

MC meetodid, praktikum 8

Teema 1: Mitmemõõtmelise normaaljaotusega juhusliku suuruse simuleerimine

Vaatleme juhusliku vektori lineaarset teisendust kujul $Y = g(X)$, kus teisendus g on $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Eeldame, et A on pööratav maatriks, siis pöördteisendus on $g^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$. Seega on loengus vaadeldud teoreemi kohaselt juhusliku vektori Y tihedusfunktsiooniks

$$f_Y(y) = f_X(A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})) \text{abs}(|A^{-1}|).$$

Kuna standardse normaaljaotuse korral on tihedusfunktsiooni eksponentfunktsiooni astendajas $-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}$, siis pärast teisendust tekib sinna

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{b})^T A^{-T} A^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{b}).$$

Võrreldes seda mitmemõõtmelise normaaljaotuse avaldisega, saame, et tulemus on jaotusega $N(\mathbf{b}, \Sigma)$, kus $\Sigma = AA^T$.

Algoritm jaotusega $N(\mu, \Sigma)$ juhusliku suuruse simuleerimiseks m -mõõtmelisel juhul ($m \geq 2$)

1. Leiame A , mille korral $AA^T = \Sigma$
2. Genereerime m sõltumatut jaotusele $N(0, 1)$ vastavat pseudojuhuslikku arvu, mille abil moodustame vektori $x = (x_1, \dots, x_m)^T$
3. Soovitud jaotusega vektoriks on $Ax + \mu$

Sobiva A leidmise moodused

- Eeskiri 1
 1. Leime Σ omaväärtused λ_i , $i = 1, \dots, m$ ja vastavad normeeritud omavektorid v^i , $i = 1, \dots, m$
 2. Moodustame maatriksi V , mille veerud vastavad omavektoritele ning diagonaalmaatriksi Λ , mille diagonaalil on omaväärtused
 3. Defineerime $A = V \Lambda^{\frac{1}{2}}$
- Eeskiri 2: Defineerime maatriksi A elemendid võrdustega järjest $i = 1, 2, \dots, m$ korral võrdustega

$$a_{ii} = \sqrt{\sigma_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^2},$$

$$a_{ki} = \frac{1}{a_{ii}}(\sigma_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}a_{kj}), \quad k > i$$

$$a_{ki} = 0, \quad k < i$$

Harjutus 1

Kirjuta eelnevalt kirjeldatud A leidmise moodustele vastavad kaks funktsiooni, mis etteantud kovariatsioonimaatriksi Σ korral leiavad sobiva maatriksi A . Kontrolli funktsioonide töö õigsust maatriksi

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

korral

Vihjed Omaväärtused ja omavektorid saab leida käsuga `eigen()`, maatriksite korrutamine toimub käsuga `%*` ja transponeeritud maatriksi saab leida käsuga `t(maatriks)`.

Harjutus 2

Genereeri mõlemat A leidmise eeskirja kasutades 200 vektorit jaotusest $N((3,1)^T, \Sigma)$, kus

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ja kujuta need graafikul. Kas visuaalset on usutav, et tulemused on samast jaotusest?

Vihjed Kasulik on genereerida kõik vajaminevad standardsele normaaljaotusele vastavad punktid korraga nii, et need paigutatakse $m \times n$ maatriksi tulpadesse. Lisaks on kasuks teadmine, kui R-is liita maatriks ja vektor, siis tekitatakse vektorile vastav sobivamõõtmeline maatriks (täites selle tulpade kaupa vektoris olevate väärtustega) ja siis liidetakse need maatriksid. Vaadelge näiteks käsu `matrix(0, nrow=3, ncol=2)+c(1,2,4)` tulemust.

Harjutus 3

Vaatleme juhuslikku suurust $W = |2X - Y + Z|$, kus (X, Y, Z) on normaaljaotusega keskväärtusega 0 ja esimeses harjutuses toodud kovariatsioonimaatriksiga. Leida hinnang juhusliku suuruse W keskväärtuse jaoks, kasutades selleks 100000 pseudojuhuslikku vektorit vaadeldavast jaotusest. Leida ühtlasi olulise nivoole $\alpha = 0.05$ vastav usaldusintervall leitud hinnangule

Teema 2: Valikumeetodi rakendamine mitmemõõtmelise juhusliku vektori genereermiseks

Nii lihtne kui üldistatud valikumeetod on kasutatavad mitmemõõtmelise juhusliku vektori genereerimiseks, kuid üldjuhul on saavutatav efektiivsus küllalt väike. Vaatleme järgnevalt ainult kahemõõtmelist juhtu. Lihtsa valikumeetodi rakendamiseks on vajalik, et soovitud jaotuse tihedusfunktsioon on nullist erinev ainult ristkülikus $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ ning et see tihedusfunktsioon on ülalt tõkestatud arvuga c . Sel juhul saame eeskirja:

1. Tekitame n pseudojuhuslikku arvu y_1 jaotusest $U(a_1, b_1)$, y_2 jaotusest $U(a_2, b_2)$ ja y_3 jaotusest $U(0, c)$
2. Jätame alles need paaridest (y_1, y_2) , mille korral kehtib $y_3 \leq f(y_1, y_2)$

Saadud punktid vastavad tihedusfunktsiooniga f jaotusele ning meetodi efektiivsuseks on $\frac{1}{c \cdot (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)}$

Harjutus 4

Vaatleme koonusekujulise funktsiooniga

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0, & x^2 + y^2 > 4, \end{cases}$$

proportsionaalse tihedusfunktsiooniga juhusliku vektori genereerimist. Genereeri lihtsal valikumeetodiga 200 vektorit sellest jaotusest ja kujuta neid graafikul.

Harjutus 5

Üldista üldise valikumeetodi algoritm mitmemõõtmelisele juhule ja kasuta seda eelmises harjutuses kirjeldatud jaotuse genereerimisel, võttes y_1 ja y_2 väärtuste genereerimisel aluseks standardse normaaljaotuse.