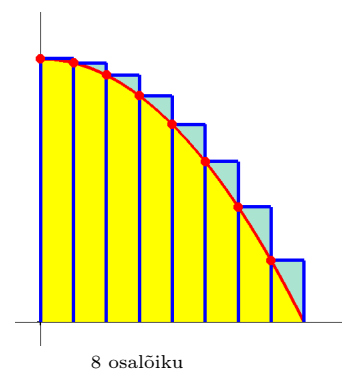
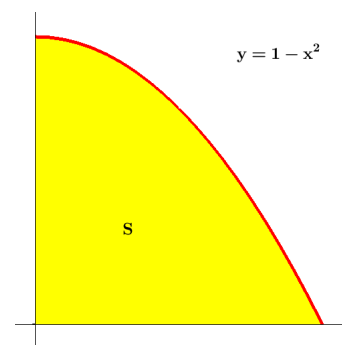
Sel juhul ristkülikute pindalade (alus korda kõrgus) summa on

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

Saadud pindala on kindlasti suurem, kui tegelik pindala S , kuna ristkülikud sisaldavad endas tervet vaadeldavat kujundit. Sellist summat nimetatakse ülemsummaks. Leitud lähisväärtus täpsustub, kui võtame kahe asemel neli osalõiku. Siis on iga ristküliku alus pikkusega $\frac{1}{4}$ ja

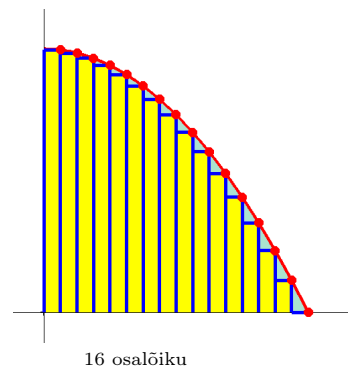
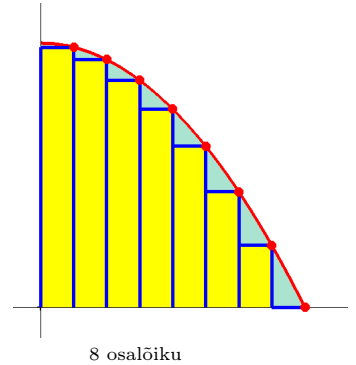
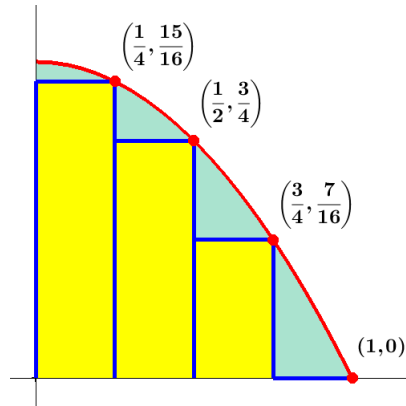
$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} = \frac{25}{32} \approx 0.78125.$$

Ka see tulemus on kindlasti suurem kui tegelik pindala S , sest ta on samuti ülemsumma. Näeme, et kui võtame veel rohkem osalõike (või ka ristkülikuid), siis taoliselt arvutatud tulemus peaks täpsusest S erinema järjest vähem.



Pindala S võiksime ligikaudu arvutada ka teistmoodi. Võttes neli osalõiku, moodustame iga osalõigu kohal samuti ristkülikud, kuid seekord on nende kõrgusteks funktsiooni väärtused osalõikude parempoolsetes otspunktides. Sel juhul ristkülikute pindalade summa on

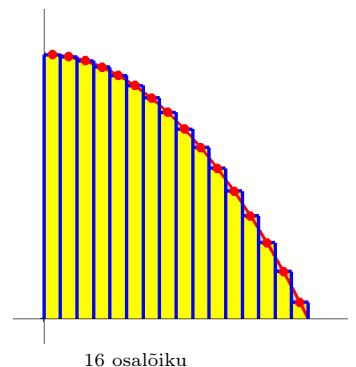
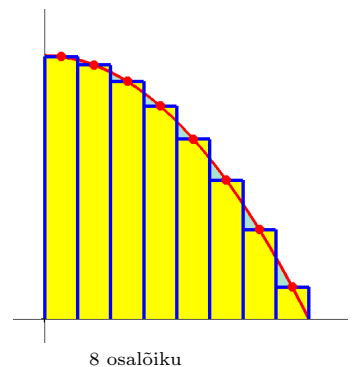
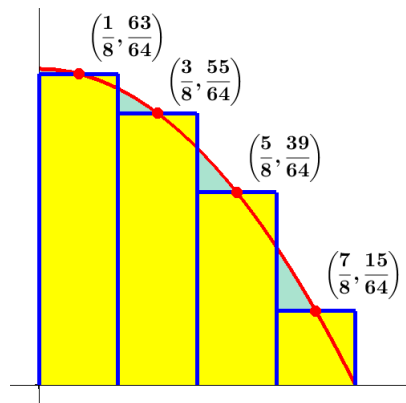
$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{17}{32} = 0.53125.$$



Saadud pindala S_4 on kindlasti väiksem, kui tegelik pindala S , kuna ristkülikud asuvad täielikult vaadeldava kujundi sees. Sellist summat nimetatakse alamsummaks. Jällegi võib märgata (parempoolsetelt joonistelt), et osalõikude arvu suurendamine peaks ligikaudse väärtuse viima järjest lähemale täpsele pindalale S . Tegelik pindala S asub alam- ja ülemsumma vahel,

$$0.53125 \leq S \leq 0.78125.$$

Pindala S saab ligikaudu arvutada ka kolmandat moodi. Võtame neli osalõiku ja moodustame iga osalõigu kohal ristkülikud, mille alusteks on osalõigud, kuid mille kõrgusteks on funktsiooni $y = 1 - x^2$ väärtused osalõikude keskpunktides. Sellist ristkülikute moodustamist ja nende pindalade kokku liitmist nimetatakse ka keskpunkti meetodiks.



Siis

$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{63}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{55}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{39}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{64} = \frac{1}{4} \cdot \frac{172}{64} = 0.671875,$$

mis jääb samuti ülem- ja alumsumma vahele. Kas see on suurem või väiksem tegelikust väärtusest, seda enam nii lihtsalt öelda ei saa.

Üldisemalt võime pindala S ligikaudu arvutada järgmiselt. Etteantud lõiguse $[a, b]$ võtame n osalõiku pikkusega

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Kui fikseerime esimeses osalõigus punkti c_1 , teises osalõigus punkti c_2 jne, siis saame ristkülikute pindalasid kokku liites tulemuseks

$$S_n = f(c_1) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x.$$

On loomulik oletada, et võttes rohkem osalõike, saame täpsema tulemuse, s.t erinevus täpse pindala S ja ligikaudse pindala S_n vahel väheneb.

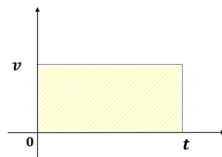
n	alumine summa	keskpunkti meetod	ülemine summa
2	0.375	0.6875	0.875
4	0.53125	0.671875	0.78125
50	0.6566	0.6667	0.6766
100	0.66165	0.666675	0.67165
1000	0.6661665	0.66666675	0.6671665

Läbitud teepikkus

Vaatleme maanteel liikuvat autot, mille kiirus on igal ajahetkel t kirjeldatav funktsiooniga $v = v(t)$. Kui liikumine on ühtlase kiirusega ja ühes suunas, siis läbitud teepikkus võrdub kulutatud aja t ja kiiruse korrutisega

$$s = v t.$$

Paneme tähele, et tegemist on samal ajal ristküliku pindalaga, kus aluseks on t ja kõrguseks v .



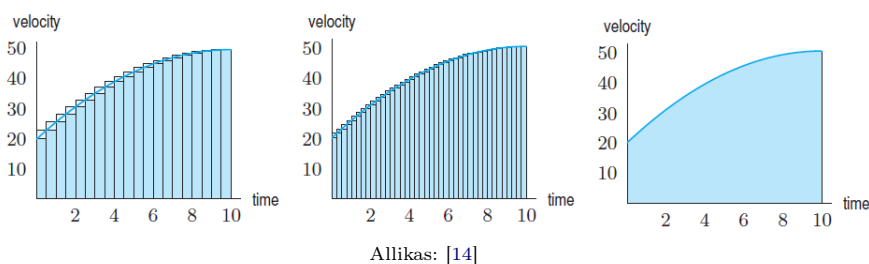
Olgu järgnevalt kiirus mittekonstantne. Jaotame ajavahemiku $[0, t]$ võrdseteks ajavahemikeks sammuga (intervalliga)

$$\Delta t = \frac{t}{n}.$$

Fikseerime esimeses osalõigus $[0, \Delta t]$ ajahetke t_1 , teises osalõigus $[\Delta t, 2\Delta t]$ ajahetke t_2 jne. Kui ajaintervall Δt on piisavalt väike, siis läbitud teepikkus avaldub ligikaudselt summana

$$s_n \approx v(t_1) \Delta t + \dots + v(t_n) \Delta t.$$

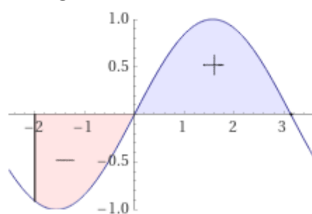
Viimane on ristkülikute (laiusega Δt ja kõrgusega $v(t_i)$) pindalade summa. Loodetavasti lähendab see summa ajaintervalli Δt vähendamisel järjest paremini tegelikku läbitud teepikkust s .



Siit saame idee, et läbitud teepikkust (ilma suunamuutusteta liikumisel) saab arvutada kiiruse $v = v(t)$ graafiku ja x -telje vahele jääva kujundi pindala kaudu.

Märkus 9.1

Funktsiooni graafiku ja x -telje vahelise kujundi pindala loetakse positiivseks, kui graafik asub ülalpool x -telge, kui aga graafik asub allpool x -telge, siis pindala on negatiivne.



9.2 Riemanni summad

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon $y = f(x)$. Vaatleme selles lõigus **jaotust**

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jaotus $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ jagab kogu lõigu $[a, b]$ osalõikudeks

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Tähistame iga osalõigu pikkuse

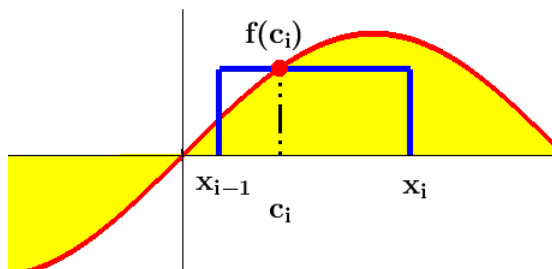
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Rõhutame, et jaotus ei pea olema ühtlane, s.t osalõikude pikkused ei pea olema võrdsed.

Järgnevalt valime igas osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$ **suvaliselt** ühe punkti

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Nüüd saame iga osalõigu kohal moodustada ristküliku, mille aluseks on osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ pikkus ja kõrguseks $f(c_i)$.



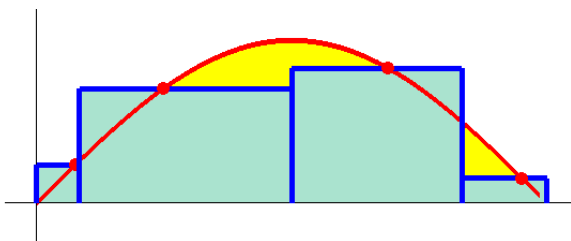
Iga sellise ristküliku pindala on $S_i = f(c_i) \Delta x_i$. Arv S_i võib olla positiivne, negatiivne või null, sõltuvalt funktsiooni f väärtusest $f(c_i)$. Liites kõikide ristkülikute pindalad, saame tulemuseks funktsiooni f graafiku ja x -telje vahele jääva kujundi pindala ligikaudse väärtuse.

Definitsioon 9.1

Summat

$$S_n = f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \quad (9.1)$$

nimetatakse funktsiooni f **Riemanni summaks** lõigus $[a, b]$.

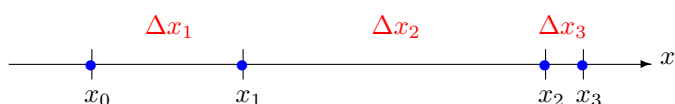


Märkus 9.2

Selliseid Riemanni summasid S_n on lõpmata palju, sõltudes sellest, kuidas me jagame lõigu $[a, b]$ osalõikudeks ja kuidas me valime punktid $c_1, \dots, c_n$. Eelmises punktis vaadeldud kolme liiki summad (vasakpoolsed ristkülikud, parempoolsed ristkülikud, keskpunkti meetod) olid samuti Riemanni summad.

Märkus 9.3

Kui alajaotus on ühtlane, siis osalõikude pikkused $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ on kõik võrdsed ning ristkülikute kitsamaks tegemiseks piisab osalõikude arvu n suurendamisest. Kui alajaotus ei ole ühtlane, siis ainult ristkülikute arvu suurendamine ei taga kõigi ristkülikute aluste vähendamist.



Riemanni nimega on tuntuks saanud Riemanni hüpotees (seotud nn. zeetafunktsiooni nullkohtade leidumise probleemiga), mida pole tänini suudetud tõestada. Selle kohta on olemas rida anekdoote.

Matemaatik on aastaid üritanud tõestada Riemanni hüpoteesi, kuid edutult. Ühel päeval sõlmib ta lepingu Saatanaga, kes lubab talle nädala lõpuks tuua tõestuse, kui saab vastu matemaatiku hinge. Matemaatik on väga elevil, saadab laiali pressiteateid, suhtleb telefoni teel, lepib kokku konverentside esinemistes ja on igati meedia tähelepanu all.

Nädala lõpp saabub, aga Saatanat pole kusagil. Meedia on väga pettunud ja matemaatik vabandab end väitega, et vajab veel pisut aega. Kuu möödudes ei ole Saatanat endiselt kusagil ja matemaatik satub naerualuseks.

Viimaks, kuus kuud hiljem ilmub välja Saatan. "Kus sa oled olnud?" pärib matemaatik pettunult, "Sa hävitasid terve mu karjääri!". "Väga vabandan, ka mina ei suutnud Riemanni hüpoteesi tõestada" pomiseb Saatan mokaotsast, kuid jätkab vaimustunult: "Aga ma leidsin paar väga huvitavat lemmat!".

Definitsioon 9.2

Defineerime lõigu $[a, b]$ jaotuse Δ_n

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

diameetri tähisega $|\Delta_n|$, mis kujutab endast valitud jaotuse suurimat osalõigu pikkust Δx_i :

$$|\Delta_n| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i.$$

Näide 9.1 Kui lõigus $[0, 2]$ on valitud sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1.5, \quad x_5 = 2,$$

siis vastavate osalõikude pikkused on

$$\Delta x_1 = 0.2, \quad \Delta x_2 = 0.4, \quad \Delta x_3 = 0.4, \quad \Delta x_4 = 0.5, \quad \Delta x_5 = 0.5,$$

ja $|\Delta_5| = 0.5$.

◇ ◇ ◇

9.3 Määratud (Riemanni) integraal

Moodustades Riemanni summad S_n , tekib küsimus, kas üldse ja mis arvuks koondub jada S_n , kui n tõkestamatult kasvab. Me oleme huvitatud sellistest summadest, mis koonduksid kõik üheks ja samaks arvuks.

Definitsioon 9.3

Olgu funktsioon f määratud lõigus $[a, b]$. Kui sõltumata lõigu $[a, b]$ kõikvõimalikest jaotustest $\Delta_n = \{x_0, \dots, x_n\}$, mille korral

$$|\Delta_n| \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty,$$

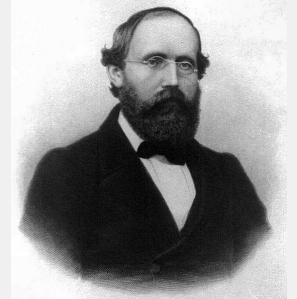
ja sõltumata punktide $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, valikust eksisteerib piirväärtus funktsiooni f Riemanni summadest

$$I = \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} (f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n),$$

siis seda piirväärtust I nimetatakse funktsiooni f **määratud (Riemanni) integraaliks** lõigus $[a, b]$. Tähistatakse sümboliga

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Riemanni integraali nimi tuleb saksa matemaatiku Georg Friedrich Bernhard Riemanni (1826-1866) järgi.



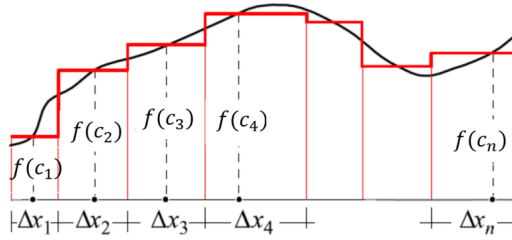
Allikas: Wikipedia

Riemanni integraal on lihtsustatult (lõpmata) väikeste ristkülikute pindalade summa piirväärtus.

NB! Lõik $[a, b]$ on jaotatud suvaliselt, kuid täidetud peab olema tingimus, et maksimaalne osalõigu pikkus tõkestamatult kahaneb. Punktid $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ on valitud samuti suvaliselt. Siinjuures peab kõikide nende suvaliste valikute korral Riemanni summade piirväärtus andma **ühe ja sama arvulise tulemuse**. Ainult sellisel juhul on olemas funktsiooni Riemanni integraal.

Seega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$



Allikas: [20]

Integraali rakendustes näeme, et integraal tähistab funktsiooni graafiku ja x-telje vahele jääva kujundi pindala. Pindala leidmisega sidusid integraali mõiste ka Newton ja Leibniz.

Leibniz kasutas algul integraali tähistamiseks sümbolit “*omn.*” sõnast *omnia* (summa, ladina keeles). Hiljem muutis Leibniz tähise väljavenitatud s-ks: $\int$ (sõnast summa).

Newton ei kasutanud süstemaatiliselt integraalide puhul mingit tähist.

Märkus 9.4

Erijuhul, kui võtame lõigus $[a, b]$ ühtlase jaotuse, siis

$$\Delta x_n = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0 \text{ protsessis } n \rightarrow \infty$$

ja Riemanni integraali väärtus avaldub piirväärtusena

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_n.$$

On üsna lihtne näha, et vähegi keerulisema funktsiooni korral on Riemanni integraali definitsiooni rakendamine tülikas. Õnneks on olemas tulemused, mis lubavad määratud integraali väärtust arvutada oluliselt lihtsamalt. Täpsemalt tutvume sellega ülejärgmises osas. Hetkel vaatame aga küsimust, millistel funktsioonidel on Riemanni integraal olemas.

Näide 9.2 Näitame definitsiooni põhjal, et konstantne funktsioon $f(x) = 10$ on suvalises osalõigus $[a, b]$ integreeruv Riemanni mõttes (vt. [23]).

Olgu $f(x) = 10$ iga $x \in [a, b]$ korral. Vaatleme lõigu $[a, b]$ **suvalist** jaotust

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sõltumata lõigu jaotusviisist ja punktide c_i valikust osalõikudes $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, saame

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 10 \Delta x_i = 10 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}).$$

Siit saame, et

$$S_n = 10(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = 10(x_n - x_0).$$

Seega

$$\int_a^b 10 dx = \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} S_n = 10(b-a).$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 9.4

Kui funktsioonil eksisteerib Riemanni integraal, siis öeldakse, et funktsioon on **integreeruv** (Riemanni mõttes).

Teoreem 9.1

Kui funktsioon on pidev lõigus $[a, b]$, siis on ta integreeruv lõigus $[a, b]$.

Seega eksisteerib Riemanni integraal nn. igapäevaelus ette tulevatel funktsioonidel.

Teoreem 9.2

Kui funktsioon on tõkestatud lõigus $[a, b]$ ja tal on ülimalt **lõplik arv** katkevuspunkte, siis on ta integreeruv lõigus $[a, b]$.

9.4 Määratud integraali omadused

Kõigis järgnevates omadustes eeldame vaadeldavate integraalide olemasolu vastavas lõigus. Määratud integraali defineerime lõigus $[a, b]$, kus eeldatakse, et $a < b$.

Definitsioon 9.5

Kui $a < b$ ja f on integreeruv lõigus $[a, b]$, siis defineerime

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Defineerime ka

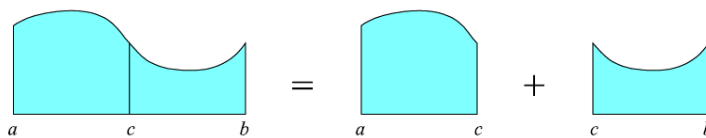
$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Omadus 9.1

Integraali aditiivsus rajade suhtes.

Olgu $c \in (a, b)$. Siis kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Allikas: [20]

Omadus 9.2

Integraali lineaarsus integreeritava funktsiooni suhtes.

Kehtib võrdus

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \text{kus } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Omadus 9.3

Integraali monotoonsus.

Kui $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis kehtib võrratus

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Näide 9.3 Olgu $a < b$. Näitame, et siis kehtib hinnang

$$\int_a^b \sin x^2 dx \leq b - a.$$

Tõepoolest, kuna $\sin x^2 \leq |\sin x^2| \leq 1$, siis

$$\int_a^b \sin x^2 dx \leq \int_a^b 1 dx = b - a.$$

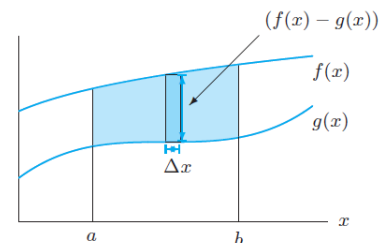
◇ ◇ ◇

9.5 Kõvertrapetsi pindala

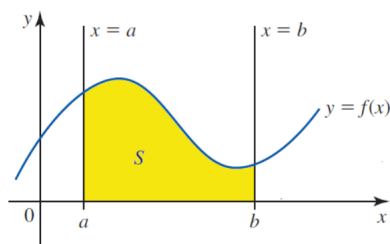
Definitsioon 9.6

Olgu funktsioon f pidev lõigul $[a, b]$, kusjuures $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Siis **kõvertrapetsiks** nimetatakse joonega $y = f(x)$, x -teljega ning püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$ piiratud kujundit. Sellisel juhul kõvertrapetsi pindala avaldub määratud integraalina

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



Allikas: [14]



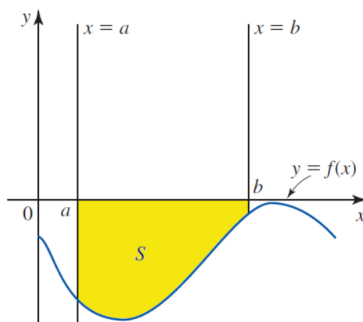
Allikas: [35]

Üldisemalt öeldes, kõvertrapetsiks nimetatakse iga kujundit, mis on piiratud vaadeldaval lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonidega f ja g , kus $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b]$, ning vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x = a$ ja $x = b$. Sellisel juhul saab f ja g graafikutega piiratud kujundi pindala arvutada valemist

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Sellest järeldub, et kui $f(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis funktsiooni f graafiku kui joone ja x -telje vaheline pindala tuleb negatiivne, s.t

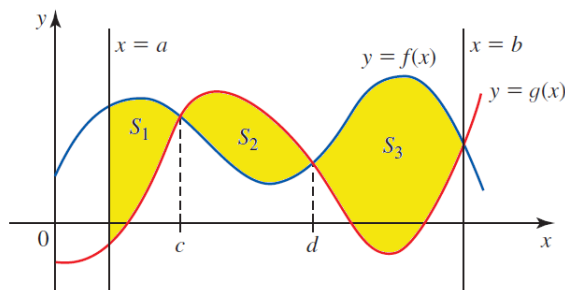
$$\int_a^b f(x) dx \leq 0.$$



Allikas: [35]

Märkus 9.5

Kui funktsioonide f ja g graafikud lõikuvad, siis leitakse lõikepunktid ja arvutatakse kogu pindala osade kaupa.



Allikas: [35].

Märkus 9.6

Kui f ja g on integreeruvad lõigul $[a, b]$ ning iga kujundi pindala loeme positiivseks (mittenegatiivseks), siis sõltumata f ja g märgist kehtib alati

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Näide 9.4 Lihtsamal juhul saab Riemanni integraali väärtuse arvutada joonise abil. Leiame integraali

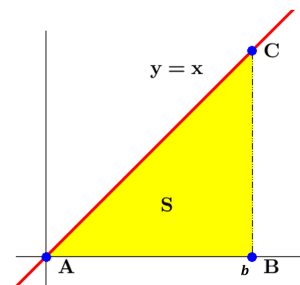
$$I = \int_0^b x dx$$

väärtuse, kui $b > 0$. Tehes joonise, näeme, et selleks peame leidma täisnurkse kolmnurga ABC pindala. Olgu $f(x) = x$. Siis pindala avaldub valemiga

$$S_{ABC} = \frac{bf(b)}{2} = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2},$$

mis on pool ruudu pindalast, kus ruudu külje pikkus on b .

◇ ◇ ◇



Näide 9.5 Leiame integraali

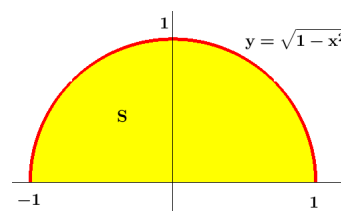
$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

väärtuse. Seda integraali saab leida analüütiliste vahenditega (millega me veel ei ole tutvunud). Tehes joonise, näeme aga, et tegelikult peame leidma pool ühikringi pindalast:

$$I = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Märgime, et kasutasime siin teadmist, et ühikringjoone võrrand avaldub kujul $x^2 + y^2 = 1$.

◇ ◇ ◇



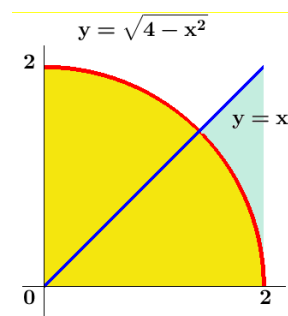
Näide 9.6 Leiame integraali

$$I = \int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - x) dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^2 x dx$$

väärtuse. Tehes joonise, näeme, et tegelikult on I väärtus seotud ringi sektori pindalaga. Kui ringi raadius on 2, siis vastava ringjoone võrrand on $x^2 + y^2 = 4$. Otsitav pindala avaldub kui 1/4 ringi pindalast, millest lahutatakse täisnurkse kolmnurga (küljed 2 ja 2) pindala,

$$I = \frac{1}{4} \pi r^2 - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2.$$

◇ ◇ ◇



9.6 Numbriline integreerimine

Lihtsamal juhul saab integraali leida täpselt. Praktikas tuleb aga tihti integraali leida ligikaudu. Paljudel juhtudel ei ole täpse väärtuse leidmine võimalik või osutub see liiga keeruliseks. Kui kasutada arvutit, siis enamasti ongi arvutiga lihtsam leida pigem ligikaudseid kui täpseid väärtusi. Ligikaudse integreerimise algoritmid baseeruvad otseselt ideel, mida me tegelikult juba vaatlesime.

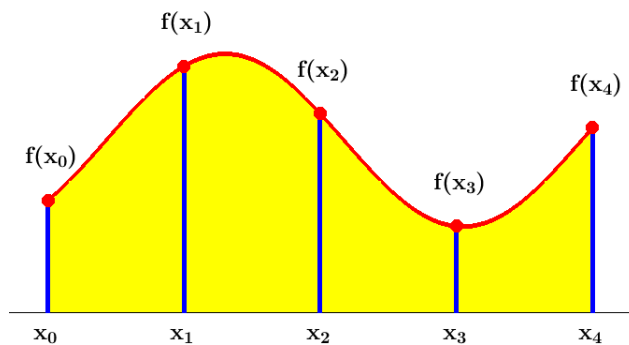
Lõigu jaotamine

Olgu meil antud lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon f . Moodustame ühtlaselt paiknevate sõlmedega jaotuse

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$



Järgnevalt moodustame igas osalõigus kõvertrapetsi, milles aluseks on vastav osalõik ja mida ülalt piirab funktsiooni graafik.



Määratud integraali täpseks väärtuseks on kõikide nende kõvertrapetsite pindalade summa. Järgnevalt vaatleme, kuidas leida nende kõvertrapetsite pindalasid ligikaudselt.

Ristkülikvalem

Ristkülikuid kasutavate valemite korral lähendatakse igal osalõigul kõvertrapetsi pindala vastava ristküliku pindalaga. Igal osalõigul moodustatakse ristkülikud kõrgusega $f(c_i)$. Punkte c_i annab valida väga erineval moel. Osutub, et üldiselt annab paremaid tulemusi keskpunkti valimine, s.t c_i on valitud iga osalõigu keskel,

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

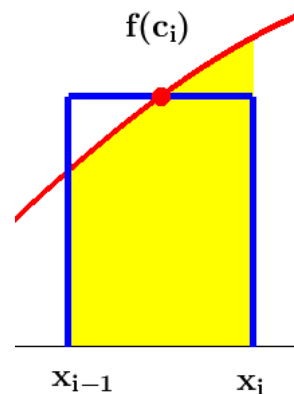
Iga üksiku kõvertrapetsi pindala avaldub ligikaudu valemiga

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h f(c_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Liites kõik need pindalad kokku, saamegi järgmise valemi.

Ristkülikvalem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (f(c_1) + \dots + f(c_n)).$$



Märkus 9.7

Kui f on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$, siis integraali täpse väärtuse S ja ristkülikvalemiga leitud ligikaudse väärtuse S_n erinevus on

$$S - S_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(c), \quad c \in (a, b),$$

kus $c \in (a, b)$ on mingi funktsioonist f sõltuv arv. Seda nn. jääkliiget ei pea teadma, kuid see on abiks, kui on vaja hinnata ligikaudse valemi täpsust.

Näide 9.7 Arvutame integraali

$$S = \int_0^2 5x^4 dx$$

ligikaudse väärtuse ristkülikvalemiga. Valime lõigus $[0, 2]$ näiteks $n = 4$.

Sel juhul on $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ ja sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Osaloikude keskpunktid on

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{4}, \quad c_3 = \frac{5}{4}, \quad c_4 = \frac{7}{4}.$$

Siis

$$S_4 \approx \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right) \approx 30.35.$$

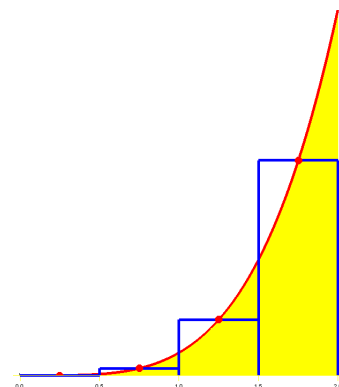
Integraali täpne väärtus on $S = 32$ (seda näeme hiljem esitatud vahendeid kasutades). Seega viga on

$$S - S_4 \approx 1.65.$$

Märgime, et kui ristkülikute arv $n = 100$, siis saame $S_{100} \approx 31.9973$ ja viga on $2.67 \cdot 10^{-3}$.

◇ ◇ ◇

Jääkliikmes on tähtis h aste, siin on see kaks (öeldakse, et ristkülikvalemi täpsusjärk on 2). Kui $h \rightarrow 0$, siis jääkliige läheb nulli. Teguris $f''(c)$ on c teadmata, kuid sageli saab f'' hinnata, s.t $|f''(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$.



Trapetsvalem

Trapetsvalemi korral lähendatakse igal osalõigul kõvertrapetsi pindala vastava trapetsi pindalaga (ehk graafikut kui joont lähendatakse sirgega).

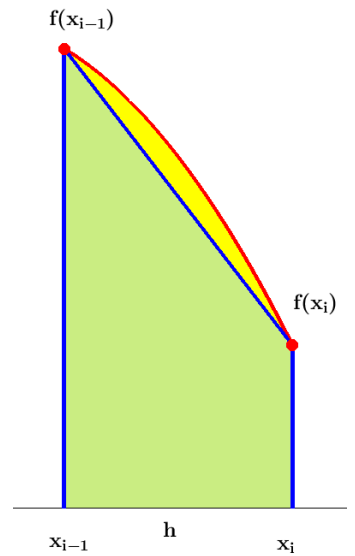
Kuna trapetsi pindala avaldub valemiga

$$S_{\text{trapets}} = \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)),$$

siis kõikide trapetsite pindalade liitmisel saame tulemuseks

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Näeme, et keskmised funktsiooni väärtused $f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$ on summas topelt. Kokkuvõttes oleme saanud järgmise tulemuse.



Trapetsvalem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Märkus 9.8

Kui f on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$, siis täpse väärtuse S ja trapetsvalemiga leitud ligikaudse väärtuse S_n erinevus on

$$S - S_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c), \quad c \in (a, b).$$

Teoreetiliselt on jääkliige (absoluutväärtuselt) kaks korda suurem, kui ristkülikvalemis.

Näide 9.8 Arvutame integraali

$$S = \int_0^2 5x^4 dx$$

ligikaudse väärtuse võrdluseks trapetsvalemiga. Valime lõigus $[0, 2]$ 4 osalõiku. Sel juhul on $h = \frac{1}{2}$ ja sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Siis

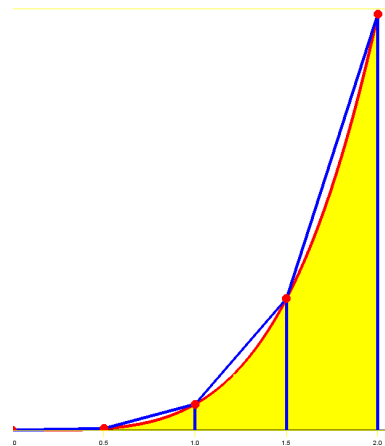
$$S_4 \approx \frac{1}{2} \cdot 2 \left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) \approx 35.31.$$

Kuna täpne väärtus on $S = 32$, siis viga

$$S - S_4 \approx -3.31.$$

Märgime, et kui ristkülikute arv $n = 100$, siis saame $S_{100} \approx 32.0053$ ja viga on $-5.33 \cdot 10^{-3}$.

◇ ◇ ◇



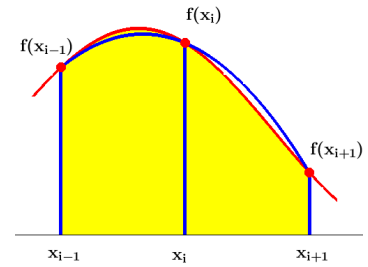
Teoreetiliselt pidigi viga tulema umbes kaks korda suurem kui ristkülikvalemiga.

Simpsoni valem

Simpsoni valemi korral lähendatakse paarikaupa võetud osalõikudel graafiku kaart parabooliga $y = Ax^2 + Bx + C$. Kahe osalõigu korral avaldub Simpsoni valem kujul

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

Liites vastavad täpsed ja ligikaudsed pindalad paarikaupa osalõikudel, saame järgmise tulemuse.



Simpsoni valem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

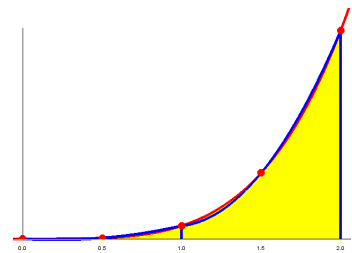
Valemit saab kasutada vaid paarisarvulise n korral.

Märkus 9.9

Kui f on neli korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$, siis täpse väärtuse S ja Simpsoni valemiga leitud ligikaudse väärtuse S_n erinevus on

$$S - S_n = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b).$$

Öeldakse, et Simpsoni valemi täpsusjärk on 4.



Näide 9.9 Arvutame integraali

$$S = \int_0^2 5x^4 dx$$

ligikaudse väärtuse võrdluseks Simpsoni valemiga. Valime lõigus $[0, 2]$ nagu varemgi 4 osalõiku. Sel juhul analoogiliselt

$$S_4 \approx \frac{1}{2 \cdot 3} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) = \frac{385}{12} \approx 32.0833.$$

Kuna täpne väärtus on $S = 32$, siis viga on

$$S - S_4 \approx -0.083.$$

Saime oluliselt täpsema tulemuse, kui ristkülikvalemiga või trapetsvalemiga. Märgime, et kui ristkülikute arv $n = 100$, siis saame $S_{100} \approx 32.000000213$ ja viga on $-2.13 \cdot 10^{-7}$.

◇ ◇ ◇

Peatükk 10

Määratud integraal

10.1 Newton-Leibnizi valem	178
10.2 Määratud integraali arvutamine	181
10.2.1 Muutujavahetus	181
10.2.2 Määratud integraal sümmeetriliselt paiknevate rajade korral	182
10.2.3 Määratud integraal funktsiooni absoluutväärtusest	184
10.2.4 Ositi integreerimine	185
10.3 Integraalarvutuse keskvärtusteoreem	185
10.4 Määratud integraal ülemise raja funktsioonina	187

Kontrolltöö teemad

1. Newton-Leibnizi valemi kasutamine.
2. Määratud integraali arvutamine (muutujavahetus, ositi integreerimine, sümmeetrilised rajad, absoluutväärtus, ratsionaalfunktsiooni integreerimine).

Eksamiteemad

1. Newton-Leibnizi valem (teoreem 10.1).
2. Integraalarvutuse keskvärtusteoreem (teoreem 10.2).
3. Määratud integraali arvutamine (muutujavahetus, ositi integreerimine, sümmeetrilised rajad, absoluutväärtus).
4. Matemaatilise analüüsi põhiteoreem.

10.1 Newton-Leibnizi valem

Järgmine teoreem annab meile valemi Riemanni integraali arvutamiseks ilma definitsiooni kasutamata.

Teoreem 10.1

Newton-Leibnizi valem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis kehtib Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kus F on funktsiooni f suvaline algfunktsioon lõigus $[a, b]$.

Tõestuse skeem. Kuna F on funktsiooni f algfunktsioon, siis $F'(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral, sest selles vahemikus saab rääkida funktsiooni F diferentseeruvusest. Muidugi on F siis pidev vahemikus (a, b) . Saab tõestada (ainult see osa jääb meil puudu tõestuse täielikkusest), et F on pidev lõigus $[a, b]$.

Moodustame lõigus $[a, b]$ jaotused Δ_n

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

mille korral $|\Delta_n| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$.

Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal leidub igas osalõigus selline punkt $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, et kehtib võrdus

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i) \Delta x_i.$$

Kuna f on pidev, siis on ta integreeruv Riemanni mõttes (teoreemi 9.1 järgi) ning definitsiooni järgi eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Siit saame

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} (F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= (F(x_n) - F(x_0)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Järgmine lugu kuulsaks saamise teemal (seoses Riemanni hüpoteesiga).

Matemaatik kutsutakse konverentsile esinema ja tema teema pealkirjaks reklaamitakse "Riemanni hüpoteesi tõestus." Ettekande lõpuks peavad aga kuulajad pettuma, kuna välja kuulutatud tõestuse asemel räägib matemaatik hoopis mingil teisel teemal ja lubatud tõestusest ei sõnagi.

Pärast ettekannet küsitakse tema käest, et kas ta leidis oma tõestuses viimasel hetkel vea, et selle esitusest loobus. "Ei, mul pole seda tõestust kunagi olnudki." "Miks te siis kuulutasite oma ettekande teemaks Riemanni hüpoteesi?" päritakse talt armutult. "Vaadake ... juhuks, kui ma peaksin teel konverentsile äkki surema."

□

Näide 10.1 Leiame

$$\int_1^3 (3x^2 - 4) dx = (x^3 - 4x) \Big|_{x=1}^{x=3} = 27 - 12 - (1 - 4) = 15 + 3 = 18.$$

Märgime, et leitud väärtus ei ole joonisel märgitud kollase ala pindala, kuna graafik lõikab vahepeal x -telge ja integraali väärtus on ühe positiivse ja ühe negatiivse arvu summa.

◇ ◇ ◇

Näide 10.2 Oluline on, et Newton-Leibnizi valemi kasutamisel oleks funktsioon pidev. Vaatame näiteks funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 2, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$



On näha, et tekkivate ristkülikute pindalad kokku (lõikudel $[0, 1]$ ja $[1, 2]$) on $S = 3$, mille võime ka arvutada

$$S = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 2 dx = x \Big|_{x=0}^{x=1} + 2x \Big|_{x=1}^{x=2} = 1 + 2 = 3.$$

Samas Newton-Leibnizi valemi vale kasutamisega saaksime

$$\int_0^2 f(x) dx = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2x, & x \in (1, 2] \end{cases} \Big|_{x=0}^{x=2} = 2 \cdot 2 - 0 = 4.$$

Tulemus erineb õigest vastusest. Põhjuseks on see, et integreeritav funktsioon ei ole pidev lõigus $[0, 2]$ ja Newton-Leibnizi valem antud juhul ei kehti, sest integreeritaval funktsioonil ei ole algfunktsiooni.

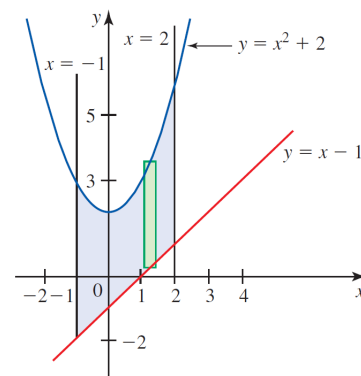
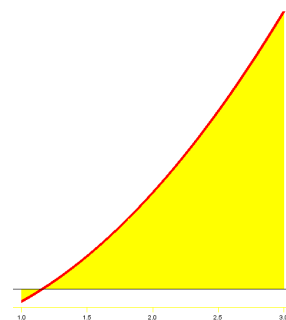
◇ ◇ ◇

Näide 10.3 Arvutame funktsioonide $f(x) = x^2 + 2$ ja $g(x) = x - 1$ graafikute vahele jääva kujundi pindala lõigul $[-1, 2]$. Saame

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2 - x + 1) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - x + 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{x=-1}^{x=2} \\ &= \frac{8}{3} - 2 + 6 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 3 \right) = 10.5. \end{aligned}$$

Juhime tähelepanu sellele, et tegemist on terve kujundi pindalaga, kuigi osa kujundist asub allpool x -telge.

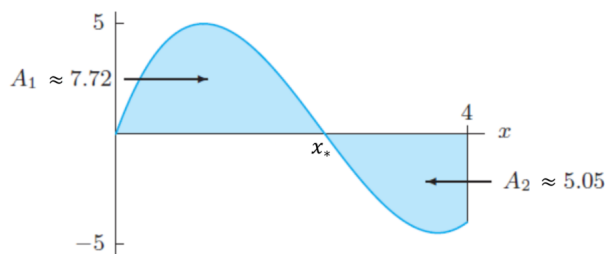
◇ ◇ ◇



Allikas: [35]

Näide 10.4 Arvutame funktsiooni $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x$ graafiku ja x -telje vahelise kujundi pindala lõigul $[0, 4]$.

Esiteks märgime, et antud funktsiooni nullkohtadeks on 0 ja $\frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$, millest lõigu $[0, 4]$ sisse jääb $x_* = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \approx 2.38$. Lõigul $[0, x_*]$ on funktsioon positiivne ja ülejäänud osas negatiivne.



Allikas: [14]

Seega

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 |x^3 - 7x^2 + 11x| dx = \int_0^{x_*} (x^3 - 7x^2 + 11x) dx \\ &\quad - \int_{x_*}^4 (x^3 - 7x^2 + 11x) dx = \frac{75 + 35\sqrt{5}}{12} \approx 12.77. \end{aligned}$$

Siingi on arvestatud, et kujundi mõlema osa pindala vaadeldakse positiivsena.

◇ ◇ ◇

Järeldus 10.1

Kui funktsioon f on diferentseeruv vahemikus (a, b) ja f' on pidev lõigul $[a, b]$, siis

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Seda järeldust läheb mõnikord vaja majanduses ja muudes valdkondades, kus räägitakse suuruse netokasvust või -langusest. Arv $f(b) - f(a)$ on funktsiooni muut lõigul $[a, b]$.

Näide 10.5 Olgu $f = f(x)$ funktsioon, mille väärtuseks on mingi kauba x ühiku tootmise kulu. Sel juhul tuletis f' näitab kulu tooteühiku kohta. Siis

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

mis kujutab endast tootmise kulu, kui a ühikut on toodetud ja on vaja jõuda olukorda, kus on toodetud b ühikut.

◇ ◇ ◇

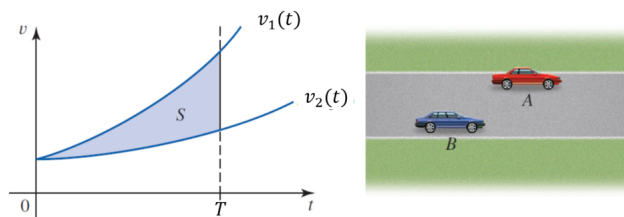
Näide 10.6 Kui auto liigub seaduse $s = s(t)$ alusel kiirusega $v = v(t) = s'(t)$, siis

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$$

näitab auto poolt läbitud teepikkust ajaintervallis $[t_1, t_2]$.

◇ ◇ ◇

Näide 10.7 Vaatleme maanteel liikumas kahte autot, millest esimese auto kiirus ajahetkel t on $v_1(t)$ ja teise auto kiirus on $v_2(t)$. Olgu konkreetsuse mõttes mõlemad kiirused positiivsed.



Allikas: [35]

Joonisel märgitud pindala S näitab, kui palju muutub autode vaheline kaugus ajaintervalli $[0, T]$ jooksul. Selle pindala saab arvutada

$$S = \int_0^T (v_1(t) - v_2(t)) dt = s_1(T) - s_2(T) - (s_1(0) - s_2(0))$$

(autod ei pea alustama samast kohast, s.t võib olla, et $s_1(0) \neq s_2(0)$).

Siit saab autode vahelise kauguse ajahetkel T leida:

$$s_1(T) - s_2(T) = s_1(0) - s_2(0) + S.$$

◇ ◇ ◇

10.2 Määratud integraali arvutamine

Määratud integraali võib arvutada nii, et esiteks leiame algfunktsiooni määramata integraalist ja siis kasutatakse Newton-Leibnizi valemit. Saab kasutada nii muutujavahetust kui ka ositi integreerimist. Viimaste korral on aga oluline, kuidas käituvad seejuures integraali rajad.

10.2.1 Muutujavahetus

Teoreem 10.2

Kui g' on pidev lõigul $[a, b]$ ja f on pidev funktsiooni g muutumispiirkonnas, siis muutujavahetusel $u = g(x)$ kehtib võrdus

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Tõestus. Funktsiooni f pidevuse tõttu on tal olemas algfunktsioon F , s.t $F' = f$. Siis

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u) du = F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Teiselt poolt, liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit kasutades saame

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx &= \int_a^b F'(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b (F(g(x)))' dx = F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)). \end{aligned}$$

□

Näide 10.8 Leiame integraali

$$\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx.$$

Võtame $g(x) = x^3 + 1$, siis

$$u = x^3 + 1, \quad du = 3x^2 dx.$$

See muutujavahetus on sarnane määramata integraali leidmisel tehtava muutujavahetusega. Kuna integreerime nüüd muutuja u järgi, siis peame leidma $u = g(x)$ väärtused rajades $x = -1$ ja $x = 1$, saame

$$g(-1) = (-1)^3 + 1 = 0, \quad g(1) = 1^3 + 1 = 2.$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_0^2 \sqrt{u} du = \int_0^2 u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=0}^{u=2} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{8} = \frac{4}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 10.9 Leiame integraali

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 2x dx.$$

Võtame $g(x) = \cos 2x$ ja asendame

$$u = \cos 2x, \quad du = -2 \sin 2x dx.$$

Arvutame uued rajad

$$g(0) = \cos(2 \cdot 0) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Siit saame, et

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 u du = \frac{1}{2} \int_0^1 u du = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} \Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{4}.$$

◇ ◇ ◇

10.2.2 Määratud integraal sümmeetriliselt paiknevate rajade korral

Kui rajad paiknevad sümmeetriliselt, s.t integreerimine toimub lõigus $[-a, a]$, siis paaris- ja paaritute funktsioonide integreerimine lihtsustub.

Tuletame meelde, et funktsioon on paarisfunktsioon, kui iga x korral kehtib $f(x) = f(-x)$ (funktsiooni f graafik on sümmeetriline y -telje suhtes) ja funktsioon on paaritu, kui iga x korral kehtib $f(-x) = -f(x)$ (funktsiooni f graafik on sümmeetriline nullpunkti suhtes). Mõlemal juhul on funktsiooni määramispiirkond $X \subset \mathbb{R}$ selline, et $x \in X$ korral ka $-x \in X$.

Teoreem 10.3

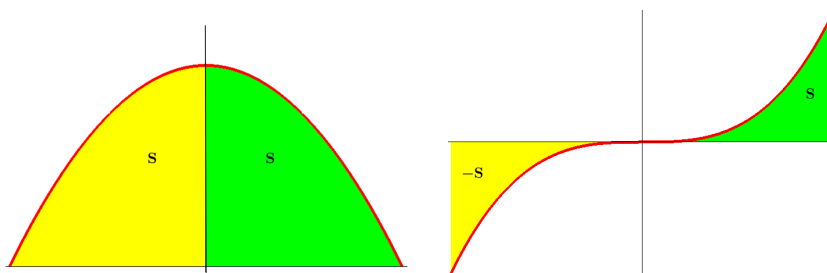
Olgu funktsioon f pidev lõigul $[-a, a]$. Siis võib väita järgmist:
kui f on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

kui f on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Selle teoreemi tõestamine on suhteliselt elementaarne, kuid väite sisust ettekujutuse saamiseks võib vaadata paaris- ja paaritu funktsiooni graafikuid ning arvestada seost pindala leidmisega.



Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon

Näide 10.10 Kuna $\sin x$, x ja x^3 on paaritud funktsioonid, siis lõigul $[-a, a]$ integraali väärtus nendest funktsioonidest võrdub nulliga. Kui paaritud funktsiooni korrutada paarisfunktsiooniga, siis korrutis on paaritu funktsioon ja integraal on null:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^{17} \cos 10x dx = 0.$$

Paarisfunktsioonide korral nii ühest vastust ei ole, kuid mõnikord on nullpunktis funktsiooni väärtust lihtsam arvutada, kui punktis $-a$. Näiteks

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 3x dx = \frac{2}{3} \sin 3x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 10.11 Leiame integraali

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 0.$$

Näeme, et integraali märgi all on paarisfunktsioon. Seega

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 2 \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 2 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 6x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{146}{15}.$$

◇ ◇ ◇

10.2.3 Määratud integraal funktsiooni absoluutväärtusest

Absoluutväärtus funktsioonist on alati mittenegatiivne. Seega integraali

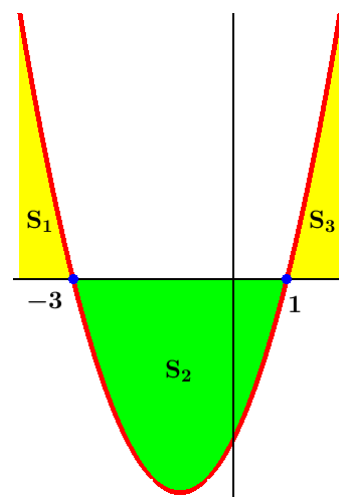
$$\int_a^b |f(x)| dx$$

väärtus peab tulema samuti mittenegatiivne. Kui vastus tuleb negatiivne, siis peab kuskil arvutustes olema viga.

Näide 10.12 Arvutame

$$S = \int_{-4}^2 |x^2 + 2x - 3| dx.$$

Märgime, et kui integraali märgi all on funktsiooni absoluutväärtus, siis integraali väärtus on võrdne funktsiooni graafiku, x -telje ning püstsirgetega $x = a$, $x = b$ piiratud kõvertrapetsi pindalaga, kus kujundi kõigi osade pindalad loetakse positiivseks.



Teeme joonise. Näeme, et absoluutväärtuse märgi all oleval funktsioonil $f(x) = x^2 + 2x - 3$ on kaks nullkohta $x = -3$ ja $x = 1$, ning need mõlemad jäävad integreerimispiirkonda. Kui funktsiooni graafik jääb täielikult ülespoole x -telge, siis on integraali väärtus positiivne ja kui funktsiooni graafik jääb täielikult allapoole x -telge, siis võtame integraali miinusmärgiga. Seega jagame integraali kolmeks liidetavaks:

$$S = \int_{-4}^{-3} (x^2 + 2x - 3) dx - \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx.$$

Kõigil kolmel integraalil on sama algfunktsioon, mistõttu saame kirjutada

$$S = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) \Big|_{x=-4}^{x=-3} - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) \Big|_{x=-3}^{x=1} + \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) \Big|_{x=1}^{x=2}.$$

Leiame

$$S_1 = (-9 + 9 + 9) - \left(-\frac{64}{3} + 16 + 12\right) = 9 - \frac{20}{3} = \frac{7}{3},$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) - (-9 + 9 + 9) = -\frac{5}{3} - 9 = -\frac{32}{3},$$

$$S_3 = \left(\frac{8}{3} + 4 - 6\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}.$$

Integraali väärtus on

$$S = S_1 - S_2 + S_3 = \frac{7}{3} - \left(-\frac{32}{3}\right) + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}.$$

◇ ◇ ◇

10.2.4 Ositi integreerimine

Kehtib ositi integreerimise valem

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x) u'(x) dx, \quad (10.1)$$

mida kirjutatakse ka lühemalt

$$\int_a^b u dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (10.2)$$

Näide 10.13 Arvutame

$$\begin{aligned} \int_0^4 x e^{-x} dx &= \underbrace{x}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v \Big|_{x=0}^{x=4} - \int_0^4 (-e^{-x}) dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=4} = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

10.3 Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Teoreem 10.4

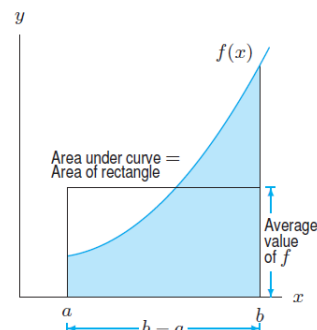
Integraalarvutuse keskväärtusteoreem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis on olemas $c \in [a, b]$ nii, et

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Definitsioon 10.1

Lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni f keskvääratus $\bar{f}$ defineeritakse integraali abil võrdusega

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



Allikas: [14]

Märkus 10.1

Seega võib integraalarvutuse keskvääratusteoreemi tõlgendada nii, et pideva funktsiooni f keskvääratus lõigus $[a, b]$ saavutatakse mingis punktis $c \in [a, b]$.

Näide 10.14 Olgu elanike arv kirjeldatud funktsiooniga $y = x^2$, kus x on näiteks aastad. Leiame keskmise elanike arvu esimese viie aasta kestel,

$$\bar{y} = \frac{1}{5-0} \int_0^5 x^2 dx = \frac{1}{5} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=5} = \frac{25}{3}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 10.15 Reaalarvude aritmeetilise keskmise leidmisel liidetakse need ja jagatakse nende arvuga. Olgu näiteks 24 tunni jooksul iga täistunni algul mõõdetud temperatuurid $f(t_1), \dots, f(t_{24})$. Sel juhul on temperatuuride keskmine

$$T_{24} = \frac{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{24})}{24}.$$

Kui jaotada ööpäev mingiks teiseks arvuks võrdseteks ajaintervallideks (peame silmas just suuremaid arve, näiteks jaotust minutilisteks intervallideks) ja mõõdame temperatuuri iga ajaintervalli alguses, siis 24 tunni keskmise saab arvutada

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)}{n} = \frac{1}{24} \left(f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n) \right) \frac{24}{n} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t, \end{aligned}$$

kus $\Delta t = \frac{24}{n}$ ja summamärgiga osa on Riemanni summa. Piirväärtusena saame protsessis $n \rightarrow \infty$ keskmise temperatuuri $\bar{T}$ arvutamiseks võrduse

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt,$$

kus $f(t)$ on temperatuur ajahetkel t .

◇ ◇ ◇

10.4 Määratud integraal ülemise raja funktsioonina

Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$. Siis leidub f algfunktsioon ja vastavus $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ määrab lõigus $[a, b]$ funktsiooni $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Teoreem 10.5

Matemaatilise analüüsi põhiteoreem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis funktsioon

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) ning kehtib võrdus

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Tõestus. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$. Defineerime

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Valime suvaliselt $x \in (a, b)$. Siis

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \frac{h}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(t_i)}{n} = f(x), \end{aligned}$$

kus t_i on lõigu $[x, x+h]$ jaotamisel n võrdse pikkusega osalõikudeks nendes osalõikudes olevad punktid ja $f(t_i) \rightarrow f(x)$ iga i korral. Seega $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Märgime, et arvutatud piirväärtuste juures on kirjutised korrektsed juhul $h > 0$. Kui aga vaadelda piirväärtuses juhtu $h < 0$, $h \rightarrow 0$, siis

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = -\frac{1}{h} \int_{x+h}^x f(t) dt = \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^x f(t) dt$$

ja kasutame määratud integraali definitsiooni lõigus $[x+h, x]$.

Funktsiooni F pidevus vahemikus (a, b) järeldub tema diferentseeruvusest. Pidevus näiteks punktis a saadakse järgmiselt (kasutame eespool toodud arvutusi):

$$\lim_{h \rightarrow 0} (F(a+h) - F(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} h \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(t_i)}{n} = 0.$$

□

Põhiteoreem ütleb meile sisuliselt, et funktsiooni tuletise leidmine ja pindala leidmine on teineteise pöördoperatsioonid.

Kuigi pindala leidmine lõpmata väikeste ristkülikute summeerimise teel oli tuntud Vana-Kreekas, siis päris pikka aega ei olnud selge, et need kaks operatsiooni: kiiruse leidmine ja pindala leidmine, tõepoolest nii tihedalt seotud on.

Paneme tähele, et teoreem ei ütle meile, kuidas midagi algoritmiliselt täpselt leida. Teoreemi sisu on pigem teoreetiline: diferentseerimine ja integreerimine on otseselt teineteisega seotud, seda vähemalt pidevate funktsioonide jaoks.

Teoreemi tõestusega ja täiendustega on tegelenud näiteks James Gregory, Isaac Barrow, Isaac Newton, Gottfried Leibniz.

Paljud meie poolt varasemalt sõnastatud teoreemid on tegelikult järeldused antud põhiteoreemist.

Märkus 10.2

Teoreemist 10.5 ja algfunktsiooni definitsioonist järeldub, et funktsioon $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ on funktsiooni f üks algfunktsioone, mistõttu pideva funktsiooni f suvaline algfunktsioon G avaldub kujul

$$G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t) dt + C$$

ning määramata integraali saab kirja panna järgmiselt:

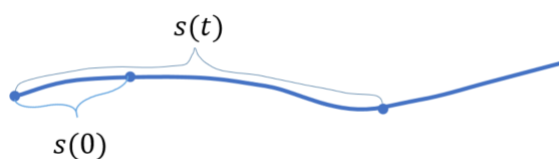
$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Näide 10.16 Keha liigub kiirusega $v = v(t)$ mööda mingit trajektoori.

Pideva kiirusega liikumise korral

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau,$$

kus $s(0)$ on keha kaugus piki trajektoori mingist paigast ajahetkel $t = 0$, $s(t)$ aga keha kaugus piki trajektoori sellest paigast suvalisel ajahetkel t .



Analoogiliselt avaldub kiirus v kiirenduse $a = a(t)$ kaudu,

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

◇ ◇ ◇

Näide 10.17 Leiame $S'(x)$, kui

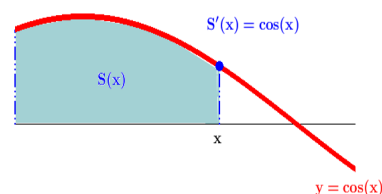
$$S(x) = \int_{-1}^x \cos t dt.$$

Teoreemi 10.5 järgi

$$S'(x) = \cos x.$$

Mida ütleb meile viimane tulemus? Kui vaatame joone $y = \cos x$ ja x -telje vahele jääva ala pindala $S(x)$ (vasakpoolne punkt $x = -1$ ehk fikseeritud alumise raja väärtus ei ole siin oluline), siis selle pindala muutumise kiirus igas punktis x on $S'(x) = \cos x$. Teisiti öeldes, pindala muutub kiirusega, mis võrdub kõvertrapetsi kõrgusega $\cos x$.

◇ ◇ ◇



Näide 10.18 Leiame $F'(x)$, kui

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Olgu

$$f(t) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Teoreemile 10.5 tuginedes saame

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d \sin x}{dx} \frac{d}{d \sin x} F(x) = \cos x f(\sin x) \\ &= \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 11

Määratud integraali rakendused

11.1 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral	192
11.2 Kõversektori pindala	193
11.3 Joone pikkuse arvutamine	194
11.4 Keha ruumala	197
11.5 Integraali füüsikalisi rakendusi	199
11.5.1 Teepikkuse arvutamine	199
11.5.2 Töö arvutamine	200
11.5.3 Vedeliku poolt mõjuva jõu arvutamine	201
11.5.4 Masskese	203
11.5.5 Vedelike pumpamisel tehtav töö	208

Kontrolltöö teemad

1. Kõvertrapetsi ja kõversektori pindala leidmine.
2. Joone pikkuse leidmine.
3. Keha ruumala leidmine.
4. Teepikkuse arvutamine.
5. Töö arvutamine.

Eksamiteemad

1. Kõvertrapetsi ja kõversektori pindala.
2. Joone pikkus.
3. Keha ruumala.
4. Teepikkuse arvutamine.
5. Töö arvutamine sirgjoonelise liikumise korral.

11.1 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral

Eelnevalt nägime, et lõigus $[a, b]$ positiivse ja pideva funktsiooni $y = f(x)$ poolt määratud kõvertrapetsi pindala S arvutatakse võrdusega

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

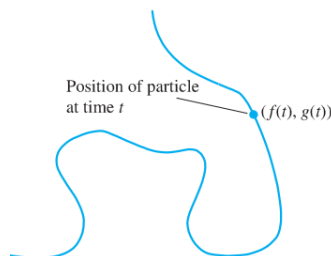
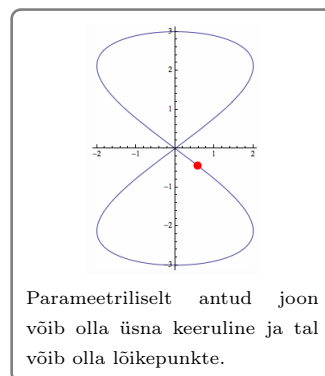
Vaatleme nüüd juhtu, kus funktsioon (täpsemalt, tema graafik) on antud parameetriliselt

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus x on diferentseeruv funktsioon. Parameetrilise esituse puhul võime leida kõvera ja x -telje vahelise kujundi pindala avaldisena $\int_a^b y dx$, asendades $y = y(t)$ ja leides $dx = x'(t) dt$ ning arvestades, et $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Parameetriliselt antud kõvertrapetsi pindala avaldub võrdusega

$$S = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt. \quad (11.1)$$



Joonis: [36]

Näide 11.1 Leiame tsükloidi

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t), \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad r > 0,$$

ja x -telje vahelise kujundi pindala. Tsükloid on joon, mille tekitab raadiusega r ringjoone veeremisel selle ringjoone üks fikseeritud punkt.



Allikas: Wikipedia

Leiame $dx = r(1 - \cos t) dt$. Seega

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) r(1 - \cos t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= 3\pi r^2. \end{aligned}$$

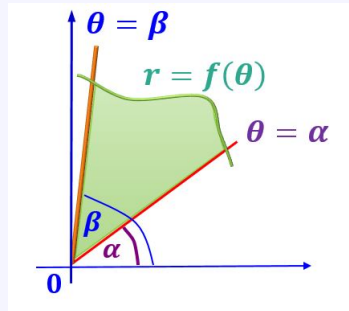
◇ ◇ ◇

11.2 Kõversektori pindala

Definitsioon 11.1

Läbigu nullpunkti kaks sirget, mis moodustavad x -telje positiivse suunaga vastavalt nurgad α ja β .

Kõversektoriks nimetatakse tasandilist kujundit, mis on piiratud nimetatud sirgetega ning pideva mittenegatiivse funktsiooni $r = f(\theta)$ graafikuga, kus nurki mõõdetakse radiaanides.



Lause 11.1

Pideva funktsiooniga $r = f(\theta)$ määratud kõversektori pindala avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Tõestus. Esiteks märgime, et raadiusega r ringi sektori pindala leitakse valemiga $\frac{1}{2} \theta r^2$, kus θ on sektori nurk. Moodustame jaotused Δ_n

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Olgu

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Võtame igas osalõigis nurga $\varphi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$. Sel juhul tekib osasektor, mille pindala arvutatakse ligikaudu ringi sektori pindala kaudu

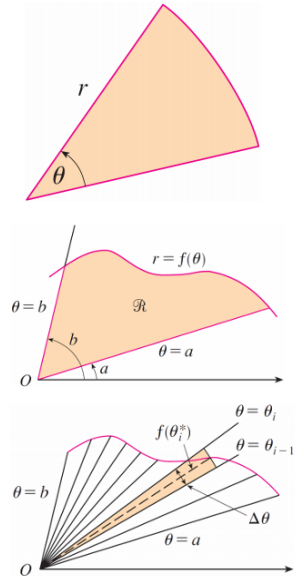
$$\frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \Delta\theta_i.$$

Siis

$$S = \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

□

Harilik ringi sektor ja kõversektor.



Allikas: [37]

Kõversektor on kõvertrapetsi analoog polaarkoordinaatide juhul.

Näide 11.2 Keerulisema näitena vaatleme polaarkoordinaatides antud joont (okassiga)

$$r(\varphi) = \cos 44\varphi + 2 \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Selle joone poolt piiratud kujundi pindala leidmiseks kasutame kõversektori pindala valemit

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 44\varphi + 2 \sin \varphi)^2 d\varphi.$$

Siit saame

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos^2 44\varphi + 4 \sin^2 \varphi + 4 \cos 44\varphi \sin \varphi) d\varphi.$$

Kasutame järgmisi trigonomeetrilisi võrduseid

$$\cos^2 44\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 88\varphi),$$

$$4 \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos 2\varphi),$$

lisaks võrdusest

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

saadavat

$$4 \cos 44\varphi \sin \varphi = 2(\sin 45\varphi - \sin 43\varphi).$$

Kokkuvõttes leiame

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 88\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\ &\quad + \int_0^{\pi} \sin 45\varphi d\varphi - \int_0^{\pi} \sin 43\varphi d\varphi \\ &= \frac{5}{4}\pi + \left(\frac{\sin 88\varphi}{4 \cdot 88} - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\cos 45\varphi}{45} + \frac{\cos 43\varphi}{43} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{5}{4}\pi. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

11.3 Joone pikkuse arvutamine

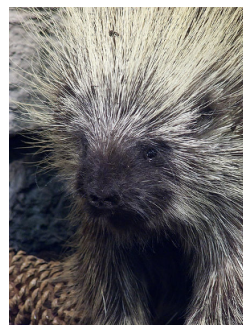
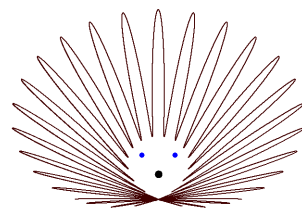
Tuletame valemi funktsiooni f graafiku kui joone pikkuse arvutamiseks.

Võtame lõiguse $[a, b]$ alajaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Ühendame punktid $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ sirglõikudega.

Joonisel kujutab see joon endast okkad turri ajanud okassiga (lisatud on veel paar täpikest ...).



Sel juhul saame täisnurksest kolmnurgast iga sirglõigu pikkuseks

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2}.$$

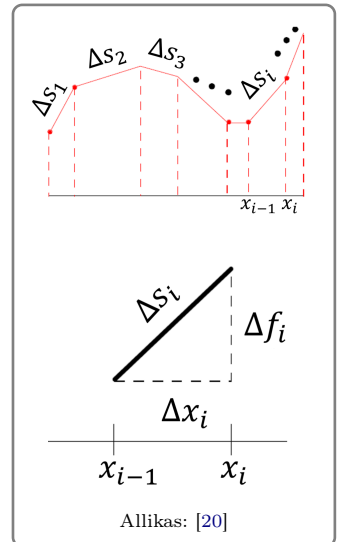
Summeerime kõik sirglõikude pikkused

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Jagatis $\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}$ on vastava sirglõigu tõusunurga tangens,

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} = \tan \alpha_i.$$

Minnes piirile $n \rightarrow \infty$, saame järgmise tulemuse.



Lause 11.2

Lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f graafiku kui joone pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Lause 11.3

Kui funktsiooni graafik on esitatud parameetriliselt

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus x ja y on diferentseeruvad lõigus $[\alpha, \beta]$, siis selle joone pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Näide 11.3 Joone pikkuse leidmisel võivad tekkida keerulist tüüpi integraalid ja sellepärast leitakse need tihti ligikaudsete vahenditega. Vaatleme näitena poolringjoone

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r],$$

pikkuse leidmist. Leiame tuletise

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Seega poolringjoone pikkus avaldub

$$s = \int_{-r}^r \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Teeme muutujavahetuse

$$x = r \sin t.$$

Siis

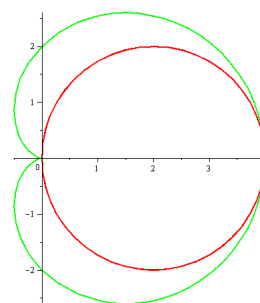
$$dx = r \cos t \, dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} s &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos t \, dt}{\sqrt{r^2 - (r \sin t)^2}} = r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{\cos^2 t}} \\ &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi r. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 11.4 Leiame kardioidi kui joone pikkuse ehk ligikaudse “euroõuna” ümbermõõdu (mõõdetuna keskelt ja arvestades varre osas olevat õõnsust).



Selleks kasutame parameetriliselt antud funktsiooni graafiku pikkuse valemit. Kardioidi valemitest

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \\ y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

saame

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-a(1 + 2 \cos \varphi) \sin \varphi]^2 + [a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + 2 \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi + [(1 + 2 \cos \varphi) \cos \varphi - 1]^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{[(1 + 2 \cos \varphi) - \cos \varphi]^2 + 1 - \cos^2 \varphi} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Teeme muutujavahetuse $u = \frac{\varphi}{2}$ ning arvestades funktsioonide $\cos x$ ja $-\cos x$ sümmeetriat lõikudel $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ja $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, saame

$$s = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = 8a \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a.$$

◇ ◇ ◇

Kardioidi ümbermõõt

$$s = 8a$$

on raadiusega a ringi omast veidi suurem (ringi ümbermõõt on $2\pi a \approx 6.28a$ ehk pisut rohkem kui 75% kardioidi ümbermõõdust).

11.4 Keha ruumala

Vaatleme keha, mida läbiva telje korral on igas punktis x teada tema ristlõikepindala $S(x)$. Analoogiliselt eelnevate punktidega moodustame keha piiravas lõigus ühtlase jaotusega Riemanni summad ja leiame nende piirväärtuse,

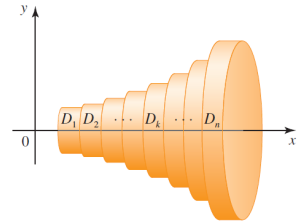
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S(c_i) \Delta x_i.$$

Lause 11.4

Olgu keha piiratud tasanditega, mis on risti x -teljega punktides $x = a$ ja $x = b$. Kui igas punktis $x \in [a, b]$ on keha ristlõikepindala $S(x)$ ja S on pidev funktsioon lõigus $[a, b]$, siis keha ruumala avaldub valemiga

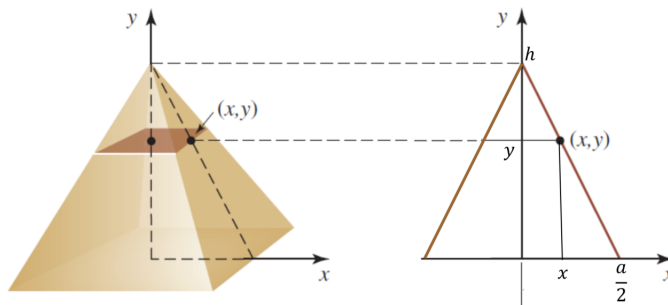
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Ruumala leidmiseks moodustame võrdse paksusega kihid, liidame nende ruumalad ja võtame piirväärtuse.



Allikas: [35]

Näide 11.5 Leiame ruudukujulise alusega püramiidi ruumala, kui aluse külg on a ja püramiidi kõrgus on h . Asetame koordinaatide alguspunkti püramiidi aluse keskele.



Allikas: [35]

Kõrgusel y olgu püramiidi ruudukujulise lõike külg $2x$. Siis sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{h}{a} = \frac{h-y}{2x},$$

millest

$$2x = \frac{a}{h}(h-y)$$

ja seega lõike pindala on

$$S(y) = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2.$$

Püramiidi ruumala leiame

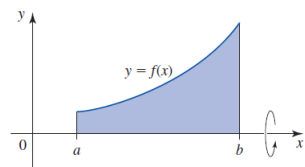
$$V = \int_0^h S(y) dy = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy = -\frac{a^2}{h^2} \left(\frac{(h-y)^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=h} = \frac{a^2 h}{3}.$$

◇ ◇ ◇

Järeldus 11.1

Olgu f pidev mittenegatiivne funktsioon lõigus $[a, b]$. Siis ümber x -telje pöörleva joonega $y = f(x)$ piiratud keha ruumala avaldub valemiga

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Lause 11.4 kasutamisel paneme tähele, et punktis $x \in [a, b]$ on keha ristlõikepindala $S(x) = \pi f^2(x)$.

Näide 11.6 Kujund, mis on piiratud joonega

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

ja x -teljega, pöörleb ümber x -telje. Leiame tekkiva pöördkeha ruumala.

Olgu punktis x pöördkeha ristlõike raadius $r(x)$. Ruumala saame

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi(r(x))^2 dx = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi. \end{aligned}$$

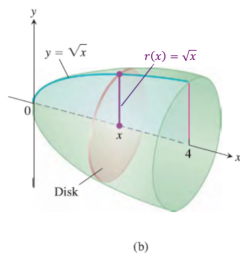
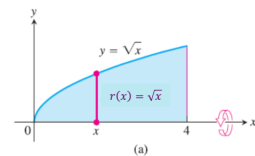
◇ ◇ ◇

Näide 11.7 Kujund, mis on piiratud y -teljega ja joonega $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$, pöörleb ümber y -telje. Leiame tekkiva pöördkeha ruumala.

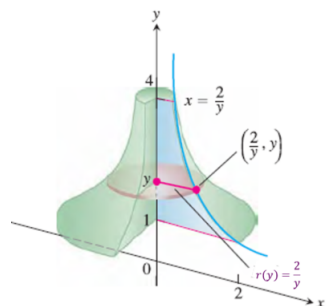
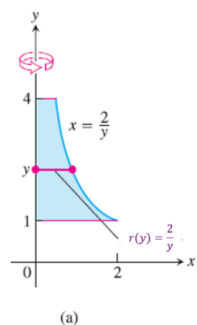
Analoogiliselt eelneva näitega

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi(r(y))^2 dy = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_1^4 = 4\pi \cdot \frac{3}{4} = 3\pi. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



Joonis: [36]



Joonis: [36]

11.5 Integraali füüsikalisi rakendusi

11.5.1 Teepikkuse arvutamine

Läbitud tee pikkuse arvutamist oleme juba varem vaadelnud, kuid formuleerime selle siin eraldi tulemusena.

Olgu $v = v(t)$ keha liikumise kiirus ajahetkel t ja $s = s(t)$ keha poolt läbitud tee pikkus hetkel t . Ajahetkede t_1 ja t_2 vahel keha poolt läbitud **teepikkus** avaldub valemiga

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt. \quad (11.2)$$

Näide 11.8 Keha liikumise kiirus on antud võrdusega

$$v(t) = 3t^2 - t + 2$$

ja selle ühik olgu $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Leiame keha poolt läbitud teepikkuse ajahetkede $t = 3$ sekundit ja $t = 6$ sekundit vahel. Arvestades eelnevat ja seda, et $3t^2 - t + 2 \geq 0$, kui $t \in [3, 6]$, saame

$$s = \int_3^6 (3t^2 - t + 2) dt = \left(t^3 - \frac{t^2}{2} + 2t \right) \Big|_{t=3}^{t=6} = 181.5 \text{ m.}$$

◇ ◇ ◇

Märkus 11.1

Analoogiliselt saab leida teisi karakteristikuid f , kui on antud selle muutumise kiirus $f'(x)$ argumenti x järgi. Sel juhul algfunktsiooniks on funktsioon f ise ja $f(b) - f(a)$ annab funktsiooni f muudu intervallis $[a, b]$.

Näide 11.9 Bakterite koloonia on alguses 14 miljoni bakteri suurune. Mudel näitab, et t tunni jooksul suureneb koloonia kiirusega 2^t miljonit bakterit tunnis. Leiame bakterite arvu miljonites hetkel $t = 2$. Bakterite arvuks saame sel juhul

$$n = 14 + \int_0^2 2^t dt = 14 + \left(\frac{2^t}{\ln 2} \right) \Big|_{t=0}^{t=2} = 14 + \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \approx 18.33.$$

◇ ◇ ◇

11.5.2 Töö arvutamine

Vaatleme keha, mis liigub mööda x -telge positiivses suunas välisjõu $F(x)$ poolt punktist $x = a$ punkti $x = b$. Olgu funktsioon F pidev.

Moodustame juba varem vaadeldud jaotused

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ võtame punkti c_i , milles arvutame jõu $F(c_i)$. Kui osalõigud $[x_{i-1}, x_i]$ on küllalt väikesed, siis võime lugeda jõu F selles osalõigus konstantseks. Töö A_i , mida tehakse konstantse jõu $F(c_i)$ poolt, liigitades keha edasi Δx_i võrra, leitakse korrutisena

$$A_i \approx F(c_i) \Delta x_i.$$

Kogu töö leitakse ligikaudselt Riemanni summana

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i.$$

Minnes osalõikude arvuga piirile nii, et maksimaalne osalõigu pikkus läheb nulli, saame järgmise tulemuse.

Lause 11.5

Mööda x -telge punktist $x = a$ punkti $x = b$ liikuvale kehale mõjuva jõu $F(x)$ poolt tehtav töö avaldub võrdusega

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Näide 11.10 Vedru, mille pikkus vabas olekus on 12 cm, venitab 8 N jõu mõjul vertikaalselt 2 cm. Leiame töö, mida on vaja teha, et venitada vedru vertikaalselt 6 cm.

Selles ülesandes peame lisaks teadma, et vedrule mõjuv jõud arvutatakse Hooke'i seaduse $F(x) = kx$ alusel, kus k on vedru jäikustegur (konstant) ja x on venituse suurus. Arvestades ülesandes antut, leiame kordaja k võrdusest

$$8 = 2k,$$

millest

$$k = 4 \frac{\text{N}}{\text{cm}}.$$

Siit tehtav töö võrdub

$$A = \int_0^6 kx dx = 4 \int_0^6 x dx = 2x^2 \Big|_0^6 = 72.$$

Saime, et tehtav töö on $A = 72 \text{ N cm}$.

◇ ◇ ◇

Näide 11.11 Ämbrit, mis kaalub 22 N, vinnatakse ühtlasel kiirusel maapinnalt üles 6 m pikkuse köie abil. Köie ühe meetri kaal on 1.17 N. Kui palju tööd kulub ämbri ja köie tõstmiseks?

Ämbri kaal on konstantne, seega ainuüksi tema tõstmiseks kulunud töö (ämbrile antav potentsiaalne energia) on $22 \cdot 6 = 132$ J.

Köiele mõjub raskusjõud $(1.17)y$ ja seda tuleb ületada piirides $y \in [0, 6]$. Lisame selgituseks, et vertikaalse y -telje 0-punkt asub kohas, kuhu ämber ja köis lõpuks tõstetakse, ja telje suund on ülalt alla. Köie tõstmiseks kuluv töö on

$$1.17 \int_0^6 y \, dy = 1.17 \cdot 18 = 21.06 \text{ J.}$$

Tõstmisel tehtav töö on seega

$$132 + 21.06 = 153.06 \text{ J.}$$

◇ ◇ ◇

11.5.3 Vedeliku poolt mõjuva jõu arvutamine

Mahutis, mille põhi on horisontaalselt tasapinnaline, saab vedeliku poolt põhjale mõjuva kogujõu arvutada, korrutades põhja pindala ja põhjas avalduva rõhu (rõhk on pinnaühikule mõjuv jõud).

Vedeliku poolt konstantsel sügavusel asuvale pinnale mõjuv jõud on

$$F = S h w,$$

kus S on pinna pindala, h on pinna sügavus ja w on vedeliku erikaal.

Näide 11.12 Magevee erikaal on 9809.3 N/m^3 . Kui basseini sügavus on 1.5 m, siis vee poolt mõjuv jõud basseini põhjale, mille mõõtmed on 3 meetrit ja 6 meetrit, on

$$F = S h w = (3 \cdot 6 \text{ m}^2)(1.5 \text{ m}) \left(9809.3 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right) = 264\,851.1 \text{ N.}$$

◇ ◇ ◇

Lause 11.6
Vertikaalsele lamedale plaadile vedeliku poolt mõjuv jõud.

Olgu vedeliku erikaal w ja olgu vertikaalne plaat asetatud vedelikku sügavuste $h = a$ ja $h = b$ vahele. Olgu $L(h)$ plaadi laius sügavusel h . Siis vedeliku poolt vastu plaadi külge mõjuv jõud võrdub

$$F = w \int_a^b h L(h) dh.$$

Kui plaat on vedelikku asetatud vertikaalselt, siis vastu plaadi seina mõjuv rõhk on erinevatel kõrgustel erinev ning toodud valem sellisel kujul enam ei kehti (kuna h muutub). Sel juhul tuleb kasutada integraalset valemit.

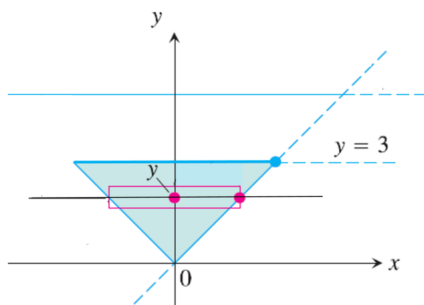
Näide 11.13 Veetammi riskülikukujuline värav on 5 m lai ja 4 m kõrge. Leiame vedeliku poolt värava ühele küljele mõjuva jõu, kui värava ülemine serv asub 3 m sügavusel veepinnast.

Vee erikaaluks võtame 9809.3 N/m^3 . Värava laius on $L(h) = 5 \text{ m}$. Värav asub 3 kuni 7 meetri sügavusel. Seega

$$F = 9809.3 \int_3^7 5 h dh = 49046.5 \frac{h^2}{2} \Big|_{h=3}^{h=7} = 980930 \text{ N}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 11.14 Võrdhaarse kolmnurga kujuline lame plaat alusega 4 m ja kõrgusega 2 m on asetatud vertikaalselt basseini nii, et ülespoole jääv alus on 1 m sügavusel veepinnast. Leiame vee poolt plaadi ühele küljele mõjuva jõu.



Olgu koordinaatide alguspunkt plaadi alumises tipus. Plaadi parempoolne serv asub sirgel $y = x$ ja seega on kõrgusel y plaadi laius $L(y) = 2y$. Basseini veepiir asub kõrgusel $y = 3$ ja seega asuvad plaadi punktid, mille vertikaalne koordinaat on y , sügavusel $3 - y$. Niisiis on plaadi ühele küljele mõjuv jõud

$$\begin{aligned} F &= w \int_a^b (3 - y) L(y) dy = 2w \int_0^2 (3 - y) y dy \\ &= 2w \left(\frac{3}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{20}{3} w. \end{aligned}$$

Kui vee erikaal on 9809.3 N/m^3 , siis plaadile mõjub küljelt jõud

$$F = 65\,395.3 \text{ N}.$$

◇ ◇ ◇



Foto: Hooveri tamm,
Wikipedia.

11.5.4 Masskese

Vaatleme õhukest tasapinnalist plaati, mille tihedus on konstantne.

Definitsioon 11.2

Ütleme, et õhukesel plaadil on **masskese** punktis $(\bar{x}, \bar{y})$, kui selle plaadi toetamisel punktis $(\bar{x}, \bar{y})$ jääb plaat tasakaalu.

Lause 11.7

Olgu D tasandiline kujund, mis jääb kahe funktsiooni f ja g graafiku vahele, kus $f(x) \geq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, ning on külgedelt piiratud sirgetega $x = a$ ja $x = b$. Sel juhul kujundi D masskese asub punktis $(\bar{x}, \bar{y})$, kus

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{1}{2} (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

ning S on kujundi D pindala

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Näide 11.15 Leiame joontega $y = \sqrt{x}$ ja $y = \frac{x}{2}$ piiratud tasandilise kujundi masskeskme lõigul $[0, 1]$. Kujundi pindala on

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{12}.$$

Masskeskme x koordinaat on

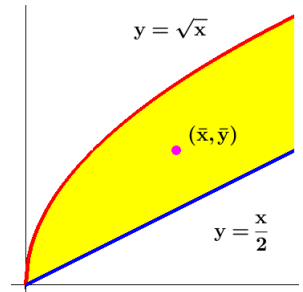
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{S} \int_0^1 x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \frac{12}{5} \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{12}{5} \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{6} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{30} = \frac{14}{25}. \end{aligned}$$

Masskeskme y koordinaat on

$$\bar{y} = \frac{1}{2S} \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{6}{5} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$

Seega asub masskese punktis $\left(\frac{14}{25}, \frac{1}{2} \right)$.

◇ ◇ ◇



Näide 11.16 Leiame võrdhaarse kolmnurga masskeskme. Olgu kolmnurk moodustatud sirge $y = x$ ja x -telje poolt lõigus $[0, a]$. Kolmnurga pindala on

$$S = \frac{a^2}{2}.$$

Masskeskme x koordinaat on

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{S} \int_0^a x (x - 0) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{2}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{2}{3}a.\end{aligned}$$

Masskeskme y koordinaat on

$$\bar{y} = \frac{1}{2S} \int_0^a (x^2 - 0) dx = \frac{1}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{3}a.$$

Seega asub masskeske punktis $\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$. Geomeetriast teame, et see on ka mediaanide lõikepunkt.

◇ ◇ ◇

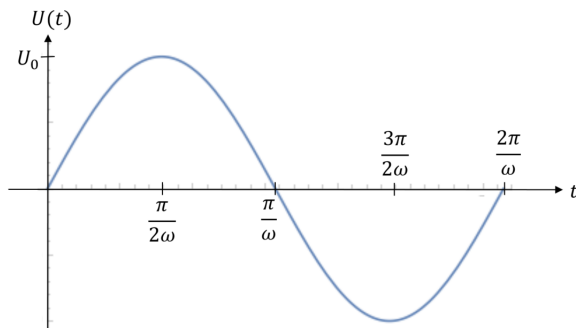
Näide 11.17 Teame, et elektrivõrgus jõuab tarbijani vahelduvpinge 220V. Katsume selgitada, mida see tähendab. Vahelduvpinge, nagu nimi ütleb, on muutuv pinge ja seda iseloomustab funktsioon

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kus U_0 on konstantne amplituudpinge (loetakse, et $U_0 > 0$), ω iseloomustab sagedust (meil 50 Hz), φ_0 on siinuse argumendi väärtus algsel ajahetkel $t = 0$. Erinevate elektritarbijate sünkroniseerimisel tuleb muidugi arvestada parameetreid ω ja φ_0 , aga loeme, et $\varphi_0 = 0$, siis

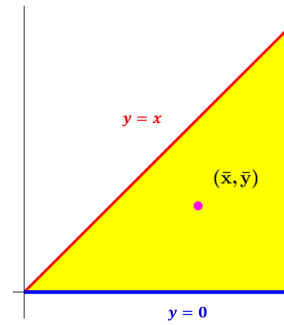
$$U(t) = U_0 \sin(\omega t).$$

Selle funktsiooni graafik on (ühe perioodi vältel)



Meenutame, et lõigus $[a, b]$ määratud funktsiooni f keskväärtus selles lõigus on

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



Leiame vahelduvpinge keskväärtuse lõigus $\left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$. Saame

$$\bar{U} = \frac{U_0}{\frac{\pi}{2\omega}} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin \omega t \, dt = \frac{2U_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin \omega t \, d\omega t = -\frac{2U_0}{\pi} \cos \omega t \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{2}{\pi} U_0.$$

Märgime, et 220 V ei ole tavalise võrgupinge keskväärtus.

Sama keskväärtus on pingel ka intervallis $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$, intervallis $\left[\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ on keskväärtus absoluutväärtuselt sama, kuid negatiivne. Pinge keskväärtus ajaintervallis $[0, T]$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \, dt \rightarrow 0, \text{ kui } T \rightarrow \infty,$$

sest

$$\left| \int_0^T \sin \omega t \, dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t \, dt = \text{const.}$$

Vahelduvpinge efektiivväärtus on selline alalispinge, mis aktiivtakistusel (näiteks tavaline elektripliit on selline) teeb küllalt pika aja jooksul sama töö (tekitab samapalju soojusenergiat), mis vahelduvpinge. Aktiivtakistil takistusega R tekkiv vool on Ohmi seaduse põhjal

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{R}.$$

Edasiste arvutuste lihtsustamiseks võtame vahelduvpinges $\omega = 1$ (on vahetu kontrollida, et tulemus ω väärtusest ei sõltu). Olgu vahelduvpinge efektiivväärtus U_* . Pingega U_* alalisvoolu tarbimisel on võimsus

$$P = U_* I = U_* \frac{U_*}{R} = \frac{U_*^2}{R}.$$

Veerandperioodi $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ jooksul (see aeg on küllaldane) teeb alalisvool tööd $A = \frac{U_*^2}{R} \cdot \frac{\pi}{2}$. Vahelduvvoolu poolt sama ajaga tehtav töö on

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} U_0(t) I(t) \, dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{U_0^2}{R} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Nende tööde võrdumine annab efektiivpinge ja amplituudpinge vahetuse $U_0^2 = 2U_*^2$ ehk $U_0 = \sqrt{2}U_*$. Vooluvõrgus on 220 V just pinge efektiivväärtus ja amplituudpinge on $U_0 = \sqrt{2} \cdot 200 \text{ V} \approx 311 \text{ V}$. Pinge keskväärtus (intervallis $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$) on

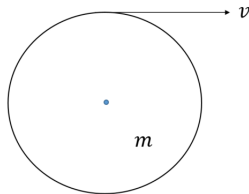
$$\frac{2}{\pi} U_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U_* \approx 198 \text{ V}.$$

◇ ◇ ◇

Hoiatus: kuigi vahelduvpinge pikaajaline keskväärtus on ligikaudu võrdne nulliga, ei tähenda see seda, et kui küllalt kaua hoida palja käega kinni vahelduvpinge all olevast isoleerimata juhtmest, ei peaks midagi halba juhtuma.

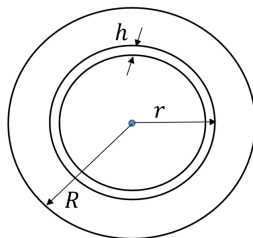
Miks on kõrgepingeliini juhtmed maapinnast kõrgel? Sellepärast, et kõrgepingel on amplituudpinge suur ja kui juhtmed oleksid madalal, hakkaks siinus vastu maad käima.

Näide 11.18 Keha, mille mass on m ja mis liigub kiirusega v , kineetiline energia on $\frac{mv^2}{2}$. Vaatleme ühtlase paksusega homogeenest materjalist ketast massiga m , mis pöörleb ümber oma keskpunkti läbiva ketta ristiga oleva telje. Ketta serva kiirus olgu v .



Milline on selliselt pöörleva ketta kineetiline energia?

Olgu ketta raadius R , siis tema külje kui ringi pindala on πR^2 , ketta ruumala on $\pi R^2 l$, kus l on ketta paksus. Ketta mass on $m = \pi R^2 l \rho$, kus ρ on ketta materjali tihedus. Jaotame ketta n võrdse paksusega kihiks, siis $h = \frac{R}{n}$ on iga kihi paksus. Olgu r kihi välimise serva kaugus keskpunktist.



Vastava kihi ruumala on $(\pi r^2 - \pi(r-h)^2)l = \pi(2rh - h^2)l$ ja mass $\pi(2rh - h^2)l\rho$. Seda kihti moodustavad ketta aineosakesed liiguvad mööda ringjoont ligikaudse kiirusega $\frac{r}{R}v$ (selline on kihi välimise serva kiirus, aga õhukese kihi korral, kus h on väike, on terve kihi kiirus ligikaudselt selline). Selle kihi kineetiline energia on ligikaudselt

$$\pi(2rh - h^2)l\rho \frac{\left(\frac{r}{R}v\right)^2}{2}.$$

Tähistame kihtide välimised raadiused vastavalt $r_1, \dots, r_n$, liidame kihtide kineetilised energiad ja läheme piirile $n \rightarrow \infty$. Siis

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi(2r_i h - h^2)l\rho \frac{\left(\frac{r_i}{R}v\right)^2}{2} &= \frac{\pi l \rho v^2}{2R^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2r_i - h)r_i^2 h \\ &= \frac{\pi l \rho v^2}{2R^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r_i^3 h \end{aligned}$$

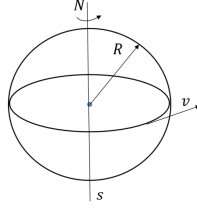
(siin $\sum_{i=1}^n h^2 = Rh \rightarrow 0$)

$$= \frac{\pi l \rho v^2}{2R^2} \int_0^R r^3 dr = \pi l \rho v^2 \frac{R^2}{4} = \frac{mv^2}{4},$$

millega oleme leidnud telje ümber pöörleva ketta kineetilise energia.

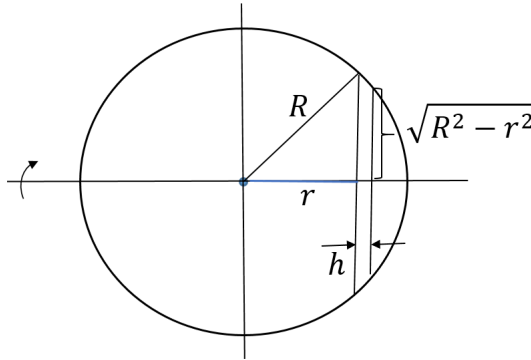
◇ ◇ ◇

Näide 11.19 Vaatleme homogeenest materjalist kera massiga m , mis pöörleb ümber oma keskpunkti läbiva telje. Olgu v teljest kõige kaugemate kohtade liikumiskiirus (näiteks maakeral ekvaatori liikumiskiirus, kui maakera pöörleb ümber poolusi läbiva telje).



Seame eesmärgiks leida selliselt pöörleva kera kineetilise energia.

Olgu kera raadius R , tihedus ϱ , siis kera ruumala on $\frac{4}{3}\pi R^3$ ja mass $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$. Jaotame kera pöörlemisteljega risti olevateks ketasteks, kus iga ketta paksus on $h = \frac{R}{n}$. Ekvaatori kohalt vaadates on pilt järgmine:



Ketta serva kiirus on $\sqrt{R^2 - r^2} \frac{v}{R}$, sest pöörlemise nurkkiirus $\omega = \frac{v}{R}$ on konstantne ja ketta serva kiiruse saamiseks tuleb ω korrutada ketta raadiusega. Olgu (joonisel parempoolse) poolkera ketaste keskpunktide kaugused kera keskpunktist r_i , ketaste massid m_i , servade kiirused v_i , $i = 1, \dots, n$. Eelmise näite põhjal teame, et ketta kineetiline energia on

$$\frac{1}{4}m_i v_i^2 = \frac{1}{4}\pi(R^2 - r_i^2)h\varrho \left(\sqrt{R^2 - r_i^2} \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{4}\pi(R^2 - r_i^2)^2 h \varrho \frac{v^2}{R^2}.$$

Kera kineetiline energia on piirväärtus ketaste kineetiliste energiate summast, kui ketta paksus $h \rightarrow 0$. Poole (joonisel parempoolse) kera korral

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4}m_i v_i^2 &= \frac{1}{4}\pi\varrho \frac{v^2}{R^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (R^2 - r_i^2)^2 h \\ &= \frac{1}{4}\pi\varrho \frac{v^2}{R^2} \int_0^R (R^2 - r^2)^2 dr. \end{aligned}$$

Seejuures

$$\int_0^R (R^2 - r^2)^2 dr = \left(R^4 r - \frac{2}{3}R^2 r^3 + \frac{r^5}{5} \right) \Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{8}{15}R^5.$$

Niisiis on terve kera kineetiline energia $\frac{4}{15}\pi R^3 \varrho v^2$. Arvestades võrdust

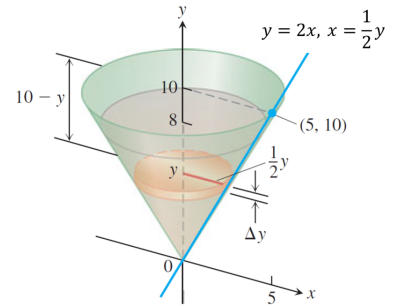
$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho, \text{ saame pöörleva kera kineetiliseks energiaks } \frac{mv^2}{5}.$$

◇ ◇ ◇

11.5.5 Vedelike pumpamisel tehtav töö

Anumate tühjendamiseks tehtav töö. Olgu anuma ristlõike pindala kõrgusel y võrdne pideva funktsiooni väärtusega $S(y)$. Olgu vedeliku tihedus ϱ , siis erikaal on $\gamma = \varrho g$. Kui anuma sisu asub kõrguste a ja b vahel, siis selle vedeliku pumpamiseks kõrgusele $h > b$ tehtav töö avaldub võrdusega

$$A = \gamma \int_a^b S(y)(h - y) dy.$$



Joonis: [36]

Näide 11.20 Mahutiks on tagurpidi pööratud koonus. Koonuse kõrgus on 10 meetrit ja põhja raadius on 5 meetrit. Mahuti on 8 meetri kõrguseni täidetud oliivõliga, mille tihedus on $913 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Kui palju tööd on vaja teha, et tühjendada mahuti, pumbates õli ülemise ääre kaudu välja?

Leiame mahuti ristlõike pindala. Ristlõikeks on ringjoon raadiusega r , mis sõltub kõrgusest. Ringi raadiuse kõrgusel y saame sirge võrrandist, mis läbib punkte $(0, 0)$ ja $(5, 10)$. Saadud sirge võrrandist $y = 2x$ avaldame $x = \frac{1}{2}y$. Siis mahuti ristlõike pindala avaldub

$$S(y) = \pi r^2(y) = \pi \left(\frac{1}{4} y^2 \right)$$

ja tehtav töö on

$$A = 913g \int_0^8 \frac{1}{4} \pi y^2 (10 - y) dy = 4.8 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 12

Trigonomeetriliste ja irratsionaalfunktsioonide integreerimine. Päratud integraalid

12.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	210
12.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine	212
12.3 Päratud integraalid	216
12.4 Lõpmatute rajadega integraalid	216
12.5 Integraal tõkestamata funktsioonist	220
12.6 Integraalide rakendusi statistikas	222
12.7 Euleri integraalid	225

Kontrolltöö teemad

1. Lihtsamate trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine.
2. Lõpmatute rajadega integraalid.
3. Integraal tõkestamata funktsioonist.
4. Päratud integraalide koondumine ja hajumine.

Eksamiteemad

1. Irratsionaalfunktsioonide integreerimine.
2. Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine.
3. Lõpmatute rajadega integraalid.
4. Integraal tõkestamata funktsioonist.
5. Päratud integraalide koondumine ja hajumine.

12.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Trigonomeetriliste avaldiste integreerimisel saab kasutada erinevaid trigonomeetrilisi funktsioone siduvaid võrduseid, kuid teisenduste läbiviimine võib nõuda komplitseeritud ja ebastandardseid võtteid. Trigonomeetrilisi murde ja lihtavaldisi saab viia ratsionaalfunktsioonideks universaalse muutujavahetusega.

Teeme integraalis muutujavahetuse

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{kui } x \in (-\pi, \pi).$$

Sel juhul

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

ja

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Näide 12.1 Leiame integraali

$$I = \int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx.$$

Toodud muutujavahetuse abil saame, et

$$I = \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + t + 2\right) dt.$$

Vastuseks tuleb

$$I = \frac{1}{2} \left(\ln |t| + \frac{t^2}{2} + 2t \right) + C, \quad \text{kus } t = \tan \frac{x}{2}.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 12.1

Kuigi universaalne trigonomeetriline asendus viib alati sihile, võib lahenduskäik osutuda töömahukaks. Mõnel juhul võib proovida ka lihtsamaid asendusi $t = \cos x$, $t = \sin x$ ja $t = \tan x$.

Paarisarvulise astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel kasutame võrduseid

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (12.1)$$

Paaritu astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel teisendame

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx = \int \sin^{2k} x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx. \quad (12.2)$$

Näide 12.2 Leiame integraali

$$I = \int \sin^8 x \cos^5 x \, dx.$$

Teisendame integreeritavat funktsiooni järgmiselt

$$I = \int \sin^8 x \cos^4 x \cos x \, dx = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx.$$

Teostame muutujavahetuse

$$u = \sin x,$$

millest

$$du = \cos x \, dx.$$

Saame

$$\begin{aligned} I &= \int u^8 (1 - u^2)^2 \, du = \int (u^8 - 2u^{10} + u^{12}) \, du = \frac{1}{9}u^9 - \frac{2}{11}u^{11} + \frac{1}{13}u^{13} + C \\ &= \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{13} \sin^{13} x + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.3 Leiame integraali

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Kasutades võrduseid (12.1), saame

$$I = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 2x}{4} \, dx.$$

Kasutades uuesti teist võrdust (12.1), saame

$$I = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1 + \cos 4x}{8} \right) \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

◇ ◇ ◇

12.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine

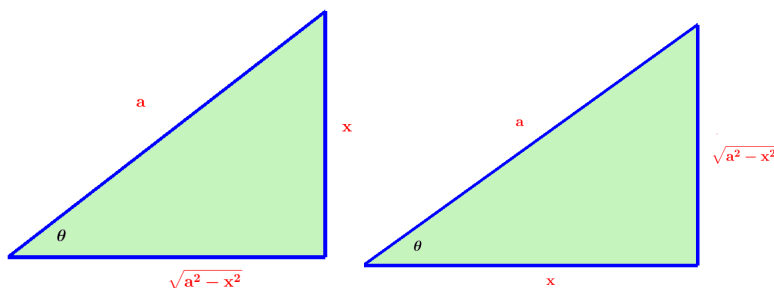
Vaatleme siinkohal funktsioone, mis sisaldavad ruutjuurt. Teatud tüüpi avaldiste korral võib abi olla muutujavahetusest trigonomeetriliste funktsioonide kaudu. Võib ette anda mitmeid muutujavahetusi, kuid lihtsamal juhul saab need asendused tuletada täisnurksest kolmnurgast siinuse, koosinuse ja tangensi seostest ning Pythagorase teoreemist.

Kui integraali märgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{kus vaadeldakse juhtu } |x| \leq a,$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = a \sin t \quad \text{või} \quad x = a \cos t.$$



Kui $0 < x < a$ ja avaldis on ruutude vahet $\sqrt{a^2 - x^2}$, siis võib arvu a vaadelda täisnurkse kolmnurga hüpoteenusina. Sõltuvalt sellest, millise kaatetiga siduda x ja a , tuleks teha muutujavahetus $x = a \sin t$ või $x = a \cos t$.

Kui me ei tea, kas $\sin t > 0$ või hoopis $\sin t < 0$, siis võib kasutada võrdust

$$A(t) = \text{sign}(\sin t),$$

kus signum näitab $\sin t$ märki. Sel juhul

$$|\sin t| = A(t) \sin t$$

ja

$$\int |\sin t| dt = A(t) \int \sin t dt.$$

Selle kordaja $A(t)$ võib integraali märgi alt välja tuua. Integraali vaatame eraldi kahes piirkonnas: positiivse $\sin t$ piirkonnas ja negatiivse $\sin t$ piirkonnas. Määratud integraali korral teaksime konkreetsemalt, milline on trigonomeetrilise funktsiooni väärtus vaadeldavas piirkonnas ja saaksime integraali jaotada liidetavateks vastavalt vajadusele.

Märkus 12.2

Ruutjuure alt saame ruudu välja tuua vaid absoluutväärtuse märgi abil,

$$\sqrt{t^2} = |t|, \quad \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t|, \quad \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|.$$

Trigonomeetrilised funktsioonid võivad olla negatiivsed ja absoluutväärtuse märgist vabanemine ei ole nii lihtne. Eeldame siin kõikides ülesannetes, et ruutjuure all olevad funktsioonid on positiivsed (näiteks $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ korral on siinus, koosinus ja tangens positiivsed). Kui argument t peaks kuuluma mõnda teise vahemikku, siis tuleks kaasata märgi analüüs.

Näide 12.4 Leiame integraali

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}.$$

Siin $a = 1$. Teeme muutujavahetuse

$$x = \sin t,$$

seejuures $dx = \cos t dt$.

Siis

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t |\cos t|}.$$

Kui $\cos t > 0$, siis

$$I = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot t + C.$$

Vastuse võiksime ka niimoodi jätta, aga viisakas oleks see siiski esitada esialgse argumendi x kaudu. Kuna $x = \sin t$, siis $\cot t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (vt paremal olevat selgitust) ja

$$I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

Näitame, et sama tulemuse saame muutujavahetusega

$$x = \cos t,$$

seejuures

$$dx = -\sin t dt.$$

Siis

$$I = \int \frac{-\sin t dt}{\cos^2 t \sqrt{1 - \cos^2 t}} = - \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t |\sin t|}.$$

Kui $\sin t > 0$, siis

$$I = - \int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\tan t + C.$$

Kuna $x = \cos t$, siis $t = \arccos x$ ja arkusfunktsioone kasutades saame samuti

$$I = -\frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} + C = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}}{x} + C = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C.$$

◇ ◇ ◇

Kui meil on asendus ($a > 0$)

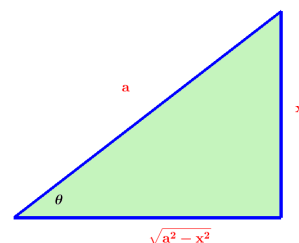
$$x = a \sin t,$$

siis allpool olevast kolmnurgast järeltub konstruktsiooni põhjal, et

$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

$$\tan t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Nii saab nii siinused, koosinused kui tangensid asendada ilma arkusfunktsioone kasutamata.

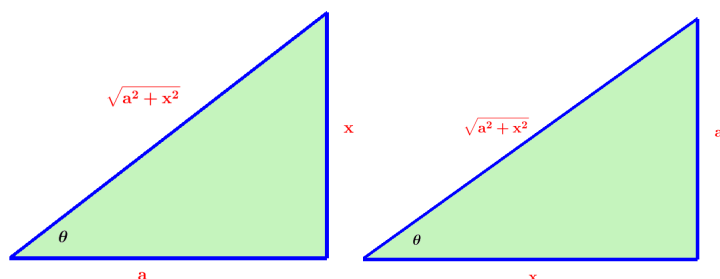


Kui integraali märgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = a \tan t \quad \text{või} \quad x = a \cot t.$$



Kui integraali märgi all on avaldis $\sqrt{a^2 + x^2}$, siis saab käsitleda seda kui kolmnurga hüpoteenuusi. Sõltuvalt sellest, millise kaatediga siduda x ja a , tuleks teha muutujavahetus $x = a \tan t$ või $x = a \cot t$.

Näide 12.5 Leiame integraali

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Siin $a = 2$. Teeme muutujavahetuse

$$x = 2 \tan t, \quad \text{siis } dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

Saame

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dt}{\cos^2 t \sqrt{4 \tan^2 t + 4}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1}} \\ &= \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} = \int \frac{|\cos t| dt}{\cos^2 t}. \end{aligned}$$

Kui $\cos t > 0$, siis

$$I = \int \frac{dt}{\cos t}.$$

Kasutame siin diferentsiaali märgi alla viimise võtet:

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin^2 t} \stackrel{u=\sin t}{=} \int \frac{du}{1 - u^2} = \int \frac{du}{(1 - u)(1 + u)}.$$

Ratsionaalfunktsioonide integreerimine annab

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du = \frac{1}{2} (\ln |1 + u| - \ln |1 - u|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C. \end{aligned}$$

Tagasi asendades saame

$$\frac{1 + u}{1 - u} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} = \left(\frac{1 + \sin t}{\cos t} \right)^2.$$

Seega

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right|^2 + C = \ln \left| \frac{1}{\cos t} + \tan t \right| + C.$$

Et minna tagasi muutujale x , peame asendama liikmed $\cos t$ ja $\tan t$.

Algsest muutujavahetusest tuleb

$$\tan t = \frac{x}{2},$$

täisnurksest kolmnurgast aga

$$\cos t = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Lõppvastuseks saame

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \sqrt{x^2 + 4} + x \right| - \ln 2 + C \\ &= \ln \left| \sqrt{x^2 + 4} + x \right| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Asendust

$$x = 2 \tan t$$

silmas pidades järeldub täisnurksest kolmnurgast, et

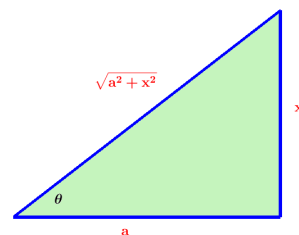
$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

$$\cos t = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

asendus ise aga annab

$$\tan t = \frac{x}{2}.$$

Nii saab siinused, koosinused ja tangensid asendada ilma arkusfunktsioone kasutamata.



Kui integraali märgi all on avaldis

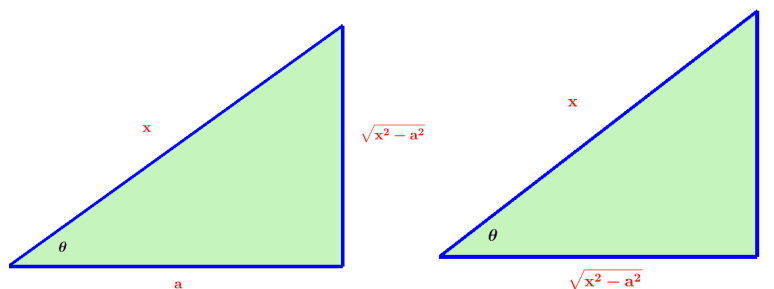
$$\sqrt{x^2 - a^2},$$

kusjuures

$$x > a \text{ või } x < -a,$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{või} \quad x = \frac{a}{\sin t}.$$



Näide 12.6 Leiame integraali

$$I = \int \frac{2dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}.$$

Siin $a = 3$. Teeme muutujavahetuse

$$x = \frac{3}{\cos t},$$

millest

$$dx = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Siis

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{\sin t \cos t dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} = \frac{2}{3} \int \frac{\sin t dt}{\cos t \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{\sin t |\cos t| dt}{\cos t |\sin t|}. \end{aligned}$$

Kui $\cos t > 0$ ja $\sin t > 0$, siis

$$I = \frac{2}{3} \int dt = \frac{2}{3} t + C = \frac{2}{3} \arccos \frac{3}{x} + C.$$

◇ ◇ ◇

12.3 Päratud integraalid

Riemanni integraali $\int_a^b f(x) dx$ defineerimisel eeldasime, et integreerimis-
lõik $[a, b]$ on lõplik. Lisaks on Riemanni integraali olemasoluks tarvilik
tingimus funktsiooni f tõkestatus lõigus $[a, b]$.

Osutub, et toodud eeldustest saab loobuda, kui sobivalt üldistada määra-
tud integraali mõistet. Vaatleme kahte erinevat liiki päratud integraale:
lõpmatute rajadega integraalid ja integraalid tõkestamata funktsioonidest.

12.4 Lõpmatute rajadega integraalid

Definitsioon 12.1

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$ iga $b \in (a, \infty)$ korral, siis päratu integraal piir-
konnas $[a, \infty)$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (12.3)$$

Analoogiliselt, eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$ iga $a \in (-\infty, b)$ korral, siis pä-
ratu integraal piirkonnas $(-\infty, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (12.4)$$

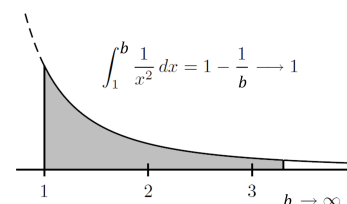
Definitsioon 12.2

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus (12.3) (või (12.4)), siis nimetame vas-
tavat päratud integraali **koonduvaks**, vastasel korral **hajuvas**.

Näide 12.7 Leiame päratu integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Märgime, et funktsioon $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on pidev igas piirkonnas $[1, b]$, kus
 $b \in (1, \infty)$, seepärast saab siis kasutada Newton-Leibnizi valemit.



Allikas: [3]

Kirjutame

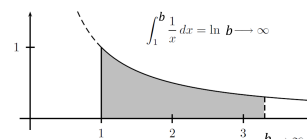
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Joone $y = \frac{1}{x^2}$ ja x -telje vaheline pindala S piirkonnas $[1, \infty)$ on lõplik: $S = 1$.

◇ ◇ ◇

Näide 12.8 Leiame päratu integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx.$$



Allikas: [3]

Funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on pidev igas piirkonnas $[1, b]$, kus $b \in (1, \infty)$, sel juhul saab kasutada Newton-Leibnizi valemit. Kirjutame

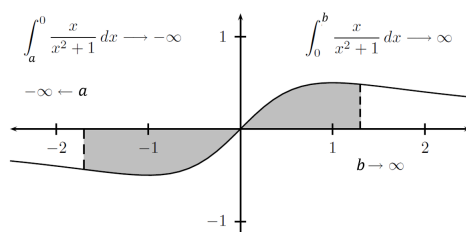
$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln |x| \Big|_{x=1}^{x=b} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty. \end{aligned}$$

Joone $y = \frac{1}{x}$ ja x -telje vaheline pindala S on piirkonnas $[1, \infty)$ lõpmatu: $S = \infty$.

◇ ◇ ◇

Näide 12.9 Kui integraalis mõlemad rajad on tõkestamata, siis tuleb piirväärtuse leidmisel olla ettevaatlik. Vaatleme integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$



Allikas: [3]

Märgime, et funktsioon $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ on pidev igas piirkonnas $[-a, a]$, kus $a > 0$, ja sel juhul saab kasutada Newton-Leibnizi valemit. Kirjutame

$$\int_{-a}^a \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_{x=-a}^{x=a} = 0.$$

Ometigi ei järeldu sellest, et esialgne integraal ise on võrdne nulliga. Osutub, et selline integraal on hajuv.

Kui vaadata eraldi integraale piirkondades $(-\infty, 0]$ ja $[0, \infty)$, siis

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_{x=0}^{x=b} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln |b^2 + 1| \right) = \infty$$

ja

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_{x=a}^{x=0} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln |a^2 + 1| \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Kui proovida defineerida

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx,$$

siis jõuaksime avaldiseni $\infty - \infty$, mida ei saa üheselt määrata ja seepärast ütleme, et antud integraal hajub. Tegelikult piisas leida ainult üks integraal piirkonnas $[0, \infty)$, et järeldada kogu esialgse integraali hajumist.

Siin võiks ju väita, et saaksime integraali piirkonnas $(-\infty, \infty)$ leida kui

piirväärtuse $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{x}{x^2 + 1} dx$. Vaatleme kahte piirväärtust

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_{x=-a}^{x=a} \right) = 0,$$

samas

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{2a} \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_{x=-a}^{x=2a} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2a)^2 + 1}{a^2 + 1} \right| \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\ln \sqrt{\frac{4 + \frac{1}{a^2}}{1 + \frac{1}{a^2}}} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et protsessis $a \rightarrow \infty$ hõlmatakse piiril mõlemal juhul kogu reaaltelg, kuid piirväärtused integraalidest annavad erinevad tulemused. Seepärast kasutatakse järgmist definitsiooni.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 12.3

Defineeritakse

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad \text{kus } c \in \mathbb{R} \text{ on suvaline.}$$

,

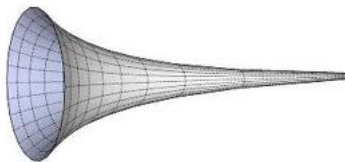
Kui vähemalt üks integraalidest piirkondades $(-\infty, c]$ ja $[c, \infty)$ hajub, siis integraal piirkonnas $(-\infty, \infty)$ hajub.

Näide 12.10

Gabrieli sarv (Torricelli trompet). Vaatleme joont

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \infty).$$

Kui paneme selle joone ümber x -telje pöörlema, siis tekib ruumiline kujund, mida nimetatakse Gabrieli sarveks või siis ka Torricelli trompetiks.



Selle trompetiga on seotud huvitav paradoks. Nimelt, trompetil on lõplik ruumala, kuid pinna pindala ei ole lõplik. Trompetit saaks teoreetiliselt seestpoolt värvida, kallates sinna sisse lõpliku koguse värvi, aga välispinda ei ole võimalik lõpliku koguse värviga katta, kui soovida välispinda katta konstantse paksusega värvikihi.

Leiame pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_1^{\infty} y^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} \right) = \pi.$$

Pinna pindala tuleb aga

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} y \sqrt{1 + [y']^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Viimast integraali on täpselt üsna raske leida, aga meile piisab hinnangust. Kuna

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq 1,$$

siis

$$S \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Seega pinnal ei ole lõplikku pindala.

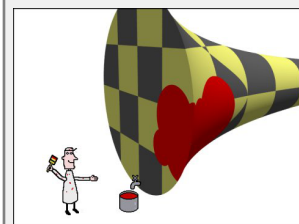
◇ ◇ ◇

Sarve nimi tuleb peaingel Gabrieli nimest, kes peaks siis Viimse Kohtupäeva kuulutamisel puhuma sarve sümboliseerimaks lõpmatut ja lõplikku üheskoos.



Allikas: internet

Gabrieli sarve esmauurimise au kuulub itaalia füüsikule ja matemaatikule - baromeetri leiutajale - Evangelista Torricellile.



Allikas:

<http://www.h33.dk/>

12.5 Integraal tõkestamata funktsioonist

Definitsioon 12.4

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti b ümbruses (iga $\delta > 0$ korral on f tõkestamata vahemikus $(b - \delta, b)$) ja eksisteerigu

$$\int_a^c f(x) dx$$

iga $c \in (a, b)$ korral. Siis päratu integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx. \quad (12.5)$$

Analoogiliselt, olgu funktsioon f tõkestamata punkti a ümbruses (iga $\delta > 0$ korral on f tõkestamata vahemikus $(a, a + \delta)$) ja eksisteerigu

$$\int_c^b f(x) dx$$

iga $c \in (a, b)$ korral. Siis päratu integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx. \quad (12.6)$$

Definitsioon 12.5

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus (12.5) (või (12.6)), siis nimetame vastavat päratut integraali **koonduvaks**, vastasel korral **hajuvaks**.

Näide 12.11 Leiame päratu integraali

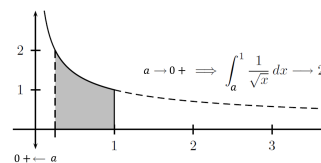
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Märgime, et funktsioon $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on pidev igas piirkonnas $[a, 1]$, kus $a \in (0, 1)$, ja sel juhul saab kasutada Newton-Leibnizi valemit. Leiame

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+} \left(2\sqrt{x} \Big|_{x=a}^{x=1} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2. \end{aligned}$$

Joone $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ja x -telje vaheline pindala S on piirkonnas $[0, 1]$ lõplik ning $S = 2$.

◇ ◇ ◇



Allikas: [3]

Näide 12.12 Integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ei eksisteeri Riemanni mõttes, sest integreeritav funktsioon pole tõkestatud punkti $x = 1$ ümbruses. Selle funktsiooni päratu integraal on

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{b \rightarrow 1-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1-} \left(\arcsin x \Big|_{x=0}^{x=b} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-} \arcsin b = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

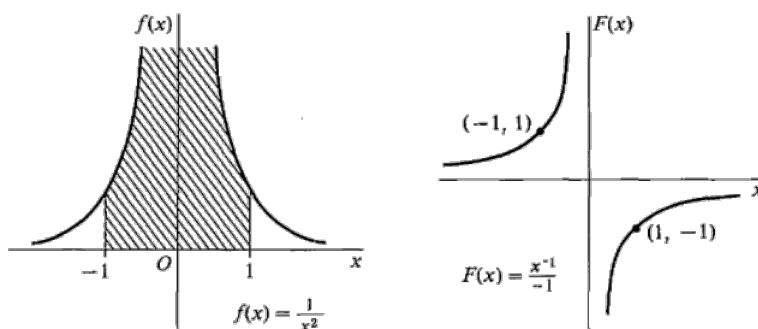
◇ ◇ ◇

Näide 12.13 Integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

ei eksisteeri Riemanni mõttes, kuna funktsioon $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on katkev punktis 0, olles samal ajal tõkestamata punkti 0 ümbruses.

Ilma graafiku abita võib olla seda, kus funktsioon katkeb integreerimislõigu sees, raskem avastada.



Allikas: http://www.vias.org/calculus/04_integration_03_ex09.html

Pool pindalast on

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{x=a}^{x=1} \right) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \infty.$$

Kuna pool pindalast ei ole lõplik, siis ka terve pindala ei ole lõplik.

Märgime, et vale oleks kohe Newton-Leibnizi valemit kasutada:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{x=-1}^{x=1} = -1 - 1 = -2.$$

Viimane on ilmselgelt vale, sest juba jooniselt näeme, et pindala peab tulema positiivne. Vale tulemuse saame, sest funktsioon $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ei ole pidev lõigus $[-1, 1]$, kuid Newton-Leibnizi valemit võib kasutada ainult pideva funktsiooni korral.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 12.6

Kui funktsioon f on tõkestamata punkti $c \in (a, b)$ ümbruses, kuid pidev piirkonnas $[a, c) \cup (c, b]$, siis defineerime päratu integraali

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

12.6 Integraalide rakendusi statistikas

Tõenäosusteooria baseerub juhusliku suuruse mõistel, mida me siin rangelt defineerima ei hakka, aga mida peame siiski selgitama.

Lähtekohaks võtame ette mõisted sündmus ja sündmuste ruum, mida võib mõista kui mingit hulka.

Definitsioon 12.7

Juhuslikuks suuruseks nimetatakse funktsiooni, mis seab igale sündmusele vastavusse ühe reaalarvu.

Märkus 12.3

Täpsemalt, juhuslikuks suuruseks nimetatakse funktsiooni $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral hulk $\{y : X(y) \leq x\}$ on sündmus iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks. Siinjuures hulk Ω tähistab sündmuste ruumi.

Näiteks mündi viskamisel on sündmuste hulgaks

$$\Omega = \{\text{kull, kiri, serv}\}.$$

Siinjuures juhuslik suurus X peaks omandama mingi arvulise väärtuse, mille tähenduseks on näidata, kas tuli kull, kiri või maandus münt serva peale. Näiteks võiksime võtta, et $-1,0,1$ tähistaksid vastavalt kulli, kirja ja serva. Siis väärtus $X = 1$ tähistaks mündi serva peale kukkumist.

Näide 12.14 Olgu antud lame laud ja selle peal sirgjoon. Viskame nõela juhuslikult lauale ja vaatame, millise nurga all nõel lauale asetub. Tähistame iga viske korral nõela ja sirge vahelise nurga juhusliku suurusega $X \in [0, 90]$ kraadi. Proovime arvutada tõenäosust, et nõel satub näiteks 45-kraadise nurga alla. Tõenäosus, et $X = 45$ kraadi, on tegelikult null eeldusel, et ühegi nurga esinemine ei ole tõenäolisem ühegi teise nurga esinemisest. Tehtud eeldusel võib aga arvutada näiteks tõenäosust, et $X \in [40, 50]$. Selleks on lõigu pikkuse 10 ja terve lõigu $[0, 90]$ pikkuse 90 jagatis ehk

$$P(40 \leq X \leq 50) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

◇ ◇ ◇

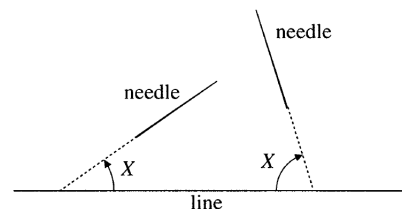
Definitsioon 12.8

Kui X on pidev juhuslik suurus, siis **tõenäosus**, et X satub lõiku $[a, b]$, defineeritakse integraaliga

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx,$$

kus funktsioon f on pideva juhusliku suuruse X **tihedusfunktsioon** või lihtsalt tihedus.

Juhuslikku suurust X nimetatakse pidevaks, kui X võib omandada mistahes reaalarvulisi väärtusi mingis piirkonnas. Näiteks mündi viskamisel X on diskreetne juhuslik suurus, aga nõela viskamine lauale ja selle asendi fikseerimine on pidev sündmus, kuna nõel võib lauale kukkuda mistahes nurga all võrrelduna laua servaga.



Näide 12.15 Jätkame nõela näitega. Tõenäosus, et X kraadi kuulub lõiku $[a, b] \subset [0, 90]$, on alati

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{90} = \frac{1}{90}(b-a).$$

Viimase saab kirjutada kujul

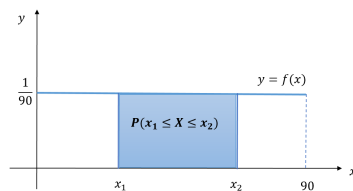
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{90} dx.$$

Seega nõela viskamisel pideva juhusliku suuruse X tihedusfunktsiooniks on konstantne funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{90}, & x \in [0, 90], \\ 0, & x \notin [0, 90]. \end{cases}$$

Sellise konstantse funktsiooni korral öeldakse, et juhuslik suurus on ühtlase jaotusega.

◇ ◇ ◇



Kuna kogu teooria peab sobima tõenäosuste arvutamisega, siis peab tihedusfunktsioon $y = f(x)$ rahuldama tingimusi

1. $f(x) \geq 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral,
2. $P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

Definitsioon 12.9

Tiheduse algfunktsiooni F , kus $F'(x) = f(x)$ (punktides, kus F on diferentseeruv), nimetatakse pideva juhusliku suuruse X **jaotusfunktsiooniks**.

Statistikas uuritakse teatud jaotusfunktsioonide (ja tihedusfunktsioonide) klasse. Enim tuntud jaotused on ühtlane jaotus, normaaljaotus, eksponentjaotus. Nende jaotuste tihedusfunktsioonid on tuntud ja selle järgi saab arvutada tõenäosusi.

Definitsioon 12.10

Pideva juhusliku suuruse X **keskväärtuseks** nimetatakse arvu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Märkus 12.4

Kui vaadelda tihedusfunktsiooni graafiku ja x -telje vahele jäävat kujundit pindalaga 1 näiteks homogeense plaadina, siis plaadi massikeskme x -koordinaat on selle jaotuse keskväärus.

Definitsioon 12.11

Pideva juhusliku suuruse X **dispersiooniks** nimetatakse arvu

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx.$$

Märkus 12.5

Dispersioon DX iseloomustab juhusliku suuruse X jaotuse hajumist keskvääruse EX suhtes.

Definitsioon 12.12

Standardhälbeks nimetatakse arvu

$$\sigma = \sqrt{DX}.$$

Näide 12.16 Olgu juhuslikuks suuruseks ajaintervall T , mis jääb kahe erineva kliendi teenindamise vahele. Kui μ on nende ajaintervallide keskmine, siis T jaotub eksponentsiaalselt tihedusega

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Olgu konkreetselt vaatluse all restoran, kus laud vabaneb keskmiselt iga 5 minuti järel. Kui laud vabaneb näiteks kell 6.00, siis milline on tõenäosus, et järgmine laud vabaneb kella 6.05 ja 6.10 vahel?

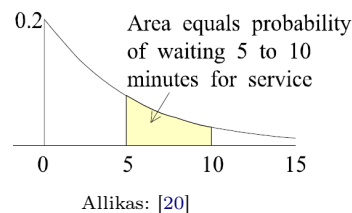
Siin $\mu = 5$ minutit. Sellisel juhul tihedusfunktsiooniks on

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Me otsime tõenäosust $P(5 \leq T \leq 10)$, mille leiame

$$P(5 \leq T \leq 10) = \int_5^{10} f(t) dt = \frac{1}{5} \int_5^{10} e^{-\frac{t}{5}} dt = -e^{-\frac{t}{5}} \Big|_{t=5}^{t=10} \approx 0.233.$$

◇ ◇ ◇



Päratu integraal tekib, kui küsitakse näiteks, milline on tõenäosus, et ooteaeg on suurem kui 20 minutit. Sellisel juhul otsime tõenäosust $P(20 \leq T < \infty)$, see on

$$\begin{aligned} P(20 \leq T < \infty) &= \int_{20}^{\infty} f(t) dt = - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{5}} \Big|_{t=20}^{t=b} \\ &= - \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-\frac{b}{5}} - e^{-4}) = e^{-4} \approx 0.018. \end{aligned}$$

Võib leida, et dispersioon on

$$DT = \int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \int_0^{\infty} (t-5)^2 e^{-\frac{t}{5}} dt = 25$$

ja standardhälve $\sigma = \sqrt{DT} = \sqrt{25} = 5$.

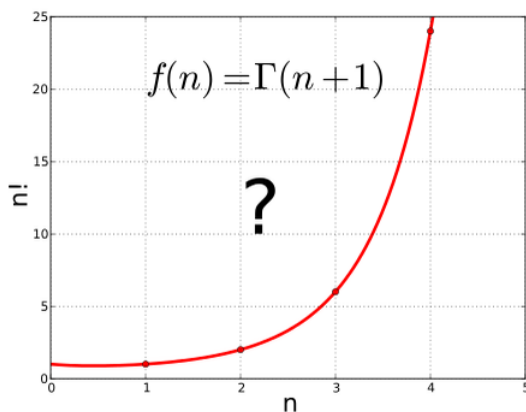
◇ ◇ ◇

12.7 Euleri integraalid

Olgu antud naturaalarv $n \in \mathbb{N}$. Siis saame arvutada faktoriaali

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Kui koostada graafik punktidest $1, 2, \dots, n$ (x -teljel) ja vastavatest faktoriaali väärtustest $1!, 2!, \dots, n!$ (y -teljel), siis tekib küsimus, kas on võimalik leida selline heade omadustega funktsioon, mis läbib kõiki punkte $(1, 0!), (2, 1!), \dots, (n, (n-1)!)$? See on nn. interpoleerimisülesanne.



Joonis: Wikipedia.

Joonisele peale vaadates on selge, et selline funktsioon leidub, aga nüüd tekib küsimus, et millised on selle funktsiooni vahepealsed väärtused ja kas annaks korrektselt defineerida faktoriaali murdarvust, näiteks $2.5!$. Osutub, et sellele küsimusele on vastus jaatav ning defineeritava funktsiooni väärtusi tuleb arvutada sageli.

Definitsioon 12.13

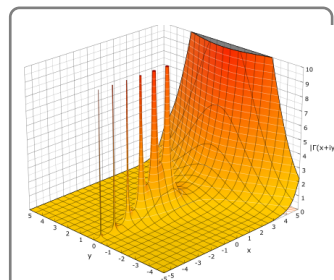
Euleri teist liiki integraali

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{kus } x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

nimetatakse **gammafunktsiooniks**.

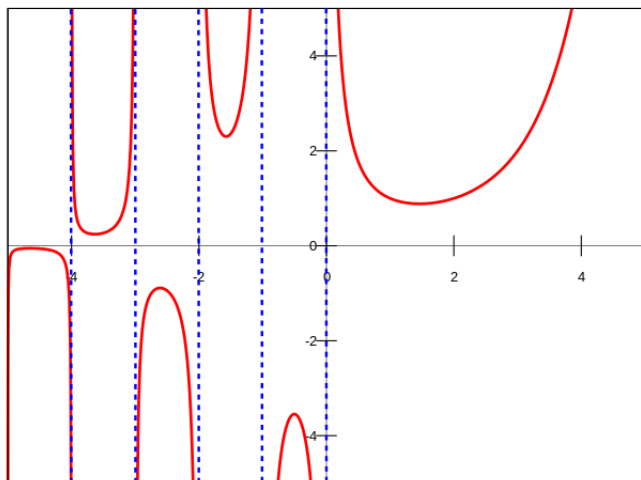
Märkus 12.6

Toodud definitsioonis esinevad integreeritavas funktsioonis kompleksarvud. Integraali tuleb siin mõista kui reaali- ja imaginaarosadest leitud integraale, mis moodustavad tulemuse reaali- ja imaginaarosa. Kui kompleksarvudega ei olda veel tutvunud, võib definitsioonis piirduda ka kompleksarvude hulga $\mathbb{C}$ asemel reaalarvude hulgaga $\mathbb{R}$.



Joonis: Wikipedia.

Gammafunktsiooni mooduli graafik kompleksitasandil.



Gammafunktsiooni graafik reaalse argumenti korral (Wikipedia).

Gammafunktsioon on matemaatikas ja tema rakendustes (kvantfüüsikas, astrofüüsikas, vedelike dünaamikas, statistikas nt. gammajaotus) üsna laialt levinud. Viimastel aastakümnetel on suure populaarsuse saavutanud murruliste tuletiste teooria ja rakendamine füüsikaliste nähtuste modelleerimises. Murrulise tuletise korral võib järk olla murdarv (näiteks tuletis järku 1.5). Murrulised tuletised on tihedalt seotud Euleri integraalidega.

Gammafunktsioonil on järgmised omadused:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0,$$

$$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}.$$

Näide 12.17 On palju integraale, millel ei leidu algfunktsiooni kui elementaarfunktsiooni, kuid mis avalduvad Euleri integraalide kaudu.

Arvutame

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx.$$

Euleri integraalide ligikaudseks arvutamiseks on olemas üsna kiired ja täpsed arvutialgoritmid. Kui integraali õnnestub esitada Euleri esimest või teist liiki integraalide kaudu, siis üldjuhul on see integraali hea omadus.

Teeme muutujavahetuse $t = x^3$. Siis

$$x = t^{\frac{1}{3}}, \quad dt = 3x^2 dx, \quad x^{-2} = t^{-\frac{2}{3}} = t^{\frac{1}{3}-1}.$$

Siis

$$I = \frac{1}{3} \int_0^\infty x^{-2} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{\frac{1}{3}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

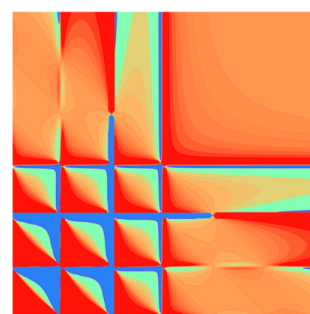
◇ ◇ ◇

Definitsioon 12.14

Euleri esimest liiki integraali

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{kus } x, y \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0,$$

nimetatakse **beetafunktsiooniks**.



Joonis: Wikipedia.

Beetafunktsiooni kontuurgraafik kompleksitasandil.

Beeta- ja gammafunktsioon on seotud võrdusega

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Siit järeldub, et

$$B(0.5, 0.5) = \frac{\Gamma(0.5)\Gamma(0.5)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{0!} = \pi.$$

Näide 12.18 Arvutame

$$I = \int_0^1 x^3 (1 - \sqrt{x})^5 dx.$$

Teeme muutujavahetuse $t = \sqrt{x}$. Siis

$$x = t^2 \quad \text{ja} \quad 2t dt = dx.$$

Antud muutujavahetuse korral rajad ei muutu. Seega

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 t^7 (1-t)^5 dt = 2 \int_0^1 t^{8-1} (1-t)^{6-1} dt \\ &= 2B(8, 6) = 2 \frac{\Gamma(8)\Gamma(6)}{\Gamma(14)} = 2 \frac{7! 5!}{13!} = \frac{2 \cdot 5!}{8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 13} = \frac{1}{5148}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 13

Vektorid ruumis

13.1 Suunatud lõikude hulk	230
13.2 Vabavektorid	232
13.3 Punkti ja vektori projektsioon	234
13.4 Kohavektorid	236
13.5 Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$	237
13.6 Skalaarkorrutis	239
13.7 Vektorkorrutis	243
13.8 Segakorrutis	246

Kontrolltöö teemad

1. Vektorite skalaarkorrutis ja selle omadused, nurk kahe vektori vahel. Skalaarkorrutise arvutamine.
2. Vektorkorrutis, segakorrutis. Nende omadused. Rööpküliku ja kolmnurga pindala arvutamine. Rööptahuka ja tetraeedri ruumala arvutamine.

Eksamiteemad

1. Seotud vektorid, vabavektorid. Vektori projektsioon vektori sihile. Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$, tema loomulik baas, vektori pikkus ruumis $\mathbb{R}^n$.
2. Skalaarkorrutise mõiste. Skalaarkorrutise omadused. Skalaarkorrutise arvutamine. Vektorite ristseisu tingimus. Kahe vektori vahelise nurga leidmine.
3. Vektorkorrutise mõiste. Vektorkorrutise omadused. Vektorkorrutise arvutamine. Rööpküliku ja kolmnurga pindala arvutamine. Vektorite kollineaarsuse tingimus.
4. Segakorrutise mõiste. Segakorrutise omadused. Segakorrutise arvutamine. Kolme vektori kollineaarsus. Rööptahuka ja tetraeedri ruumala arvutamine.

Antud loengu materjal pärineb põhiliselt **Aivo Parringu** loengu-konspektist <http://math.ut.ee/pmi/kursused/ag/parring/> peatükist "IV. Vektoralgebra". Viidatud materjalis on kogu teoreetiline ülesehitus algusest lõpuni läbi tehtud koos vajalike tõestustega. Siin peame paratamatult tegema käsitluses teatud kärpeid, sest muidu me asja tuumani ei jõuakski.

13.1 Suunatud lõikude hulk

Märkus 13.1

Punkt on algmõiste, mida me ei defineeri ja mida on aastatuhandeid näitlikult ette kujutatud kui pikkuseta ja laiuseta objekti. Punkte tähistame suurte trükitähtedega. Fikseeritud punkti korral kasutame reeglina suuri trükitähti tähestiku algusest, näiteks A, B, C . Kui on tegemist suvalise punktiga, siis kasutame tähti tähestiku lõpuosast, näiteks X, Y, Z .

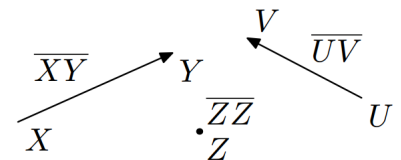
Märkus 13.2

Sirge, tasand ja ruum on samuti siin kursuses algmõisted. Osutub, et sirge, tasandi kui ka ruumi punktide abil saab üsna loomulikult teel anda igäühe korral eraldi teatava vektorruumi.

Sirget, tasandit ja ruumi tähistatakse järgnevas vastavalt E_1, E_2 ja E_3 abil. Üldiselt kasutame nende jaoks ühtset tähist E .

Märkus 13.3

Mistahes kahe punkti $X, Y \in E$ poolt määratud lõiku saab tähistada kahel erineval moel: XY või YX . Esimesel kohal olevat tähte loeme lõigu alguspunktiks ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktiks. Seega XY ei tähista ainult lõiku otspunktidega X ja Y , vaid tähistab lõiku alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y .



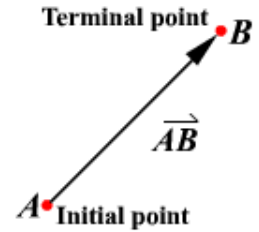
Definitsioon 13.1

Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, s.t suund, nimetatakse **suunatud lõiguks** ehk **seotud vektoriks**. Seotud vektorit alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistatakse edaspidi $\overrightarrow{XY}$.

Seotud vektorit $\overline{XX}$, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse **seotud nullvektoriks**.

Märkus 13.4

Seotud vektori joonisele kandmisel joonistame teda määrava lõigu, tähistame ära tema otspunktid. Et eristada lõigul algus- ja lõpp-punkti, kujutame seda lõiku noole abil, mis määrab suuna. Noole kõrvale kirjutame seotud vektori tähise.



Kõikide seotud vektorite hulka tähistatakse vastavalt $\overline{\mathbb{E}}_1$, $\overline{\mathbb{E}}_2$ ja $\overline{\mathbb{E}}_3$, ühtse tähisena $\overline{\mathbb{E}}$.

Definitsioon 13.2

Seotud vektori $\overline{XY}$ pikkuseks $|\overline{XY}|$ nimetatakse teda määrava lõigu XY pikkust.

Definitsioon 13.3

Seotud vektorit $\overline{YX}$ nimetatakse seotud vektori $\overline{XY}$ **vastandvektoriks**, mida tähistame $-\overline{XY}$, s.o $-\overline{XY} = \overline{YX}$.

Definitsioon 13.4

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetatakse **kollineaarseks** seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui lõik AB on paralleelne lõiguga CD (või lõigud AB ja CD asuvad ühel ja samal sirgel, sealhulgas ühtivad). Öeldut tähistatakse $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ning kui vektorid ei ole kollineaarsed, siis $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$.

Märkus 13.5

Seotud nullvektor on kollineaarne iga seotud vektoriga.

Definitsioon 13.5

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetatakse **samasuunaliseks** (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ja suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Samasuunalisust tähistatakse $\overline{AB} \uparrow \overline{CD}$ ja vastassuunalisust $\overline{AB} \updownarrow \overline{CD}$.

Märkus 13.6

Seotud nullvektor on nii samasuunaline kui vastassuunaline iga teise seotud vektoriga.

Definitsioon 13.6

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetatakse **ekvivalentseks** seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ja $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$. Seda tähistatakse $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

13.2 Vabavektorid

Definitsioon 13.7

Seotud vektoriga $\overline{AB}$ ekvivalentsete seotud vektorite hulka $\{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}$ nimetatakse **ekvivalentsiklassiks moodustajaga** $\overline{AB}$. Viimast tähistatakse $\mathbf{AB}$. Seega

$$\mathbf{AB} = \{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}.$$

Märkus 13.7

Seotud nullvektorid moodustavad omaette ekvivalentsiklassi

$$\mathbf{0} = \{\overline{XX} \mid X \in E\}.$$

Definitsioon 13.8

Tähistame

$$\mathbb{E}_1 = \{\mathbf{XY} \mid \overline{XY} \in \overline{\mathbb{E}_1}\},$$

$$\mathbb{E}_2 = \{\mathbf{XY} \mid \overline{XY} \in \overline{\mathbb{E}_2}\}$$

ja

$$\mathbb{E}_3 = \{\mathbf{XY} \mid \overline{XY} \in \overline{\mathbb{E}_3}\}$$

vastavalt kõiki sirge E_1 , tasandi E_2 ja ruumi E_3 poolt moodustatud ekvivalentsiklasse ja nimetatame nende elemente **vabavektoriteks**. Ühine tähis vabavektorite vektorruumi jaoks olgu $\mathbb{E}$.

Siin mõtleme, et näiteks ruumi E_3 (punktide) poolt moodustatud seotud vektorite ruumi $\overline{\mathbb{E}_3}$ elementide poolt on moodustatud ruum $\mathbb{E}_3$.

Definitsioon 13.9

Vabavektori $\mathbf{x} = \mathbf{AB} \in \mathbb{E}$ **vastandvektoriks** nimetatakse vabavektorit $-\mathbf{x} = \mathbf{BA} \in \mathbb{E}$.

Definitsioon 13.10

Vabavektori $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ **pikkuseks** nimetatakse seotud vektori $\overline{AB} \in \mathbf{x}$ pikkust $|\overline{AB}|$ ning seda tähistatakse $|\mathbf{x}|$.

Definitsioon 13.11

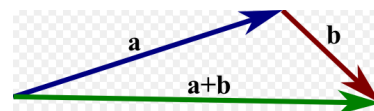
Vabavektoreid $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ nimetatakse **kollineaarseteks**, kui nende vektorite moodustajad on kollineaarsed ehk $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, kui $\overline{AB} \in \mathbf{x}$ ja $\overline{A'B'} \in \mathbf{y}$, ning seda tähistatakse $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$.

Definitsioon 13.12

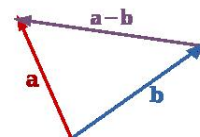
Vabavektoreid $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ nimetatakse **samasuunalisteks** (**vastassuunalisteks**), kui nende vektorite moodustajad on samasuunalised (vastassuunalised) ehk $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}$ ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$). Seda tähistatakse $\mathbf{x} \uparrow\uparrow \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \uparrow\downarrow \mathbf{y}$).

Definitsioon 13.13

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ **summa** $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ defineeritakse järgmiselt. Võetakse vektori $\mathbf{a}$ moodustaja $\overline{XY}$ ja vektori $\mathbf{b}$ moodustaja $\overline{YZ}$ ning vektori $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ moodustajaks on $\overline{XZ}$.

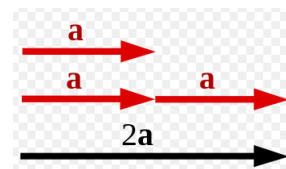
**Märkus 13.8**

Igal vektoril $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ on olemas iga punkti $X \in E$ korral moodustaja $\overline{XY}$.

**Definitsioon 13.14**

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ **vaheks** nimetatakse vektorit $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbb{E}$, mis määratakse võrdusega

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

**Definitsioon 13.15**

Vektori $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ **korrutiseks reaalarvuga** $\lambda \in \mathbb{R}$ nimetatakse vektorit $\lambda \mathbf{a} \in \mathbb{E}$, mis määratakse tingimustega

1. $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$, (seega $|\lambda \mathbf{a}| = 0$, kui $\lambda = 0$),
2. $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \lambda \mathbf{a}$, kui $\lambda > 0$, $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \lambda \mathbf{a}$, kui $\lambda < 0$.

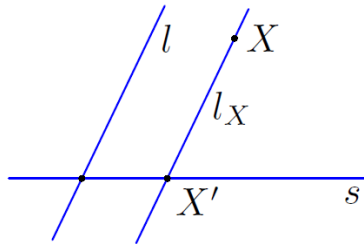
Omadus 13.1

Kehtivad järgmised tehetega seotud omadused:

1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ iga $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}$ korral,
2. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ iga $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ korral,
3. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ iga $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ korral,
4. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ iga $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ korral,
5. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ iga $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ korral,
6. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ korral,
7. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ iga $\alpha \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ korral,
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ korral.

13.3 Punkti ja vektori projektsioon

Olgu tasandil E_2 fikseeritud mingi sirge s . Fikseerime veel sirge l , mis lõikab sirget s ainult ühes punktis (seega l ei ole sirgega s paralleelne ega ühti sirgega s). Iga punkti $X \in E_2$ korral

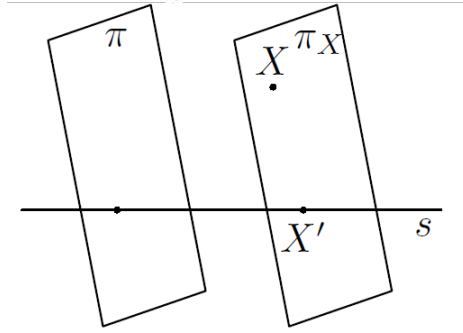


saab läbi punkti X panna parajasti ühe sirge l_X , mis on paralleelne sirgega l (kui X asub sirgel l , siis $l_X = l$). Sirge l_X lõikepunkt sirgega s olgu X' .

Definitsioon 13.16

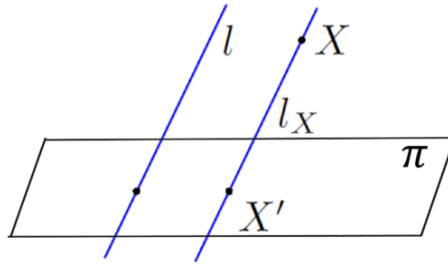
Punkti X' nimetatakse punkti X **projektsiooniks sirgele s paralleelselt sirgega l** .

Olgu ruumis E_3 fikseeritud sirge s . Valime veel tasandi π , mis lõikab sirget s ainult ühes punktis (seega s ei ole paralleelne tasandiga π ega s ei asu tasandil π). Iga punkti $X \in E_3$ korral saab läbi punkti X panna parajasti ühe tasandi π_X , mis on paralleelne tasandiga π (kui X asub tasandil π , siis $\pi_X = \pi$). Tasandi π_X lõikepunkt sirgega s olgu X' .

**Definitsioon 13.17**

Punkti X' nimetatakse punkti X **projektsiooniks sirgele s paralleelselt tasandiga π** .

Vaatleme veel juhtu, kus ruumis E_3 on fikseeritud tasand π . Valime nüüd sirge l , millel on tasandiga π ainult üks ühine punkt (l ei ole paralleelne tasandiga π ega asu tasandil π). Iga punkti $X \in E_3$ korral



saab läbi punkti X panna parajasti ühe sirge l_X , mis on paralleelne sirgega l (kui X asub sirgel l , siis $l_X = l$). Sirge l_X lõikepunkt tasandiga π olgu X' .

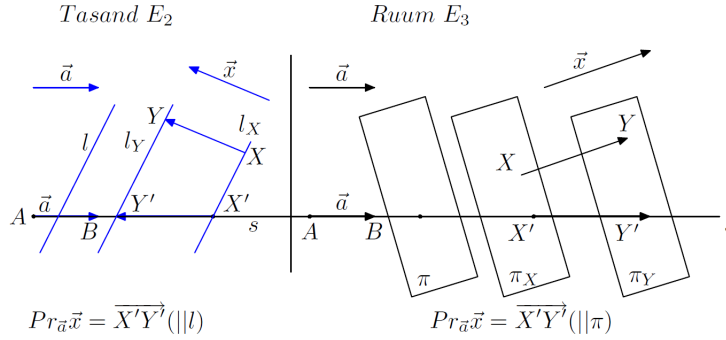
Definitsioon 13.18

Punkti X' nimetatakse punkti X **projektsiooniks tasandile π paralleelselt sirgega l** .

Järgnevalt vaatleme suvalise vabavektori projektsiooni mingi fikseeritud nullist erineva vabavektori sihile, seda nii tasandil kui ka ruumis. Esitame vastava arutelu mõlema juhu jaoks ühises tekstis.

Võtame nullvektorist erineva vektori $\mathbf{a} \in E_2$ ($\mathbf{a} \in E_3$). Fikseerime vabalt mingi punkti $A \in E_2$ ($A \in E_3$) (vt. joonist). Leiame sellise punkti $B \in E_2$ ($B \in E_3$), et $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$. Kuna vektor $\mathbf{a}$ ei ole nullvektor, siis punktid A ja B ei ühti. Tekkinud lõik AB määrab üheselt sirge s nii, et AB asub sirgel s .

Fikseerime sirge l tasandil E_2 (või tasandi π ruumis E_3) nii, et sirge l (tasand π) lõikab sirget s ainult ühes punktis. Valime suvalise vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_2$ (või $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3$) ja mingi punkti $X \in E_2$ ($X \in E_3$). Siis saab leida punkti $Y \in E_2$ ($Y \in E_3$) nii, et $\mathbf{x} = \mathbf{XY}$. Projekteerime punktid X ja Y sirgele s paralleelselt sirgega l (tasandiga π), millega tekivad sirgel s punktid X' ja Y' . Sellest moodustub vabavektor $\mathbf{X'Y'}$.



Definitsioon 13.19

Vektorit $\mathbf{X'Y'}$ nimetatakse vektori $\mathbf{x}$ **projektsiooniks** vektori $\mathbf{a}$ sihile paralleelselt sirgega l (tasandiga π). Vektorit $\mathbf{X'Y'}$ tähistatakse $Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}$.

Omadus 13.2

Vabavektorite summa projektsioon on võrdne nende vabavektorite projektsioonide summaga, s.t

$$Pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x} + Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{y}.$$

Omadus 13.3

Mistahes reaalarvu $\lambda \in \mathbb{R}$ ja mistahes vabavektori $\mathbf{x}$ korral

$$Pr_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}.$$

Kui sirge või tasand, millega paralleelselt projekteeritakse, on risti sirgega, millele projekteeritakse, siis räägitakse **rist-** või **ortogonaalsest** projekteerimisest.

13.4 Kohavektorid

Fikseerime ruumis E (sirge, tasand või ruum) ühe punkti O , mida nime-tame koordinaatide alguspunktiks.

Definitsioon 13.20

Mistahes punkti $X \in E$ **kohavektoriks** nimetatakse vektorit $\mathbf{OX} \in \mathbb{E}$.

Märkus 13.9

Igal punktil $X \in E$ on olemas kohavektor $\mathbf{x} = \mathbf{OX}$. Teistpidi, igal vektoril $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ on olemas punkt X nii, et $\mathbf{x} = \mathbf{OX}$: selleks tuleb võtta vabavektori $\mathbf{x}$ esindaja ja lugeda selle alguspunktiks $O \in E$, siis esindaja lõpp-punkt ongi punkt X . Sellega tekib ruumi E punktide ja vabavektorite ruumi $\mathbb{E}$ elementide vahel üksühene vastavus.

13.5 Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$

Märkus 13.10

Ruumis E (sirge, tasand või ruum) fikseerime ühe punkti, mille täheks on O . Lisaks võime ette kujutada ristkoordinaadistikku, milles igal punktil on üheselt määratud koordinaadid: $(x) \in E_1, (x, y) \in E_2, (x, y, z) \in E_3$. Üldisemalt võime vaadelda fikseeritud naturaalarvu n korral n koordinaadiga (komponendiga) vektorit ehk korteeži $(x_1, \dots, x_n)$.

Vektorruumi mõiste on palju üldisem kui käesolevas kursuses vaadeldava ruumi $\mathbb{R}^n$ mõiste.

Definitsioon 13.21

Fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral nimetatakse hulka

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

n -mõõtmeliseks (eukleidiliseks) vektorruumiks, milles on defineeritud liitmine

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

ja skalaariga korrutamine

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 13.22

Vektorite süsteemi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, kus

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

nimetatakse vektorruumi $\mathbb{R}^n$ **loomulikuks baasiks**.

Loomuliku baasi kõrval on vektorruumis $\mathbb{R}^n$ lõpmata palju teisi baase. Nende suhtes on vektoril ka teised koordinaadid.

Definitsioon 13.23

Arve $x_1, \dots, x_n$ vektoris

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

nimetatakse vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ koordinaatideks baasi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ suhtes.

Omadus 13.4

Iga vektori $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ saab üheselt avaldada loomuliku baasi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ kaudu:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Definitsioon 13.24

Vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pikkus $|\mathbf{x}|$ defineeritakse võrdusega

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

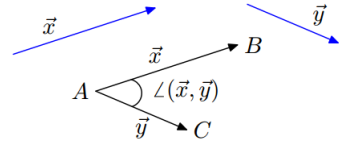
Märkus 13.11

Igale ruumi punkti $X \in E_3$ kohavektorile $\mathbf{OX} \in \mathbb{E}_3$ vastab parajasti üks vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ja vastupidi: igale elemendile $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vastab parajasti üks punkt $X \in E_3$ ja selle kohavektor $\mathbf{OX} \in \mathbb{E}_3$. Samasugune arutelu kehtib sirge ja tasandi korral. Kui $n > 3$, siis ei saa ruumi $\mathbb{R}^n$ vektoreid visuaalselt (geomeetriliselt) ette kujutada, kuid ühtse teooria saab ikkagi esitada, mille juurde järgnevas asume.

13.6 Skalaarkorrutis

Definitsioon 13.25

Olgu antud nullvektorist erinevad vektorid $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$. Võtame vektori $\mathbf{x}$ kui vabavektori ühe esindaja $\overline{AB}$, samuti vabavektori $\mathbf{y}$ esindaja $\overline{AC}$. Vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka, mis tekib lõigu AB pööramisel lühemat teed pidi lõiguga AC samasse suunda. Seda nurka tähistame $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, siis $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [0, \pi]$.



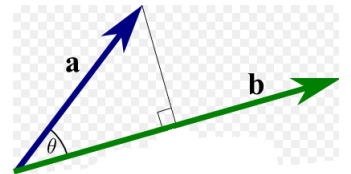
Definitsioon 13.26

Kui vektoritest $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ vähemalt üks on nullvektor, siis nurgaks $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ loetakse igat reaalarvu lõigust $[0, \pi]$.

Definitsioon 13.27

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse reaalarvu, mis võrdub nende vektorite pikkuste ja nendevahelise nurga koosinuse korrutisega, s.t

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$



Skalaarkorrutis on inglise keeles tuntud kui *dot product* ja seda tähistatakse ka kujul $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, samuti $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Omadus 13.5

Definitsioonist järeldub vahetult, et

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}.$$

Omadus 13.6

Vektorite $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ skalaarkorrutis avaldub võrdusena

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

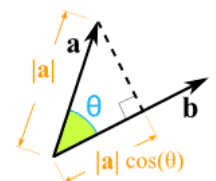
Edaspidi eeldame, et vektorid ruumis $\mathbb{E}$ või ruumis $\mathbb{R}^n$ on esitatud koordinaatidega loomuliku baasi suhtes.

Omadus 13.7

Vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vaheline nurk leitakse võrdusest

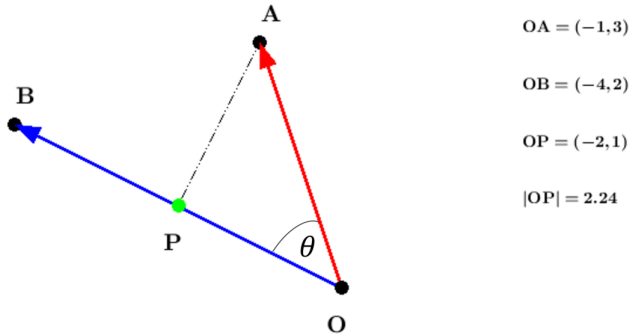
$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Kui on teada ruumivektorite koordinaadid, siis on skalaarkorrutist lihtne leida, sest siis ei ole vaja vektoritevahelist nurka leida.



Skalaarkorrutise leidmisel sisuliselt leitakse ühe vektori ristprojektsioon teise vektori sihile ja seda siis kasutatakse.

Näide 13.1 Olgu tasandil antud vektorid $\mathbf{OA} = (-1, 3)$ ja $\mathbf{OB} = (-4, 2)$.



Leiame vektori $\mathbf{OA}$ ristprojektsiooni vektori $\mathbf{OB}$ sihile. Saame kõigepealt

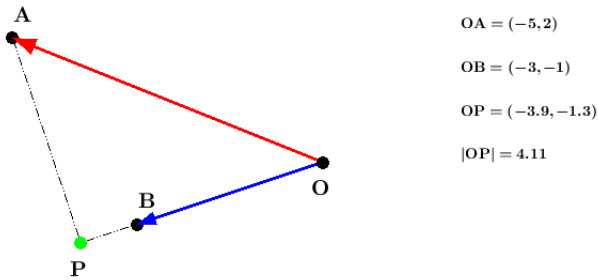
$$\begin{aligned}
 |\mathbf{OP}| &= \cos \theta |\mathbf{OA}| = \frac{\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle}{|\mathbf{OB}|} = \frac{\langle (-1, 3), (-4, 2) \rangle}{|(-4, 2)|} \\
 &= \frac{4 + 6}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{20}} = \sqrt{5} \approx 2.24.
 \end{aligned}$$

Seejärel

$$\mathbf{OP} = |\mathbf{OP}| \frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} (-4, 2) = (-2, 1).$$

Märgime, et vektor $\frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|}$ on vektori $\mathbf{OB}$ sihiline vektor pikkusega 1.
 ◇ ◇ ◇

Näide 13.2 Olgu tasandil antud vektorid $\mathbf{OA} = (-5, 2)$ ja $\mathbf{OB} = (-3, -1)$.



Sama skeem töötab ka siis, kui vektorid on ruumis, mitte tasandil.

Leiame vektori $\mathbf{OA}$ ristprojektsiooni vektori $\mathbf{OB}$ sihile. Saame

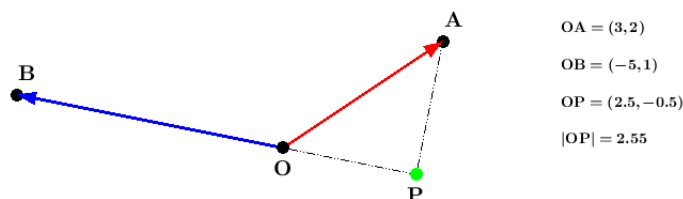
$$\begin{aligned}
 |\mathbf{OP}| &= \frac{\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle}{|\mathbf{OB}|} = \frac{\langle (-5, 2), (-3, -1) \rangle}{|(-3, -1)|} \\
 &= \frac{15 - 2}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \approx 4.11.
 \end{aligned}$$

Vektori $\mathbf{OA}$ ristprojektsioon vektori $\mathbf{OB}$ sihile on

$$\mathbf{OP} = |\mathbf{OP}| \frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|} = \frac{13}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} (-3, -1) = (-3.9, -1.3).$$

◇ ◇ ◇

Näide 13.3 Olgu tasandil antud vektorid $\mathbf{OA} = (3, 2)$ ja $\mathbf{OB} = (-5, 1)$.



Antud juhul on skalaarkorrutis $\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle$ negatiivne, sest $\angle(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}) > \frac{\pi}{2}$. Seepärast on vektori $\mathbf{OA}$ ristprojektsioon vektori $\mathbf{OB}$ sihile vektoriga $\mathbf{OB}$ vastassuunaline. Arvutades saame

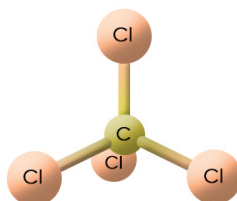
$$\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle = -13, \quad |\mathbf{OA}| = \sqrt{13}, \quad |\mathbf{OB}| = \sqrt{2}\sqrt{13},$$

$$\cos \angle(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad |\mathbf{OP}| = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{OP} = -\frac{1}{2}\mathbf{OB} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

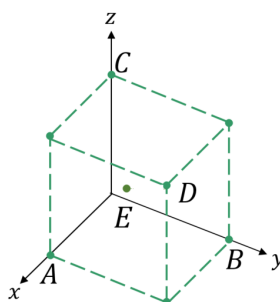
◇ ◇ ◇

Näide 13.4 On teada, et süsinik-tetrakloriidis CCl_4 kloori aatomid paiknevad korrapärase tetraeedri tippudes ning süsiniku aatom asub tetraeedri keskpunktis. Leiame kloori ja süsiniku aatomite vaheliste sidemete kui sirgete omavahelise nurga.



Allikas: <http://math.oregonstate.edu/bridge/papers/dot+cross.pdf>

Moodustame kuubi, mille neljas tipus, nagu näha joonisel, asuvad kloori aatomid, kuubi keskpunktis aga süsiniku aatom.



Olgu kuubi serva pikkus 1, siis kloori aatomid asuvad punktides $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ ja $D = (1, 1, 1)$. Kuubi keskpunkt on

$$E = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Vaatleme näiteks sidemetele vastavaid vektoreid

$$\mathbf{EA} = (1, 0, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

ja

$$\mathbf{EB} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Siis

$$|\mathbf{EA}| = |\mathbf{EB}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \angle(\mathbf{EA}, \mathbf{EB}) = \frac{\langle \mathbf{EA}, \mathbf{EB} \rangle}{|\mathbf{EA}| |\mathbf{EB}|} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ja } \angle(\mathbf{EA}, \mathbf{EB}) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.5^\circ.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 13.8

Skalaarkorrutisel on järgmised tehete seotud omadused:

1. kommutatiivsus $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$,
2. aditiivsus kummagi teguri suhtes
 $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$,
3. homogeensus kummagi teguri suhtes
 $\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral.

Omadus 13.9

Kaks vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on **risti ehk ortogonaalsed** parajasti siis, kui

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

See omadus on üks olulisemaid skalaarkorrutise kasutamisel.

On vahetult kontrollitav, et loomulikud baasivektorid $\mathbf{e}_i$ ruumis $\mathbb{R}^n$ on omavahel risti, s.t $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, kui $i \neq j$. Lisaks $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$ iga i korral. Seega on vektorite $x = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ ja $y = y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n$ skalaarkorrutise arvutamine omadust 13.8 kasutades kooskõlas omadusega 13.4, mis tähendab, et eespool toodud $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ esituse korral

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Näide 13.5 Näitame, et vektorid $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ja $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$ on omavahel risti.

Saame

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (3, -2, 1), (2, 1, -4) \rangle = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 0.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 13.12

Tihti on vaja vektori $\mathbf{a}$ jagamist mingi teise vektoriga $\mathbf{b}$ paralleelseks ja risti olevateks komponentideks. Need komponendid leitakse skalaarkorrutise seosest vastavate projektsioonidega:

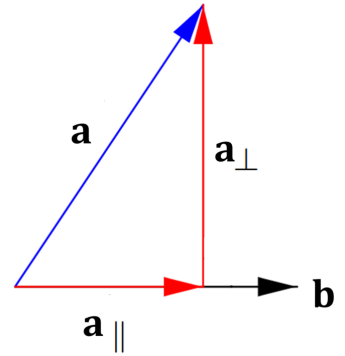
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp},$$

kus vastavalt

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{b}|} \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b}$$

ja

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b}.$$



Näide 13.6 Olgu antud magnetvälja tugevuse vektor $\mathbf{B} = (1, 2, 3)$ mingil ajahetkel. Läbi magnetvälja liigub samal ajal osake kiirusvektoriga $\mathbf{v} = (5, 1, -3)$. Leiame kiirusvektori $\mathbf{v}$ komponendid $\mathbf{v}_{\parallel}$ (paralleelne magnetvälja vektoriga $\mathbf{B}$) ja $\mathbf{v}_{\perp}$ (risti magnetvälja vektoriga $\mathbf{B}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{B} \rangle}{\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle} \mathbf{B} = \frac{\langle (5, 1, -3), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle} (1, 2, 3) \\ &= \frac{5 + 2 - 9}{1 + 4 + 9} (1, 2, 3) = -\frac{1}{7} (1, 2, 3) \end{aligned}$$

ja

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (5, 1, -3) + \frac{1}{7} (1, 2, 3) = \frac{1}{7} (36, 9, -18).$$

Kontrolliks võib tuua, et

$$\langle \mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\perp} \rangle = \left\langle -\frac{1}{7} (1, 2, 3), \frac{1}{7} (36, 9, -18) \right\rangle = -\frac{1}{49} \cdot (36 + 18 - 54) = 0,$$

s.t vektorid $\mathbf{v}_{\parallel}$ ja $\mathbf{v}_{\perp}$ on omavahel risti.

◇ ◇ ◇

Miks see info võiks meile kasulik olla? Kui arvestada, et elektri- ja magnetvälja jõujooned on omavahel risti, siis see võib ettekujutust füüsikalisest nähtusest täiendada.

13.7 Vektorkorrutis

Märkus 13.13

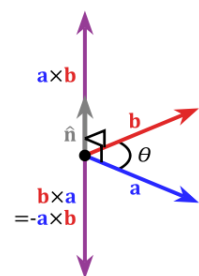
Vektorkorrutis defineeritakse ainult ruumis $\mathbb{E}_3$ või $\mathbb{R}^3$.

Definitsioon 13.28

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}_3$ vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, mis rahuldab järgmist kolme tingimust:

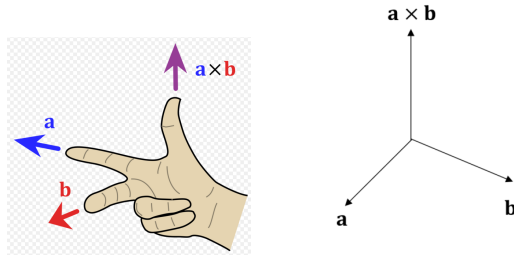
1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ja $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, s.t $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on risti vektoriga $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,
3. $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ on parema käe kolmik.

Kui skalaarkorrutis $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ „mõõdis“ vektorite paralleelsust (kollinearsust), siis vektorkorrutis $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ „mõõdab“ vektorite risti olekut. Sellepärast on skalaarkorrutise juures koosinus (sest $\cos 0 = 1$ ja $\cos 90^\circ = 0$) ja vektorkorrutise juures siinus (sin $90^\circ = 1$ ja sin $0 = 0$).



Märkus 13.14

Parema käe kolmik on kolmest vektorist koosnev süsteem, kus parema käe põial tähistab korrutise $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ suunda, sel juhul pöidlalt järgmine sõrm tähistab vektorit $\mathbf{a}$ ja keskmine sõrm vektorit $\mathbf{b}$.



Vektoreid $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ võib ette kujutada ka ruumilises koordinaatjestikus asuvatena nagu joonisel.

Analoogiliselt annab vasaku käe kolmik vastupidise $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ suuna.

Omadus 13.10

Vektoreid $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorkorrutise kohta kehtib valem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{\text{skeem}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

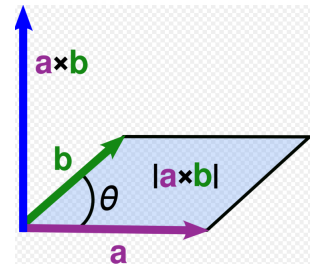
kus $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ on ruumi $\mathbb{R}^3$ loomulik baas. Determinandi arendamise valemist järeldub siit, et

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

ehk

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \quad (13.1)$$

Determinandiga toodud valemi korral mõtleme võrdusmärgi, kui skemaatiliselt seost. Probleem on selles, et determinandi väärtus peaks olema reaalarv, aga antud juhul tuleb vektor. Niimoodi on avaldist võimalik meelde jätta ja selle abil tuleb avaldis (13.1).


Omadus 13.11

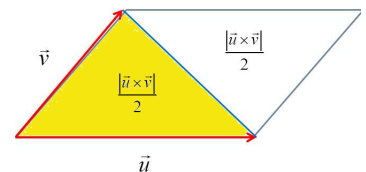
Vektoritele $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ehitatud rööpküliliku pindala

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Omadus 13.12

Vektoritele $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ehitatud kolmnurga pindala

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$


Omadus 13.13

Vektorkorrutis on võrdne nulliga ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$), kui vektorid on kollineaarsed.

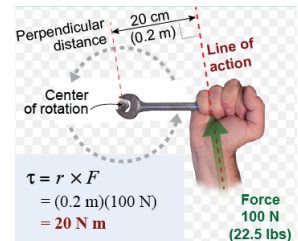
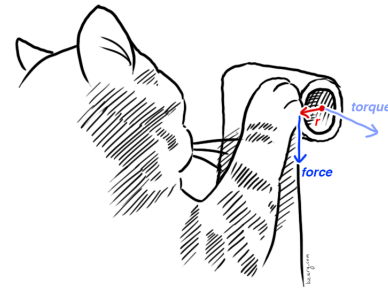
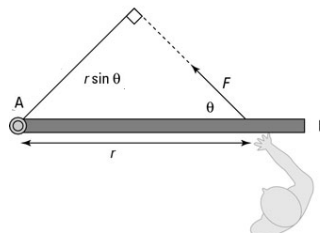
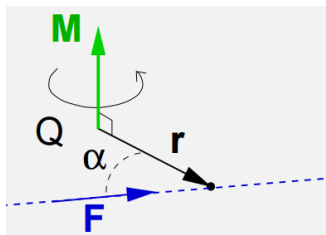
Näide 13.7 Vektorkorrutis on väga laialt levinud füüsikas, kuna seal käsitletakse jõudusid kui vektoriaalseid suursusi.

Definitsioon. Vektorit $\mathbf{M}$ nimetatakse **jõumomendiks punkti Q suhtes**, kui on täidetud järgmised tingimused:

1. vektor $\mathbf{M}$ on risti tasandiga, millel asub punkt Q ja jõu $\mathbf{F}$ mõjusirge,
2. vektori $\mathbf{M}$ pikkus võrdub jõu suuruse ja jõu õla (punkti Q kaugus jõu mõjusirgest) korrutisega,
3. punktist Q jõu rakenduspunkti tõmmatud vektor $\mathbf{r}$, jõuvektor $\mathbf{F}$ ja vektor $\mathbf{M}$ moodustavad parema käe kolmiku.

Definitsioonist järeldub, et kehtib võrdus

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$



Allikas:

<http://www.dummies.com/how-to/content/how-to-calculate-torque-that-is-not-perpendicular-.html>

Kui rakendada uksele jõudu 200 N nurga 45° all näiteks ühe meetri kaugusel ukse hingedest, siis hingede teljel asuva punkti A suhtes on jõumomendi suurus

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = 200 \cdot 1 \cdot \sin 45^\circ = 100\sqrt{2} \approx 141.4 \text{ Nm}.$$

On selge, et kõige suurema momendi saame, kui lükkame ust 90° all, siis $|\mathbf{M}| = 200 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 200 \text{ Nm}$.

◇ ◇ ◇

Omadus 13.14

Vektorkorrutisel on järgmised teheteiga seotud omadused:

1. vektorkorrutis on antikommutatiivne: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
2. distributiivsus: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
3. skalaariga korrutamine: $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

13.8 Segakorrutis

Definitsioon 13.29

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$ **segakorrutiseks** nimetatakse **arvu**

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

Omadus 13.15

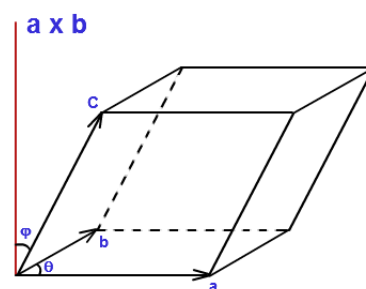
Kolme vektori segakorrutist saab esitusel loomuliku baasi kaudu arvutada valemiga

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Omadus 13.16

Kolme vektori segakorrutise absoluutväärtus võrdub neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga,

$$V_{rt} = |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}|.$$

**Omadus 13.17**

Kolmele vektorile ehitatud tetraeedri ruumala on

$$V_{te} = \frac{1}{6} |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}|.$$

Omadus 13.18

Kolm nullvektorist erinevat vektorit on **komplanaarsed** (asuvad ühel ja samal tasandil) parajasti siis, kui nende segakorrutis võrdub nulliga ehk

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = 0.$$

Näide 13.8 Vahetu on kontrollida, et vektorid $(1, 2, 3), (0, 2, 2), (-1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ asuvad kõik ühel ja samal tasandil:

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{3v-1v}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{2v=3v}{=} 0.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 13.19

Kolm nullvektorist erinevat vektorit moodustavad parema käe kolmiku, kui $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} > 0$, ja vasaku käe kolmiku, kui $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} < 0$.

Omadus 13.20

Vektorite segakorrutises tegurite järjestuse muutmisel kehtivad võrdsused

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a} = \mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b} = -\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c} = -\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} = -\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b}.$$

Peatükk 14

Sirge ja tasand ruumis

14.1 Tasandi vektorvõrrandid	250
14.2 Tasandi võrrand üldkujul	251
14.3 Sirge vektorvõrrandid	254
14.4 Sirge võrrandid ruumis	255
14.5 Punkti kaugus sirgest	256
14.6 Punkti kaugus tasandist	258
14.7 Nurk kahe sirge vahel	260
14.8 Nurk kahe tasandi vahel	261
14.9 Nurk sirge ja tasandi vahel	262

Kontrolltöö teemad

1. Tasandi ja sirge võrrandite koostamine ruumis.
2. Punkti kaugus sirgest ja tasandist.
3. Tasandite ja sirgete vastastikused asendid (nurgad nende vahel).

Eksamiteemad

1. Tasandi riht. Normaalvektor. Sihivektor.
2. Tasandi parameetriline vektorvõrrand, tasandi võrrand üldkujul.
3. Sirge parameetriline vektorvõrrand, sirge kanooniline võrrand ruumis.
4. Punkti kaugus sirgest ja punkti kaugus tasandist.
5. Kahe sirge vaheline nurk, kahe tasandi vaheline nurk, sirge ja tasandi vaheline nurk.

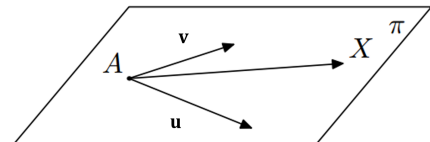
14.1 Tasandi vektorvõrrandid

Vaatame tasandit π ruumis E_3 . Olgu sellel tasandil antud punkt A ning kaks **mittekollineaarset** ruumi $\mathbb{E}_3$ vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$.

Definitsioon 14.1

Tasandit määravad mittekollineaarset vektorite süsteemi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{E}_3$ nimetatakse **tasandi rihiks**, vektoreid $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ tasandi rihivektoriteks.

Punkti A ja rihivektorite $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ abil saab leida mistahes vabavektori $\mathbf{AX}$ tasandil π .



Definitsioon 14.2

Võrrandit

$$\mathbf{AX} = t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

nimetatakse tasandi **parameetriliseks vektorvõrrandiks**. Muutujaid t_1 ja t_2 nimetatakse parameetriteks.

Esitame selle võrrandi veel kohavektorite kaudu. Olgu ruumi E_3 nullpunkt O . Olgu punktide $A, X \in \pi$ kohavektorid vastavalt $\mathbf{OA}$ ja $\mathbf{OX}$. Sel juhul $\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \mathbf{AX}$ ja võrrand on

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Punkti ja rihivektorite valikuid tasandil on lõpmata palju, seepärast on tasandil lõpmata palju parameetrilisi vektorvõrrandeid.

Definitsioon 14.3

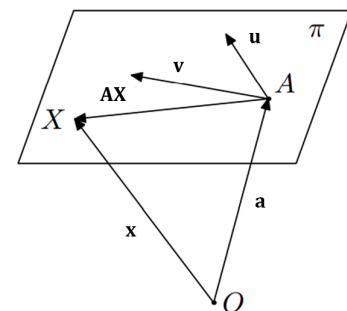
Võrrandit

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

nimetatakse tasandi **parameetriliseks vektorvõrrandiks kohavektorite kaudu**.

Olgu antud kohavektorid $\mathbf{OX}$, $\mathbf{OA}$ ning kaks mittekollineaarset vektorit ruumis $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{OX} = (x, y, z), \quad \mathbf{OA} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$



Definitsioon 14.4

Võrrandeid

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1, \\ y &= a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2, \\ z &= a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3, \end{aligned} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

nimetatakse tasandi **parameetrilisteks võrranditeks koordinaatides**.

14.2 Tasandi võrrand üldkujul

Olgu antud tasandiga π risti olev nullist erinev vektor $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

Kohavektorite $\mathbf{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\mathbf{OX} = (x, y, z)$ korral

$$\mathbf{AX} = \mathbf{OX} - \mathbf{OA} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3).$$

Kui punktid A ja X on tasandil π , siis

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{AX} \rangle = A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0.$$

Tähistame

$$D = -(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3).$$

Definitsioon 14.5

Võrrandit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

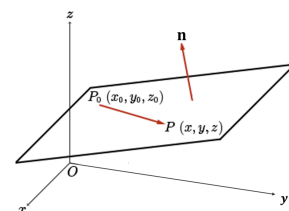
nimetatakse tasandi **võrrandiks üldkujul** ehk **tasandi üldkujuliseks võrrandiks** ning vektorit $\mathbf{n} = (A, B, C)$ nimetatakse tasandi **normaalvektoriks**.

Märkus 14.1

Tasandi võrrandi üldkujul võib esitada vektorkujul

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{AX} \rangle = 0,$$

kus $\mathbf{n}$ on tasandi normaalvektor ja $\mathbf{AX}$ on tasandil asuv vektor.



Näide 14.1 Olgu antud tasand võrrandiga $2x - 3y - 4z = 0$. Sellest saame, et tasandi normaalvektor on $\mathbf{n} = (2, -3, -4)$ ja $D = 0$. Viimane tähendab, et tasand läbib koordinaatide alguspunkti $(0, 0, 0)$, sest see punkt rahuldab tasandi võrrandit: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

◇ ◇ ◇

Näide 14.2 Leiame tasandi võrrandi, kui on teada tasandil asuv punkt $(-1, 5, 7)$ ja normaalvektor $(2, 3, 4)$. Kirjutame tasandi võrrandi $(A, B, C) = (2, 3, 4)$ abil

$$2x + 3y + 4z + D = 0.$$

Arvu D leiame tasandil asuva punkti järgi:

$$2(-1) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + D = 0,$$

millest $D = -41$. Seega tasandi võrrandiks on

$$2x + 3y + 4z - 41 = 0.$$

◇ ◇ ◇

Konkreetses tasandi võrrand üldkujul ei ole üheselt määratud, sest arve A, B, C ja D võib korrutada suvalise arvuga $k \neq 0$.

Märkus 14.2

Tasandi võrrandist saame järgmised:

1. Kui $D = 0$, siis tasand läbib koordinaatide alguspunkti $(0, 0, 0)$.
2. Kui $A = 0$, siis tasand on paralleelne x -teljega (sest $\langle (0, B, C), (1, 0, 0) \rangle = 0$).
3. Kui $B = 0$, siis tasand on paralleelne y -teljega (sest $\langle (A, 0, C), (0, 1, 0) \rangle = 0$).
4. Kui $C = 0$, siis tasand on paralleelne z -teljega (sest $\langle (A, B, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$).
5. Kui $A = D = 0$, siis tasand läbib x -telge. Analoogiline väide kehtib teiste telgede kohta.
6. Kui $A = B = 0$, siis tasand on paralleelne xy -tasandiga. Kui lisaks $D = 0$, siis tasandiks ongi xy -tasand, mis läbib x ja y telge. Analoogiline väide kehtib teiste kordajate kohta.

Näide 14.3 Leiame võrrandi tasandile, mis on paralleelne xz -tasandiga ja läbib punkti $A = (1, 2, 3)$. Sellise tasandi normaalkvektori sobib $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, sest see on risti x - ja z -teljega ja seega risti xz -tasandiga. Sel juhul tasandi võrrandi ja punkti A kaudu saame

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + D = 0$$

ehk $D = -2$. Tasandi võrrandiks on $y - 2 = 0$. Algandmete põhjal saab kohe kirjutada võrrandi $y = c$ (sellised tasandid on paralleelsed xz -tasandiga) ja punkti $(1, 2, 3)$ asumine tasandil annab $c = 2$ ehk tasandi võrrand on $y = 2$.

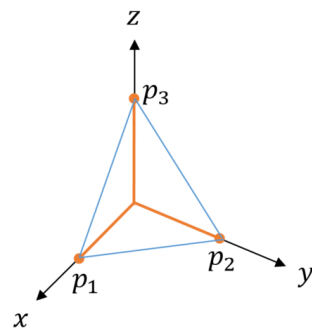
◇ ◇ ◇

Märkus 14.3

Kui $D \neq 0$, siis võime **üldasendis** ($A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$) tasandi võrrandi kirjutada kujul

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1,$$

kus $p_1 = -\frac{D}{A}$, $p_2 = -\frac{D}{B}$ ja $p_3 = -\frac{D}{C}$ on telglõikude pikkused. Seda võrrandit nimetatakse **tasandi võrrandiks telglõikudes**. Sellisel juhul lõikab tasand koordinaattelgi punktides $x = p_1$, $y = p_2$ ja $z = p_3$, sest punktid $(p_1, 0, 0)$, $(0, p_2, 0)$ ja $(0, 0, p_3)$ asuvad tasandil.



Näide 14.4 Leiame tasandi $3x+4y-2z+\frac{1}{2}=0$ lõikepunktide telgedega. Selleks jagame tasandi võrrandi arvuga $-\frac{1}{2}$. Saame

$$-6x - 8y + 4z = 1$$

ehk

$$\frac{x}{-\frac{1}{6}} + \frac{y}{-\frac{1}{8}} + \frac{z}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Seega lõikab tasand koordinaattelgi punktides, mille koordinaadid vastaval teljel on $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{4}$.

◇ ◇ ◇

Märkus 14.4

Kui on antud kaks rihivektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ tasandil, siis tasandi normaalvektoriks sobib

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Näide 14.5 Olgu tasandil antud kolm punkti $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 2, 1)$ ja $R = (3, 2, -1)$. Leiame neid punkte läbiva tasandi võrrandi. Selleks moodustame

$$\mathbf{PQ} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{PR} = (2, 1, -1)$$

ja

$$\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 1, -3).$$

Normaalvektoriks sobib ka vastassuunaline vektor $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$. Tasandi võrrandist saame, et

$$2x - y + 3z + D = 0.$$

Arvestades, et punkt $(1, 1, 0)$ asub tasandil, leiame

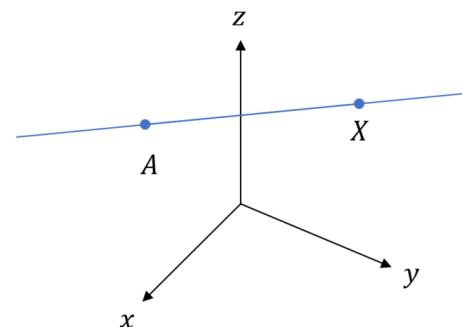
$$D = -1.$$

Niisiis on tasandi võrrandiks $2x - y + 3z - 1 = 0$.

◇ ◇ ◇

14.3 Sirge vektorvõrrandid

Sirget saab määrata kahe etteantud punkti abil. Tavaliselt kasutatakse järgmist võimalust: sirgel fikseeritakse üks punkt A ja nullist erineva vektori $\mathbf{s}$ abil antakse sirge siht. Tähistame sirget tähega l . Olgu $X \in l$ sirge suvaline punkt, siis punkte A ja X ühendab vabavektor $\mathbf{AX} \in \mathbb{E}$.



Definitsioon 14.6

Võrrandit

$$\mathbf{AX} = t\mathbf{s}, \quad t \in \mathbb{R},$$

nimetatakse sirge **parameetriliseks vektorvõrrandiks**.

Esitame selle võrrandi kohavektorite kaudu. Olgu O ruumi E nullpunkt. Olgu punktide $A, X \in l$ kohavektorid vastavalt $\mathbf{OA}$ ja $\mathbf{OX}$. Sel juhul

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \mathbf{AX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{s}.$$

Definitsioon 14.7

Võrrandit

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{s}, \quad t \in \mathbb{R},$$

nimetatakse sirge **parameetriliseks vektorvõrrandiks kohavektori abil**.

Olgu ruumis $\mathbb{E}_3$ antud vektorid koordinaatide abil:

$$\mathbf{OX} = (x, y, z), \quad \mathbf{OA} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3).$$

Definitsioon 14.8

Võrrandeid

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1, \\ y &= a_2 + ts_2, \\ z &= a_3 + ts_3, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R},$$

nimetatakse sirge **parameetrilisteks võrranditeks koordinaatides**.

14.4 Sirge võrrandid ruumis

Olgu ruumis $\mathbb{E}_3$ antud sirge sihivektor. Oletame, et sirge sihivektori $\mathbf{s}$ ükski koordinaat ei võrdu nulliga, s.t. $\mathbf{s}_1 \neq 0$, $\mathbf{s}_2 \neq 0$ ja $\mathbf{s}_3 \neq 0$. Avaldame sirge parameetristest võrranditest parameetri t :

$$t = \frac{x - a_1}{s_1}, \quad t = \frac{y - a_2}{s_2}, \quad t = \frac{z - a_3}{s_3}.$$

Ühendades võrdused, jõuame järgmise mõisteni.

Definitsioon 14.9

Võrrandeid

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3} \quad (14.1)$$

nimetatakse sirge **kanoonilisteks** võrranditeks ruumis $\mathbb{E}_3$.

Märkus 14.5

Lepime kokku, et kui sirge kanoonilistes võrrandites (14.1) sihivektori mingi komponent s_1 , s_2 või s_3 võrdub nulliga (kuid mitte kõik korraga), siis jätame võrrandites (14.1) selle osa ära ning lugeja loeme võrdseks nulliga. Seega

$$s_1 = 0 \quad \text{korral} \quad x = a_1,$$

$$s_2 = 0 \quad \text{korral} \quad y = a_2,$$

$$s_3 = 0 \quad \text{korral} \quad z = a_3.$$

Kui kaks komponenti võrduvad nulliga, näiteks $s_1 = 0$ ja $s_2 = 0$, siis jääb kogu võrduste ahelast alles süsteem

$$x = a_1, \quad y = a_2,$$

seejuures $z \in \mathbb{R}$ võib olla suvaline.

Sirge võrrandit ruumis saab anda kahe mitteparalleelse tasandi lõikesirge abil.

Definitsioon 14.10

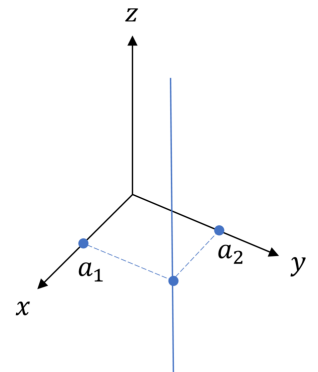
Sirge **võrranditeks** üldkujul ehk **üldkujulisteks võrranditeks** nimetatakse süsteemi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

kus sirge sihivektor $\mathbf{s}$ avaldub antud kahe tasandi normaalvektori $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ja $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ vektorkorrutisena:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$



Näide 14.6 Leiame tasandite

$$x + y - z = 0 \quad \text{ja} \quad y + 2z = 6$$

lõikesirge kanoonilised võrrandid. Esiteks, $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$ ja $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 2)$. Seega

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, 1).$$

Oleme saanud, et sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x - a_1}{3} = \frac{y - a_2}{-2} = \frac{z - a_3}{1}.$$

Jääb üle leida üks suvaline punkt lõikesirgel. Selleks tuleks lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y + 2z = 6. \end{cases}$$

Kuna siin on kolm tundmatut ja kaks võrrandit, siis võib loota, et saame ühe tundmatu vabalt ette anda. Olgu $z = 0$, siis $y = 6$ ja $x = -6$. Seega punkt $(-6, 6, 0)$ asub tasandite lõikesirgel ja selle sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x + 6}{3} = \frac{y - 6}{-2} = z.$$

◇ ◇ ◇

14.5 Punkti kaugus sirgest

Definitsioon 14.11

Punkti P **kauguseks** sirgest l nimetame sellest punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkust. Tähistame seda $d(P, l)$.

Kauguse valemi leidmiseks viime arutelu läbi ruumis $\mathbb{E}_3$. Tasandil on see analoogiline. Esitame valemi tuletamiseks kaks varianti.

Olgu ruumis antud punkt P ja sirge l sihivektor $\mathbf{s}$. Võtame sirgel suvalise punkti A ja moodustame vabavektori $\mathbf{AP}$.

1. variant. Vektorite $\mathbf{AP}$ ja $\mathbf{s}$ vahelisest nurgast $\theta = \angle(\mathbf{AP}, \mathbf{s})$ ja täisnurksest kolmnurgast saame, et

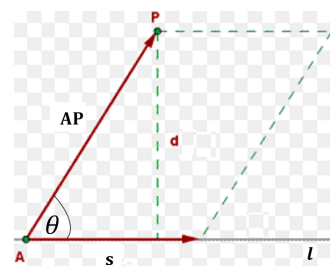
$$\sin \theta = \frac{d(P, l)}{|\mathbf{AP}|},$$

millest

$$d(P, l) = |\mathbf{AP}| \sin \theta.$$

Siis

$$d(P, l) = \frac{|\mathbf{AP}| |\mathbf{s}| \sin \theta}{|\mathbf{s}|} = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$



2. variant. Moodustame vektorite $\mathbf{AP}$ ja $\mathbf{s}$ abil rööpküliku, kus mõlema vektori alguspunktid asuvad punktis A . Rööpküliku pindala on $|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|$. Teisalt, rööpküliku pindala saab arvutada ka aluse $|\mathbf{s}|$ ja kõrguse $d(P, l)$ korrutisena. Seega

$$|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}| = |\mathbf{s}|d(P, l),$$

millest

$$d(P, l) = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

Omadus 14.1

Punkti $P \in E_3$ kaugus sirgest $l \subset E_3$ arvutatakse valemiga

$$d(P, l) = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|},$$

kus A on suvaline punkt sirgel l ja $\mathbf{s}$ on sirge sihivektor.

Näide 14.7

Leiame punkti $P = (3, -1, 4)$ kauguse sirgest l , mis on antud parameetriliselt

$$\begin{aligned} x &= -2 + 3t, \\ y &= -2t, \\ z &= 1 + 4t, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Võrranditest näeme, et sirge sihivektoriks sobib $\mathbf{s} = (3, -2, 4)$ ja punktiks sirgel $A = (-2, 0, 1)$. Seega

$$d(P, l) = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|(5, -1, 3) \times (3, -2, 4)|}{\sqrt{9 + 4 + 16}}.$$

Leiame

$$(5, -1, 3) \times (3, -2, 4) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (2, -11, -7).$$

Seega

$$d(P, l) = \frac{|(2, -11, -7)|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

◇ ◇ ◇

Näide 14.8 Punkti kauguse sirgest tasandil $\mathbb{E}_2$ saab leida nii, et vaatlеме seda tasandit ruumis ja kasutame ruumis esitatud teooriat. Leiame punkti $P = (2, 1)$ kauguse sirgest l , mille võrrand on $3x - 4y + 1 = 0$. Olukorra ruumiliseks tegemiseks lisame koordinaadi $z = 0$. Niisiis leiame punkti $P = (2, 1, 0)$ kauguse sirgest l , mis tegelikult asub xy -tasandil. On näha, et punkt $A = (1, 1, 0)$ asub sirgel l . Sirge l võib esitada parameetriliselt

$$\begin{aligned}x &= x, \\y &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}, \\z &= 0,\end{aligned}$$

millest on näha, et sirge sihivektoriks on $\left(1, \frac{3}{4}, 0\right)$. Selle asemel võtame $\mathbf{s} = (4, 3, 0)$. Seega

$$d(P, l) = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|(1, 0, 0) \times (4, 3, 0)|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{|(0, 0, 3)|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$$

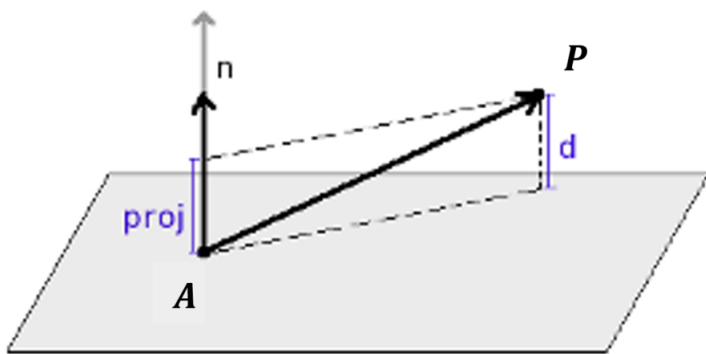
◇ ◇ ◇

14.6 Punkti kaugus tasandist

Definitsioon 14.12

Punkti P kauguseks tasandist π nimetatakse sellest punktist tasandini tõmmatud ristlõigu pikkust. Tähistame seda $d(P, \pi)$.

Olgu ruumis E_3 antud punkt P ja tasand π , mille normaalvektor on $\mathbf{n}$. Valime tasandil suvalise punkti A . Võime eeldada, et $A \neq P$, sest kui punkt P asub tasandil π , siis on P kaugus tasandist 0.



Punkti leidmiseks tasandil võib võtta osa koordinaate nullideks ja asetada need tasandi võrrandisse.

Moodustame vabavektori $\mathbf{AP}$. Moodustame vektori $\mathbf{AP}$ ristprojektsiooni normaalsektori $\mathbf{n}$ sihile. Selle pikkus ongi otsitav kaugus.

Seega

$$d(P, \pi) = |Pr_{\mathbf{n}} \mathbf{AP}| = \frac{|\langle \mathbf{AP}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|}.$$

Omadus 14.2

Punkti $P \in E_3$ kaugus tasandist $\pi \subset E_3$ arvutatakse valemiga

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \mathbf{AP}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|},$$

kus A on suvaline punkt tasandil π ja $\mathbf{n}$ on tasandi normaalvektor.

Näide 14.9 Leiame punkti $P = (1, 5, -4)$ kauguse tasandist π , mille võrrand on $3x - y + 2z - 6 = 0$. Tasandi normaalvektor on $\mathbf{n} = (3, -1, 2)$. Tasandil asub kindlasti punkt $A = (2, 0, 0)$. Moodustame vektori $\mathbf{AP} = (-1, 5, -4)$. Seega

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \mathbf{AP}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\langle (-1, 5, -4), (3, -1, 2) \rangle|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{16}{\sqrt{14}} \approx 4.28.$$

◇ ◇ ◇

Järgnevalt tuletame ühe efektiivsema valemi punkti kauguse leidmiseks. Olgu tasand π antud võrrandiga

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Olgu antud punkt $P = (p_1, p_2, p_3) \in E_3$ ja punkt $Q = (q_1, q_2, q_3)$ tasandil π . Tasandi normaalvektor on $\mathbf{n} = (A, B, C)$. Leiame

$$\begin{aligned} d(P, \pi) &= \frac{|\langle \mathbf{QP}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\langle (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3), (A, B, C) \rangle|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &\stackrel{\pm D}{=} \frac{|A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) + C(p_3 - q_3) + D - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - \frac{Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \end{aligned}$$

Kuna punkt Q asub tasandil, siis ta rahuldab tasandi võrrandit, s.t

$$Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0.$$

Sellega oleme jõudnud järgmise tulemuseni.

Omadus 14.3

Punkti $P = (x_0, y_0, z_0) \in E_3$ kaugus tasandist π , mille võrrand on

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

arvutatakse valemiga

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Seega tuleb punkti P kauguse leidmiseks panna punkti P koordinaadid tasandi võrrandisse ja saadud vasaku poole absoluutväärtus jagada normaalvektori pikkusega.

Näide 14.10 Leiame **paralleelsete** tasandite π_1 ja π_2 , vastavalt võrranditega

$$3x - y + 2z - 6 = 0, \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0,$$

vahelise kauguse. Selleks võtame tasandil π_1 ühe punkti, näiteks $P = (0, 0, 3)$, ja leiame selle punkti kauguse tasandist π_2 . Tasandi π_2 võrrandiks võtame $3x - y + 2z + 2 = 0$. Siis

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2.14.$$

◇ ◇ ◇

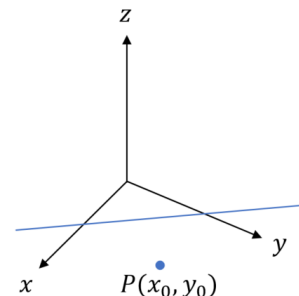
Märkus 14.6

Kui on antud sirge l võrrandiga

$$Ax + By + C = 0$$

xy -tasandil, siis seda võib tõlgendada kui z -teljega paralleelse tasandi võrrandit, mis läbib xy -tasandil asuvat sirget. Sel juhul punkti $P = (x_0, y_0) \in E_2$ kaugus sirgest l arvutatakse kui punkti kaugus tasandist ehk valemiga

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



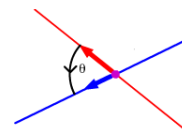
Näide 14.11 Leiame uuesti punkti $A = (2, 1)$ kauguse sirgest l võrrandiga $3x - 4y + 1 = 0$, seekord viimase märkuse abil,

$$d(A, l) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3}{5}.$$

◇ ◇ ◇

14.7 Nurk kahe sirge vahel

Olgu antud **lõikuvate** sirgete l_1 ja l_2 sihivektorid $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ ruumis $\mathbb{E}$. Kui asetada sihivektorite alguspunktid sirgete lõikepunkti, siis võib leida nurgad vektorite $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ vahel, kuid ka $\mathbf{s}_1$ ja vastandvektori $-\mathbf{s}_2$ vahel. Kui sirged on paralleelsed või mitteparalleelsel juhul nad ei lõiku, siis nende vahelise nurga definitsioon jääb kehtima.


Definitsioon 14.13

Sirgete l_1 ja l_2 vaheliseks nurgaks nimetatakse nende sirgete sihivektorite $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ ning $\mathbf{s}_1$ ja $-\mathbf{s}_2$ vahelistest nurkadest vähimat ehk

$$\angle(l_1, l_2) = \min\{\angle(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), \angle(\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2)\}.$$

Siis $\angle(l_1, l_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, sest $\angle(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) + \angle(\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2) = \pi$.

Kahe vektori vaheline nurk leitakse skalaarkorrutise abil. On näha, et soovitud tulemuse saamiseks piisab skalaarkorrutisest võtta absoluutväärtus, sest $\cos \angle(\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2) = \cos(\pi - \angle(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)) = -\cos \angle(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$.

Omadus 14.4

Sirgete l_1 ja l_2 vahelise nurga koosinus leitakse valemiga

$$\cos(\angle(l_1, l_2)) = \frac{|\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle|}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|},$$

kus $\mathbf{s}_1$ on sirge l_1 ja $\mathbf{s}_2$ on sirge l_2 sihivektor.

Näide 14.12 Leiame sirgete l_1 ja l_2 , mille võrrandid on

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+5}{0}$$

ja

$$\frac{x}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3},$$

vahelise nurga. Sirgete sihivektorid on $\mathbf{s}_1 = (2, -1, 0)$ ja $\mathbf{s}_2 = (5, 2, 3)$.

Arvutame

$$\cos(\angle(l_1, l_2)) = \frac{|2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{4+1+0} \cdot \sqrt{25+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{190}}.$$

Siit $\angle(l_1, l_2) = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{190}}\right) \approx 0.95 = 54.52^\circ$.

◇ ◇ ◇

14.8 Nurk kahe tasandi vahel

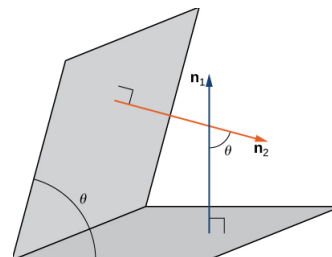
Olgu ruumis E_3 antud tasandid π_1 ja π_2 ning nende normaalvektorid $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$. Võib leida nurgad vektorite $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ vahel, kuid ka $\mathbf{n}_1$ ja vastandvektori $-\mathbf{n}_2$ vahel. Defineerime tasandite vahelise nurga analoogiliselt sirgete vahelise nurgaga.

Definitsioon 14.14

Tasandite π_1 ja π_2 vaheliseks nurgaks nimetatakse nende tasandite normaalvektorite $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ ning $\mathbf{n}_1$ ja $-\mathbf{n}_2$ vahelistest nurkadest vähimat ehk

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \min\{\angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2), \angle(\mathbf{n}_1, -\mathbf{n}_2)\}.$$

Siis $\angle(\pi_1, \pi_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Omadus 14.5

Tasandite π_1 ja π_2 vahelise nurga koosinus leitakse valemiga

$$\cos(\angle(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|},$$

kus $\mathbf{n}_1$ on tasandi π_1 ja $\mathbf{n}_2$ on tasandi π_2 normaalvektor.

Näide 14.13 Leiame tasandite π_1 ja π_2 , mille võrrandid on

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{ja} \quad 2x + 3y - 2z = 0,$$

vahelise nurga. Tasandite normaalvektorid on $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 1)$ ja $\mathbf{n}_2 = (2, 3, -2)$. Arvutame

$$\cos(\angle(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+9+4}} = \frac{6}{\sqrt{102}}.$$

Siit $\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{102}}\right) \approx 0.93 = 53.55^\circ$.

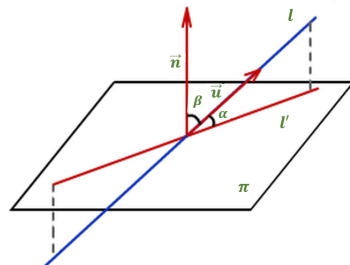
◇ ◇ ◇

14.9 Nurk sirge ja tasandi vahel

Olgu antud sirge l ja tasand π ruumis E_3 . Olgu sirge l sihivektor $\mathbf{u}$ ja tasandi normaalvektor $\mathbf{n}$. Leiame sirge l ristprojektsiooni tasandile, olgu see l' .

Definitsioon 14.15

Sirge l ja tasandi π vaheliseks nurgaks nimetatakse sirge l ja tema ristprojektsiooni l' vahelist nurka ning seda tähistatakse $\angle(l, \pi)$.



Vaatleme sirget s , mille sihivektor on $\mathbf{n}$. Siis

$$\angle(l, s) + \angle(l, l') = \frac{\pi}{2}$$

ehk

$$\angle(l, l') = \frac{\pi}{2} - \angle(l, s).$$

Teiselt poolt

$$\cos \angle(l, s) = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|},$$

seepärast

$$\sin \angle(l, l') = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle(l, s) \right) = \cos \angle(l, s) = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|}.$$

Seega

$$\angle(l, \pi) = \arcsin \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|}.$$

Omadus 14.6

Sirge l ja tasandi π vahelise nurga siinus leitakse valemiga

$$\sin(\angle(l, \pi)) = \frac{|\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{s}| |\mathbf{n}|},$$

kus $\mathbf{s}$ on sirge l sihivektor ja $\mathbf{n}$ on tasandi π normaalvektor.

Näide 14.14 Leiame sirge l ja tasandi π vastastikuse asendi, kui nad on antud vastavalt võrranditega

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{6} \quad \text{ja} \quad 2x + 3y + 5 = 0.$$

Leiame

$$\mathbf{s} = (4, 2, 6) = 2(2, 1, 3), \quad \mathbf{n} = (2, 3, 0)$$

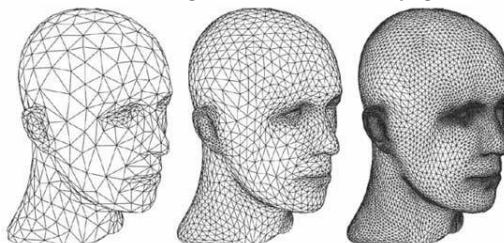
ja

$$\sin(\angle(l, \pi)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{4+9+0}} = \frac{7}{\sqrt{14 \cdot 13}} = \frac{7}{\sqrt{182}} \approx 0.496.$$

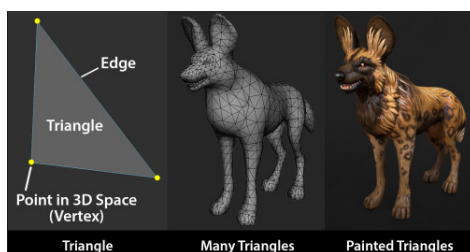
$$\text{Seega } \angle(l, \pi) = \arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{182}} \right) \approx 0.546 = 31.26^\circ.$$

◇ ◇ ◇

Näide 14.15 Arvutimängudes modelleeritakse ruumilisi objekte tetraeedrite abil, mis tähendab, et keha pind koosneb tüüpiliselt kolmnurkadest. Võidakse kasutada ka teisi kujundeid, kuid kolmnurk on mingis mõttes kõige lihtsam geomeetriline objekt, millega saab pinda ligikaudselt esitada. Näiteks igat nelinurka saab jagada kolmnurkadeks.



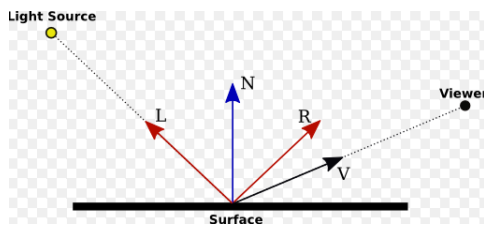
Mida rohkem on kolmnurki ja mida väiksemad on nende külgede pikkused, seda sujuvamalt lähendatakse kumeraid pindu. Pärast ruumilise mudeli loomist võib keha ära värvida (määrata kolmnurga toon ja läbipaistvus).



Üks väga oluline probleem 3D-modelleerimisel on valguse peegeldus. Kui arvutimängus või animatsioonis on valgusallikas, siis sellelt tulevad kiired peegelduvad pindadelt ning vastavalt peegeldusele peab muutuma ka ruumilise keha valgustatus, varjud ja värvid. Vastasel korral oleks tulemus ebarealistlik.



Kui valgussammas langeb risti pinnale (tasandile), siis (joonisel ühiklõigule) jõuab pinnale kõige rohkem valgust. Kui valgussammas langeb mingi nurga all, siis pinnal kaetakse ära suurem ala, kui risti langeva valguse korral ning suurema ala tõttu jõuab pinnaühikule vähem valgust, mistõttu objekt on nõrgemalt valgustatud. Seega peegeldunud valguse intensiivsus on otseselt seotud valguse langemise nurgaga. Sarnaselt, kui vaatleja (kaamera) ei asu valguskiire peegeldumistrajektoiril, siis jõuab vaatlejani vähem valgust ja ka see on seotud valguse langemise nurgaga.



Kolmnurki säilitatakse programmis tippude koordinaatide kaudu. Objekti teiste punktide parameetrid arvutatakse vektoreid kasutades. See on olulised küsimused, kui suured on kolmnurkade ja punktide vahelised kaugused ning milliste nurkade all need omavahel ruumis paiknevad.

◇ ◇ ◇

Näide 14.16 Olgu antud punkt $P = (1, -2, 4)$ ja kolmnurk tippudega $A = (1, -3, 7)$, $B = (2, 1, 1)$ ja $C = (-1, 0, 6)$. Leiame nurga, mille moodustab punktist P kolmnurga tsentrisse E tõmmatud kiir tasandiga, millel kolmnurk asub. Esiteks leiame kolmnurga tsentri

$$E = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2} \right) = (1, -1, 7).$$

Moodustame vektorid

$$\mathbf{PE} = (0, 1, 3), \quad \mathbf{AB} = (1, 4, -6), \quad \mathbf{AC} = (-2, 3, -1).$$

Kolmnurk ABC määrab ruumis tasandi π , millel ta asub. Selle tasandi normaalvektori leiame vektorkorrutisest

$$\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (14, 13, 11).$$

Kolmnurk asub tasandil, mille võrrand on

$$14x + 13y + 11z + D = 0.$$

Arvu D leiame näiteks tingimusest, et C asub sellel tasandil. Saame $D = -52$ ja tasandi võrrand on

$$14x + 13y + 11z - 52 = 0.$$

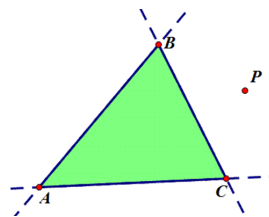
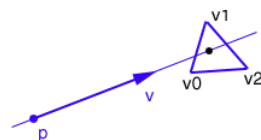
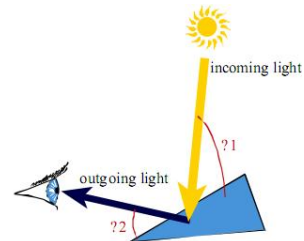
Sirge sihivektoriga $\mathbf{PE}$ ja tasandi vahelise nurga leidmise eeskirjast saame

$$\sin(\angle(\mathbf{PE}, \pi)) = \frac{|\langle \mathbf{PE}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{PE}| |\mathbf{n}|} = \frac{|\langle (0, 1, 3), (14, 13, 11) \rangle|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 9} \cdot \sqrt{14^2 + 13^2 + 11^2}} = \frac{46}{9\sqrt{60}}.$$

Seega $\angle(\mathbf{PE}, \pi) = \arcsin\left(\frac{46}{9\sqrt{60}}\right) \approx 0.72 = 41.29^\circ$. Arvutame ka punkti P kauguse tasandist π , millel asub kolmnurk:

$$d(P, \pi) = \frac{|14 \cdot 1 + 13 \cdot (-2) + 11 \cdot 4 - 52|}{|\mathbf{n}|} = \frac{20}{9\sqrt{6}} \approx 0.91.$$

◇ ◇ ◇



Peatükk 15

Kompleksarvud. Algebraline ja trigonomeetriline kuju

15.1 Sissejuhatus	266
15.2 Kompleksarvud	268
15.3 Kompleksarvu algebraline kuju	268
15.4 Tehted kompleksarvudega	269
15.5 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju	271
15.6 Siinus ja koosinus	273
15.7 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega	274

Eksamiteemad

1. Kompleksarv, kompleksarvu algebraline, geomeetriline, trigonomeetriline kuju.
2. Tehted kompleksarvudega (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, täisarvuline astendamine).

15.1 Sissejuhatus

Euroopas juhtus 16. sajandil palju sündmusi, kuid samal ajal kuskil Itaalia maakonnas uurisid mitmed rahutud hinged kuupvõrrandi lahendamist.

Üks nendest oli **Gerolamo Cardano (1501 - 1576)**, kes kuulsas algebra õpikus *Ars Magna* esitas ülesande: "Leidke kaks arvu, mille summa on 10 ja mille korrutis on 40." Olgu üks arv x , siis teine on $10 - x$. Seega ülesanne on samaväärne ruutvõrrandi

$$x(10 - x) = 40$$

ehk

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

lahendamisega. Lahendamisel saame

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 40} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

See ei olnud sugugi esimene (ega ka viimane) kord, kui inimkond nägi õudusunenägusid ruutjuure leidmisest **negatiivsest arvust**.

Sama painaja rikkus ära ka Cardano unerikkad ööd, kuid erinevalt teistest võttis Cardano korraks julguse kokku ja ütles midagi sellist nagu "Võimatu, kuid hetkeks oletame, et me lihtsalt opereerime selle mõttetut liikmega nagu $\sqrt{-1}$ ". Võime kontrollida. Olgu

$$x = 5 + \sqrt{-15}, \quad y = 10 - x = 10 - 5 - \sqrt{-15} = 5 - \sqrt{-15}.$$

Leiam e arvude summa

$$x + y = 5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10 + 0 = 10$$

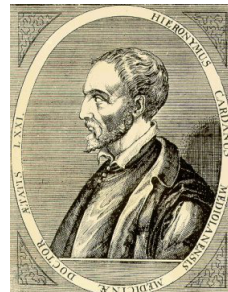
ja korrutise

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} \\ &= 25 - (\sqrt{-15})^2 = 25 + 15 = 40. \end{aligned}$$

”Täiesti õige, kuid kasutu.“ ütles Cardano ja imaginaarne painaja jätkas Euroopas oma isandate kiusamist.

Järgmine rahutu hing oli itaalia matemaatik **Rafael Bombelli (1526 - 1572)**, kes muutus koguni nii rahutuks, et ütles otse välja, et ruutjuured negatiivsest arvust vajavad eraldi nime ning aritmeetilised tehted nendega on väga erinevad sellest, mida seni reaalarvude jaoks kasutatud on. Bombelli avastas aga veel midagi, mida võiks võrrelda ka kullasoone leidmisega teaduses. Kui Cardano sõnastas need uued arvud kui kasutud, siis Bombelli avastas hoopis vastupididist... Bombelli uuris teatud tüüpi kuupvõrrandite lahendamist, näiteks

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$



Gerolamo Cardano
(1501 - 1576)



Rafael Bombelli
(1526 - 1572)

Kasutades juba tuletatud lahendivalemeid, saab esitada selle kuupvõrrandi lahendi

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Kui hetkeks ignoreerida, mis täpsemalt $\sqrt{-121}$ on, ja kirjutada $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ ja $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$, siis

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Viimane tähendab seda, et on leitud võrrandi **reaalarvuline lahend** uute tundmatute arvude abil.

Bombelli sõnastas tehted kompleksarvudega ning näitas, et saab lahendada reaalelus ette tulevaid probleeme ning saada ka nendele reaalarvulisi lahendeid, hoolimata sellest, et peab vahepeal opereerima uute – väljamõeldud arvudega. Seega oli teaduses avatud uus Pandora laegas, kuid sedakorda siis heas ja kasulikus võtmes. Lugeses Bombelli raamatut *Algebra*, ei hoidnud oma imetlust tagasi ka matemaatilise analüüsi üks isadest – Gottfried Wilhelm Leibniz: "Bombelli on imeline meister analüütilise kunsti vallas."

Värske avastus oli esialgu väga visa levima ja võib öelda, et veel sajandiks kui mitte paariks hirmutasid kompleksarvud Euroopat ja maailma laiemalt. Kui juba matemaatikud ise üritasid pidada püha sõda kompleksarvudega, siis mida veel teised teadlased pidid tegema? Prantsuse filosoof ja matemaatik **René Descartes (1596 - 1650)** nimetas neid arve sõnaga "imaginary" ja seda halvustavas võtmes, justkui insuldiks matemaatikas, nagu algaja veaks või ürituseks nulliga jagada või nagu alustataks uut sõda Aasias. Ja tuleb tõdeda, et tõepoolest, kui meil on $3i$ (i on üks nendest uutest arvudest) sõpra või $5i$ miljonit eurot, siis see meid eriti elus edasi ei aita. Juhtus aga nii, vähemalt seekord, et kõik uuenduste vastu sõdijad said imaginaarselt vastu nina ja päris valusalt.

Üsna pea oskame avaldisest

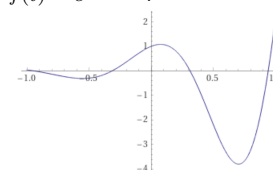
$$f(t) = e^{(2+5i)t}$$

välja lugeda, et see kirjeldab võnkumist, mille amplituud e^{2t} muutub ajas eksponentsiaalselt ja mille sagedus on $\omega = 5$ (või siis periood on $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}$). Hetkel ei ole niivõrd tähtis, mida täpselt (reaalelu mõttes) tähendab avaldis nagu $e^{(2+5i)t}$ ise, vaid see, mida selle abil saab kirjeldada ning mida sellest välja annab lugeda.

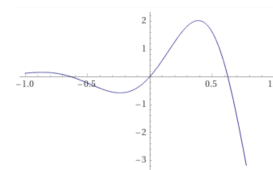
Visalt, aga kindlalt oleme tänaseks päevaks jõudnud sinna, et elektroonikas ja kvantmehaanikas ilma kompleksarvudeta ei saagi midagi mõistlikku teha...



Reaalosa ja imaginaarosa graafikud funktsioonile $f(t) = e^{(2+5i)t}$.



$$\operatorname{Re} f(t) = e^{2t} \cos 5t$$



$$\operatorname{Im} f(t) = e^{2t} \sin 5t$$

15.2 Kompleksarvud

Definitsioon 15.1

Kompleksarv nimetatakse avaldist

$$z = a + bi,$$

kus a ja b on reaalarvud ning i on imaginaarühik. Esimest liidetavat nimetatakse kompleksarvu reaalsaks ($a = \operatorname{Re} z$) ja teist liidetavat bi kompleksarvu imaginaariosaks, kus b on imaginaariosa kordaja ($b = \operatorname{Im} z$).

Definitsioon 15.2

Kompleksarvu i , mille korral kehtib $i^2 = -1$, nimetatakse **imaginaarühikuks**.

Definitsioon 15.3

Kui kompleksarvu $z = a + bi$ reaalsosa on null, s.o kui $a = 0$, siis kompleksarvu kujul $z = bi$ nimetatakse puhtimaginaararvuks. Kõigi kompleksarvude hulka tähistatakse sümboliga $\mathbb{C}$.

Märkus 15.1

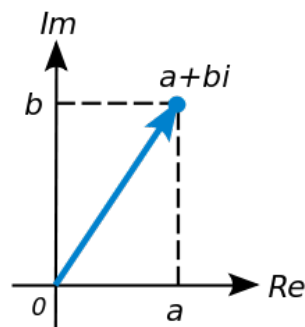
Igale kompleksarvule $z = a + bi$ vastab üksüheselt reaalarvude järjestatud paar (a, b) , millele omakorda vastab üksüheselt ristkoordinaadistiku tasandi punkt koordinaatidega (a, b) . **Seega võime kõiki kompleksarve kujutada punktidenä koordinaattasandil.** Sellist tasandit, mille igale punktile (a, b) on seatud vastavusse kompleksarv $z = a + bi$, nimetatakse *komplekstasandiks* ehk ka Argand' tasandiks (joonist sellel – *Argand' diagrammiks*). Koordinaadistiku abstsissstelge nimetatakse *reaalteljeks* (tähistatakse Re) ja ordinaattelge nimetatakse *imaginaarteljeks* (tähistatakse Im).

Punkti $A = (a, b)$ (ka tema kohavektorit $\mathbf{OA}$) nimetatakse kompleksarvu $z = a + bi$ geomeetriliseks kujutiseks.

"Elu on kompleksne. Tal on olemas reaalne ja imaginaarne osa..."

Kompleksarvuks on näiteks $z = 5 + 8i$.

Märgime, et elektroonikas kasutatakse tihti i asemel tähist j , kuna i on seal voolutugevuse tähistamiseks.



Joonis: Wikipedia

Jean-Robert Argand (1768 - 1822) oli Šveitsis sündinud prantsuse amatöörmatemaatik.

15.3 Kompleksarvu algebraline kuju

Definitsioon 15.4

Kompleksarvu z esitusviisi $z = a + bi$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, nimetatakse kompleksarvu z **algebraliseks** (ka Descartes'i) **kujuks**.

Definitsioon 15.5

Kompleksarvu $z = a + bi$ **mooduliks** nimetatakse reaalarvu $|z|$, mis on määratud võrdusega

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kompleksarvu $3 + 4i$ moodul on $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Seega leitakse moodul Pythagorase teoreemi abil.

Märkus 15.2

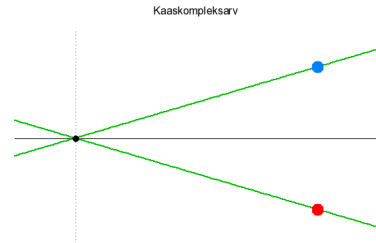
Moodul $|z| \geq 0$ on **reaalarv** ja see kujutab endast komplekstasandil asuva punkti (a, b) kaugust nullpunktist.

Kompleksarvu $3 + 4i$ kaaskompleks on $3 - 4i$.

Definitsioon 15.6

Kompleksarvu $z = a + bi$ **kaaskompleksarvuks** (kaaskompleksiks) nimetatakse kompleksarvu

$$\bar{z} = a - bi.$$

**Märkus 15.3**

Kaaskompleksarv $\bar{z}$ asub arvuga z nullpunktist võrdse kaugusel ning z ja $\bar{z}$ asuvad sümmeetriliselt reaaltelje suhtes. On vahetu kontrollida, et

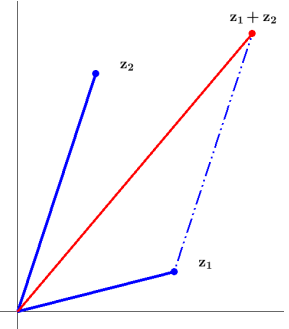
1. $|z| = |\bar{z}|$,
2. $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

15.4 Tehted kompleksarvudega

Olgu antud kompleksarvud $z_1 = a_1 + b_1i$ ja $z_2 = a_2 + b_2i$. Siis nende võrdumine, summa, vahe, korrutis ja jagatis defineeritakse järgnevalt:

1. $z_1 = z_2$ parajasti siis, kui $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$,
2. $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$,
3. $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$,
4. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = z_1 \frac{\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$, kui $z_2 \neq 0$.

Kompleksarvude liitmine on analoogiline vektorite liitmisega.



Korrutamine algebralisel kujul on tavaline algebraliste avaldiste korrutamine, millel on geomeetriline tõlgendus (vaatleme seda hiljem trigonomeetrilise esituse juures).

Jagamine defineeritakse korrutamise kaudu.

Märkus 15.4

Osutub, et kõigi nende tehete suhtes käitub kompleksarv $z = a + 0i$ nagu reaalarv a . Seetõttu võime need arvud omavahel samastada, s.t $a = a + 0i$. Sel viisil saame, et $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Näide 15.1 Leida $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$, kui

$$z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 - i.$$

Saame

$$z_1 + z_2 = (3 + 4) + (5 - 1)i = 7 + 4i,$$

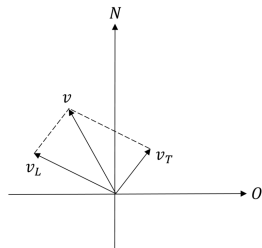
$$z_1 - z_2 = (3 - 4) + (5 + 1)i = -1 + 6i,$$

$$z_1 z_2 = (3 + 5i)(4 - i) = (12 - (-5)) + (-3 + 20)i = 17 + 17i,$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 5i}{4 - i} \frac{4 + i}{4 + i} = \frac{(3 + 5i)(4 + i)}{|4 - i|^2} = \frac{(12 - 5) + (3 + 20)i}{16 + 1} \\ &= \frac{7}{17} + \frac{23}{17}i. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 15.2 Kompleksarvude kasutamine praktikas. Vaatleme koordinaadistikku, kus reaaltelg on suunatud itta, vertikaaltelg põhja. Lennuk lendab kiirusvektoriga $v_L = -480 + 210i$ km/h, milles ei arvestata tuule mõju. Tuule kiirusvektor on $v_T = 60 + 210i$ km/h. Leiame lennuki tegeliku kiirusvektori.



Kompleksarve liidetakse nagu vektoreid, seepärast saame

$$v = v_L + v_T = -480 + 210i + 60 + 210i = -420 + 420i.$$

Saame teada, et lennuk lendab tuule mõjul täpselt loodesse (suunal $(-420, 420)$ on sama mis suunal $(-1, 1)$ ja see on 135° reaaltelje positiivse suuna suhtes). Lisaks saame, et lennuk lendab kiirusega, mille arväärtuseks on $|v| = \sqrt{420^2 + 420^2} = 420\sqrt{2}$ km/h.

Selles ülesandes me tegelikult ei pea kasutama kompleksarve, kuid samas on nende kasutamine siin lihtne.

◇ ◇ ◇

Kus (ja kas üldse) tehakse viga järgmises arutluses?

Kirjutame järeldused

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \Rightarrow$$

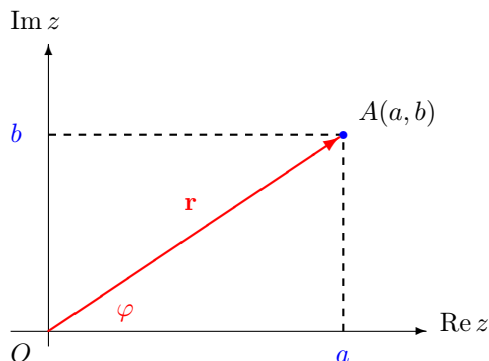
$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$1 = -1.$$

15.5 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Tähistame kohavektori $\mathbf{OA}$ pikkuse $|z| = |\mathbf{OA}|$ sümboliga r ning olgu φ nurk x -telje positiivse suuna ja vektori $\mathbf{OA}$ vahel.



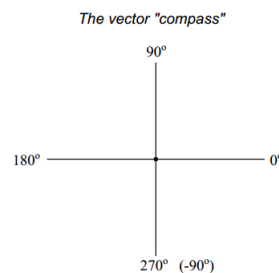
Siis siinuse ja koosinuse seostest täisnurkses kolmnurgas saame

$$b = r \sin \varphi, \quad a = r \cos \varphi$$

ning

$$z = a + bi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi,$$

millest saamegi kompleksarvu trigonomeetrilise kuju.



Trigonomeetrilist kuju esitatakse lühemalt

$$z = r \angle \varphi \text{ või ka } z = r \text{ cis } \varphi.$$

Definitsioon 15.7

Avaldist

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nimetatakse kompleksarvu z **trigonomeetriliseks kujuks**, kus reaalarv r on kompleksarvu z moodul $|z|$, reaalarv φ on kompleksarvu z argument, mida tähistatakse $\varphi = \arg z$.

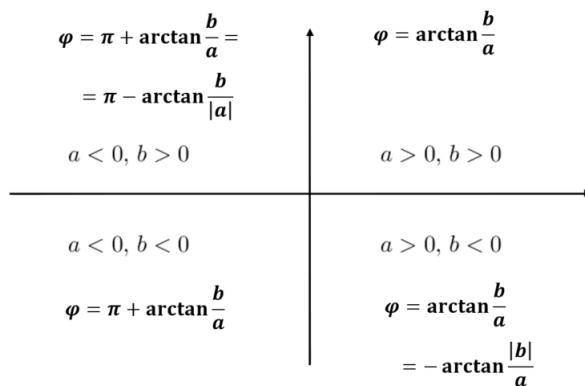
Kompleksarvu $z = a + bi$ võib vaadelda kui reaalarvude paari (a, b) või siis reaalarvude paari $r \angle \varphi$. Tegemist on lihtsalt kahe erineva koordinaatide süsteemiga.

Reaalarvude paar (a, b) näitab kompleksarvu z ristkoordinaate tasandil. Punkti z jõudmiseks tuleb liikuda a ühikut reaaltelje ja b ühikut imaginaartelje suunas.

Paar $r \angle \varphi$ kujutab endast polaarkoordinaate ning punkti z jõudmiseks tuleb minna x -teljest vastupäeva φ radiaani võrra mööda ringjoont raadiusega r ja keskpunktiga koordinaatide alguses.

Märkus 15.5

Kompleksarvu $z = a + bi$ argumenti φ leidmisel võib kasutada järgmist eeskirja



Näide 15.3 Viime $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ trigonomeetrilisele kujule.

Märgime, et punkt z asub teises veerandis ja z koordinaadid tasandil on $(a, b) = (-2, 2\sqrt{3})$. Sel juhul

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4.$$

Leiame

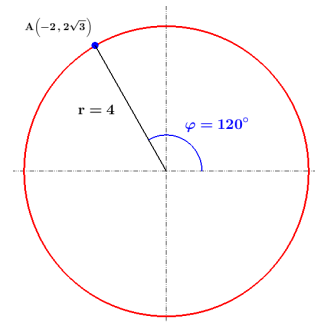
$$\arctan \frac{b}{|a|} = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Seega $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ja

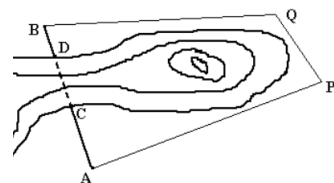
$$z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Punkti z jõudmiseks peaksime liikuma alates x -teljest 120 kraadi vastupäeva mööda ringjoont raadiusega $r = 4$. Sama tulemuse annab liikumine samal ringjoonel samast alguspunktist, aga 240 kraadi päripäeva.

◇ ◇ ◇



Näide 15.4 Insener soovib rajada sirgjoonelise raudtee linnast A linna B . Punktist C punkti D tuleb rajada tunnel läbi mäe. Mõõtmisi saab teha vaid maa peal, kuid kahjuks varjab mägi vaatevälja linnade A ja B vahel. Ümber mäe on võimalik mõõta vahemaa ja nurk suure puuni (punkt P), kivirahnuni (punkt Q) ja punktis Q tekib silmside linnaga B . Mõõtmised annavad järgmised tulemused (punktide vaheline kaugus ja vastava vektori nurk x -teljega):



(Allikas: [12])

$$AP(10.13 \text{ km}, 19.8^\circ), \quad PQ(3.17 \text{ km}, 125.3^\circ), \quad QB(8.68 \text{ km}, -177.4^\circ).$$

Milline on linnade A ja B vaheline kaugus ja millise nurga all tuleks hakata linnast A liikuma?

Üks võimalikke lahendusi AB leidmiseks on kasutada vektorite liitmist. Viimast saab edukalt teha kompleksarvu algebralise kuju kaudu. Saame

$$\begin{aligned} z_1 &= 10.13 (\cos 19.8^\circ + i \sin 19.8^\circ) && \approx 9.53 + 3.43i, \\ z_2 &= 3.17 (\cos 125.3^\circ + i \sin 125.3^\circ) && \approx -1.83 + 2.59i, \\ z_3 &= 8.68 (\cos(-177.4^\circ) + i \sin(-177.4^\circ)) && \approx -8.67 - 0.39i. \end{aligned}$$

Märgime, et koordinaadid algebralises kujus on esitatud punkti A kui koordinaatide alguspunkti suhtes. Edasi leiame

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = -0.97 + 5.63i,$$

$$|z| = \sqrt{(-0.97)^2 + 5.63^2} \approx 5.71, \quad \arg z \approx \pi - 1.4 = 1.74 \text{ rad} \approx 99.78^\circ.$$

Saime, et linnade A ja B vaheline kaugus on 5.71 km ja linnast A tuleks liikuma hakata 99.78° nurga all.

◇ ◇ ◇

$$\pi \text{ radiaani} = 180^\circ.$$

Kaks trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

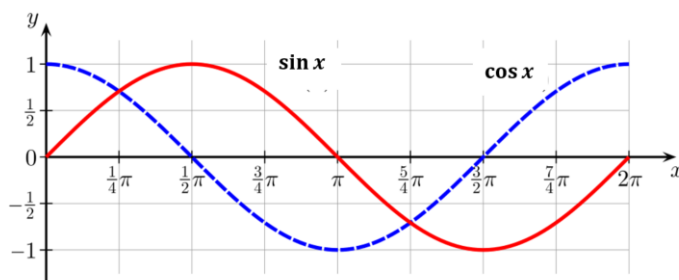
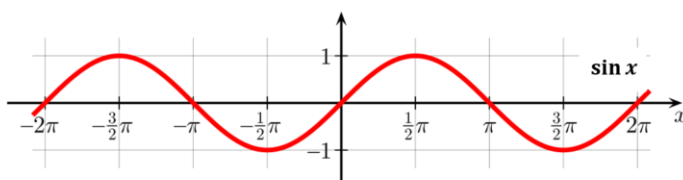
on võrdsed parajasti siis, kui

1. nende moodulid on võrdsed ($r_1 = r_2$),
2. nende argumentide vahe on 2π kordne, s.t $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

15.6 Siinus ja koosinus

Tuletame siinkohal meelde mõningad siinus- ja koosinusfunktsioonide elementaarsed omadused.

nurk φ°	nurk φ rad	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
120	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0



(Graafikud: Wikipedia)

Siinuse ja koosinuse väärtused jäävad alati lõiku $[-1, 1]$.

Siinus on paaritu ja koosinus on paarisfunktsioon, s.t

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi.$$

Tuletame veel meelde, et

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Näiteks on

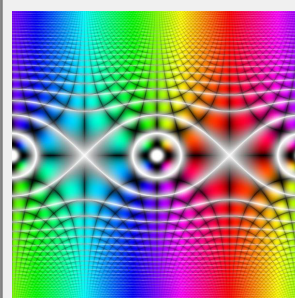
$$\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$$

ja

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

võrdsed kompleksarvud.

Rääkides kompleksarvudest, võib näiteks $\sin z$ (z on kompleksarv) graafikuks saada midagi üsna müstilist (heledus on seotud mooduliga $|\sin z|$ ja saturatsioon on seotud suurustega $\operatorname{Re} \sin z$ ja $\operatorname{Im} \sin z$):



$\sin z$, $z \in \mathbb{C}$,
Allikas: Wikipedia

15.7 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

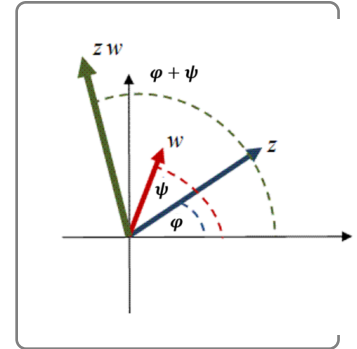
Siis kahe kompleksarvu korrutamise ja jagamise kohta kehtivad järgmised reeglid:

1. korrutamisel moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

2. jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad r_2 \neq 0.$$



Need reeglid on tuletatavad trigonomeetrilistest valemitest $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ ja $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ kohta. Näiteks

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 [\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1] r_2 [\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Märkus 15.6

Oma olemuselt annavad korrutamise ja jagamise reeglid trigonomeetrilisel kujul lihtsa matemaatilise aparatuuri vektorite pööramiseks või punktihulga liigutamiseks tasandil.

Kui tahetakse mingit punkti z tasandil liigutada samal ringjoonel 90 kraadi vastupäeva, siis tuleb vastavat punkti z korrutada kompleksarvuga i (ehk $1 \angle 90^\circ$).

Kui soovitakse punkti z pöörata 45 kraadi päripäeva, siis tuleb arvu z korrutada kompleksarvuga $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ (ehk arvuga $1 \angle -45^\circ$).

Näide 15.5 Leiame $z_1 z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$, kui

$$z_1 = 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), \quad z_2 = 4 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Eeltoodud valemite põhjal

$$z_1 z_2 = 8 (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

◇ ◇ ◇

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib **de Moivre'i valem**

$$z^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (15.1)$$

kus $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ja iga kompleksarvu z korral on defineeritud $z^0 = 1$.

Tõestus. On selge, et valem kehtib $k = 1$ korral, samuti $k = 0$ korral. Kasutades matemaatilist induktsiooni, oletame, et valem kehtib naturaalarvu k korral. Näitame, et siis kehtib de Moivre'i valem ka $k + 1$ korral. Saame

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k z = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^{k+1} (\cos k\varphi \cos \varphi - \sin k\varphi \sin \varphi + i (\cos k\varphi \sin \varphi + \sin k\varphi \cos \varphi)) \\ &= r^{k+1} (\cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi)). \end{aligned}$$

Kui k on negatiivne täisarv, siis

$$\begin{aligned} z^{-|k|} &= \frac{1}{z^{|k|}} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^{|k|} (\cos(|k|\varphi) + i \sin(|k|\varphi))} \\ &= \frac{1}{r^{|k|}} (\cos(0 - |k|\varphi) + i \sin(0 - |k|\varphi)) = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \end{aligned}$$

□

Märkus 15.7

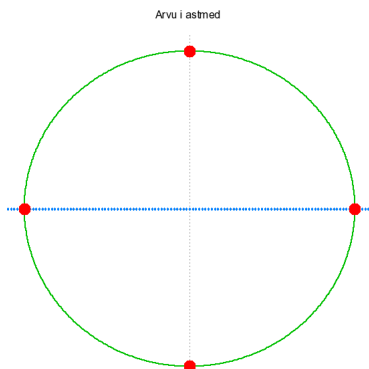
De Moivre'i valem ei kehti ühese võrdusena suvalise reaalarvu $\alpha \in \mathbb{R}$ jaoks, vaid ainult täisarvude $k \in \mathbb{Z}$ korral. Näiteks, $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i$ (sest $(\pm i)^2 = -1$). De Moivre'i valem annaks aga ainult ühe vastuse,

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

Näide 15.6 Leiame imaginaararvu i astmed. Esiteks, $|i| = 1$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Kompleksarvu korrutamisel muutub uue arvu nurk korrutatava arvu nurga võrra, meie juhul $\frac{\pi}{2}$ võrra. Seega

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \dots$$

Kõik i astmed asuvad ühikringjoonel.

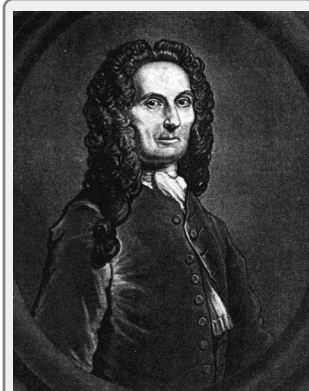


◇ ◇ ◇

Näide 15.7 Leiame ühikringi elemendi $z = \cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$ seitsmenda astme. Saame

$$z^7 = 1^7 (\cos(7 \cdot 50^\circ) + i \sin(7 \cdot 50^\circ)) = \cos 350^\circ + i \sin 350^\circ.$$

◇ ◇ ◇



Allikas: Wikipedia
Abraham de Moivre
(1667 - 1754)

oli prantsuse päritoluga inglise matemaatik, kes on tuntud ka tõenäosusteooria vallas. De Moivre ei avaldanud kunagi valemit ilmutatud kujul ja valemi tõestas hoopis šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 - 1783). De Moivre avaldas valemi ilmutamata kujul (mille jätkame selle keerukuse tõttu siinkohal esitamata) aastal 1707 ning tegi vastava märkuse veel aastal 1722, millest saab teatud asendustega tuletada valemi

$$\begin{aligned} [\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi]^n \\ = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Meie kasutatava ilmutatud kuju võttis kasutusele samuti Euler, kes üldistas kompleksarvude astendamist ka reaalsete astmete $\nu \in \mathbb{R}$ jaoks.

Londoni kohvikud olid omaaegselt informatsiooni- ja kultuurikeskused, kus tolle aja teadlased said uut infot ja arutlesid huvitavate probleemide üle. Sealhulgas mängiti ka malet ning viimasest ei jäänud eemale de Moivre, kes andis muuhulgas lahenduse ratsu teekonnale malelaual (selle esmapilgul lihtsa ja teisejärgulise probleemiga on kokku puutunud paljud kuulsad matemaatikud nagu näiteks Euler, Legendre, Vandermonde). Mingil määral võib analoogi leida meie Werneri kohvikuga Paul Kerese aegadest.

Näide 15.8 Olgu antud kompleksarv $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, mis tähendab, et z asub ühikringjoonel. Siis iga $n \in \mathbb{Z}$ korral

$$z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

ja

$$z^{-n} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi) = \cos n\varphi - i \sin n\varphi.$$

Nendest võrdustest saame, et

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 16

Kompleksarvu juured. Eksponentkuju

16.1 Kompleksarvu n -astme juured	278
16.2 Kompleksarvu eksponentkuju	279
16.3 Algebraliste võrrandite lahendamisest	282
16.4 Fraktalite tutvustus	284

Eksamiteemad

1. Kompleksarvu eksponentkuju.
2. n -astme juure mõiste, leidmine.
3. Euleri valem ja samasus.
4. Algebraliste võrrandite lahendamine (lihtsamal juhul).

16.1 Kompleksarvu n -astme juured

Definitsioon 16.1

Kompleksarvu z **n -astme juureks** nimetatakse iga kompleksarvu w , mille korral $w^n = z$.

Igal kompleksarvul $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ on **n erinevat n -astme juurt**, mis avalduvad kujul

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (16.1)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Märkus 16.1

Avaldise saab meelde jätta, kui kirjutada kompleksarv z perioodiliselt trigonomeetrilisel kujul

$$z = r (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ja kasutada de Moivre'i valemit astmega $\frac{1}{n}$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Näide 16.1 Leiame kompleksarvu $z = 16i$ neljanda astme juured. Esitame selle kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul

$$z = 16 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$$

seejärel leiame

$$z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\pi + 4k\pi}{8} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{8} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Eraldi esitatuna on need juured

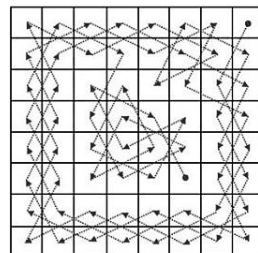
$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right),$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right),$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right),$$

$$w_3 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

Räägitakse, et oma viimastel aastatel aitas kohvikus malemängimine de Moivre'il pisut leevendada oma rahalist olukorda.



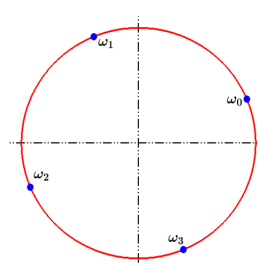
Ratsu teekond (Allikas: [1])



19. sajandi London Slaughter's Coffeehouse (Allikas: [1])

Legend pajatab, et de Moivre ennustas täpselt ette oma surmapäeva. Tervislikel põhjustel magas de Moivre iga päev kaua. Märgates, et ta magab iga päev u. 15 minutit kauem kui eelmisel päeval, arvutas ta välja, millal jõuab kätte 24-tunnine uneperiood ... see saabus 27. novembril 1754.

Paneme tähele, et kõik juured asuvad komplekstasandil raadiusega $r = 2$ antud ringjoonel, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis.



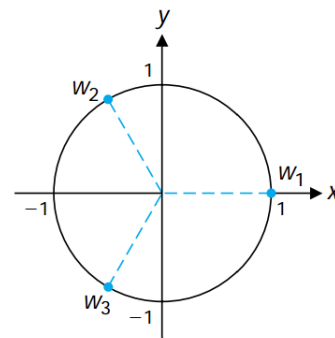
Näide 16.2 Reaalarvude korral võib tunduda, et siin on asi lihtne. Tegelikult nii ei ole. Leiame reaalarvu 1 kui kompleksarvu kolmanda astme juured

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Eraldi kirjutatuna saame

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ w_2 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ w_3 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



Paneme tähele, et juuri võiksime leida ka teisiti. Selles ülesandes peab ühikringjoonel asuma 3 erinevat juurt. Seega peavad nad asuma samal ringjoonel üksteisest $360/3 = 120$ kraadi eraldatuna. Üks juurtest on 1 ja teised kaks saadakse sellest 120 kraadi võrra pööratuna.

16.2 Kompleksarvu eksponentkuju

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob **Euleri valem**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (16.2)$$

kus φ on reaalarvuline muutuja ja $e \approx 2.71828$ on naturaallogaritm alus.

Kolmpleksarvu trigonomeetrilist kuju $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ arvestades tugineb Euleri valemile järgmine mõiste.

Definitsioon 16.2

Kompleksarvu z **eksponentkujuks** nimetatakse esitust

$$z = r e^{i\varphi},$$

kus r on kompleksarvu z moodul ja φ argument.

Märkus 16.2

Märgime, et kompleksarvud $e^{i\varphi}$ asuvad kõik komplekstasandil ühikringjoonel ja selline esitus on igal ühikringjoone punktil.

Arv e on nn. Euleri arv šveitsi matemaatiku **Leonhard Paul Euleri (1707 - 1783)** järgi (aastast 1727).



Johann Georg Bruckeri portree Leonhard Eulerist
(Allikas: Wikipedia)

Kuna Euler viibis enamuse oma täiskasvanueast Sankt-Peterburgis, siis on nimetatud teda ka vene matemaatikuks. Euler oli esimene, kes uuris põhjalikumalt arvu e , enne teda mainivad arvu e veel näiteks Jacob Bernoulli ja Gottfried Leibniz. Euler oli esimene, kes näitas 1737. aastal, et e on irratsionaalarv, 1748. aastal arvutas Euler arvu e esimesed 18 komakohta.

Märkus 16.3

Kompleksarvu trigonomeetrilises kujus esitavad kõik avaldised $r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$, ühte ja sama arvu funktsioonide koosinus ja siinus perioodilisuse tõttu. Sama kehtib ka eksponentkju kohta: avaldised $r^{i(\varphi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, on kõik ühe ja sama kompleksarvu esitused.

Näide 16.3 Viime kompleksarvu $z = -1 - \sqrt{3}i$ eksponentkujule.

Leiame mooduli

$$r = \sqrt{3+1} = 2.$$

Arv z asub III veerandis. Seega leiame argumenti järgmiselt:

$$\varphi = \pi + \arctan \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Siit saame korraga kirjutada nii trigonomeetrilise kui ka eksponentkju:

$$z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 e^{i \frac{4\pi}{3}}.$$

Märkuse 16.3 põhjal võime kirjutada samuti

$$z = 2 e^{-i \frac{2\pi}{3}}.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 16.4

Erijuhul $\varphi = \pi$ saame Euleri valemist Euleri samasuse

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

mis kaasab ühte valemisse 5 matemaatilist konstanti ja 4 tehet või seost: astendamine, korrutamine, liitmine ja võrdus. Viimase põhjal peavad paljud matemaatikud Euleri samasust läbi aegade üheks kõige ilusamaks valemiks. Kui kirjutada

$$e^{i\pi} = -1,$$

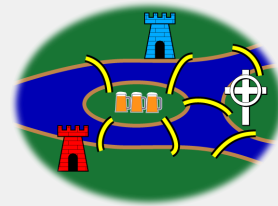
siis võib näha, et irratsionaalarvu e aste imaginaararvuga $i\pi$ annab tulemuseks täisarvu -1 .

Paneme järgnevalt kirja tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega.

Olgu antud kaks kompleksarvu eksponentkujul $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Siis kehtivad järgmised võrdused:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad r_2 \neq 0,$
3. $z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{i n \varphi}, \quad n \in \mathbb{Z},$
4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$

Leonhard Eulerit on nimetatud läbi aegade kõige olulisemaks matemaatikuks (see viimane teema on muidugi subjektiivne). Euler on populaarteaduslikus kirjanduses eelkõige tuntud Königsbergi sildade probleemi lahendajana (eelkõige siis range matemaatilise lahenduse mõttes). Omal ajal püstitati probleem, kas saab läbida Königsbergi 7 silda nii, et alustades mingist punktist jõuame tagasi algusesse, kusjuures kõiki sildu tuleks läbida vaid ühe korra.



Königsbergi sillad
(Allikas: Wikipedia)

Harvardi matemaatik Benjamin Pierce ütles: "Me ei suuda seda (samasust) mõista ja me ei tea, mida see täpselt tähendab, kuid me oleme selle tõestanud ja see läbi me teame, et see peab olema tõde."

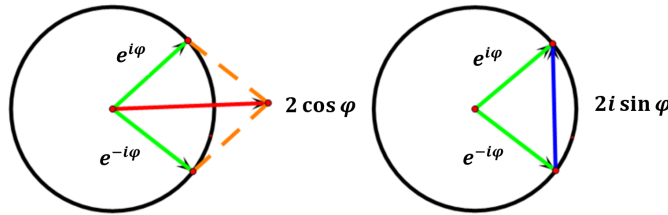
Märkus 16.5

Euleri valem lubab meil tuletada siinuse ja koosinuse alternatiivsed esitused. Kehtib

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi, \\e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi.\end{aligned}$$

Mõlemat avaldist liites ja lahutades saame

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$



Allikas: <http://mathforum.org/mathimages>

Näide 16.4 Kompleksarvu eksponentkuju koos Euleri valemiga lubab saada mõningaid trigonomeetrilisi valemeid. Näiteks

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= e^{i(\alpha + \beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \\&= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\&= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)i\end{aligned}$$

annab reaalosade ja imaginaarosade võrdumise põhjal

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 16.5 Vaatleme veel teisendust

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha &= e^{i2\alpha} = (e^{i\alpha})^2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 \\&= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (2 \sin \alpha \cos \alpha)i.\end{aligned}$$

Sellest saame

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Üks humoorikas lugu (ilmselt siiski legend, [8]) on järgmine. Denis Diderot oli 18. sajandi prantsuse filosoof, kes reisib palju mööda Euroopat. Oma teekonnal sattus ta ka Sankt-Peterburgi. Oma sarmiga kogus ta kiiresti enda ümber noori järgijaid ja sama juhtus tema ateistliku filosoofiaga. Viimane tegi murelikuks vene keisrinna Katariina II.

Samal ajal töötas Sankt-Peterburgis Leonhard Euler, kes, vastupidiselt Diderot'le, oli pühendunud kristlane. Keisrinna Katariina II palus Eulerit oma mures aidata, mille peale Euler tutvustaski ennast Diderot'le kui meest, kes leidis matemaatilise tõestuse Jumala olemasolust.

Kindla olemisega seletas ta Diderot'le: "Härä, võrdus $\frac{a+b^n}{n} = x$ kehtib. Järelikult, Jumal on olemas. Mis te selle peale kostate?" Selle peale oli kiire taibuga Diderot sõnatu (üldiselt tema teadmised algebrast olid nullilähedased). Ta naerdi tema poolehoidjate poolt välja ja järgmisel päeval küsis ta luba naasta tagasi Prantsusmaale. Märkime, et Euleri toodud võrdus ei tähenda midagi erilist.

Üks vaimukas (võimalik, et sügavamõtteline, ning on seoses ka eelmise naljaga) internetis olev vastus küsimusele: "Millist praktilist väärtust omab samasus $e^{i\pi} + 1 = 0$?" kõlas:

"Selle kõige olulisem väärtus on see, et nii mõnedki tüütud filosoofid on sunnitud vaikima".

16.3 Algebraliste võrrandite lahendamisest

Definitsioon 16.3

Võrrandit

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (16.3)$$

nimetatakse **n astme algebraliseks võrrandiks**. Kordajad $a_0, \dots, a_n$ võivad olla nii reaalsed kui komplekssed, kusjuures $a_0 \neq 0$.

Teoreem 16.1

Algebra põhiteoreem. Igal n astme algebralisel võrrandil on kompleksarvude hulgas n lahendit (kui arvestada kordseid lahendeid vastavalt kordsusele).

Näide 16.6 Lahendame võrrandi

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0.$$

Selle võrrandi saame esitada kujul

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x - 2)^2(x + 2)^2 = 0.$$

Siit järeldub, et peavad kehtima $(x - 2)^2 = 0$ ja $(x + 2)^2 = 0$. Seega esialgse võrrandi lahendid on $x_1 = x_2 = 2$ ja $x_3 = x_4 = -2$. Algebra põhiteoreemi järgi teame, et rohkem lahendeid olla ei saa.

◇ ◇ ◇

Vaatleme n astme polünoomi

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

milles kordajad $a_0, \dots, a_n$ on reaalarvud, kusjuures $a_0 \neq 0$.

Võrrandi (16.3) lahendite ehk polünoomi P_n juurte leidmise kohta saab väita järgmist. Polünoom P_n lahutub korrutiseks

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{l_r},$$

kusjuures ruutpolünoomidel $x^2 + p_jx + q_j$, $j = 1, \dots, r$, puuduvad reaalarvulised juured (nende polünoomide väärtused on iga $x \in \mathbb{R}$ korral positiivsed). Reaalarvud $x_1, \dots, x_m$ on polünoomi P_n juured vastavalt kordsusega $k_1, \dots, k_m$. Reaalarvuliste kordajatega p_j, q_j ruutpolünoomide $x^2 + p_jx + q_j$ juured leitakse ruutvõrrandite

$$x^2 + p_jx + q_j = 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

lahenditena, mis esinevad kaaskomplekside paaridena kordsusega vastavalt $l_1, \dots, l_r$.

Algebra põhiteoreemi tõestuse idee seotakse tavaliselt saksa matemaatiku Carl Friedrich Gaussi nimega aastast 1797, kuid hiljem on seda mitte päris veatut tõestust mõnede kohtade peal täiendatud. Selle lihtsalt kõlava ja olulise teoreemi tõestamisel on vaeva näinud paljud matemaatikud.

Teoreem ütleb, et kui on leitud n lahendit, siis ei ole vaja lahendeid enam edasi otsida, kuid väiksema arvu leitud lahendite korral tuleks edasi lahendada.

Näide 16.7 Lahendame võrrandi

$$x^3 - 1 = 0.$$

Esitame selle kujul

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Reaalne lahend on $x_1 = 1$ ja kompleksed lahendid on

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\text{ehk } x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ja } x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Märgime, et lahendid võib leida ka kui kolmanda astme juured ühest, sest võrrand on $x^3 = 1$ ehk kompleksarvude mõttes $\sqrt[3]{x} = 1$. Selle lahendid on

$$x_k = e^{i \frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

mis olid juba leitud näites 16.2.

◇ ◇ ◇

Kasutades võrrandi $x^3 - 1 = 0$ lahendamiseks komplekstasandil ligikaudseid meetodeid (näiteks Newtoni meetodit) võib saada midagi sellist:



Greg Fowleri teos

Allikas: [25]

Nullkohtade x_1, x_2 ja x_3 ümber jäävaid suuri ovaalseid alasid kutsutakse pulli silmadeks.

Näide 16.8 Lahendame võrrandi

$$x^6 - 2x^3 + 2 = 0.$$

Siin viib sihile järgmine standardvõte: tähistame $z = x^3$. Sel juhul saame võrrandi

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

mille lahenditeks on

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i.$$

Algse võrrandi lahendite leidmiseks moodustame kolmanda astme juured arvudest $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ja $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Need on

$$\begin{aligned} x_{1,2,3} &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{(8k+1)\pi}{12} + i \sin \frac{(8k+1)\pi}{12} \right), \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

ja $x_{1,2,3}$ kaaskompleksid

$$x_{4,5,6} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{(8k+1)\pi}{12} - i \sin \frac{(8k+1)\pi}{12} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Märgime, et $\sqrt{2}$ ja $\sqrt[6]{2}$ tähendavad siin positiivseid reaalarve, mitte teise või kuuenda astme juuri (nende hulka) kompleksarvude mõttes.

◇ ◇ ◇

16.4 Fraktalite tutvustus

Vaatleme iteratsiooniprotsessi

$$z_{n+1} = z_n^2 + C, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Siin z_n ja C on kompleksarvud, kusjuures $z_0 = 0$. Kui võtta nullist erinev z_0 , siis muutub ka kujund.

1. Võtame komplekstasandil näiteks ruudu suurusega $[-2, 2] \times [2, 2]$ (nullpunkt on keskel).
2. Nüüd tuleb valida samm h , millega käia läbi kõik ruudustiku punktid (näiteks $h = 0.01$).
3. Tuleb ka otsustada, kui suur võib olla maksimaalne iteratsioonide arv N , näiteks $N = 50$.
4. **Iga punkti C korral** (näiteks $C = -0.5 + 1.2i$) ruudustikust arvutame

$$z_1 = 0 + C, \quad z_2 = z_1^2 + C, \quad z_3 = z_2^2 + C, \quad \dots, \quad z_N = z_{N-1}^2 + C.$$

5. Arvutame mooduli $|z_N|$.
6. Kui $|z_N| \leq 2$, siis värvime punkti C komplekstasandil mustaks, vastasel korral valgeks.
7. Läheme järgmise punkti C juurde ja alustame kogu iteratsiooni n suhtes uuesti.

Märkus 16.6

Kui tahame kujundile värve lisada, siis seda tehakse järgmiselt:

1. Valime iga $n = 1, 2, \dots, N$ jaoks ühe värvi.
2. Võrdleme moodulit $|z_n|$ igal iteratsioonil.
3. Kui $|z_n| > 2$, siis lõpetame iteratsiooni ning värvime punkti C seda värvi, mis me n jaoks reserveerisime ja läheme järgmise punkti C juurde.

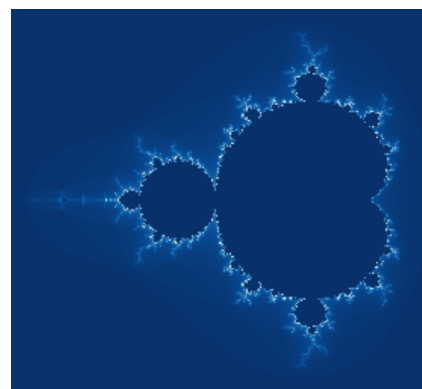
Märkus 16.7

Loomulikult ei tehta neid arvutusi käsitsi ükshaaval, vaid kasutatakse näiteks for-tsükleid. Värvide jaoks võib kasutada paletti ja kuvada näiteks maatriksit kontuurgraafikuna, milles igale punktile vastab iteratsioonide arv n . Nii saab palju sujuvamad üleminekud.

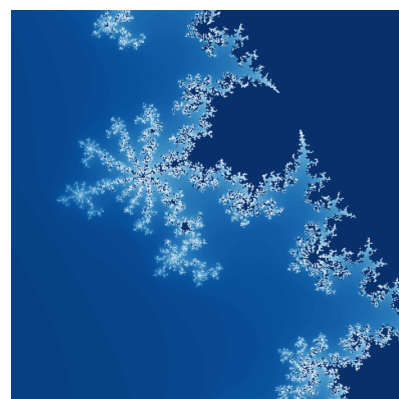
Kuigi näiteks Pythonis saab kasutada kompleksarve, siis võib selle arvutuse kokku panna ka täiesti ilma. Selleks tuleb defineerida kaheelemendiline list $[a, b]$ ning siis näiteks korrutuste oleks

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

Analoogiliselt tuleks teha defineerida summa ja mooduli jaoks.



Suurendused:



Kirjandus

- [1] D. R. Bellhouse. Abraham De Moivre: Setting the Stage for Classical Probability and Its Applications. CRC Press, 2011.
- [2] D. R. Causton. A Biologist's Basic Mathematics. Edward Arnold, 1983.
- [3] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).
- [4] E. Dummit. Calculus I. Introduction to Differentiation (veebikonspekt). 2013.
- [5] C. Fletcher. Physics with Calculus. Volume I (Classical Mechanics). California, 1994.
- [6] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.
- [7] G. Gamow. My World Line. Viking Press, 1970.
- [8] R. J. Gillings. The So-Called Euler-Diderot Incident. Am. Math. Mont. vol. 61 (2), 77-80, 1954.
- [9] J. Grabiner. A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings. MAA, 2010.
- [10] J. V. Grabiner. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. Amer. Math. Mon. 90 (3): 185-194, 1983.
- [11] J. Grimbleby. Systems and Circuits (loengukonspekt). University of Reading.
- [12] A. P. Hillman, G. L. Alexanderson, M. E. Newton. Complex Numbers and Trigonometry (veebikonspekt), 2005.
- [13] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.
- [14] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.
- [15] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross,
- [16] K. Kaarli. Algebra praktikum. Lineaarvõrrandisüsteemid. Tartu, 1986.
- [17] G. Kangro. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, 1965.

- [18] M. Kilp. Algebra I. Tartu, 2005.
- [19] M. Kline. Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 2. Oxford University Press, 1990.
- [20] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt), 2002.
- [21] T. R. Kuphaldt. Lessons In Electric Circuits, Volume II - AC, 2007.
- [22] Ü. Lepik. Kaos ja kord. Tartu Ülikooli Kirjastus, 1997.
- [23] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [24] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid: teooria, näiteid, ülesandeid. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011.
- [25] C. A. Pickover. The Math Book. Sterling, New York, 2009.
- [26] I. Piir. Füüsika ajalugu. Ilmamaa, 2013.
- [27] P. Puusemp. Lineaaralgebra. Avita, 2008.
- [28] V. Luigelaht, E. Reiman. Matemaatika tehnikumidele. Tallinn, Valgus, 1978.
- [29] G. Rägo. Kõrgem matemaatika I. Tallinn, 1962.
- [30] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [31] S. W. Smith. The Scientist and Engineer Guide to Digital Signal.
- [32] V. Soomer. Kõrgem matemaatika (loengukonspekt).
- [33] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.
- [34] I. Stewart. 17 Equations that Changed the World. Profile Books, 2013.
- [35] S. T. Tan. Single Variable Calculus. Brooks/Cole 2010.
- [36] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.
- [37] K. Tsishchanka. Section 9.4. Areas and Lengths in Polar Coordinates (veebikonspekt). New York University 2010.
- [38] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.