Kordamisküsimusi Algebra I eksamiks
Kevad 2020

Keerulisemad küsimused. (Neist üks tuleb kindlasti eksamil.)

1. Tõestada kompleksarvu juurimise valem. (Teoreem 2.11)
2. Tõestada, et kui A on ruutmaatriks üle korpuse K ja selle maatriksi mingile reale liita K suvalise elemendiga korrutatud teine rida, siis A determinant ei muutu. (Lause 4.28)
3. Tõestada teoreem maatriksite korrutise determinandist. (Teoreem 4.35)
4. Tõestada, et ruutmaatriks on pööratav parajasti siis, kui ta on regulaarne. (Teoreem 5.14)
5. Tõestada valem pöördmaatriksi leidmiseks algebraliste täiendite abil. (Teoreem 5.17)
6. Tõestada, et kui vektorruumis on vähemalt kaks vektorit, siis on selles vektorruumis olemas baas. (Teoreem 6.36)
7. Tõestada Kroneckeri-Capelli teoreem lineaarvõrrandisüsteemi lahenduvuse kohta. (Teoreem 8.8)
8. Gaussi meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks.
9. Tõestada tulemus polünoomide jäägiga jagamise kohta. (Teoreem 9.11)
10. Jagatiste korpuse konstruktsioon. (Teoreem 9.42 ja sellele eelnev)
11. Tõestada, et lineaarkujutuste vektorruum on isomorfne teatud maatriksite vektorruumiga. (Teoreem 10.19)

Natuke lihtsamad küsimused. (Nende hulgast tuleb ka eksamiküsimusi.)

1. Tõestada, et kui $*$ on assotsiatiivne kahekohaline algebraline tehe hulgal A, siis tulemus, mille saame tehte rakendamisel hulga A elementidele, ei sõltu sulgude paigutusest. (Lause 1.9)
2. Tõestada, et kui monoidi element on pööratav, siis selle elemendi pöördelement on üheselt määratud. (Lause 1.16)
3. Tõestada monoidi pööratave elementide korrutise pöördelemendi leidmise reegel. (Lause 1.17)
4. Tõestada, et korpuses ei ole nullitegureid. (Lause 1.38)
5. Tõestada, et ring on taandamisega ring parajasti siis, kui ta on nullitegureita. (Lause 1.40)
6. Kompleksarvude korpuse konstruktsioon (koos tõestusega). (Lause 2.1)
7. Tõestada kaaskompleksarvude tähtsamad omadused. (Lause 2.8)
8. Sõnastada ja tõestada trigonomeetrilisel kujul olevate kompleksarvude korrutamise reegel (valem (5)) ja Moivre'i valem.
9. Tõestada, et n-nda astme ühejuurte hulk on rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. (Teoreem 2.14)
10. Tõestada, et n-nda astme ühejuurte rühm on isomorfne jäägiklasside (mooduli n järgi) aditiivse rühmaga. (Lause 2.16)
11. Tõestada, et $(m \times n)$-maatriksite (üle korpuse K) hulk on vektorruum. (Lause 3.23)
12. Tõestada, et maatriksite korrutamine on assotsiatiivne. (Lause 3.26 (1))
13. Tõestada, et maatriksite liitmine ja korrutamine on seotud distributiivsuse seadustega. (Lause 3.26 (3))
14. Tõestada maatriksite transponeerimise omadused. (Lause 3.28)

15. Tõestada, et kõik permutatsioonid n elemendist on võimalik niiviisi järjestada, et iga järgnev permutatsioon on eelnevast saadav transpositsiooni abil. (Lause 4.6)

16. Tõestada, et transpositsioon muudab permutatsiooni paarsust. (Lause 4.10)

17. Tõestada, et transponeerimisel maatriksi determinant ei muutu. (Teoreem 4.20)

18. Tõestada, et kui ruutmaatriks sisaldab nullidest koosnevat rida või veergu, siis tema determinant on 0. (Lause 4.21, järeldus 4.22)

19. Tõestada, et kui A on ruutmaatriks üle korpuse K ja selle maatriksi mingi rea kõik elemendid korrutada elemendiga $c \in K$, siis ka A determinant korrutub elemendiga c. (Lause 4.24)

20. Tõestada, et kui maatriksis vahetada ära kaks rida, siis determinant muudab märki. (Lause 4.26)

21. Tõestada, et kui ruutmaatriksis on kaks võrdset rida, siis tema determinant on 0. (Lause 4.27)

22. Sõnastada Laplace'i teoreem ja defineerida kõik sellega seotud mõisted. (Teoreem 4.33)

23. Tõestada, et n-ndat järku pööratavad maatriksid üle korpuse K moodustavad korrutamise suhtes rühma. (Lause 5.4)

24. Tõestada, et elementaarteisenduste tegemine maatriksi ridadega (veergudega) on samaväärne maatriksi korrutamisega vasakult (paremalt) teatud arvu elementaarmaatriksitega. (Lause 5.10)

25. Tõestada, et elementaarmaatriksid on pööratavad. (Lause 5.11)

26. Tõestada, et kui A on regulaarne maatriks ja maatriks B on saadud maatriksist A ridade või veergude elementaarteisenduste abil, siis ka B on regulaarne. (Lause 5.12)

27. Tõestada, et iga regulaarse maatriksi saab ridade elementaarteisenduste abil teisendada ühikmaatriksiks. (Lause 5.13)

28. Tõestada transponeeritud maatriksi pöördmaatriksi leidmise valem. (Lause 5.20)

29. Tõestada, et vektorruumi iga alamruum sisaldab nullvektorit. (Lause 6.8)

30. Tõestada, et vektorite $a_1, \ldots, a_s$ lineaarne kate on vähim alamruum, mis neid vektoreid sisaldab. (Lause 6.13)

31. Tõestada, et ühestainsast vektorist a koosnev süsteem on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui $a \neq 0$. (Lause 6.20)

32. Tõestada, et vähemalt kahest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina. (Lause 6.21)

33. Tõestada, et iga vektorite süsteem, mis sisaldab nullvektorit, on lineaarselt sõltuv. (Järeldus 6.25)

34. Tõestada, et kui vektorite süsteemi mingi alamsüsteem on lineaarselt sõltuv, siis ka terve süsteem on lineaarselt sõltuv. (Lause 6.26)

35. Tõestada, et nullist erinevate vektorite süsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub eelnevate vektorite lineaarkombinatsioonina. (Lause 6.28)

36. Tõestada, et kui vektorruumi lõplikus moodustajate süsteemis avaldub mingi vektor ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis selle vektori väljajätmisel saame jälle moodustajate süsteemi. (Lause 6.32)

37. Tõestada, et iga lõpliku mittetühja lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi saab täiendada vektorruumi baasiks. (Lause 6.38)

38. Tõestada, et vektorite süsteem on baas parajasti siis, kui see süsteem on maksimaalne lineaarselt sõltumatu süsteem. (Teoreem 6.41)

39. Tõestada, et vektroite süsteem on baas parajasti siis, kui see süsteem on minimaalne moodustajate süsteem. (Teoreem 6.41)

40. Tõestada, et vektorruumi $V \neq \{0\}$ iga vektor on üheselt avaldatav baasivektorite lineaarkombinatsioonina. (Lause 6.46)

41. Tõestada, et vektorite süsteemi astak on võrdne vektorite arvuga selle süsteemi mistahes maksimaalses lineaarselt sõltumatus alamsüsteemis. (Lause 7.2)

42. Tõestada, et kui vektorruumi V vektorite süsteem T on saadud süsteemist S elementaarteisenduste abil, siis süsteemid S ja T on ekvivalentsed. (Lause 7.6)

43. Sõnastada Teoreem maatriksi astakust ja defineerida kõik sellega seotud mõisted. (Teoreem 7.10)

44. Tõestada, et ruutmaatriksi reavektorid on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui selle maatriksi determinant on 0. (Lause 7.13)

45. Tõestada, et iga maatriksi saab ridade elementaarteisenduste abil viia astmelisele kujule. (Lause 7.16)

46. Tõestada, et maatriksi astak on võrdne astmete arvuga selle maatriksi astmelises kujus. (Lause 7.17)

47. Tõestada, et kui lineaarvõrrandisüsteemi laiendatud maatriksi reavektorite süsteemiga teha elementaarteisendusi või jätta sellest välja nullvektorid, siis tulemuseks saadavale maatriksile vastav lineaarvõrrandisüsteem on ekvivalentne esialgsega. (Lause 8.7)

48. Tõestada, et kui lineaarvõrrandisüsteemi puhul on tegemist Crameri peajuhuga, siis on sellel süsteemil täpselt üks lahend. (Lause 8.12)

49. Tõestada tulemus lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisest determinantide abil (nn. Crameri valemid). (Teoreem 8.13)

50. Tõestada, et n tundmatuga homogeense lineaarvõrrandisüsteemi (üle korpuse K) kõigi lahendite hulk on alamruum vektorruumis K^n. (Lause 8.16)

51. Sõnastada ja tõestada seos lineaarvõrrandisüsteemi ja vastava homogeense lineaarvõrrandisüsteemi lahendihulkade vahel. (Teoreem 8.20)

52. Polünoomide ringi konstruktsioon (koos tõestusega). (Teoreem 9.2)

53. Tõestada tulemus polünoomide korrutise astme kohta. Järeldada sellest, et polünoomide ring üle nullitegureita ringi on nullitegureita. (Lause 9.6, Teoreem 9.7)

54. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kommutatiivse nullitegureita ringi kaks elementi oleks assotsieeritud. (Lause 9.16)

55. Tõestada, et kui $d \in R$ on elementide a ja b suurim ühistegur ja $d \sim c$, siis ka c on elementide a ja b suurim ühistegur. (Lause 9.21)

56. Tõestada teoreem suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse seose kohta. (Teoreem 9.26)

57. Eukleidese algoritm. Põhjendada, et selle abil saab leida suurimat ühistegurit.

58. Tõestada, et kui p ja q on mitteassotsieeritud taandumatud polünoomid üle korpuse, siis nende suurim ühistegur on 1. (Lemma 9.40)

59. Tõestada, et iga nullist erinev ratsionaalmurd on üheselt esitatav polünoomi ja lihtmurru summana. (Lause 9.48)

60. Tõestada Bezout' teoreem. (Teoreem 9.58)

61. Horneri skeem (koos põhjendusega).

62. Tõestada tulemus baasil defineeritud kujutuste laiendamisest lineearkujutusteks. (Lause 10.5)

63. Tõestada, et lineaarkujutuse tuum ja kujutis on alamruumid. (Lause 10.7)

64. Tõestada, et lineaarkujutus on üksühene parajasti siis, kui tema tuum on nullalamruum. (Lause 10.8)

65. Tõestada, et iga n-mõõtmeline vektorruum üle korpuse K on isomorfne vektoruumiga K^n. (Teoreem 10.12)

66. Tõestada valem, mille abil saab leida vektori kujutise koordinaate lineaarkujutuse maatriksit kasutades. (Lause 10.16)

67. Tõestada, et lineaarkujutused vektorruumist V_1 vektorruumi V_2 moodustavad vektorruumi. (Lause 10.18)

68. Tõestada, et vektorruumi V lineaarteisenduste hulk on ring. (Lause 10.20)

69. Tõestada, et maatriksite sarnasuse seos on ekvivalentsiseos. (Lemma 10.23)

70. Tõestada, et üleminekumaatriks ühelt baasilt teisele on regulaarne. (Lemma 10.26)

71. Tõestada, et kaks ruutmaatriksit on sarnased parajasti siis, kui nad on mingi lineaarteisenduse maatriksid mingite baaside suhtes. (Järeldus 10.28)

72. Tõestada, et sarnaste maatriksite karakteristlikud polünoomid on võrdsed. (Lause 10.31)

73. Tõestada, et lineaarteisenduse omaväärtusteks on selle teisenduse karakteristliku polünoomi juured. (Teoreem 10.37)

74. Tõestada Cauchy-Bunjakovski võrratus eukleidilistes ruumides. (Lause 11.9)

75. Tõestada, et nullist erinevate vektorite ortogonaalne süsteem on lineaarselt sõltumatu. (Lause 11.15)

76. Grami-Schmidti ortogonaliseerimisprotsess.

77. Ortogonaalsete maatriksite kirjeldus reavektorite abil. (Lause 11.24)

78. Tõestada, et üleminekumaatriks ortonormeeritud baasilt ortonormeeritud baasile on ortogonaalne maatriks. (Lause 11.25)

79. Tõestada, et ortogonaalse maatriksi determinant on kas 1 või -1. (Lause 11.26)

80. Tõestada, et n-ndat järku ortogonaalsete maatriksite hulk on rühm korrutamise suhtes. (Lause 11.28)

81. Tõestada, et ortogonaalteisendus säilitab kõik skalaarkorrutised. (Lemma 11.30)

82. Tõestada, et eukleidilise ruumi lineaarteisendus on ortogonaalteisendus parajasti siis, kui tema maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalne. (Teoreem 11.33)

83. Tõestada, et eukleidilise ruumi lineaarteisendus on sümmeetriline parajasti siis, kui tema maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on sümmeetriline. (Teoreem 11.35)

Mõisted, mida tuleb tunda. (Paksus kirjas on kõige tähtsamad mõisted. Nende tundmine on positiivse hinde saamiseks hädavajalik.)

Kahekohaline algebraline tehe, rühmoid, poolrühm, rühmoidi ühikelement, monoid, monoidi elemendi pöördelement, **rühm**, Abeli rühm, **ring**, kommutatiivne ring, ringi pööratav element, **korpus**, ringi nullitegurid, taandamisega ring, täisarvude kongruentsus, jäägiklass, jäägiklassiring, jäägiklassikorpus.

Kompleksarv, ringide ja korpuste isomorfsus, imaginaarühik, kompleksarvu algebraline kuju, reaalosa, imaginaarosa ja imaginaarosa kordaja, imaginaararv, puhtimaginaararv, komplekstasand, kaaskompleksarv, kompleksarvu moodul, argument ja **trigonomeetriline kuju**, **kompleksarvu n-nda astme juur**, n-nda astme ühejuur.

Maatriks, ruutmaatriks, ruutmaatriksi peadiagonaal, maatriksi transponeeritud maatriks, maatriksi vastandmaatriks, sümmeetriline maatriks, kaldsümmeetriline maatriks, nullmaatriks, ühikmaatriks, maatriksite summa, maatriksite vahe, maatriksi ja skalaari korrutis, **maatriksite korrutis**.

Permutatsioon, loomulik permutatsioon, transpositsioon, inversioon, paaris- ja paaritu permutatsioon, substitutsioon, paaris- ja paaritu substitutsioon, ühiksubstitutsioon, pöördsubstitutsioon, **determinant**, determinandi liige, alammaatriks, alamruutmaatriks, **miinor**, **täiendusmiinor**, **algebraline täiend**.

Pöördmaatriks, pööratav maatriks, regulaarne maatriks, elementaarteisendused maatriksi ridadega, elementaarmaatriksid.

Vektorruum, vektorruumi alamruum, **lineaarkombinatsioon**, lineaarkombinatsiooni kordajad, (mitte)triviaalne lineaarkombinatsioon, lineaarne kate, **lineaarselt sõltuv või sõltumatu vektorite süsteem**, vektorruumi moodustajate süsteem, **vektorruumi baas**, maksimaalne lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem, minimaalne moodustajate süsteem, **vektorruumi mõõde**, vektori koordinaadid.

Vektorite süsteemi astak, ekvivalentsed vektorite süsteemid, vektorite süsteemi elementaarteisendused, maatriksi reavektor ja veeruvektor, **maatriksi astak**, maatriksi astmeline kuju.

Lineaarvõrrandisüsteem, lineaarvõrrandisüsteemi kordajad, vabaliikmed, **lahend**, maatriks, laiendatud maatriks ja maatrikskuju, mittelahenduv, lahenduv, üheselt lahenduv ja **homogeenne lineaarvõrrandisüsteem**, ekvivalentsed lineaarvõrrandisüsteemid, Crameri peajuht, homogeense lineaarvõrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteem, lineaarvõrrandisüsteemile vastav homogeenne lineaarvõrrandisüsteem.

Polünoomide ring, **polünoom**, polünoomi liikmed, polünoomi kordajad, polünoomi aste, konstantne polünoom, **jaguvus**, assotsieeritus, suurim ühistegur, vähim ühiskordne, Eukleidese algoritm, taandumatu polünoom, ratsionaalmurd, ratsionaalmurru aste, lihtmurd, algmurd, polünoomi väärtus mingil kohal, **polünoomi juur**, polünoomi juure kordsus.

Lineaarkujutus, **lineaarteisendus**, nullkujutus, lineaarkujutuse tuum ja kujutis, **lineaarkujutuse maatriks**, lineaarteisenduse maatriks, lineaarkujutuste summa, lineaarkujutuse ja skalaari korrutis, vektorruumide isomorfsus, sarnased maatriksid, üleminekumaatriks ühelt baasilt teisele, maatriksi ja lineaarteisenduse karakteristlik polünoom, maatriksi omaväärtus, **lineaarteisenduse omaväärtus**, **lineaarteisenduse omavektor**.

Skalaarkorrutamine, **eukleidiline ruum**, eukleidilise ruumi vektori pikkus ja vektorite vaheline nurk, ühikvektor, **ortogonaalsed vektorid** ja vektorite süsteemid, ortogonaalne baas, ortonormeeritud vektorite süsteem, **ortogonaalne maatriks**, ortogonaalne teisendus, sümmeetriline teisendus.