Analüütiline geomeetria

XI. loeng .**Teist järku joone puutuja**

Sügissemester 2016

Puutujasirge

Tasandil on antud ristkoordinaadisüsteem koordinaatidega x, y. Tasandi sirge võrrandid:

- sirge üldvõrrand on $A\,x + B\,y + C = 0$, kus vektor $\vec{n} = (A, B)$ on sirge normaalvektor;
- sirge parameetriline võrrand on

$$x = s_1\,t + a_1,$$
$$y = s_2\,t + a_2,$$

  kus $\vec{s} = (s_1, s_2)$ on sirge sihivektor ja $A(a_1, a_2)$ on sirge punkt;
- $y = k\,x + b$, kus k on sirge tõus ja b on sirge algordinaat.

Joone puutujasirge

Tasandilise joone võrrandid:

1. tasandilise joone ilmutamata võrrand on $F(x, y) = c$, kus F on kahemuutuja diferentseeruv funktsioon;
2. tasandilise joone parameetriline võrrand $\vec{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$, kus $x(\tau), y(\tau)$ on diferentseeruvad funktsioonid, $\tau \in I \subset \mathbb{R}$.

On ilmne, et kehtib $F(x(\tau), y(\tau)) \equiv 0$.

On antud tasandilise joone parameetriline võrrand

$$\vec{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau)), \tau \in I.$$

Definitsioon

Olgu $\tau_0 \in I$. Vektorit $\vec{s} = \vec{r}\,'(\tau_0) = (x'(\tau_0), y'(\tau_0))$ nimetatakse joone kiirusvektoriks või puutujavektoriks punktis $\vec{r}(\tau_0)$.

Puutujasirge võrrand

Kiirusvektor on puutujasirge sihivektor. Järelikult puutujasirge parameetriline võrrand on

$$x(t) = x'(\tau_0)\, t + x(\tau_0),$$
$$y(t) = y'(\tau_0)\, t + y(\tau_0).$$

Näide

On antud ellipsi pooltelejed $a = 5, b = 3$. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, parameetriline võrrand ja leida puutujasirge üldvõrrand ellipsi punktis A, mis vastab parameetri väärtusele $\tau = \frac{\pi}{4}$. Koordinaadisüsteem on kanooniline.

Lahendus. $\vec{r}(\tau) = (5\,\cos\tau, 3\,\sin\tau)$, $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$,
$\vec{r}\,'(\tau) = (-5\,\sin\tau, 3\cos\tau)$, $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$, $\vec{n} = (3, 5)$,
$3\,x_1 + 5\,x_2 - 15\,\sqrt{2} = 0$,

Puutujasirge

Parameetriline võrrand

$$x(t) = -5\,t + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad y(t) = 3\,t + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Kui ellipsi võrrand on kanooniline

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ja $P(x_0, y_0)$ on ellipsi punkt, siis ellipsi puutujasirge võrrand punktis P (P on puutepunkt) on

$$\boxed{\frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} = 1.}$$

Olgu antud hüperbooli kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ja $P(x_0, y_0)$ on hüperbooli punkt, siis hüperbooli puutujasirge võrrand punktis P (P on puutepunkt) on

$$\boxed{\frac{x_0\, x}{a^2} - \frac{y_0\, y}{b^2} = 1.}$$

Olgu antud parabooli kanooniline võrrand

$$y^2 = 2p\, x,$$

ja $P(x_0, y_0)$ on parabooli punkt, siis puutujasirge võrrand punktis P (P on puutepunkt) on

$$\boxed{y_0\, y = p\,(x + x_0).}$$

Puutuja ühest omadusest

Teoreem

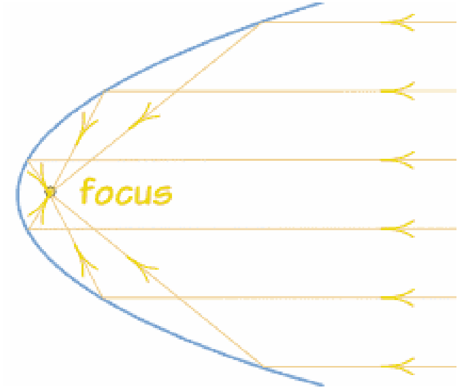
Ellipsi mistahes puutuja moodustab võrdsed nurgad puutepunkti fokaalraadiustega.

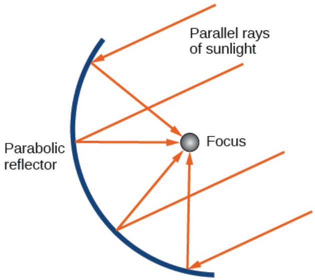
Teoreem

Hüperbooli mistahes puutuja jagab pooleks puutepunkti fokaalraadiuste vahelise nurga.

Teoreem

Parabooli mistahes punkti puutja lõikab võrdse nurga all puutepunkti fokaalraadiust ja sümmeetriatelge.


focus


Parallel rays
of sunlight
Focus
Parabolic
reflector

Eksami küsimused

- Joone parameetrilise võrrandi mõiste ja kiirusvektori definitsioon. Puutujasirge parameetriline võrrand.
- Ellipsi puutujasirge võrrand.
- Hüperbooli puutujasirge võrrand.
- Parabooli puutujasirge võrrand.
- Teoreem ellipsi puutujast.
- Teoreem hüperbooli puutujast.
- Teoreem parabooli puutujast.
- Ellipsi, hüperbooli, parabooli puutuja üldvõrrandi leidmine, kui puutuja läbib joonel mitteasuvat punkti.