TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL 350

# ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

# IV

1982

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

# ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

# IV

## Teist järku pinnad

Koostanud L.Tuulmets

TARTU 1982

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 4. oktoobril 1982.a.

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ IУ.
Поверхности второго порядка.
Составитель Лейда Т у у л м е т с.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja A. Parring.
Paljundamisele antud 9.11.1982.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 11,16.
Arvestuspoognaid 9,13. Trükipoognaid 12,0.
Trükiarv 500.
Tell. nr. 1205.
Hind 30 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t,14.

# E e s s õ n a

"Analüütilise geomeetria praktikum" I-IV on koostatud eeskätt TRÜ matemaatikateaduskonna vajadusi arvestades ning on mõeldud kasutamiseks koos Ü.Lumiste ja K.Ariva õpikuga "Analüütiline geomeetria". Suur osa sellest on kasutatav ka teistes teaduskondades, kus õpitakse analüütilist geomeetriat iseseisva ainena või kõrgema matemaatika osana. Lihtsamad ülesanded sobivad kasutamiseks täiendava materjalina keskkooli matemaatika tundides, eriti aga matemaatika ringis.

Varem ilmunud "Analüütilise geomeetria praktikumi" I osa (1978) sisaldab valiku ülesandeid vektoralgebra, II osa - sirgete ja tasandite (1975) ja III osa teist järku joonte kohta (1980). Käesolev, IV osa sisaldab valiku ülesandeid teist järku pindade kohta.

Ülesannete kogu kasutamist lihtsustavad vajaliku teoreetilise materjali lühiesitused ja näiteülesanded paragrahvide või punkti üksikute ainelõikude ees, aga samuti näpunäited ülesannete vastuste juures.

"Analüütilise geomeetria praktikumi" kõikides osades kehtib järgmine kokkulepe: kui ülesande tingimustes ei ole nimetatud reeperit, siis eeldatakse, et antud reeper on ristreeper.

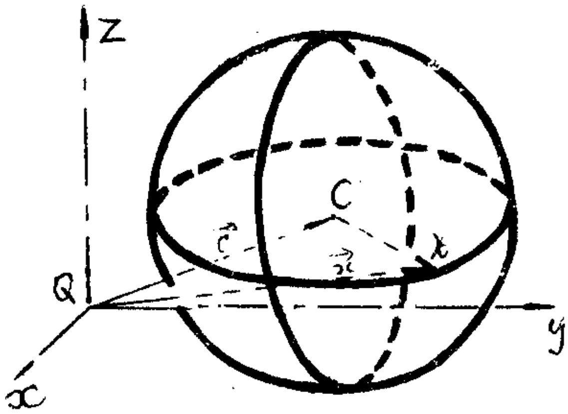
# S F Ä Ä R. P Ö Ö R D P I N D

## §1. Sfäär

Sfääriks nimetatakse fikseeritud punktist (sfääri keskpunktist) võrdsetel kaugustel asuvate punktide hulka ruumis. Kui $X(\bar{x})$ on sfääri suvaline punkt ja $C(\bar{c})$ sfääri keskpunkt (tsenter), siis sfääri vektorvõrrand on

$$(\bar{x} - \bar{c})^2 = R^2, \quad (12.1)$$

kus R on sfääri raadius ning $\bar{x}$ ja $\bar{c}$ vastavalt punktide X ja C kohavektorid (joon 12.1). Erijuhul, kui valitud reeper on ristreeper (ortonormeeritud reeper) ja $X(x,y,z)$, $C(a,b,c)$, siis sfääri võrrand (12.1) on




Joonis 12.1

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (12.2)$$

Sfääri võrrandit (12.1) nimetatakse sfääri <u>kanooniliseks võrrandiks</u>.

Erijuhul, kui reeperi alguspunkt asub sfääri keskpunktis, saame sfääri <u>normaalvõrrandi</u>

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (12.3)$$

Avades võrrandis (12.2) sulud ja arvestades, et võrrandit võib läbi korrutada suvalise nullist erineva arvuga, saame sfääri <u>üldvõrrandi</u>

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + a_{11}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (12.4)$$

Osutub, et üldine ruutvõrrand kolmest muutujast

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

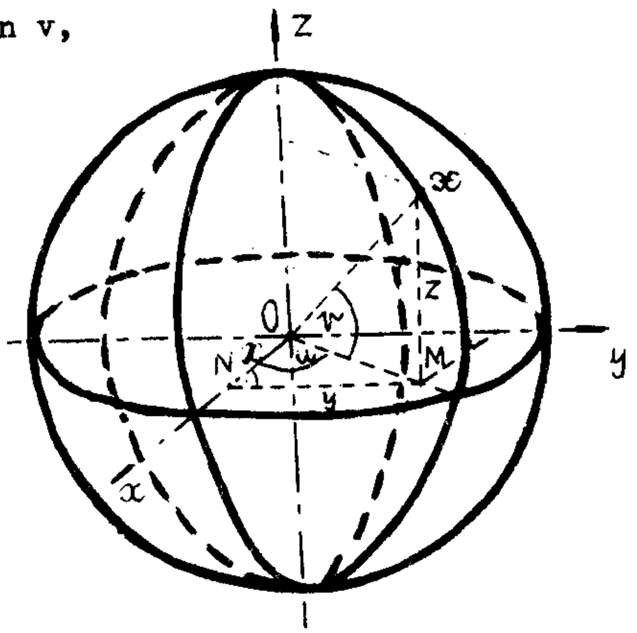
määrab sfääri, kui ruutudega liikmete kordajad on võrdsed ja erinevad nullist (s.t. $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$) ning võrrandis ei esine tundmatute korrutistega liikmeid (s.t. $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$).[1]

Kui pinna võrrand $F(x,y,z) = 0$ on pinna suvalise punkti koordinaatide suhtes n-astme polünoom, siis pinda nimetatakse n-järku algebraliseks pinnaks. Seega sfäär on teist järku algebraline pind.

Kui reeperi alguspunkt asub sfääri keskpunktis, siis sfääri parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v, \\ y = R\sin u\cos v, \\ z = R\sin v, \end{cases} \qquad (12.5)$$

kus parameetrid u ja v on geograafilised koordinaadid: u - geograafiline laius, v - geograafiline pikkus, R - sfääri raadius, (vt. joon. 12.2) $0 \leq u < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, $R > 0$.



Joon. 12.2

Tõepoolest, olgu sfääri suvalise punkti $X(x,y,z)$ projektsioon

---

[1] Sõltuvalt võrrandi kordajatest võib vaadeldud võrrand määrata ka imaginaarse sfääri. Võrrand määrab reaalse sfääri, kui

$$-a_{44} + \left(\frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{24}}{a_{22}}\right)^2 + \left(\frac{a_{34}}{a_{33}}\right)^2 > 0$$

xy-tasandile punkt $M(x,y,0)$, siis täisnurksest kolmnurgast OMN (vt. joon. 12.2) avaldame

$$x = OM\cos u,$$
$$y = OM\sin u$$

ja täisnurksest kolmnurgast OXM saame $OM = R\cos v$, $z = XM = R\sin v$. Asendades OM avaldise x ja y avaldistesse, saamegi võrrandi (12.5). Parameetrilised võrrandid on samaväärsed sfääri vektorvõrrandiga

$$\bar{x} = R(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v). \qquad (12.6)$$

Igale parameetrite paarile $(u,v)$ vastab sfääril parajasti üks punkt.

Sfääri puutujaks sfääri punktis $X_0(x_0,y_0,z_0)$ nimetatakse sirget (lõikaja piirasendit), millel on sfääriga kaks ühtivat lõikepunkti. Sfääri puutujatasandiks tema punktis $X_0$ nimetatakse tasandit, millel asuvad kõik punkti $X_0$ läbivad sfääri puutujad.

Sfääri puutujatasandi võrrandi saame nn. poolitiasendusvõttega[1]. Kui $X_0(x_0,y_0,z_0)$ on sfääri punkt (puutepunkt), siis sfääri (12.2) puutujatasandi võrrandiks on

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = R^2 \qquad (12.7)$$

ja sfääri (12.4) puutujatasandi võrrandiks

$$a_{11}x_0x + a_{11}y_0y + a_{11}z_0z + a_{14}(x + x_0) + a_{24}(y + y_0) + a_{34}(z + z_0) + a_{44} = 0. \qquad (12.8)$$

Erijuhul, kui reeperi alguspunkt asub sfääri keskpunktis, on sfääri (12.3) puutujatasandi võrrandiks

$$x_0x + y_0y + z_0z = R^2. \qquad (12.9)$$

## Sfääri puutujakoonus ja polaartasand

Kui väljaspool sfääri asuvast punktist $P_0(x_0,y_0,z_0)$ on tõmmatud kõik võimalikud puutujad sfäärile, siis saadud

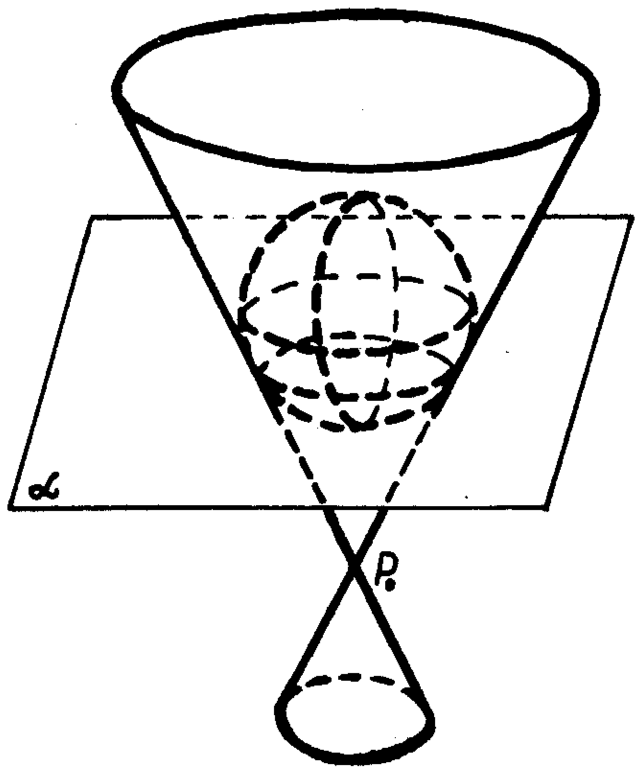
---

[1] Poolitiasendusvõte seisab selles, et pooled tundmatud pinna võrrandis tuleb asendada puutepunkti vastavate koordinaatidega, s.t. teha võrrandisse asendused $x^2 \to x_0x$; $y^2 \to y_0y$; $z^2 \to z_0z$, $2x \to x + x_0$, $2xy \to x_0y + xy_0$ jne.

puutujad moodustavad pöördkoonuse, mida nimetatakse **sfääri puutujakoonuseks** tipuga $P_0$. Kui sfäär on määratud normaalvõrrandiga (12.3), siis sfääri puutujakoonuse tipuga $P_0$ võrrandiks on

$$(x_0x + y_0y + z_0z - R^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 0 \quad (12.10)$$

Sfääri puutujakoonus tipuga $P_0$ puutub sfääri mööda ringjoont, mille poolt määratud tasandit (vt. joon. 12.3. tasand $\alpha$) nimetatakse **punkti $P_0$ polaartasandiks** antud sfääri suhtes ja punkti $P_0$ **polaartasandi pooluseks**. Kui punkt $P_0$ asub sfääril, siis tema polaartasand läbib poolust ja on sfääri puutujatasandiks antud punktis.




Joon. 12.3

Punkti $P_0(x_0,y_0,z_0)$ polaartasandi võrrand normaalvõrrandiga (12.3) määratud sfääri suhtes on

$$x_0x + y_0y + z_0z = R^2.$$

Kui sfäär on määratud kanoonilise võrrandiga (12.2), siis punkti polaartasandi võrrand on

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = R^2. \quad (12.10)$$

## Punkti potents sfääri suhtes. Radikaaltasand, radikaaltelg ja radikaaltsenter

Kui punkti $P_0(x_0,y_0,z_0)$ läbiv sirge lõikab sfääri (12.2) punktides $P_1$ ja $P_2$, mille kaugused punktist $P_0$ on vastavalt

$d_1$ ja $d_2$, siis nende kauguste korrutis $d_1d_2$ on konstantne iga sellise sirge korral. Seda arvu nimetatakse punkti $P_o$ <u>potentsiks</u> antud sfääri suhtes. Punkti potents sfääri (12.2) suhtes on

$$p = d_1d_2 = (x_o - a)^2 + (y_o - b)^2 + (z_o - c)^2 - R^2 \quad (12.11)$$

ehk

$$p = d^2 - R^2,$$

kus d on punkti $P_o$ kaugus sfääri keskpunktist. Seega, kui punkt on väljaspool sfääri, siis punkti potents antud sfääri suhtes on positiivne ja võrdub antud punktist sfäärile piktõmmatud puutuja lõigu (antud punktist puutepunktini) pikkuse ruuduga. Kui punkt on sfääril, siis punkti potents sfääri suhtes on null. Nende punktide hulk ruumis, mille potentsid kahe sfääri suhtes on võrdsed, osutub tasandiks, mida nimetatakse nende sfääride <u>radikaaltasandiks</u> (ehk potentstasandiks). Kui sfäärid lõikuvad, siis radikaaltasand on sfääride lõikeringjoonega määratud tasand. Radikaaltasand on risti sfääride kesksirgega (sfääride keskpunkte ühendava sirgega).

Kolme antud sfääri korral tekib kolm radikaaltasandit, mis lõikuvad mööda sirget, mida nimetatakse nende sfääride <u>radikaalteljeks</u> (ehk potentssirgeks). Radikaaltelg on risti sfääride kesktasandiga (keskpunktide poolt määratud tasandiga).

Nelja antud sfääri korral tekib neli radikaaltelge, mis lõikuvad kõik ühes punktis. Seda punkti nimetatakse antud sfääride <u>radikaaltsentriks</u> ehk radikaalpunktiks (ehk potentspunktiks).

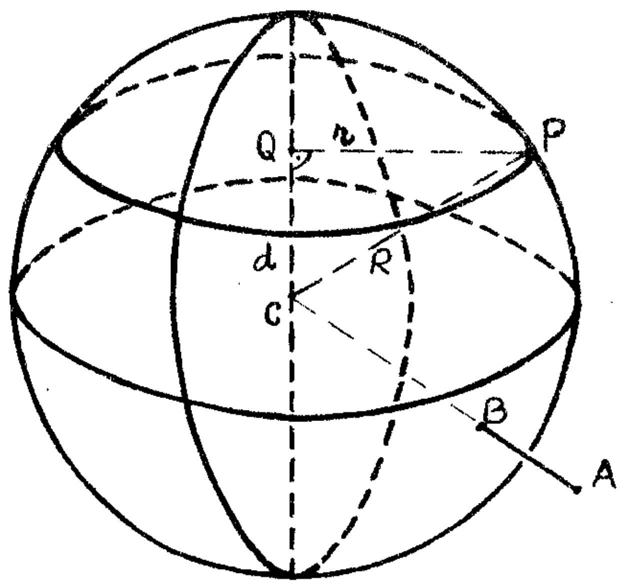
<u>Näide 1</u>. Arvutada punkti A(-2,6,-3) lühim kaugus antud sfäärini $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

<u>Lahendus</u>. Otsitavaks kauguseks on lõigu AB pikkus, kus B on antud punkti A ja sfääri keskpunkti C ühendava sirge AC ja fääri lõikepunkt (vt. joon.12.4). C(0,0,0), $\overline{AC} = (2,-6,3)$,

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -6t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad \text{( sirge AC võrrandid )},$$

$(2t)^2 + (-6t)^2 + (3t)^2 =$
$= 4,\ 49t^2 = 4,\ t = \pm\frac{2}{7},$
$B_1(\frac{4}{7}, \frac{-12}{7}, \frac{6}{7}),$
$B_2(-\frac{4}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{6}{7})$. Otsitav punkt $B = B_2$, kuna $|AB_2| < |AB_1|$. $\overline{AB} =$
$= \frac{1}{7}(10,-30,15)$. $\overline{AB}^2 =$
$= (-\frac{4}{7} + 2)^2 + (\frac{12}{7} - 6)^2 +$
$+ (-\frac{6}{7} + 3)^2 = \frac{1}{49}(100 +$
$+ 900 + 225) = \frac{1225}{49} =$
$= \frac{35}{7} = 5.$

Vastus. Punkti A lühim kaugus sfäärini on 5 pikkusühikut.



Joonis 12.4

Näide 2. Leida antud ringjoone

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

keskpunkt ja raadius.

Lahendus. Ringjoon on antud sfääri ja tasandi lõikejoonena. Ringjoone keskpunkti Q võime leida kui sfääri keskpunktist C(4,7,-1) lõiketasandile tõmmatud ristsirge ja lõiketasandi lõikepunkti. Ristsirge võrrandeist $x = 3t + 4$, $y = t + 7$, $z = -t - 1$ asendame lõiketasandi võrrandisse, saades $3(3t + 4) + (t + 7) - (-t - 1) - 9 = 0$. Siit saame leida lõikepunkti parameetri $t = -1$. Ringjoone keskpunkt on Q(1,6,0) (vt. joon. 12.4).

Ringjoone raadiuse r saame arvutada täisnurksest kolmnurgast, mille kaatetiteks on otsitava ringjoone raadius r ja lõiketasandi kaugus d sfääri keskpunktist, hüpotenuusiks on sfääri raadius R. Seega

$$d = \frac{|12 + 7 + 1 - 9|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11},$$
$$r^2 = R^2 - d^2 = 36 - 11 = 25,$$
$$r = 5.$$

2

Vastus. Antud ringjoone keskpunkt on Q(1,6,0) ja raadius $r = 5$.

Näide 3. Koostada võrrandid tasanditele, mis puutuvad sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ja on paralleelsed tasandiga $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

Lahendus. Kui puutepunktiks on punkt $X_o(x_o,y_o,z_o)$, siis antud sfääri puutujatasandi võrrandi saame poolitiasendusvõttega (vt. valem 12.9): $x_o x + y_o y + z_o z = 9$. Otsime puutujatasandeid, mis on paralleelsed antud tasandiga. Seega vastavate tundmatute kordajad tasandite võrrandites peavad olema võrdelised $\frac{x_o}{1} = \frac{y_o}{2} = \frac{z_o}{-2}$. Peale selle punkt $X_o$ on sfääri punkt, s.t. $x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = 9$. Saime kolm võrrandit kolme tundmatu $x_o, y_o, z_o$ leidmiseks. Esimesest kahest võrrandist saame $y_o = 2x_o$, $z_o = -2x_o$, mis asendame kolmandasse võrrandisse, saame $9x_o^2 = 9$, $x_o^2 = 1$. Järelikult $x_o = \pm 1$, $y_o = \pm 2$, $z_o = \mp 2$ ning otsitavad puutepunktid on $M_o(1,2,-2)$ ja $M_o'(-1,-2,2)$. Otsitavate puutujatasandite võrrandid on $x + 2y - 2z = 9$ ja $-x - 2y + 2z = 9$ ehk võttes kokku, saame $x + y - z = \pm 9$.

Näide 4. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib ringjoont $x^2 + y^2 - 11 = 0$, $z = 0$ ja puutub tasandit $x + y + z - 5 = 0$.

Lahendus. Otsitava sfääri keskpunkt asub kindlasti sirgel, mis läbib antud ringjoone keskpunkti ja on risti ringjoone tasandiga. Antud juhul on selleks z-telg ($x = 0$, $y = 0$), sest antud ringjoon on saadud pöördsilindri lõikamisel xy-tasandiga. Seega, sfääri keskpunktiks on punkt $C(0,0,z_o)$. Leiame sfääri keskpunkti kauguse antud tasandist, mis ülesande tingimuste tõttu peab olema võrdne sfääri raadiusega $R = \frac{|z_o - 5|}{\sqrt{3}}$, millest $R^2 = \frac{(z_o - 5)^2}{3}$. Kuna sfäär läbib antud ringjoont, siis iga ringjoone punkt asub sfääri keskpunktist kaugusel R. Leiame vabalt valitud ringjoone punkti $A(0,11,0)$ kauguse sfääri keskpunktist: $\overline{CA} = (0,11,-z_o)$, $R^2 = AC^2 = 11 + z_o^2$. Seega, $\frac{(z_o + 5)^2}{3} = 11 + z_o^2$ ehk $z_o^2 + 5z_o + 4 = 0$, millest $z_o = -1$, $z_o' = -4$. Järelikult, $R_1^2 = 12$, $R_2^2 = 27$.

Antud ülesande tingimusi rahuldavad kaks sfääri: $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 12$ ja $x^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 27$.

Näide 5. Koostada sfääri vektorvõrrand, kui sfääri keskpunkt on punktis $C(\bar{x}_o)$ ja sfäär läbib reeperi alguspunkti.

Lahendus. Sfääriks nimetatakse punktide hulka ruumis, mis asuvad sfääri tsentrist konstantsel kaugusel R. Olgu $X(\bar{x})$ sfääri suvaline punkt. Siis $\overline{CX}^2 = R^2$ ehk $(\bar{x} - \bar{x}_o)^2 = R^2$. Kuna reeperi alguspunkt on sfääri punkt, siis $R = |\overline{OC}| = |\bar{x}_o|$ ehk $R^2 = \bar{x}_o^2$. Asendades leitud $R^2$ väärtuse sfääri võrrandisse, saame $(\bar{x} - \bar{x}_o)^2 = \bar{x}_o^2$ ehk $\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x}_o = 0$, millest $\bar{x}(\bar{x} - 2\bar{x}_o) = 0$.

## 1. Sfäär. Ringjoon

**12.1. Koostada sfääri võrrand, kui**

**1) sfääri keskpunkt asub reeperi alguspunktis ja sfääri raadius on 9;**

**2) sfääri keskpunkt asub punktis C(5,-3,7) ja raadius on 2;**

**3) sfääri keskpunkt asub punktis C(4,-4,-2) ja sfäär läbib reeperi alguspunkti;**

**4) sfääri keskpunkt asub punktis C(3,-2,1) ja sfäär läbib punkti A(2,-1,-3);**

**5) punktid A(2,-1,-3) ja B(4,1,-3) on otsitava sfääri ühe diameetri otspunktideks;**

**6) sfääri keskpunkt asub tasandil $2x + y - z + 3 = 0$ ja sfäär läbib punkte $M_1(3,1,-3)$, $M_2(-2,4,1)$ ja $M_3(-5,0,0)$.**

12.2. Määrata punktide $M_1(2,-3,6)$, $M_2(0,7,0)$, $M_3(3,2,-4)$, $M_4(2,4,-5)$, $M_5(3,-4,-5)$, $M_6(2,6,-5)$ asend sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ suhtes.

12.3. Määrata punktide A(3,0,4), B(3,5,0), C(3,4,4), D(5,4,6) asend sfääri $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$ suhtes. Kirjeldada selle sfääri asendit antud reeperi suhtes.

12.4. Määrata punkti A(2,-1,3) asend järgmiste sfääride suhtes:

1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;
2) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;
3) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$;
4) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0$;
5) $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0$.

12.5. Kontrollida, millised punktidest $M_1(3,4,-4)$, $M_2(-3,2,4)$, $M_3(-1,-4,4)$, $M_4(2,3,-3)$ asuvad ringjoonel

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=36,\\ y+z=0.\end{cases}$$

Kirjeldada, milliste pindade lôikejoonena on määratud antud ringjoon.

12.6. Leida sfääril $x^2+y^2+z^2=9$ punktid, mille
1) abstsiss on 1 ja ordinaat 2;
2) abstsiss on 2 ja ordinaat 5;
3) abstsiss on 2 ja aplikaat 2;
4) ordinaat on 2 ja aplikaat 4.

12.7. Leida ringjoonel

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=49,\\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0\end{cases}$$

punktid, mille 1) abstsiss on 3; 2) ordinaat on 2; 3) aplikaat on 8.

12.8. Leida kolme pinna $x^2+y^2+z^2=49$, $y-3=0$, $z+6=0$ lôikepunktid.

12.9. Kontrollida, millised antud kôveratest läbivad reeperi alguspunkti. Iseloomustada geomeetriliselt neid kôveraid:

1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2z=0,\\ y=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25,\\ x+y=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9,\\ x-z=0.\end{cases}$

12.10. Leida sfääri $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ja x-telje lôikepunktid.

12.11. Arvutada punkti A lühim kaugus antud sfäärini:

1) $A(9,-4,-3)$, $x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 241 = 0$;
2) $A(1,-1,3)$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$.

12.12. Koostada sfääri võrrand, kui sfääri keskpunkt asub punktis $C(2,3,-1)$ ja sfäär lõikab sirgest

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

välja lõigu, mille pikkus on 16.

12.13. Leida sfääri keskpunkt ja raadius:

1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$;
2) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$.

12.14. Leida sfääri raadius ja keskpunkt, kui sfääri võrrand on

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z = 0$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 22 = 0$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0$;
6) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 2z + 41 = 0$;
8) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y - 72z - 95 = 0$.

12.15. Leida sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ keskpunkti kaugus tasandist $Ax + By + Cz + D = 0$.

12.16. Koostada sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ keskpunktist tasandile $Ax + By + Cz + D = 0$ tõmmatud normaali võrrand.

12.17. Koostada parameetrilised võrrandid sirgele, millel asub tasandiga $5x - y + 2z - 17 = 0$ ristuv sfääri $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$ diameeter.

12.18. Koostada sirge kanoonilised võrrandid, kui sirgel asub sirgega $x = 2t - 1$, $y = -3t + 5$, $z = 4t + 7$ paralleelne sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0$ diameeter.

12.19. Koostada tetraeedri ümber joonestatud sfääri võrrand, kui tetraeedri üks tipp asub reeperi alguspunktis ja ülejäänud tippudeks on punktid $A(2,0,0)$, $B(0,5,0)$ ja $C(0,0,3)$.

12.20. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib nelja punkti:

1) $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,-1)$;

2) $M_1(1,-2,-1)$, $M_2(-5,10,-1)$, $M_3(4,1,11)$, $M_4(-8,-2,-2)$.

12.21. Leida sfääri keskpunkt Q ja raadius R, kui reeperi alguspunkt ja punktid $A(1,3,0)$, $B(0,0,-4)$ ja $C(4,0,0)$ on sfääri punktid.

12.22. Leida ringjoone

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

keskpunkt.

12.23. Leida ringjoone raadius ja keskpunkt:

1) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0, \\ 2x + 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$

12.24. Koostada sfääride

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0.$$

lõikejoonega määratud tasandi võrrand.

12.25. Leida ringjoone keskpunkt ja raadius:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 36, \\ x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25. \end{cases}$

12.26. Sfääri keskpunkt asub reeperi alguspunktis ja raadius on 3. Koostada sfääri ja xz-tasandi lõikejoone võrrand.

12.27. Sfääri, mille keskpunkt asub reeperi alguspunktis ja raadius on 5, lõigatakse tasandiga, mis on paralleelne xz-tasandiga, lõikab y-telje negatiivset pooltelge ja asub xz-tasandist kahe ühiku kaugusel. Koostada antud sfääri ja tasandi lõikejoone võrrandid.

12.28. Sfääri keskpunkt asub punktis C(5,-2,1) ja sfääri raadius on 13. Koostada sfääri ja yz-tasandi lõikejoone võrrandid.

12.29. Koostada ringjoone võrrandid, kui ringjoon läbib kolme antud punkti $M_1(3,-1,-2)$, $M_2(1,1,-2)$ ja $M_3(-1,3,0)$, vaadeldes ringjoont kui sfääri ja tasandi lõikejoont.

12.30. Punktid A(3,-2,5) ja B(-1,6,-3) on ringjoone ühe diameetri otspunktid. Ringjoon läbib punkti C(1,-4,1). Koostada ringjoone võrrandid.

12.31. Punkt C(1,-1,-2) on ringjoone keskpunkt. Ringjoon lõikab sirgest

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0, \\ 4x - 7y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

välja 8 ühiku pikkuse lõigu. Koostada antud ringjoone võrrandid.

12.32. Sfääril $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ leida punkt $M_1$, mis on lähim tasandile $3x - 4z + 19 = 0$. Leida punkti $M_1$ kaugus d antud tasandist.

12.33. Määrata tasandite

1) $2x + 2y + z + 2 = 0$,
2) $2x + 2y + z + 5 = 0$,
3) $2x + 2y + z + 11 = 0$

asendid sfääri $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 - 25 = 0$ suhtes.

12.34. Selgitada, kuidas asub tasand sfääri suhtes:

1) $z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;
2) $y = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;
3) $x = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

12.35. Selgitada, kuidas asub sirge sfääri suhtes:

1) $x = -2t + 2$, $y = 3t - \frac{7}{2}$, $z = t - 2$,
$x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$;

2) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$,

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 67 = 0$;

3) $\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0, \\ 2x - 4y - z + 6 = 0, \end{cases}$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0$.

12.36. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib punkti A(0,-3,1) ja lõikab xy-tasandit mööda ringjoont $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$.

12.37. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib reeperi alguspunkti ja ringjoont:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49, \\ 2x + 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$

12.38. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib punkti ja ringjoont:

1) M(7,-3,1), $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36, \\ 4x + y - z - 9 = 0; \end{cases}$

2) N(1,-2,0), $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 49, \\ 2x + 2y - z + 4 = 0; \end{cases}$

3) P(2,-1,1), $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0, \\ 5x + 2y - z - 3 = 0. \end{cases}$

12.39. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib kahte ringjoont:

1) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 25, \\ y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + z^2 = 16, \\ y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 2. \end{cases}$

12.40. Koostada kahe antud sfääri lõikejoone võrrand, kui ühe sfääri keskpunkt asub reeperi alguspunktis ja raadius on 6, teise sfääri keskpunkt aga punktis C(1,-2,2) ja raadius on 5. Selgitada, kas lõikejooneks on reaalne kõver.

12.41. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ ja tasandi $z = 8$ lõikejoone projektsioon xy-tasandile.

12.42. Leida ringjoone

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=25,\\ 2x-y-2z-10=0\end{cases}$$

projektsioon xz-tasandile.

12.43. Leida ringjoone

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36,\\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$$

projektsioon 1) xy-tasandile; 2) xz-tasandile; 3) yz-tasandile.

12.44. Sfääri keskpunkt asub reeperi alguspunktis ja sfääri raadius on 5. Koostada sfääri parameetrilised võrrandid ja vektorvõrrand.

12.45. Leida sfääri $\bar{x}=6(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ ja sirge $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{-2}$ lõikepunktid.

2. Sfääri puutujatasand

12.46. Punkt $X_0(x_0,y_0,z_0)$ on sfääri punkt. Tõestada, et sfääri $x^2+y^2+z^2=R^2$ puutujatasandi võrrandiks punktis $X_0$ on $x_0x+y_0y+z_0z=R^2$ ja sfääri $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ puutujatasandi võrrandiks punktis $X_0$ on $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2$.

12.47. Koostada sfääri $x^2+y^2+z^2=49$ puutujatasandi võrrand, teades, et puutujatasand läbib punkti $M(6,-3,-2)$.

12.48. Koostada sfääri puutujatasandi võrrand, kui puutujatasand läbib punkti $X_0$:

1) $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$, $X_0(-1,3,0)$;

2) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$, $X_0(7,-1,5)$.

12.49. Leida sfääri $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=49$ puutujatasandid, mis läbivad sfääri ja sirge $x=3t-5$, $y=5t-11$, $z=-4t+9$ lõikepunkte.

12.50. Leida sfääri

$$\begin{cases}x=6\cos u\cos v,\\ y=6\sin u\cos v,\\ z=6\sin v\end{cases}$$

puutujatasandid, mis läbivad sfääri ja sirge $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$ lõikepunkte.

12.51. Koostada sfääri $\bar{x} = 8(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ puutujatasandi võrrand sfääri punktis, mis vastab parameetri väärtustele

1) $u = v = \frac{\pi}{3}$;

2) $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{4}$.

12.52. Leida sfääri $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$ puutujatasandid, mis läbivad sfääri ja sirge $\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ lõikepunkte. Selgitada, miks need puutujatasandid on paralleelsed.

12.53. Koostada sfääri võrrand, kui sfääri keskpunkt asub punktis $C(6,-8,3)$ ja sfäär puutub z-telge.

12.54. Koostada sfääri võrrand, kui sfääri keskpunkt asub punktis C ja sfäär puutub tasandit:

1) $C(0,0,0)$, $16x - 15y - 12z + 75 = 0$;

2) $C(1,4,-7)$, $6x + 6y - 7z + 42 = 0$;

3) $C(3,-5,-2)$, $2x - y - 3z + 11 = 0$.

12.55. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ puutujatasandi lõikepunktid reeperitelgedega, kui puutepunkt on $X_0(x_0,y_0,z_0)$.

12.56. Sfäär raadiusega $R = 3$ puutub kolme reeperitasandit. Leida sfääri keskpunkt, kui ta asub 1) teises, 2) viiendas, 3) kuuendas, 4) seitsmendas, 5) kaheksandas kaheksandikus.

12.57. Leida sfääri keskpunkt ja raadius, kui sfäär läbib punkti $P(4,-1,-1)$ ja puutub kõiki kolme reeperitasandit.

12.58. Koostada sfääri võrrand, kui sfääri raadius on R ja kui ta puutub kõiki reeperitasandeid.

12.59. Leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ oleks sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ puutujatasandiks. Eeldades, et leitud tingimused on täidetud, leida puutepunkti koordinaadid.

12.60. Tõestada, et tasand $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ puutujatasand. Leida puutepunkt.

12.61. Millise $a$ väärtuse korral tasand $x + y + z = a$ puutub sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 12$?

12.62. Koostada tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$ paralleelsete sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ puutujatasandite võrrandid.

12.63. Koostada võrrandid tasanditele, mis puutuvad sfääri ja on paralleelsed tasandiga:

1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25,$
   $4x + 3z - 17 = 0;$

2) $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 225,$
   $10x - 11y - 2z + 3 = 0.$

12.64. Koostada võrrandid tasanditele, mis puutuvad sfääri ja on risti sirgega:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\qquad \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 3}{2} = \dfrac{z}{-1}$;

2) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 36,\qquad \begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = 3t - 3, \\ z = -1. \end{cases}$

12.65. Sfääri raadius on 3 ja sfäär puutub tasandit $x + 2y + 2z + 3 = 0$ punktis $M(1,1,-3)$. Koostada sfääri võrrand.

12.66. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär puutub kahte paralleelset tasandit $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, kusjuures ühte neist punktis $M_1(5,-1,-1)$.

12.67. Leida sfääri raadius, kui sfäär puutub tasandeid $3x + 2y - 6z - 15 = 0$, $3x + 2y - 6z + 55 = 0$.

12.68. Sfääri keskpunkt asub punktis $C(4,5,-2)$ ja sfäär $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 36 = 0$ puutub otsitavat sfääri seestpoolt. Koostada sfääri võrrand.

12.69. Sfääri keskpunkt asub sirgel

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

ja sfäär puutub tasandeid $x + 2y - 2z - 2 = 0$, $x + 2y -$

$- 2z + 4 = 0$. Koostada sfääri võrrand.

12.70. Leida sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ja sirge $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ puutumise tarvilik ja piisav tingimus.

12.71. Leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et sirge

$x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$

ja sfäär

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

1) ei omaks ühiseid punkte,

2) lõikuksid.

12.72. Leida sfääri võrrand, kui sfäär puutub sirget

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 4}{6} = \frac{z - 6}{4} \qquad (s_1)$$

punktis $P_1$ $(1,-4,6)$ ja sirget

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 2}{-2} \qquad (s_2)$$

punktis $P_2$ $(4,-3,2)$.

12.73. Leida sfääri $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 + (z + 1)^2 = 16$ puutujatasandid, mis läbivad x-telge.

12.74. Leida sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ puutujatasandid, mis läbivad sirget $x = x_1 + lt$, $y = y_1 + mt$, $z = z_1 + nt$.

12.75. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ puutujatasandid, mis on paralleelsed sirgetega

$$\frac{x + 5}{2} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 13}{2}, \quad \frac{x + 7}{3} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 8}{0}.$$

12.76. Tõestada, et läbi sirge

$$\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0, \\ x - y - 2z = 0, \end{cases}$$

võib asetada kaks tasandit, mis puutuvad sfääri

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.

Koostada nende puutujatasandite võrrandid.

12.77. Tõestada, et läbi sirge $\frac{x + 6}{2} = y + 3 = z + 1$ ei ole võimalik panna tasandit, mis puutuks sfääri

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0.$

12.78. Tõestada, et läbi sirge $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ võib panna ainult ühe tasandi, mis puutub sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0.$
Koostada selle tasandi võrrand.

12.79. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib ringjoont
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y + 2z - 5 = 0, \\ x - 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$
ja puutub tasandit $2x + 2y + z - 7 = 0.$

12.80. Koostada kahte lõikuvat sirget
$$\begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = x_2 + l_2 t, \\ y = y_2 + m_2 t, \\ z = z_2 + n_2 t, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \end{cases}$$
puutuvate sfääride keskpunktide hulga võrrand.

12.81. Koostada punktist $X_0(x_0, y_0, z_0)$ sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ puutujatasanditele tõmmatud ristsirgete aluspunktide hulga võrrand.

Märkus. Tasandi ristsirge aluspunktiks nimetatakse tasandi ja ristsirge lõikepunkti.

12.82. Koostada sirgete hulga võrrandid, kui sirged puutuvad sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ja lõikavad kahte antud sirget:
$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -1, \\ z = 0. \end{cases}$$

## 3. Sfääri vektorvõrrand

12.83. Leida sfääri $\bar{x}^2 - 2\bar{x}(2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) = 35$ keskpunkt ja raadius.

12.84. Millisel lisatingimusel vektorvõrrand $\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{n} + c = 0$ määrab sfääri? Leida sfääri keskpunkt ja raadius.

12.85. Veenduda, et võrrand $\bar{x}^2 - \bar{x}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{a}\bar{b} = 0$ määrab sfääri, ning leida sfääri keskpunkt ja raadius.

12.86. On antud kaks punkti $A(\bar{a})$ ja $B(\bar{b})$. Leida punktide hulk ruumis, mille punktidest lõik AB on nähtav täisnurga all.

12.87. Selgitada antud võrrandite geomeetriline sisu:
1) $\bar{x}^2 + 8\bar{x}\bar{k} + 12 = 0$;
2) $\bar{x}^2 - 12\bar{x}\bar{j} - 16\bar{x}\bar{k} = 125$.

12.88. Teades sfääri vektorvõrrandit $(\bar{x} - \bar{x}_o)^2 = R^2$, tuletada sfääri kanooniline võrrand.

12.89. Milliseid tingimusi rahuldavad ringjoone punktide kohavektorid, kui ringjoon asub xy-tasandil, ringjoone keskpunktiks on punkt $C(3\bar{i})$ ja ringjoone raadius on 5 ?

12.90. Leida sirge $\bar{x} = t\bar{a}$ ja sfääri $\bar{x}^2 = R^2$ lõikepunktid; arvutada lõikepunktide koordinaadid tingimusel, et $\bar{a} = \{l, m, n\}$.

12.91. Leida sirge $\bar{x} = \bar{x}_1 + t\bar{a}$ ja sfääri $(\bar{x} - x_o)^2 = R^2$ lõikepunktide kohavektorid.

12.92. Leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et tasand $\bar{x}\bar{n} = c$ ja sfäär $(\bar{x} - \bar{x}_o)^2 = R^2$
1) ei omaks ühiseid punkte;
2) puutuksid;
3) lõikuksid.

12.93. Otsitava sfääri raadius on R, sfääri keskpunkt asub sirgel $\bar{x} = \bar{x}_1 + t\bar{a}$ ja ta puutub tasandit $\bar{x}\bar{n} = c$. Koostada sfääri võrrand.

12.94. Tasand $\bar{x}\bar{n} = c$ lõikab sfääri $(\bar{x} - \bar{x}_o)^2 = R^2$ mööda ringjoont. Leida ringjoone raadius.

12.95. Koostada sfääri $(\bar{x} - \bar{x}_o)^2 = R^2$ puutujatasandi võrrand sfääri punktis $M_o(\bar{\rho}_o)$.

12.96. Koostada sfääri $\bar{x}^2 = R^2$ puutujatasandite võrrandid, kui need tasandid on paralleelsed tasandiga $\bar{r}\bar{n} + D = 0$. Kirjutada need võrrandid ka koordinaatkujul $(\bar{n} = (A, B, C))$.

## 4. Punkti potents sfääri suhtes. Radikaaltasand, radikaaltelg, radikaalpunkt

12.97. Leida reeperi alguspunkti ning punktide $P_1(0,2,3)$ ja $P_2(5,1,-4)$ potentsid sfääri $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x - y + 2z - 7 = 0$ suhtes.

12.98. Leida sfääride

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9,$$
$$(x - 7)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$$

radikaaltasand.

12.99. Leida sfääride

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5z = 0$$

radikaaltasand.

12.100. Koostada kahe antud sfääri $(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 = R_1^2$ ja $(\bar{x} - \bar{x}_2)^2 = R_2^2$ radikaaltasandi võrrand.

12.101. Sirgel, mis läbib reeperi alguspunkti ja punkti $A(1,1,1)$, leida punkt, mille potentsid sfääride

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 1,$$
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (zb)^2 + 2 = 0$$

suhtes on võrdsed.

12.102. Tõestada, et kolme sfääri radikaaltasandid kuuluvad ühte lõikuvate tasandite kimpu. (Kimbu telge nimetatakse radikaalteljeks ehk potentssirgeks).

12.103. Leida punktide hulk, mille potentsid kolme antud sfääri suhtes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y + 21 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 7 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8z + 8 = 0$$

on võrdsed. Kontrollida, kas kolme sfääri radikaaltelg on risti sfääride keskpunktide poolt määratud tasandiga.

12.104. Koostada kolme sfääri $(\bar{x} - \bar{x}_i)^2 = R_i^2$, $i = 1,2,3$ radikaaltelje võrrandid.

12.105. Tõestada, et nelja sfääri kuus radikaaltelge kuuluvad ühte sirgete sidumisse. (Sidumi keskpunkti nimetatakse nelja antud sfääri radikaalpunktiks ehk radikaaltsentriks).

12.106. Leida nelja antud sfääri $(\bar{x} - \bar{x}_i)^2 = R_i^2$, $i = 1,2,3,4$ radikaalpunkt.

12.107. Leida sfäär, mis on risti nelja sfääriga:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$
$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 53,$$
$$(x + 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 39,$$
$$x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 10.$$

## 5. Mitmesuguseid ülesandeid

12.108. Leida punktide hulk, mille iga punkti kauguste ruutude summa fikseeritud punktideni $F_1(-a,0,0)$ ja $F_2(a,0,0)$ on konstant $4a^2$.

12.109. Kuubi tipud on $A(-a,-a,-a)$, $B(a,-a,-a)$, $C(-a,a,-a)$ ja $D(a,a,a)$. Leida punktide hulk, mille iga punkti kauguste ruutude summa antud kuubi tahkudeni on konstant $8a^2$.

12.110. Tõestada, et kui sirge läbib punkti $P_0$ ja lõikab sfääri punktides $P_1$ ja $P_2$, siis sfääri puutujatasandid neis punktides lõikuvad mööda sirget, mis asub punkti $P_0$ radikaaltasandil.

12.111. Koostada punktis $M(3,5,1)$ poolituvate sfääri

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 25$$

kõõlude hulga võrrand.

12.112. Koostada punkti $S(x_0,y_0,z_0)$ läbivate sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

12.113. Koostada punkti $P(-R,0,0)$ läbivate sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

12.114. Läbi punkti $X_0(x_0,y_0,z_0)$ on tõmmatud sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ kõõlud. Koostada võrrand punktide hulgale, millesse kuuluvad vaadeldud sfääri kõõlude keskpunktid.

12.115. Leida sirgete sidumi $S_1$ sirgete lõikepunktid vastavalt sirgetega ristuvate ja tasandite sidumisse $S_2$ kuuluvate tasanditega. Tõestada, et sama punktide hulga saame, kui leiame tasandite sidumi $S_2$ tasandite lõikepunktid tasanditega ristuvate ja sirgete sidumisse $S_1$ kuuluvate sirgetega.

12.116. Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ja tasandite kimbu $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ tasandite lõikejooned moodustavad ringjoonte parve. Koostada tekkinud ringjoonte parve ringjoonte keskpunktide hulga võrrandid.

12.117. On antud kaks sfääri

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 + (z - p_1)^2 = R_1^2,$$
$$(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 + (z - p_2)^2 = R_2^2,$$

mis lõikuvad mööda tasandil $\alpha$ asuvat ringjoont. Tõestada, et antud sfääride lõikejoont läbiva iga sfääri võrrandi ja samuti tasandi $\alpha$ võrrandi võib saada võrrandist

$$\lambda[(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 + (z - p_1)^2 - R_1^2] + \mu[(x + m_2)^2 + (y - n_2)^2 + (z - p_2)^2 - R_2^2] = 0$$

sobiva arvude $\lambda$ ja $\mu$ valikuga.

12.118. Koostada punktist $A(3,2,2)$ sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mööda ringjoont $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x + 2y + z - 1 = 0$ puutuvatele tasanditele tõmmatud ristsirgete aluspunktide hulga võrrand.

Märkus. Tasandi ristsirge aluspunktiks nimetatakse tasandi ja ristsirge lõikepunkti.

12.119. Tasandid puutuvad sfääri $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 - 9 = 0$ mööda sfääri ja tasandi $x + y + z - 2 = 0$ lõikejoont. Koostada reeperi alguspunktist vaadeldud tasanditele tõmmatud ristsirgete aluspunktide hulga võrrandid.

12.120. Tõestada, et kolme paarikaupa lõikuvat sirget puutuvate sfääride keskpunktide hulk on kahe teist järku pinna lõikejoon.

12.121. Mitmest parameetrist sõltub sfääride parv, mille iga sfäär

1) läbib antud punkti,
2) läbib kahte antud punkti,
3) läbib kolme antud punkti,
4) puutub antud sirget,
5) puutub antud tasandit,
6) puutub antud tasandit ja raadius on R,
7) omab tsentrit antud tasandil,
8) omab tsentrit antud ringjoonel,
9) läbib antud ringjoont?

12.122. Tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ lõikab sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks antud tasandi poolt antud sfäärist väljalõigatud väiksemas segmendis?

12.123. Tõestada, et üldjuhul eksisteerib kaheksa erinevat sfääri, mis puutuvad nelja paarikaupa lõikuvat sirget.

12.124. Leida kolme antud tasandit puutuvate sfääride keskpunktide hulk.

12.125. Inversiooniks antud sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ suhtes nimetatakse ruumi teisendust, mille korral ruumi igale punktile $X(x,y,z)$ seatakse vastavusse ruumi punkt $X'(x',y',z')$, mis kuulub kiirele OX ja mille korral lõigud OX ja OX' rahuldavad tingimust $OX \cdot OX' = R^2$. Leida punktide X ja X' koordinaatide vaheline sõltuvus toodud inversiooni korral.

12.126. Leida pind, milleks teiseneb sfäär
$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + 2by - 2cz = 0$
inversiooni korral sfääri
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ suhtes (vt. eelnev ülesanne).

12.127. Leida pind, milleks teiseneb tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ inversiooni korral sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ suhtes.

12.128. Milliseks pinnaks teiseneb tasand $\bar{x}\bar{n} = c$ inversiooni korral sfääri $\bar{r}^2 = R^2$ suhtes?

12.129. Milliseks pinnaks teiseneb sfäär $\bar{x}^2 - 2\bar{n}\bar{x} = 0$ inversiooni korral sfääri $\bar{x}^2 = R^2$ suhtes ?

12.130. Milliseks pinnaks teiseneb sfäär $(x - x_0)^2 = a^2$ inversiooni korral sfääri $\bar{x}^2 = R^2$ suhtes ?

12.131. Sfääri stereograafiliseks projektsiooniks nimetatakse projektsiooni sfääri suvalisest punktist S punktiga S diametraalses punktis võetud sfääri puutujatasandile (projektsioonitasandile). Tõestada, et stereograafilise projektsiooni korral ringjoonele sfääril vastavad ringjooned ja sirged projektsioonitasandil.

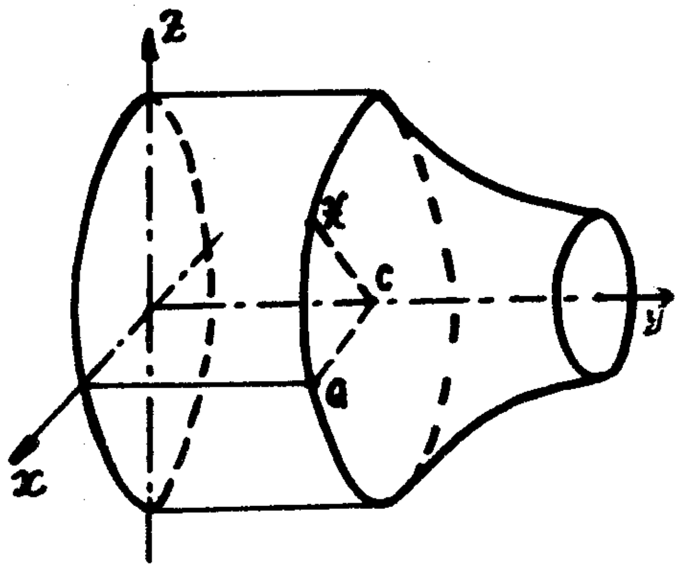
12.132. Milline teisendus stereograafilise projektsiooni tasandil vastab sfääri peegelkujutusele sfääri diametraaltasandil?

## §2. Pöördpind

Olgu xy-tasandil antud mingi kõver

$$F(x,y) = 0, \quad z = 0. \qquad (12.12)$$

Selle kõvera pöörlemisel ümber xy-tasandil võetud mingi sirge nn. pöördtelje tekib pöördpind. Pöördpinna lõiget telge läbiva tasandiga nimetatakse meridiaaniks ja lõiget teljega ristuva tasandiga – paralleeliks. Kui pöörlevaks kõveraks (12.12) on sirge või teist järku kõver ja viimasel juhul pöördteljeks pöörleva kõvera sümmeetriatelg, siis pöördpinnaks on teist järku pind (kvadrik).




Joonis 12.5.

Olgu pöördpind saadud kõvera (12.12) pöörlemisel ümber y-telje. Võtame sellel pinnal suvalise punkti X(x,y,z) ja lõikame pinda punkti X läbiva y-teljega ristuva tasandiga. Pinna ja tasandi lõikejooneks (paralleeliks) on ringjoon, mille keskpunkt on $C(0,y,0)$. Ringjoone raadius on $CX = \sqrt{x^2 + z^2}$. Raadius on aga sama, mis $xy$-tasandil võetud joone $F(x,y) = 0$ ja võetud paralleeli lõikepunktis Q. Seega võime joone võrrandis $x$ asendada avaldisega $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Saame võrrandi

$$F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0. \tag{12.13}$$

Seda võrrandit rahuldavad nüüd pöördpinnal asuva mistahes punkti koordinaadid. Järelikult määrab võrrand (12.13) pöördpinna, mis saadakse $xy$-tasandil asuva kõvera pöörlemisel ümber $y$-telje. Seega, et saada pöördpinna võrrandit, kui selle pinna moodustab $xy$-tasandil asuv kõver pöörlemisel ümber $y$-telje, tuleb joone võrrandis teha asendus

$$x \longrightarrow \pm\sqrt{x^2 + z^2}. \tag{12.14}$$

Et saada pöördpinna võrrandit, kui selle pinna moodustab $xy$-tasandil asuv kõver pöörlemisel ümber $x$-telje, tuleb joone võrrandis teha asendus

$$y \longrightarrow \pm\sqrt{y^2 + z^2}. \tag{12.15}$$

Näide 6. $xy$-tasandil asuv sirge $x = a$ pöörleb ümber $y$-telje. Tekkinud pöördsilindri võrrand on $\pm\sqrt{x^2 + z^2} = a$ ehk $x^2 + z^2 = a^2$.

Näide 7. $xy$-tasandil asuv sirge $y = kx$ pöörleb ümber $y$-telje. Kasutades asendust (12.14), saame pöördkoonuse võrrandi

$$y = \pm k\sqrt{x^2 + z^2}$$

ehk

$$y^2 = k^2(x^2 + z^2).$$

Näide 8. Sirge $y = kx$, $z = 0$ pöörleb ümber $x$-telje. Kuna sirge asub $xy$-tasandil, siis saame pöördkoonuse võrrandi, kui kasutame asendust (12.15)

$$\pm\sqrt{y^2 + z^2} = kx$$

ehk

$$y^2 + z^2 = k^2x^2.$$

Näide 9. $xy$-tasandil asuv ringjoon $x^2 + y^2 = 4$ pöörleb ümber $x$-telje. Koostada tekkinud pöördpinna võrrand. Kasutades asendust

$$y^2 \longrightarrow y^2 + z^2,$$

saame ringjoone pöörlemisel tekkinud sfääri võrrandi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

12.133. Koostada sirge $y = 4$, $z = 0$ pöörlemisel ümber z-telje tekkinud pöördpinna võrrand. Kirjeldada tekkinud pinda.

12.134. Sirge $z + 2y - 2 = 0$, $x = 0$ pöörleb ümber z-telje. Koostada tekkinud pöördpinna võrrand. Teha joonis.

12.135. Koostada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ pöörlemisel ümber 1) x-telje; 2) y-telje tekkinud pöördpinna võrrand.

12.136. Koostada ellipsi $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$ pöörlemisel ümber y-telje tekkinud pöördpinna võrrand.

12.137. Ellips pooltelgedega 5 ja 3 pöörleb ümber suurema telje, mis ühtib y-teljega. Ellipsi keskpunkt asub reeperi alguspunktis. Koostada tekkinud pinna võrrand.

12.138. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$; $y = 0$ pöörlemisel ümber 1) z-telje, 2) x-telje tekkinud pöördpinna võrrand.

12.139. Hüperbool pooltelјega 3 ja 4 pöörleb ümber imaginaarse telje, mis ühtib z-teljega. Hüperbooli keskpunkt ühtib reeperi alguspunktiga. Koostada hüperbooli pöörlemisel tekkinud pöördpinna võrrand. Teha joonis.

12.140. Kahe paralleelse sirge vaheline kaugus on 2 ühikut. Üks paralleelsest sirgest pöörleb ümber teise. Koostada tekkinud pöördpinna võrrand.

12.141. xy-tasandil asuv kõver $y = f(x)$ pöörleb ümber x-telje. Koostada tekkinud pöördpinna võrrand.

12.142. Tõestada, et pind, mis moodustatakse kõvera $\varphi(x,z) = 0$, $y = 0$ pöörlemisel ümber z-telje, määratakse võrrandiga

$$\varphi(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

# ELLIPSOID

**Ellipsoidiks** (reaalseks) nimetatakse pinda, mis teatava ortonormeeritud reeperi korral määratakse võrrandiga

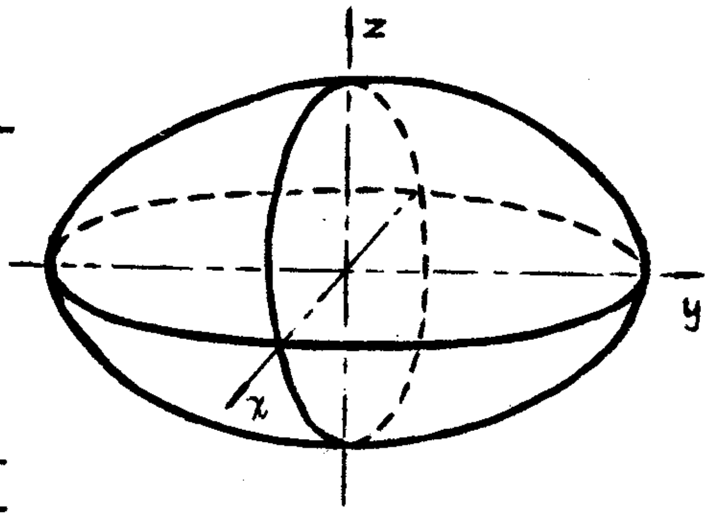
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 . \qquad (13.1)$$

Võrrandit (13.1) nimetatakse ellipsoidi kanooniliseks võrrandiks. Kui xy-tasandil asuv ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ (vt. joon. 13.1) pöörleb ümber y-telje, saame pöördpinna

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ehk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$,

mida nimetatakse pöördellipsoidiks. Pöördellipsoidi erijuhuks $a = b$ korral on sfäär, mille võrrand on $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Kui pöördellipsoidi suruda kokku (venitada) x-telje sihis, saadakse ellipsoid (13.1). Ellipsoid on kinnine pind, mis asub risttahukas külgedega 2a, 2b ja 2c. Suurusi a, b ja c ellipsoidi võrrandis (13.1) nimetatakse ellipsoidi pooltelgedeks. Kui ellipsoidi pooltelјed on erinevad, siis räägitakse ka kolmeteljelisest ellipsoidist ning tema suurest, keskmisest ja väikesest pooltelјest.




Joonis 13.1

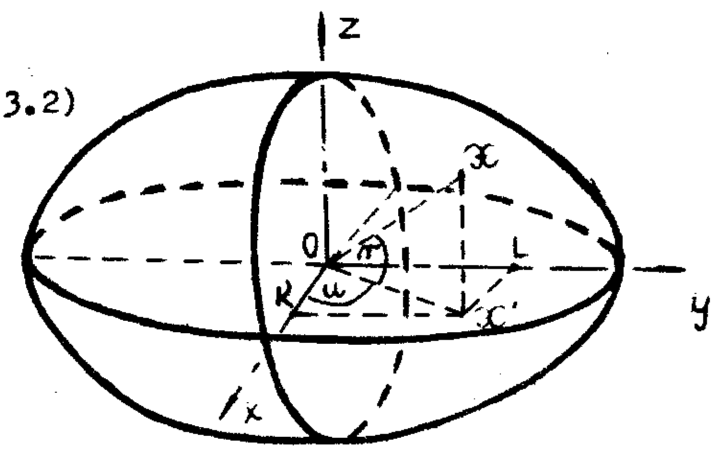
Pinda, mille korral eksisteerib ainult üks keskpunkt (tsenter), nimetatakse tsentraalseks pinnaks. Ellipsoid on tsentraalne pind. Kui ellipsoidi võrrandil on kanooniline kuju (13.1), siis reeper on valitud järgmiselt: reeperi alguspunkt on ellipsoidi keskpunktis, reeperitelgedeks on ellipsoidi sümmeetriateljed (neid on kolm) ja reeperitasanditeks on ellipsoidi sümmeetriatasandid (ka kolm) (vt. joon. 13.1).

Ellipsoidi lõikejooni tema sümmeetriatasanditega nimetatakse ellipsoidi *peaellipsiteks*. Pinna sümmeetriatelgi nimetatakse pinna *telgedeks*. Ellipsoidi lõikejooned tasanditega on ellipsid, mis erijuhul võivad osutuda ringjoonteks. Ellipsoidi lõige tasandiga võib koosneda ka ainult ühest punktist (kui tasand on ellipsoidi puutujatasand). Pinna lõikepunkte sümmeetriatelgedega nimetatakse pinna *tippudeks*. Ellipsoidil on 6 tippu.

Ellipsoidi parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v, \\ y = b \sin u \cos v, \\ z = c \sin v, \end{cases} \qquad (13.2)$$

kus parameetriteks on nurgad $u = \angle KOX'$ ja $v = X'OX$ (vt. joon. 13.2), $0 \leq u < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Ellipsoidi parameetrilised võrrandid on samaväärsed ellipsoidi vektorvõrrandiga




Joonis 13.2.

$$\bar{x} = (a \cos u \cos v,\ b \sin u \cos v,\ c \sin v). \qquad (13.3)$$

Ellipsoidi *diameetriks* nimetatakse sirget, millel asuvad ellipsoidi paralleelsete tasandite lõigetena tekkinud ellipsite keskpunktid. Ellipsoidi *diameetertasandiks* nimetatakse tasandit, millel asuvad ellipsoidi paralleelsete kõõlude keskpunktid. Ellipsoidi diameetri määramiseks tuleb fikseerida mingi riht (paralleelsete tasandite ühine riht) ning diameetertasandi määramiseks mingi siht (paralleelsete sirgete ühine siht). Ellipsoidi (13.1) *diameetri võrrand* on

$$\frac{x}{Aa^2} = \frac{y}{Bb^2} = \frac{z}{Cc^2}, \tag{13.4}$$

kus $\bar{n} = (A,B,C)$ on paralleelsete lõiketasandite normaalvektor ja a, b, c ellipsoidi pooltelјed. Ellipsoidi kõik diameetrid läbivad ellipsoidi keskpunkti. Kui ellipsoidi paralleelsete kõõlude sihivektor on $\bar{s} = (l,m,n)$, siis ellipsoidi <u>diameetertasandi võrrand</u> on

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0. \tag{13.5}$$

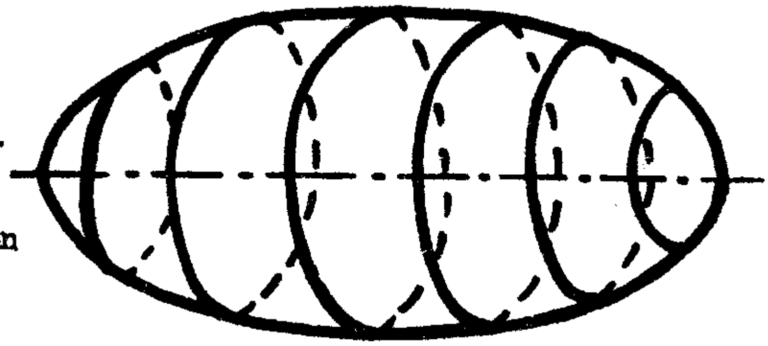
Diameetrit, mis on saadud ellipsoidi lõikamisel tasanditega, mis on paralleelsed mingi diameetertasandiga, nimetatakse selle diameetertasandi <u>kaasdiameetriks</u>.

Diameetertasandit, mis on saadud ellipsoidi lõikamisel sirgetega, mis on paralleelsed mingi diameetriga, nimetatakse selle diameetri <u>kaasdiameetertasandiks</u>. Seega, ellipsoidi diameetrile (13.4) vastava kaasdiameettertasandi võrrand on

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Ellipsoidi diameetertasandi (13.5) kaasdiameetri võrrandid on

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}. \tag{13.7}$$



Joonis 13.3

Ellipsoidi <u>puutujatasandiks</u> tema punktis $X_o(x_o,y_o,z_o)$ nimetatakse tasandit, millel asuvad kõik punkti $X_o$ läbivad ellipsoidi puutujad. Ellipsoidi (13.1) puutujatasandi võrrand tema punktis $X_o(x_o,y_o,z_o)$ saadakse kergesti nn. poolitiasendusvõttega[1] ellipsoidi võrrandist

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} + \frac{z_o z}{c^2} = 1.$$

<u>Näide 1.</u> Koostada ruumi selliste punktide hulga $\{X\}$ võrrand, kus selle hulga iga punkti X korral kauguste summa

[1] Vt. sfääri puutujatasand.

kahe antud ruumi punktini $F_1$ ja $F_2$ on võrdne konstandiga 2a, kusjuures $a > 0$ ja 2a on suurem punktide $F_1$ ja $F_2$ vahelisest kaugusest.

Lahendus. Kuna reeperi valik on vaba, siis on ülesande lahendamist võimalik tunduvalt lihtsustada ortonormeeritud reeperi sobiva valiku teel. Valime z-teljeks sirge $F_2F_1$ (telje positiivseks suunaks vektori $\overline{F_1F_2}$ suuna) ja asetame reeperi alguspunkti lõigu $F_1F_2$ keskpunkti. Kui $|F_1F_2| = 2c$, siis $F_1(0,0,-c)$, $F_2(0,0,c)$ ja otsitavate punktide hulga võrrand on $|\overline{F_1X}| + |\overline{F_2X}| = 2a$, mis valitud reeperi korral koordinaatides saab kuju $\sqrt{x^2 + y^2 + (z + c)^2} + \sqrt{x^2 + y^2+(z - c)^2} = 2a$. Lihtsustamiseks viime teise ruutliikme paremale, võtame ruutu, koondame sarnased liikmed ning jagame neljaga:

$$a^2 - cz = a\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}.$$

Võttes veel kord ruutu ja koondades sarnased liikmed, saame

$$a^2x^2 + a^2y^2 + (a^2 - c^2)z^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Kuna eelduse kohaselt $a^2 - c^2 > 0$, saame

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Otsitav punktihulk on pöördellipsoid, mille pöördeteljeks on sirge $F_1F_2$.

## 1. Ellipsoid. Ellipsoidi lõiked

13.1. Tõestada, et võrrand

$\bar{x} = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$

on ellipsoidi vektorvõrrand ja võrrandid

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v, \\ y = b \sin u \cos v, \\ z = c \sin v \end{cases}$$

on ellipsoidi parameetrilised võrrandid. Millised kõverad määratakse võrranditega $u = \text{const}$ ja $v = \text{const}$?

13.2. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ ja sirge $\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 6}{-3} = \frac{z + 2}{-2}$ lõikepunktid.

13.3. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sisepiirkonnas.

13.4. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ lõikaks ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

13.5. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ pealõiked (lõiked sümmeetriatasanditega), tipud ja poolteljed.

13.6. Uurida ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ lõikeid tasanditega, mis on paralleelsed reeperitasanditega.

13.7. Näidata, et paralleelsed tasandid lõikavad ellipsoidi mööda sarnaseid ellipseid.

Märkus. Kahte ellipsit nimetatakse sarnaseks, kui nende vastavad pooltteljed on võrdelised.

13.8. Ellipsoidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ on lõigatud xz-tasandiga ja tasandiga, mis asub xz-tasandist kahe ühiku kaugusel. Leida lõikejoontena tekkinud ellipsite telgede suhted.

13.9. Kontrollida, et tasand $x - 2 = 0$ lõikab ellipsoidi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ mööda ellipsit. Leida lõikejoonena tekkinud ellipsi pooltteljed ja tipud.

13.10. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ lõikejoone keskpunkt.

13.11. Leida ellipsoidi $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$ ja tasandi $x + 4z - 4 = 0$ lõikejoone keskpunkt.

13.12. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ ja tasandi $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ lõikejoone keskpunkt.

13.13. Leida tasand, mis lõikab ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ mööda ellipsit, mille keskpunkt asub punktis $X_0(x_0, y_0, z_0)$. Punkt $X_0$ asub antud ellipsoidi sisepiirkonnas.

13.14. Põhjendada, et antud kõver

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

on ellips ning leida tema poolteljed ja tipud.

13.15. Teha kindlaks, milline kõver on ellipsoidi $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ ja tasandi $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ lõikejoon. Leida lõikejoone keskpunkt.

13.16. Leida ellipsoidi $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$ ja tasandi $x + 4z - 4 = 0$ lõikejoone projektsioon xy-tasandile.

13.17. Tõestada, et kui ellips pooltelgedega u ja v saadakse ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$, ja tema tsentrit läbiva tasandi lõikejoonena, siis $a \geqslant u \geqslant b \geqslant v \geqslant c$.

13.18. Leida kolme pinna $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ja $y - 2 = 0$ lõikepunktid.

13.19. Tõestada, et kui tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ lõikab ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, siis võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$$

määrab iga $\lambda$ korral ellipsoidi, mille teljed on paralleelsed antud ellipsoidi telgedega ning mis läbib antud ellipsoidi ja tasandi lõikejoont.

13.20. Koostada ruumi sellise punktihulga võrrand, mille iga punkti kauguste summa kahe antud punktini $F_1$ ja $F_2$ on 2a, $a > 0$:

1) $F_1(0,0,-4)$, $F_2(0,0,4)$, $2a = 10$;
2) $F_1(0,-3,0)$, $F_2(0,3,0)$, $2a = 8$;
3) $F_1(-5,0,0)$, $F_2(5,0,0)$, $2a = 16$.

13.21. On antud ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja tasand $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$. Leida selline ellipsoid, mis läbib antud ellipsoidi ja tasandi lõikejoont, mille teljed on paralleelsed antud ellipsoidi telgedega ja mille poolteljed on poole pikemad antud ellipsoidi pooltelgedest.

13.22. Leida selline ellipsoid, mille teljed ühtivad reeperitelgedega ja mis lõikab xz- ning yz-tasandit mööda kõveraid

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

13.23. Ellipsoidi teljed ühtivad reeperitelgedega ja ellipsoid läbib ellipsit $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 0$ ning punkti $M(1,2,\sqrt{23})$. Koostada ellipsoidi võrrand.

13.24. Koostada ellipsoidi võrrand, kui ellipsoidi teljed ühtivad reeperitelgedega, ellipsoid läbib ringjoont $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x$ ja punkti $M(3,1,1)$.

13.25. Ellipsoidi tipud on $C_1(0,0,6)$ ja $C_2(0,0,-2)$ ning xy-tasand lõikab ellipsoidi mööda ringjoont, mille raadius on 3. Koostada ellipsoidi võrrand.

13.26. Leida kõik tasandid, mis lõikavad ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c)$$

mööda ringjoont.

13.27. Tõestada, et iga kaks ringjoont, mis on saadud ellipsoidi lõikamisel kahe mitteparalleelse tasandiga, asuvad ühel sfääril.

13.28. Leida kahe antud ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

lõikejoon, kui $a > b$.

13.29. Tõestada, et üldise ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ võib saada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = 0$ pöörlemisel ümber x-telje ja sellele järgneval ruumi kokkusurumisel z-telje sihis.

## 2. Ellipsoidi diameetrid ja diameetertasandid

13.30. Leida sirge, millel asuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja tasandiga $Ax + By + Cz = 0$ paralleelsete lõikejoonte keskpunktid.

13.31. Leida sirge, millel asuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ ja tasandiga $x - z = 0$ paralleelsete tasandite lõikejoonte keskpunktid.

13.32. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ sellised diameetertasandid, mis lõikavad teda mööda ringjooni.

13.33. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1$ diameetri $\frac{x}{8} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$ kaasdiameetertasand ja diameetertasandi $3x - 5y + 2z = 0$ kaasdiameeter.

13.34. Ellipsoidi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ diameetertasand poolitab vektoriga $\bar{a} = (2,1,2)$ paralleelsed ellipsoidi kõõlud. Koostada diameetertasandi võrrand.

13.35. Tõestada, et ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ korral sihi $\bar{s} = (l,m,n)$ poolt määratud diameetertasandi võrrand on $\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0$.

13.36. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c$, diameetrid, millel asuvad ellipsoidi lõikeringjoonte keskpunktid.

13.37. Leida sirged, millel asuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ kõõlud poolituvad punktis $A(2,1,-1)$.

13.38. Koostada sirgete hulga võrrand, kui on teada, et hulga sirgetel asuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ kõõlud poolituvad punktis $X_1(x_1,y_1,z_1)$.

13.39. Koostada punkti $X_0(x_0,y_0,z_0)$ läbivate ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

13.40. Koostada võrrandiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$ määratud ellipsoidide keskpunktide hulga võrrand, kui $\lambda$ on antud ellipsoidide parve parameeter.

## 3. Mitmesuguseid ülesandeid

13.41. Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ puutujatasandid lõikavad ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ mööda ellipseid. Koostada saadud ellipsite keskpunktide hulga võrrand.

13.42. Tõestada, et pooluse $X_0(x_0, y_0, z_0)$ korral ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ polaartasandi võrrandiks on $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$.

13.43. Koostada ellipsoidi $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ polaartasandi võrrand, kui pooluseks on punkt $X_0(8, -5, 8)$.

13.44. Leida ellipsoidi

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

lõikamisel paralleelsete tasanditega

1) $Ax + By + Cz + \lambda = 0$,

2) $x + y + z + \lambda = 0$

tekkinud lõikeellipsite sümmeetriatelgede poolt moodustatud pinna võrrand ($\lambda$ on reaalarv).

13.45. Leida ellipsoidi võrrand, kui reeperi alguspunkt on ellipsoidi keskpunktis, x- ja y-telg asuvad tasandil, mis läbib ellipsoidi keskpunkti ja lõikab teda mööda ringjoont, ning z-telg asub xy-tasandi poolt määratud diameetril.

13.46. Tõestada, et ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ iga kolme punkti korral, mille kohavektorid on paarikaupa risti, kohavektorite pikkuste ruutude pöördväärtuste summa on konstant.

13.47. Mööda liikumatut ellipsit $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$ libisevad deformeeruva ellipsi kaks tippu nii, et libisemisel oleva deformeeruva ellipsi tasand jääb kogu protsessi vältel ristuvaks y-teljega ja pooltelgede suhe on konstantne ning võrdub $\frac{c}{a}$. Koostada libiseva ellipsi poolt kirjeldatud pinna võrrand.

13.48. Tõestada, et ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $c < b < a$ keskpunkti läbib parajasti kaks tasandit, mis lõikavad antud ellipsoidi mööda ringjoont.

13.49. Tõestada, et erinevate pooltelgedega ($a > b > c$) ellipsoidil on täpselt kolm sümmeetriatasandit.

13.50. Koostada pinna võrrand, kui pind on saadud sfäärist $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ruumi ühtlasel kokkusurumisel moondeteguriga $\frac{3}{5}$ risti yz-tasandiga.

13.51. Leida pind, milleks teiseneb ellipsoid $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ kolme ühtlase kokkusurumise tulemusena reeperitasandite suhtes, kui moondetegurid on xy-tasandi suhtes $\frac{3}{4}$, xz-tasandi suhtes $\frac{4}{5}$ ja yz-tasandi suhtes $\frac{3}{4}$.

13.52. Ruumi ühtlasel kokkusurumisel moondeteguritega $q_1$ ja $q_2$ vastavalt xy- ja xz-tasandi suhtes sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ teiseneb ellipsoidiks $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$. Leida moondetegurid.

13.53. Tähistame ellipsi keskpunkti vähimat ja suurimat kaugust ellipsini vastavalt r ja R. Tõestada, et ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c$) kõigi lõikeellipsite korral r minimaalne väärtus on c, R maksimaalne väärtus on a; r maksimaalne väärtus ja R minimaalne väärtus on võrdsed ning võrduvad ellipsoidi keskmise poolteljega b.

# HÜPERBOLOID

## 1. Ühekattene hüperboloid

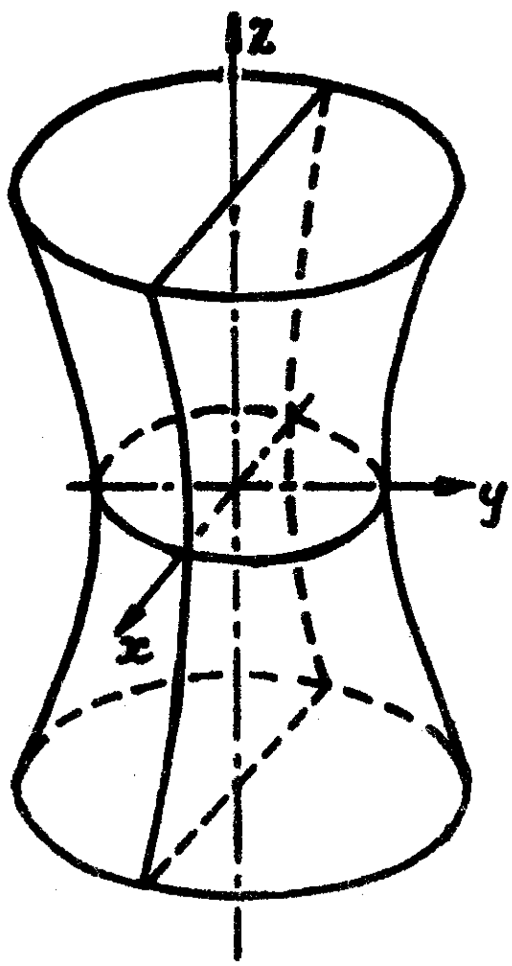
Ühekatteseks hüperboloidiks nimetatakse pinda, mis kindla ristreeperi valiku korral määratakse võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (14.1)$$

kus a, b ja c on positiivsed konstandid. Võrrandit (14.1) nimetatakse ühekattese hüperboloidi kanooniliseks võrrandiks ja valitud reeperit kanooniliseks reeperiks. Kui yz-tasandil asuv hüperbool $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ pöörleb ümber z-telje (vt. pöördpind), saame ühekattese pöördhüperboloidi

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

millest omakorda kokkusurumisel (venitamisel) x-telje sihis saame ühekattese hüperboloidi (14.1). Ühekattene hüperboloid on tsentraalne pind kolme sümmeetriatasandiga ja kolme sümmeetriateljega. Sümmeetriatelgi nimetatakse ühekattese hüperboloidi telgedeks. Valitud kanoonilise ristreeperi korral, mil ühekattese hüperboloidi võrrandil on kuju (14.1), on reeperitelgedeks valitud pinna teljed ja reeperi alguspunktiks on ühekattese hüperboloidi

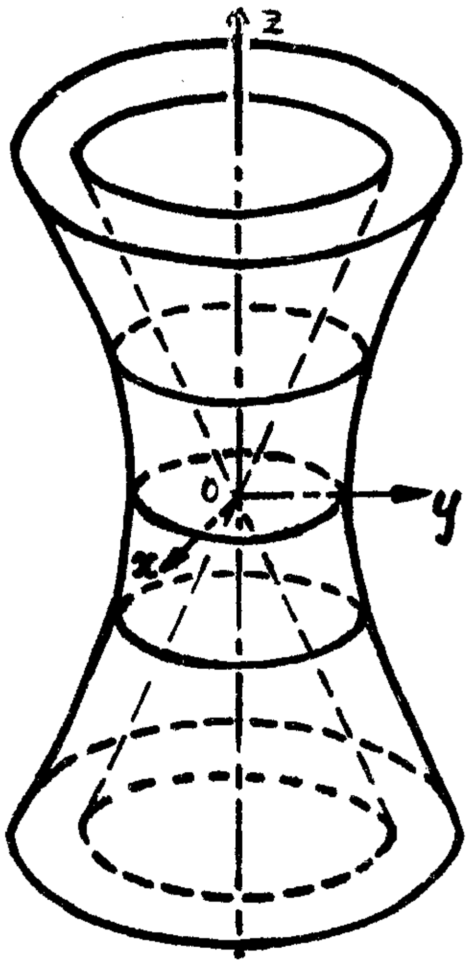


Joonis 14.1

keskpunkt (tsenter) ning reeperitasanditeks tema sümmeetriatasandid. Kaks telge lõikavad pinda ja määravad tema neli tippu, kolmas telg pinda ei lõika. Joonisel 14.1 on mittelõikavaks teljeks z-telg. Vastavalt sellele, kas telg lõikab ühekattest hüperboloidi või mitte, kõneldakse kas reaal- või imaginaarteljest. Suurusi a ja b võrrandis (14.1) nimetatakse <u>reaalpooltelgedeks</u>, suurust c <u>imaginaarpoolteljeks</u>. Ühekattese hüperboloidi lõikeid sümmeetriatasanditega nimetatakse <u>pealõigeteks</u>. Lõikamisel tasanditega $x = 0$ ja $y = 0$ saame lõigeteks hüperboolid, mida nimetatakse peahüperboolideks, ning tasandiga $z = 0$ ellipsi, mida nimetatakse <u>kaelellipsiks</u>. Kaelellipsi pooltelgedeks on ühekattese hüperboloidi reaalpooltelјed (vt. joon. 14.1). Lõigates ühekattest hüperboloidi tasandiga $z = t$, saame lõikejoonena ellipsi pooltelgedega

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + t^2}\,, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + t^2}.$$

Kui t muutub vahemikus $(-\infty, +\infty)$, siis lõikena saadud ellipsi poolteljed muutuvad, kuid jäävad võrdelisteks kaelellipsi pooltelgedega a ja b. Seega võime ühekattest hüperboloidi vaadelda kui pinda, mis saadakse deformeeruva ellipsi liikumisel nõnda, et ellipsi tipud kulgevad mööda hüperboole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ning liikuva ellipsi tasand jääb kogu liikumise vältel paralleelseks xy-tasandiga. Selliselt liikuv deformee-




Joonis 14.2.



6

ruv ellips jääb sarnaseks xy-tasandil asuva kaelellipsiga (vt. joon. 14.2).

Ühekattese hüperboloidiga (14.1) seotud koonust

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{14.2}$$

nimetatakse ühekattese hüperboloidi <u>asümptootiliseks koonuseks</u> (vt. joon. 14.2). Ühekattene hüperboloid asub oma asümptootilise koonuse välispiirkonnas. Ühekattese hüperboloidi lõige tasandiga, mis on paralleelne asümptootilise koonuse ühe ja ainult ühe moodustajaga, on parabool.

Pinda nimetatakse <u>joonpinnaks</u>, kui ta saadakse sirge liikumisel ruumis. Kui leidub sirgete hulk, mille iga sirge asub antud pinnal, kusjuures pinna iga punkti läbib parajasti üks sirge sellest hulgast, siis seda sirgete hulka nimetatakse antud pinna <u>sirgjoonsete moodustajate</u> parveks. Veendume, et ühekattene hüperboloid on joonpind. Olgu ühekattene hüperboloid määratud võrrandiga (14.1) ja olgu punkt $X_o(x_o, y_o, z_o)$ pinna punkt

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} - \frac{z_o^2}{c^2} = 1.$$

Otsime sirgeid, mis läbivad antud punkti $X_o$ ja asuvad pinnal. Kõik punkti $X_o$ läbivad sirged on esitatavad võrranditega

$$\begin{cases} x = lt + x_o, \\ y = mt + y_o, \\ z = nt + z_o, \end{cases} \tag{14.3}$$

kus $\bar{s} = (l,m,n)$ on sirge sihivektor. Et sirge on pinnal, siis sirge iga punkti koordinaadid peavad rahuldama pinna võrrandit

$$\frac{(lt + x_o)^2}{a^2} + \frac{(mt + y_o)^2}{b^2} - \frac{(nt + z_o)^2}{c^2} = 1$$

ehk

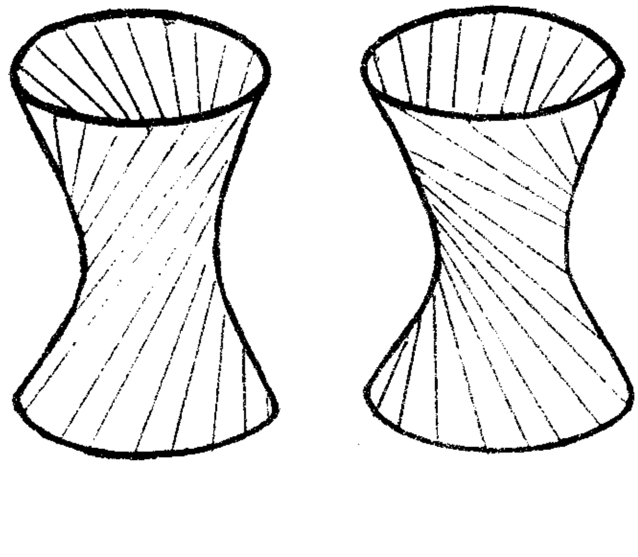
$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{lx_o}{a^2} + \frac{my_o}{b^2} - \frac{nz_o}{c^2}\right)t + \left(\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} - \frac{z_o^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Kuna punkt $X_o$ on pinna punkt, siis saadud võrrandi vabaliige on null. Et sirge on pinnal, siis saadud ruutvõrrand peab olema samaselt rahuldatud sirge iga punkti korral. Järelikult, võrrandi kordajad peavad olema nullid. Saame kahest Lineaarsest võrrandist koosneva ruutvõrrandisüsteemi pinna sirgjoonsete moodustajate sihivektorite leidmiseks:

$$\begin{cases} \dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}-\dfrac{n^2}{c^2}=0, \\ \dfrac{lx_0}{a^2}+\dfrac{my_0}{b^2}-\dfrac{nz_0}{c^2}=0. \end{cases} \qquad (14.4)$$

Kuna sirge sihivektor $\bar{s}$ määratakse kordaja täpsusega, siis saadud süsteem määrab kaks sihivektorit.

Järelikult, ühekattese hüperboloidi igat punkti läbib parajasti kaks sirgjoonset moodustajat. Ühekattesel hüperboloidil asuvate sirgete hulk koosneb kahest sirgjoonsete moodustajate parvest (vt. joon. 14.3). Süsteemi (14.4) esimesest võrrandist järeldub, et $n \neq 0$, sest vastasel korral oleksid sihivektori kõik koordinaadid nullid. Kuna sihivektor määratakse kordaja täpsusega, siis võtame $n = c$ ja süsteem (14.4) omab kuju



Joonis 14.3.

$$\begin{cases} \dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}=1, \\ \dfrac{lx_0}{a^2}+\dfrac{my_0}{b^2}=\dfrac{z_0}{c}. \end{cases} \qquad (14.4')$$

Kui valida $l = a \sin\varphi$ ja $m = b\cos\varphi$, siis esimene võrrand on rahuldatud. Asendades süsteemi (14.4') teise võrrandisse, viies esimese liikme paremale ja võttes ruutu, saame ruutvõrrandi $\sin\varphi$ määramiseks:

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)\sin^2\varphi - 2\,\frac{x_0 z_0}{a\,c}\sin\varphi + \frac{z_0^2}{c^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0,$$

millest

$$\sin\varphi = \frac{\frac{x_0}{a}\frac{z_0}{c} \pm \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}.$$

Seega, ühekattese hüperboloidi punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate sihivektorite $\bar{s}_1$ ja $\bar{s}_2$ koordinaadid on

$$\begin{cases} l = a\left(\frac{x_0 z_0}{a\,c} \pm \frac{y_0}{b}\right), \\ m = b\left(\frac{y_0 z_0}{b\,c} \mp \frac{x_0}{a}\right), \\ n = c\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \end{cases} \tag{14.5}$$

ning sirgjoonsete moodustajate parameetrilisteks võrranditeks on

$$\begin{cases} x = a\left(\frac{x_0 z_0}{a\,c} \pm \frac{y_0}{b}\right)t + x_0, \\ y = b\left(\frac{y_0 z_0}{b\,c} \mp \frac{x_0}{a}\right)t + y_0, \\ z = c\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)t + c_0. \end{cases} \tag{14.6}$$

Märgime, et numbriliste ülesannete korral on lihtsam leida sirgjoonsete moodustajate sihivektorid vahetult süsteemist (14.4), kui hakata tuletatud kohmakaid valemeid meeles pidama. Sirgjoonsete moodustajate parameetrilised võrrandid võime saada ka pinna võrrandist järgmise rühmitamise ja parametriseerimise võttega. Ühekattelise hüperboloidi võrrandist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ehk} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

saame sirgete paarid

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases} \tag{14.7}$$

ja

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \end{cases}$$

kus u ja v on suvalised parameetrid. Vaadeldud sirged asuvad ühekattesel hüperboloidil, sest kui punkti koordinaadid rahuldavad sirge võrrandit, siis rahuldavad nad ka hüperboloidi võrrandit. Võrrandid (14.6) ja (14.7) on ühekattese hüperboloidi <u>sirgjoonsete moodustajate</u> parvede võrrandid.

<u>Näide 1</u>. Hüperbool pooltelgedega 3 ja 4 pöörleb ümber oma imaginaartelje, mis ühtib z-teljega. Hüperbooli keskpunkt asub reeperi alguspunktis. Koostada hüperbooli pöörlemisel tekkinud pöördpinna võrrand.

<u>Lahendus</u>. yz-tasandil asuva hüperbooli võrrandiks on

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Kasutades pöördpinna korral tuntud asendust $y \to \pm\sqrt{y^2 + x^2}$, saame hüperbooli pöörlemisel tekkinud pöördhüperboloidi võrrandi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$.

<u>Näide 2</u>. Leida pinna $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1$ sirgjoonsed moodustajad, mis läbivad punkti $X_0(-6,2,4)$.

<u>Lahendus</u>. Veendume, et punkt $X_0$ on pinna punkt. On teada, et läbi iga pinna punkti kulgeb kaks sirgjoonset moodustajat. Vaatame kaht võimalust ülesande lahendamiseks:

1) Ülesande vahetuks lahendamiseks koostame punkti $X_0$ läbivate sirgete kimbu võrrandid $\frac{x + 6}{l} = \frac{y - 2}{m} = \frac{z - 4}{n}$ ehk

$$\begin{cases} x = lt - 6, \\ y = mt + 2, \\ z = nt + 4. \end{cases}$$

Eraldame kimbust välja sirged, mis asuvad pinnal. Kuna sirgjoonne moodustaja asub kogu ulatuses pinnal, siis tema kõikide punktide koordinaadid peavad rahuldama pinna võrrandit. Asendades sirge parameetrilised võrrandid pinna võrrandisse $\frac{(lt - 6)^2}{9} - \frac{(mt + 2)^2}{4} - \frac{(nt + 4)^2}{4} = -1$, peab pinna võrrand olema samaselt rahuldatud iga parameetri t väärtuse korral. Järelikult, parameetri t suhtes saadud ruutvõrrandis

$(4l^2 - 9m^2 - 9n^2)t^2 - 12(4l + 3m + 6n)t = 0$ kõik kordajad peavad olema nullid:

$$\begin{cases} 4l^2 - 9m^2 - 9n^2 = 0, \\ 4l + 3m + 6n = 0. \end{cases}$$

Teisest võrrandist leitud $l = \frac{-3(m + 2n)}{4}$ asendame esimesse, saame $4\left[-\frac{3(m+2n)}{4}\right]^2 - 9m^2 - 9n^2 = 0$ ehk $(3m - 4n)m = 0$. Seega, $m_1 = 0$, $l_1 = -\frac{3}{2}n$ ja $m_2 = \frac{4}{3}n$, $l_2 = -\frac{5}{2}n$. Kuna sihivektor määratakse nullist erineva kordaja täpsusega, siis võime sihivektori koordinaatidest ühe valida vabalt (ülesande tingimustega kõige paremini sobiva nullist erineva arvu). Võtame vastavalt $n_1 = 2$ ja $n_2 = 6$, saades sirgjoonsete moodustajate sihivektoriteks $\bar{s}_1 = (-3,0,2)$, $\bar{s}_2 = (-15,8,6)$ ja kanoonilisteks võrranditeks $\frac{x+6}{-3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{2}$ ja
$\frac{x+6}{-15} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-4}{6}$.

2) Kasutame sirgjoonsete moodustajate parameetrilisi võrrandeid (14.7)

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = u(\frac{z}{2} + 1), \\ u(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}) = \frac{z}{2} - 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = v(\frac{z}{2} - 1), \\ v(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}) = (\frac{z}{2} + 1) \end{cases}$$

ja leiame parameetrite u ja v väärtused tingimustest, et punkt $X_0$ asub pinnal. Esimene süsteem

$$\begin{cases} -\frac{6}{3} + \frac{2}{2} = u(\frac{4}{2} + 1), \\ u(-\frac{6}{3} - \frac{2}{2}) = \frac{4}{2} - 1, \end{cases}$$

annab $u = -\frac{1}{3}$. Analoogiliselt leiame teisest süsteemist $v = -1$. Asendades leitud u ja v parve võrrandisse, saamegi otsitavate sirgjoonsete moodustajate võrrandid

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 2 = 0, \\ 2x - 3y + 9z - 18 = 0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} 2x + 3y + 3z - 6 = 0, \\ 2x - 3y + 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

Teisendades leitud võrrandid kanoonilisele kujule, saame

$$\frac{x+6}{15} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-4}{-6}, \quad \frac{x+6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{-2}.$$

Leitud võrrandid ühtivad tõepoolest 1. juhul saadud võrranditega.

Näide 3. Koostada ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kaelellipsi punkti $X_0(x_0,y_0,0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate võrrandid.

**Lahendus.** Lähtume süsteemist (14.4). Süsteemi esimesest võrrandist järeldub, et $n \neq 0$, kuna $n = 0$ korral järeldub, et $m = l = 0$ ja moodustaja sihivektor oleks nullvektor. Kuna sihivektor määratakse kordaja täpsusega, siis võime võtta $n = c$ ja kuna $X_0$ on kaelellipsi punkt, siis $z_0 = 0$ ning süsteem (14.4) lihtsustub

$$\begin{cases} \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_1 l}{a^2} + \frac{y_1 m}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Esitame kaelellipsi võrrandid parameetrilisel kujul. Siis $x_1 = a \cos\varphi$, $y_1 = b \sin\varphi$ ja süsteemi teisest võrrandist saame

$$\frac{l \cos\varphi}{a} + \frac{m \sin\varphi}{b} = 0 \text{ ehk } \frac{l \cos\varphi}{a} = -\frac{m \sin\varphi}{b} = \lambda;$$

siit

$$\begin{cases} l = \frac{a\lambda}{\cos\varphi}, \\ m = -\frac{b\lambda}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Asendades süsteemi esimesse võrrandisse, leiame $\lambda^2 = \sin^2\varphi \cos^2\varphi$, $\lambda = \pm \sin\varphi \cos\varphi$ ja

$$\begin{cases} l = \pm a \sin\varphi, \\ m = \mp b \cos\varphi. \end{cases}$$

Järelikult, kaelellipsi punkti $X_1$ läbivate sirgjoonsete moodustajate sihivektoriteks on

$$\bar{s}_1 = (a \sin\varphi, -b \cos\varphi, c),$$
$$\bar{s}_2 = (-a \sin\varphi, b \cos\varphi, c).$$

Soovides elimineerida parameetrit $\varphi$ sisaldavad $\sin\varphi$ ja $\cos\varphi$, avaldame nad valemeist $x_1 = a \cos\varphi$, $y_1 = b \sin\varphi$. Seega, kaelellipsi punkti $X_1$ läbivate sirgjoonsete moodustajate sihivektoriteks on $\bar{s}_1 = (\frac{ay_1}{b}, -\frac{bx_1}{a}, c)$ ja $\bar{s}_2 = (-\frac{ay_1}{b}, \frac{bx_1}{a}, c)$. Ühekattese hüperboloidi kaelellipsi punkti $X_1(x_1, y_1, 0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate võrrandid on

$$\frac{b(x - x_1)}{ay_1} = \frac{a(y - y_1)}{-bx_1} = \frac{z}{c}; \quad \frac{b(x - x_1)}{-ay_1} = \frac{a(y - y_1)}{bx_1} = \frac{z}{c}.$$

## 1. Ühekattese hüperboloidi võrrand. Lõiked

14.1. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ pöörlemisel ümber z-telje tekkiva pinna võrrand.

14.2. Tõestada, et võrrandiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ määratud ühekattese hüperboloidi võib saada hüperbooli $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$ pöörlemisel ümber z-telje ja järgneval ruumi kokkusurumisel (venitamisel) yz-tasandi suhtes.

14.3. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi lõige tasandiga, mis on paralleelne tema asümptootilise koonuse ühe ja ainult ühe moodustajaga, on parabool.

14.4. Uurida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ja tasandi $4x - 3y - 12z - 6 = 0$ lõikejoont, projekteerides selle reeperitasanditele.

14.5. Põhjendada, et tasand $z + 1 = 0$ lõikab ühekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ mööda hüperbooli, ja leida lõikejoone pooltelјed ning tipud.

14.6. Määrata ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ ja tasandi $x = 5$ lõikejoone tüüp, pooltelјed ja keskpunkt (kui see leidub).

14.7. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ lõikejooned reeperitasandite ja viimastega paralleelsete tasanditega, mis asuvad reeperitasanditest mõlemale poole 1, 2, 3, 4 ja 5 ühiku kaugusel. Joonestada kõigi nende lõikejoonte projektsioonid vastavatele reeperitasanditele.

14.8. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi ja tema asümptootilise koonuse puutujatasandi lõikejoone projektsioon kaelellipsi tasandile puutub kaelellipsit.

14.9. Koostada sirgehulga võrrand, kui hulga sirged lõikuvad sirgetega

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -1, \\ z = 0. \end{cases}$$

14.10. Koostada ühekattese pöördhüperboloidi parameetrilised võrrandid.

14.11. Koostada ühekattese hüperboloidi parameetrilised võrrandid ja vektorvõrrand, võttes parameeterjoonteks sirgjoonsed moodustajad.

14.12. Leida punktihulk, mille iga punkti kauguste suhe kahe antud kiivsirgeni on jääv suurus k; $k \neq 1$.

2. Ühekattese hüperboloidi sirgjoonsed moodustajad

14.13. Leida pinna $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ sirgjoonsed moodustajad, mis läbivad punkti $A(6,2,8)$.

14.14. Leida pinna $x^2 + y^2 = 2(z^2 + 1)$ punkti $Q(1,1,0)$ läbivad sirgjoonsed moodustajad.

14.15. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ punkti $A(4,3,2)$ läbivad sirgjoonsed moodustajad.

14.16. Leida ühekattese hüperboloidi $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ suvaliselt fikseeritud punkti läbivate sirgjoonsete moodustajate vaheline nurk.

14.17. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ sirgjoonsed moodustajad, mis on paralleelsed tasandiga $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

14.18. Tõestada, et tasand $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ lõikab ühekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ mööda sirgjoonseid moodustajaid. Koostada nende sirgjoonsete moodustajate võrrandid.

14.19. Tõestada, et suvaline tasand, mis läbib ühekattese hüperboloidi sirgjoonset moodustajat, lõikab pinda veel mööda teist sirgjoonset moodustajat teisest parvest.

14.20. Ühekattene hüperboloid on määratud parameetriliste võrranditega $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{siv} v$, $z = \pm u^2 - 1$. Määrata parameetrite u ja v vaheline sõltuvus sirgjoonsete moodustajate korral.

14.21. Koostada ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kaelellipsi punkti $X_0(x_0, y_0, 0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate parameetrilised võrrandid, kusjuures

$$\begin{cases} x_0 = a \cos \varphi_0, \\ y_0 = b \sin \varphi_0, \\ z_0 = 0, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \ . \end{cases}$$

14.22. Leida, millise nurga all lõikab ühekattese hüperboloidi $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ suvaline sirgjoonne moodustaja kaelellipsit.

14.23. Ühekattese hüperboloidi sirgjoonsed moodustajad projekteeritakse kaelellipsi tasandile. Kuidas asuvad nende projektsioonid kaelellipsi suhtes.

14.24. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ sirgjoonsed moodustajad projekteeruvad reeperitasandile vastavate pealõigete puutujateks.

14.25. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ sirgjoonsete moodustajate projektsioonid xz-tasandile on peahüperbooli

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

puutujateks ja on antud ühekattese hüperboloidi ja xz-tasandi lõikejoonteks.

14.26. Tõestada, et ühekattese pöördhüperboloidi võib saada sirge pöörlemisel ümber telje, mis ei asu antud sirgega samal tasandil.

14.27. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate sihivektorid.

14.28. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{84} + \frac{y^2}{64} - \frac{z^2}{4} = 1$ punkti $X_0(9, 0, 0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate sihivektorid.

14.29. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kaelellipsil mitte asuvat punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate lõikepunktid kaelellipsiga.

14.30. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi sama parve kaks erinevat sirgjoonset moodustajat on kiivsirged.

14.31. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi iga kaks sirgjoonset moodustajat erinevatest parvedest asuvad ühel tasandil ja on paralleelsed parajasti siis, kui nad läbivad kaelellipsi diameetri otspunkte.

14.32. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi ühes sirgjoonsete moodustajate parves ei leidu kolme sirget, mis oleksid paralleelsed ühise tasandiga.

## 2. Kahekattene hüperboloid

Kahekatteseks hüperboloidiks nimetatakse pinda, mis kindla ristreeperi valiku korral määratakse võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (14.8)$$

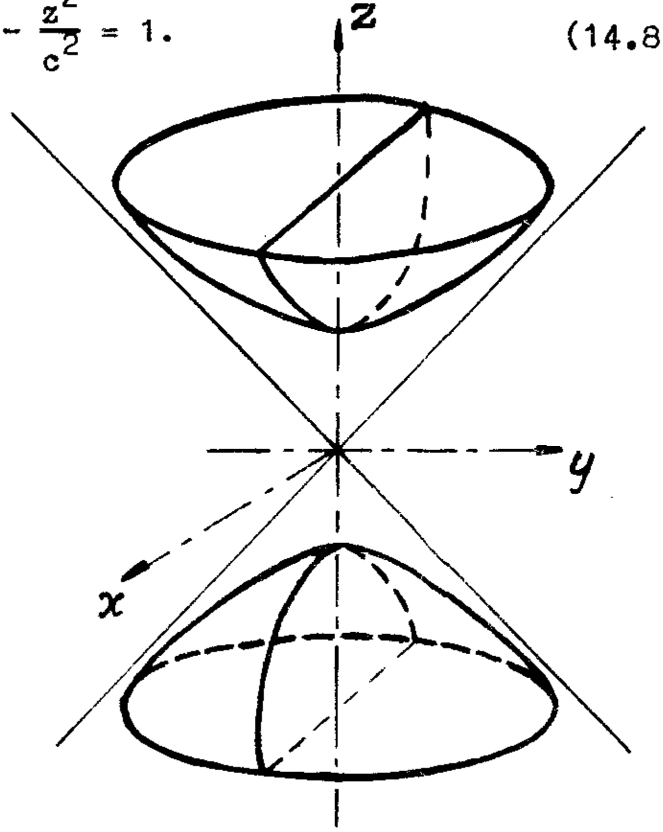
Kui yz-tasandil asuv hüperbool $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ pöörleb ümber z-telje, saame kahekattese pöördhüperboloidi:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (14.9)$$

(vt. joon. 14.4). Teostades kokkusurumise (venituse) x-telje sihis, saame kahekattese hüperboloidi võrrandi

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (14.10)$$

mis erineb võrrandist (14.8) ainult tähistuse



Joonis 14.4.

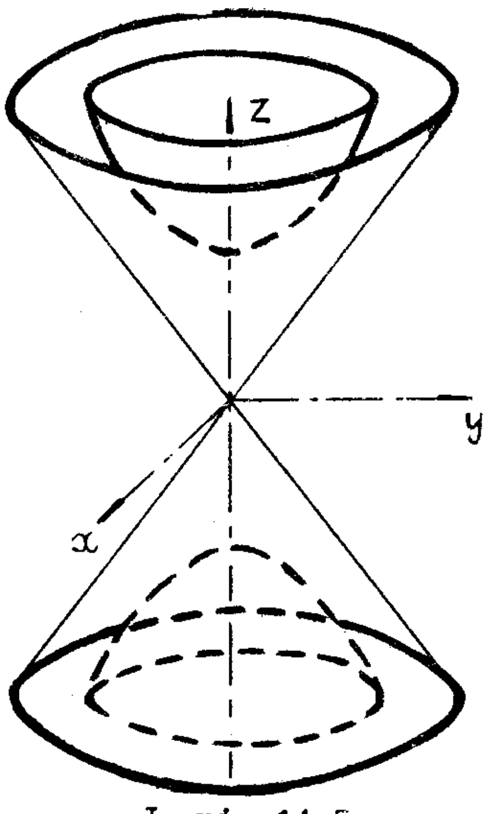
poolest. Võrrandi (14.9) võib kirjutada ka kujul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (14.11)$$

Uurime kahekattest hüperboloidi, lähtudes võrrandist (14.11). Kahekattene hüperboloid on tsentraalne pind, kolme sümmeetriatasandi ja kolme sümmeetriateljega - pinnateljega. Võrrandi (14.11) korral on sümmeetriateljed ja sümmeetriatasandid valitud vastavalt reeperitelgedeks ja -tasanditeks. Pinnatelgedest ainult üks lõikab pinda, mistõttu tippe on ainult kaks ja reaaltelgi üks (z-telg). Lõikejoonteks reaaltelge läbivate sümmeetriatasanditega on peahüperboolid. Lõiked tasanditega, mis on paralleelsed reaaltelge läbivate sümmeetriatasanditega, on omavahel sarnased hüperboolid. Lõige reaalteljega ristuva tasandiga on kas ellips, üks punkt (hüperboloidi tipp) või tühihulk. Reaalteljega ristuv sümmeetriatasand kahekattest hüperboloidi ei lõika. Temast kahele poole jääb uuritava pinna kaks omavahel lõikumatut osa - selle pinna kaks katet (vt. joon. 14.4). Kahekattese hüperboloidi (14.11) asümptootiline koonus (vt. joon. 14.5) määratakse võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \, . \qquad (14.12)$$

Kahekattene hüperboloid asub oma asümptootilise koonuse sisepiirkonnas. Kahekattese hüperboloidi lõige tasandiga, mis on paralleelne asümptootilise koonuse ühe ja ainult ühe moodustajaga, on parabool. Kui ühe- ja kahekattene pöördhüperboloid on saadud kaashüperboolide pöörlemisel, siis on neil ühine asümptootiline koonus. Samasugune on olukord ühe- ja kahekattese hüperboloidiga, kui



Joonis 14.5.

nende teljed ühtivad ning ühe reaalpooltelg on teise imaginaarpoolteljeks.

Hüperboloidi (ühekattese või kahekattese) diameetriks (mitteasümptootilise sihiga) nimetatakse sirget, millel asuvad hüperboloidi paralleellõigetena tekkinud tsentraalsete teist järku kõverate keskpunktid. Iga hüperboloidi diameeter läbib pinna keskpunkti. Hüperboloidi paralleelsete kõõlude keskpunktid asuvad tasandil, mida nimetatakse hüperboloidi diameetertasandiks. Hüperboloidi diameetertasandiks on iga hüperboloidi keskpunkti läbiv tasand. Hüperboloidide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \qquad (14.13)$$

diameetrid määratakse võrranditega

$$\frac{x}{Aa^2} = \frac{y}{Bb^2} = \frac{z}{-Cc^2}, \qquad (14.14)$$

kus $\bar{n} = (A,B,C)$ on paralleelsete lõiketasandite normaali sihivektor ja diameetertasandid määratakse võrranditega

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} - \frac{nz}{c^2} = 0, \qquad (14.15)$$

kus $\bar{s} = (l,m,n)$ on paralleelsete kõõlude sihivektor.

Hüperboloidi diameetri kaasdiameetertasandiks (ehk diameetriga konjugeeritud diameetertasandiks) nimetatakse diameetertasandit, millel asuvad antud diameetriga paralleelsete pinnakõõlude keskpunktid.

Hüperboloidi diameetertasandi kaasdiameetriks (ehk diameetertasandiga konjugeeritud diameetriks) nimetatakse diameetrit, mis läbib diameetertasandiga paralleelsete tasandite lõikena tekkinud teist järku kõverate keskpunkte. Hüperboloidide (14.13) diameetri (14.14) kaasdiameetertasandi võrrand on

$$Ax + By - Cz = 0 \qquad (14.16)$$

ja diameetertasandi (14.15) kaasdiameetri võrrandid on

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{-n}. \qquad (14.17)$$

Sihti $\bar{s} = (l,m,n)$ nimetatakse antud teist järku pinna peasihiks, kui selle sihi kaasdiameetertasand on risti antud sihiga. Peasihi kaasdiameetertasandit nimetatakse antud pinna <u>peadiameetertasandiks</u> ja ta ühtib pinna sümmeetriatasandiga.

<u>Näide 4</u>. Leida xy-tasandiga paralleelsed tasandid, mis lõikavad kahekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{9} = -1$ mööda kõveraid, mille pooltelјed on kaks korda pikemad vastava pealõike pooltelgedest.

<u>Lahendus</u>. Pealõikeks xy-tasandiga on hüperbool

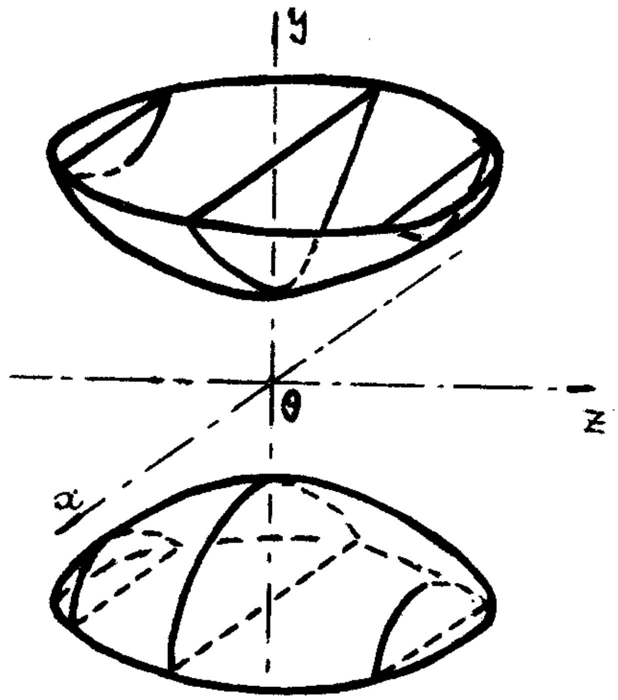
$$\begin{cases} \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{12} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

reaalpoolteljega $a = \sqrt{6}$ ja imaginaarpoolteljega $b = 2\sqrt{3}$ (vt. joon. 14.6). Lõigates antud pinda xy-tasandiga paralleelse tasandiga $z = h$, saame

$$\begin{cases} \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{9} = -1, \\ z = h \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \frac{y^2}{\frac{2(h^2+9)}{3}} - \frac{x^2}{\frac{4(h^2+9)}{3}} = 1, \\ z = h\,. \end{cases}$$




Joonis 14.6.

Saadud lõikehüperbooli pooltelјed on $a' = \sqrt{\frac{2}{3}(h^2 + 9)}$, $b' = \sqrt{\frac{4}{3}(h^2 + 9)}$. Kooskõlas ülesande tingimustega $a' = 2a$, $b' = 2b$ ehk $a'^2 = 4a^2$, $b'^2 = 4b^2$. Asendades $a'$ ja $b'$, saame $\frac{2}{3}(h^2 + 9) = 24$, $h^2 + 9 = 36$, millest $h^2 = 27$, $h = \pm 3\sqrt{3}$. Kontrolliks arvutame $b'^2 = \frac{4}{3}(27 + 9) = 4 \cdot 12 = 4\sqrt{3} = 2b$. Seega leidub kaks tasandit, mis on paralleelsed xy-tasandiga ja rahuldavad ülesande eeldust.

## 1. Kahekattene hüperboloid

14.33. Leida yz-tasandiga paralleelsed tasandid, mis lõikavad kahekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{9} = -1$ mööda kõveraid, mille pooltelјed on kaks korda pikemad vastava pealõike pooltelgedest.

14.34. Leida reeperitasanditega paralleelsed tasandid, mis lõikavad kahekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{4} = -1$ mööda kõveraid, mille pooltelјed on poole pikemad vastava pealõike pooltelgedest.

14.35. Määrata antud pinna $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = -1$ ja sirge $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{3}$ vastastikune asend. Leida pinna ja sirge lõikepunktid, kui need leiduvad.

14.36. Uurida, milliseid kõveraid on võimalik saada
1) ühekattese hüperboloidi,
2) kahekattese hüperboloidi lõikamisel suvalise tasandiga.

14.37. Teha kindlaks, millise m väärtuse korral tasand $x + mz - 1 = 0$ lõikab kahekattest hüperboloidi 1) mööda ellipsit, 2) mööda hüperbooli.

14.38. Leida kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ja sirge $\frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{1}$ lõikepunktid.

14.39. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ oleks kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ sisepunkt.

14.40. Tõestada, et võrrandiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ määratud kahekattese hüperboloidi võib saada hüperbooli $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $y = 0$ pöörlemisel ümber z-telje ja seejärgsel ruumi kokkusurumisel (venitamisel) xz-tasandi suhtes.

14.41. Koostada ruumi punktihulga $\{X\}$ võrrand, kui iga punkti X kauguste vahe absoluutväärtus kahe fikseeritud ruumi punktini $F_1$ ja $F_2$ on võrdne konstandiga 2a, kusjuures

$0 < a < \frac{1}{2} F_1F_2$.

**14.42.** Leida punktihulk, mille iga punkti kauguste vahe absoluutväärtus kahe fikseeritud punktini $F_1(0,-5,0)$ ja $F_2(0,5,0)$ on võrdne arvuga 6.

**14.43.** Koostada kahekattese pöördhüperboloidi parameetrilised võrrandid ja vektorvõrrand.

**14.44.** Koostada kahekattese hüperboloidi parameetrilised võrrandid ja vektorvõrrand.

## 2. Hüperboolide diameetrid ja diameetertasandid

**14.45.** Arvutada pinna $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$ kõõlu pikkus punkti $A(4,-\frac{8}{9},\frac{8}{3})$ läbival diameetril.

**14.46.** Koostada sirgega $x = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$ paralleelsete ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{4} = 1$ kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

**14.47.** Koostada sirgega
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0, \\ x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$
paralleelsete kahekattese hüperboloidi keskpunktide hulga võrrand.

**14.48.** Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ diameetertasand, millel asub punkti $A(6,2,8)$ läbiv pinna sirgjoonne moodustaja.

**14.49.** Koostada ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{8} = 1$ diameetertasandi $5x + 4y - 4z = 0$ kaasdiameetri võrrand.

**14.50.** Koostada kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{8} = -1$ diameetertasandi $x - 2y = 0$ kaasdiameetri võrrand.

**14.51.** Koostada ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ diameetri $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ kaasdiameetertasandi võrrand.

**14.52.** Koostada kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1$ diameetri $\frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ kaasdiameetertasandi võrrand.

14.53. Parve tasandid puutuvad sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mööda sfääri ja tasandi $x + y + z - 1 = 0$ lõikejoont. Koostada antud parve tasanditega konjugeeritud diameetrite hulga võrrand pinna $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ korral.

14.54. Ühekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ on lõigatud tasandiga $3x - 4z = 0$ paralleelsete tasanditega. Kas tekkiv tasandiparv määrab hüperboloidi diameetri? Määrata parve tasandi ja antud pinna lõikejoone tüüp.

14.55. Koostada punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivatel sirgetel asuvate ühekattese hüperboloidi $x^2 + y^2 - z^2 = c$ kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

3. Mitmesuguseid ülesandeid

14.56. Tõestada, et nii ühe- kui ka kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ korral leidub parajasti kolm sümmeetriatasandit $(a > b)$.

14.57. Leida ringjoone raadius, kui ringjoon asub ühekattesel hüperboloidil $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ja puutub kaelellipsit.

14.58. Paarikaupa ristuvatest tasanditest moodustatud kolmetahulise nurga tahud puutuvad 1) ühekattest hüperboloidi, 2) kahekattest hüperboloidi. Tõestada, et selliste kolmetahuliste nurkade tipud kirjeldavad sfääri, mille keskpunkt ühtib pinna keskpunktiga.

14.59. Koostada sirgete hulga võrrand, kui hulga sirged läbivad teist järku pinna keskpunkti ja ei oma pinnaga reaalseid ega imaginaarseid lõikepunkte.

14.60. Koostada pinna võrrand, mille kirjeldab sirge libisemisel mööda kolme antud sirget $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$, millest ükski paar ei asu ühel tasandil.

# P A R A B O L O I D

## § 1. Elliptiline paraboloid

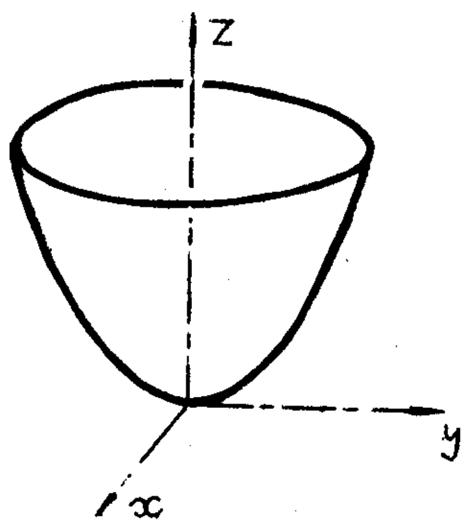
Elliptiliseks paraboloidiks nimetatakse pinda, mis teatud kanoonilise ortonormeeritud reeperi korral määratakse võrrandiga

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p > 0,\ q > 0). \qquad (15.1)$$

Võrrandit (15.1) nimetatakse elliptilise paraboloidi <u>kanooniliseks võrrandiks</u>. Kui yz-tasandil asuv parabool

$$\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$$

pöörleb ümber z-telje (sümmeetriatelje), siis tekkinud pöördpinna võrrand on (vt. pöördpind) $x^2 + y^2 = 2pz$. Saadud pöördpinda nimetatakse <u>elliptiliseks pöördparaboloidiks</u> (vt. joon. 15.1).




Joonis 15.1.

Elliptilise paraboloidi saame kergesti elliptilisest pöördparaboloidist ruumi kokkusurumisel (venitamisel) kas x- või y-telje sihis.

Elliptilise paraboloidi lõigeteks tasanditega on ellipsid või paraboolid. Elliptiline paraboloid on mittetsentraalne pind, tal on kaks sümmeetriatasandit, üks sümmeetriatelg ja üks tipp. Kui elliptiline paraboloid on määratud võrrandiga (15.1), siis xz- ja yz-tasanditeks on pinna sümmeetriatasandid ja z-teljeks pinna sümmeetriatelg, nn. <u>pinna telg</u> ning reeperi alguspunkt asub <u>pinna tipus</u> (pinna lõikepunktis sümmeetriateljega).

Näide 1. Teist järku pind on määratud võrrandiga $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$. Teha pinna joonis. Millise pinnaga on meil tegemist?

Lahendus. Antud pind on elliptiline paraboloid. Joonise tegemiseks leiame kõigepealt lõiked reeperitasanditega. Lõige yz-tasandiga on parabool

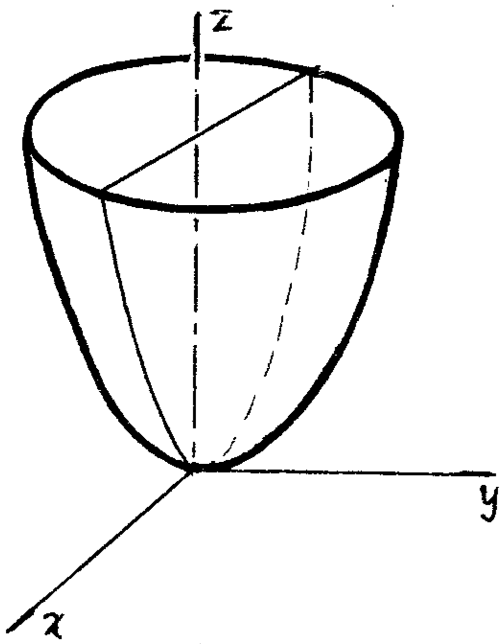
$$\begin{cases} y^2 = 9z, \\ x = 0, \end{cases}$$

mille tipp on reeperi alguspunktis, teljeks on z-telg ja parameeter p = 4,5.

Lõige xz-tasandiga on parabool

$$\begin{cases} x^2 = 4z, \\ y = 0, \end{cases}$$

mille teljeks on z-telg, tipp asub reeperi alguspunktis ja parameeter p = 2. xy-tasand on antud pinna puutujatasandiks pinna tipus. Lõige xy-tasandiga paralleelse tasandiga $z = h$ on ellips



Joonis 15.2.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4h} + \frac{y^2}{9h} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

mille pooolteljed on $a = 2\sqrt{|h|}$, $b = 3\sqrt{|h|}$. Leitud lõikejoontest on küllalt pinna joonise tegemiseks (vt. joon. 15.2).

## 1. Elliptiline paraboloid

15.1. Leida kõvera

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

projektsioon xy-tasandil. Milliste pindade lõikena on tekkinud antud kõver?

15.2. Millise m väärtuse korral tasand $x + my - 2 = 0$ lõikab elliptilist paraboloidi

$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y$   1) mööda ellipsit, 2) mööda parabooli?

15.3. Leida elliptilise paraboloidi $y^2 + z^2 = x$ ja tasandi $x + 2y - z = 0$ lõikejoone projektsioonid reeperitasanditele.

15.4. Leida elliptilise paraboloidi $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ pealõiked ja pealõigetega paralleelsete lõigete ristprojektsioonid reeperitasanditele.

15.5. Tõestada, et pöördparaboloidi ja tema pöördetelge lõikava tasandi lõikejoone projektsioon tasandil, mis on risti pöördeteljega, on ringjoon.

15.6. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ sees.

15.7. Leida elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ sisepunkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbiv tasand, mis lõikab pinda mööda ellipsit, keskpunktiga punktis $X_0$.

15.8. Leida elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$ punktid, mida läbivad puutujatasandid on paralleelsed paraboloidi ringjoonsete lõigete tasanditega.

15.9. Millised teist järku jooned saadakse elliptilise paraboloidi lõikamisel vabalt võetud tasandiga?

15.10. Parabool, mille tipp asub reeperi alguspunktis ja teljeks on z-telg, pöörleb ümber oma telje. Koostada tekkiva pöördpinna võrrand.

15.11. Tõestada, et võrrandiga $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ määratud elliptilise paraboloidi võib saada parabooli $x^2 = 2pz,\ y = 0$ pöörlemisel ümber z-telje ja seejärgsel ruumi kokkusurumisel z-telje sihis.

15.12. Pinna punktid asuvad võrdsel kaugusel fikseeritud tasandist ja temal mitteasuvast fikseeritud punktist. Koostada selle pinna võrrand.

15.13. Leida sellise sfääriparve keskpunktide hulga võrrand, kui parve iga sfäär puutub xy-tasandit ja sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

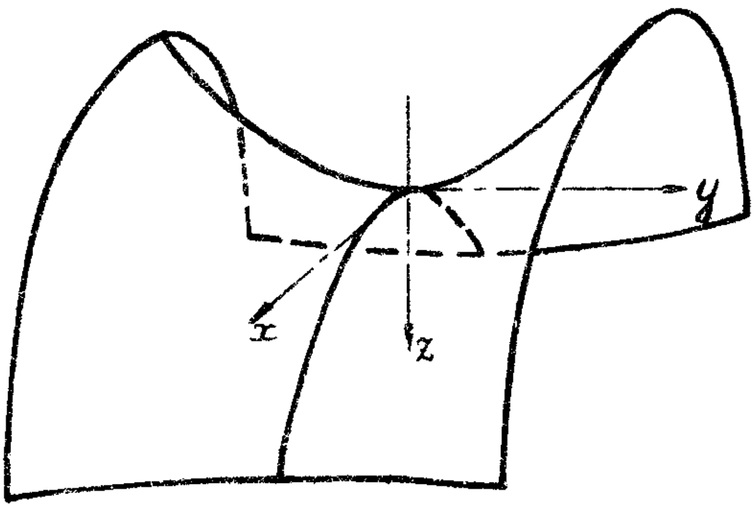
15.14. Mööda yz-tasandil antud liikumatut parabooli $y^2 = 2qz$ libiseb teise muutumatu kujuga parabooli tipp. Liikuva parabooli parameeter on p ja ta liigub nii, et parabooli tasand on kogu liikumise vältel risti y-teljega ja parabooli telg on paralleelne z-teljega. Koostada liikuva parabooli poolt kirjeldatud pinna võrrand.

## 2. Hüperboolne paraboloid

Hüperboolseks paraboloidiks nimetatakse pinda, mis teatud kanoonilise ortonormeeritud reeperi korral määratakse võrrandiga

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0,\ q > 0). \tag{15.2}$$

Võrrandit (15.2) nimetatakse hüperboolse paraboloidi kanooniliseks võrrandiks.




Joonis 15.4.

Hüperboolsed paraboloidid on ainukesed teist järku pinnad, mille hulgas ei leidu pöördpindu. Hüperboolne paraboloid on mittetsentraalne pind, tal on kaks sümmeetriatasandit, üks sümmeetriatelg ja üks tipp. Viimast nimetatakse pinna kriitiliseks punktiks. Hüperboolse paraboloidi lõigeteks tasandiga on lõikuvad sirged, paraboolid või hüperboolid.

Hüperboolne paraboloid on joonpind, mille kirjeldab sirge liikumisel ruumis. Hüperboolsel paraboloidil on kaks parve sirgjoonseid moodustajaid.

Osutub, et hüperboolse paraboloidi iga punkti läbib parajasti kaks sirgjoonset moodustajat.

Olgu $X_o(x_o,y_o,z_o)$ hüperboolse paraboloidi suvaline punkt ja s suvaline seda punkti läbiv sirge, mille sihivektoriks on vektor $\bar{s} = (l,m,n)$ ja mis määratakse parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = lt + x_o, \\ y = mt + y_o, \\ z = nt + z_o. \end{cases}$$

Selleks, et sirge s asuks täielikult pinnal, on tarvilik ja piisav, et sirge ja pinna lõikepunktide leidmisel saadud ruutvõrrand $(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q})t^2 + 2(\frac{x_o l}{p} - \frac{y_o m}{q} - n)t = 0$ parameetri t suhtes oleks samaselt rahuldatud, s.t. kõik kordajad peavad olema nullid:

$$\begin{cases} \frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0, \\ \frac{x_o l}{p} - \frac{y_o m}{q} - n = 0. \end{cases}$$

Avaldame saadud süsteemi esimesest võrrandist $m = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,l$ ja asendades teise võrrandisse, saame $n = (\frac{x_o}{\sqrt{p}} \mp \frac{y_o}{\sqrt{q}})\frac{1}{\sqrt{p}}\,l$. Kuna sihivektori koordinaatidest ühe võib valida vabalt, siis antud juhul võtame $l = \sqrt{p}$. Sihivektori $\bar{s}$ koordinaatide jaoks saame kaks väärtuste süsteemi:

$$l_1 : m_1 : n_1 = \sqrt{p} : \sqrt{q} : (\frac{x_o}{\sqrt{p}} - \frac{y_o}{\sqrt{q}})$$

ja

$$l_2 : m_2 : n_2 = \sqrt{p} : (-\sqrt{q}) : (\frac{x_o}{\sqrt{p}} + \frac{y_o}{\sqrt{q}}).$$

Seega, hüperboolse paraboloidi iga punkti $X_o$ läbib kaks sirgjoonset moodustajat, mis määratakse võrranditega. Hüperboolse paraboloidi (15.2) punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivate sirgjoonsete moodustajate võrrandid on

$$\frac{x - x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y - y_0}{\sqrt{q}} = \frac{z - z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}} \tag{15.3}$$

ja

$$\frac{x - x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y - y_0}{-\sqrt{q}} = \frac{z - z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}} \,. \tag{15.4}$$

Märkame, et kõik sirgjoonsed moodustajad (15.3) on paralleelsed tasandiga $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ ja sirgjoonsed moodustajad (15.4) on paralleelsed tasandiga $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$.

Läbi hüperboolse paraboloidi iga punkti kulgeb täpselt üks sirgjoonne moodustaja kummastki sirgjoonsete moodustajate parvest.

Iga kaks erinevatesse parvedesse kuuluvat sirgjoonset moodustajat lõikuvad. Iga kaks samasse parve kuuluvat sirgjoonset moodustajat on kiivsirged.

Hüperboolse paraboloidi võime saada ühe parabooli liikumisel ruumis paralleelselt iseendaga ja tipuga mööda teist parabooli (vt. näide 2).

Paraboloidide (15.1) ja (15.2) (nii nagu kõigi teist järku pindade) paralleelsete kõõlude keskpunktid asuvad tasandil, mida nimetatakse antud pinna diameetertasandiks, täpsemalt antud kõõlude sihi kaasdiameetertasandiks (ehk kõõlude sihiga konjugeeritud diameetertasandiks ehk kõõlu sihile vastavaks diameetertasandiks).

Olgu paralleelsete kõõlude sihivektor $\bar{s} = (l, m, n)$. Elliptilise paraboloidi (15.1) korral eeldatakse, et antud siht ei ole kollineaarne paraboloidi teljega. Hüperboolse paraboloidi (15.2) korral eeldatakse, et antud siht ei ole paralleelne tasanditega

$$\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{g}} = 0. \tag{15.5}$$

Paralleelsete kõõlude poolt määratud diameetertasandi võrrand elliptilise paraboloidi korral on

$$\frac{lx}{p} + \frac{my}{q} = n \tag{15.6}$$

ja hüperboolse paraboloidi korral

$$\frac{lx}{p} - \frac{my}{q} = n. \tag{15.7}$$

Paraboloidide korral kõik diameetertasandid on paralleelsed paraboloidi teljega.

Teist järku pinna <u>diameetriks</u> nimetatakse sirget, millel asuvad pinna tsentraalsete paralleellõigete keskpunktid. Kui $\bar{n} = (A,B,C)$, $C \neq 0$ on paralleelsete lõiketasandite normaali sihivektor, siis tasandite parve poolt määratud diameetri võrrand elliptilise paraboloidi korral on

$$x = -\frac{Ap}{C}, \quad y = -\frac{Bq}{C} \tag{15.8}$$

ja hüperboolse paraboloidi korral

$$x = -\frac{Ap}{C}, \quad y = \frac{Bq}{C}. \tag{15.9}$$

Selleks, et tasand lõikaks paraboloidi mööda tsentraalset kõverat (reaalset või imaginaarset), on tarvilik ja piisav, et tasand lõikaks paraboloidi telge.

Elliptilise paraboloidi (15.1) korral leidub kaks parve paralleelseid tasandeid, mis lõikavad seda paraboloidi mööda ringjooni, s.t. elliptilisel paraboloidil leidub <u>kaks parve ringjooni</u>. Vaadeldud paralleelsete tasandite parved määratakse võrranditega

$$\pm\sqrt{p-q}\; y + \sqrt{q}\; z + t\sqrt{p} = 0, \quad t < \frac{p-q}{2},$$

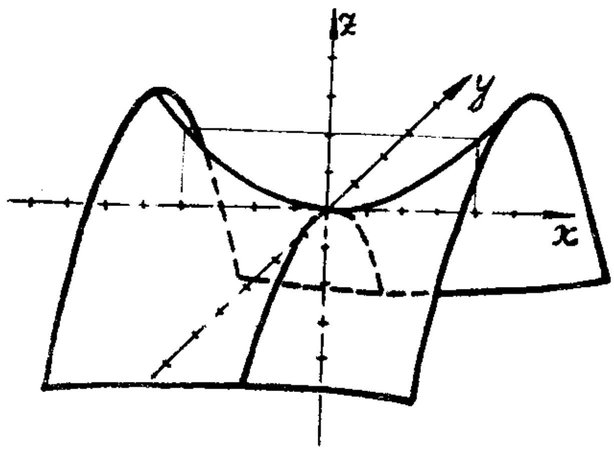
kus $t$ on muutuv reaalne parve parameeter.

Kui $p = q$, siis need parved ühtivad.

<u>Näide 2</u>. Teist järku pind on määratud võrrandiga $y^2 - x^2 = 8z$. Teha joonis! Millise pinna määrab antud võrrand?

<u>Lahendus</u>. Pind on võrdhaarne hüperboolne paraboloid. Joonise tegemiseks leiame pinna lõiked reeperitasanditega. Lõige $yz$-tasandiga $x = 0$ on parabool $y^2 = 8z$, $x = 0$, mille sümmeetriateljeks on $z$-telg, telje positiivne suund ühtib z-

telje positiivse suunaga ja parameeter $p = 4$ (vt. joon. 15.5). Lõige xz-tasandiga $y = 0$ on parabool $x^2 = -8z$, $y = 0$, mille sümmeetriateljeks on z-telg ja telje positiivne suund ühtib z-telje negatiivse suunaga. Lõige xz-tasandiga paralleelse tasandiga




Joonis 15.5.

$y = h$ on parabool, mille sümmeetriatelg on paralleelne z-teljega, telje positiivne suund ühtib z-telje negatiivse suunaga ja parabooli tipp asub punktis $X_0(h, 0, \frac{h^2}{8})$. Seega, antud võrdhaarse hüperboolse paraboloidi kirjeldab parabool $x^2 - 8z + h^2$ $y = h$ liikumisel ruumis nii, et tema tasand jääb kogu liikumise vältel paralleelseks yz-tasandiga ja parabooli tipp $M_0$ libiseb mööda xz-tasandil olevat parabooli $y^2 = 8z$, $x = 0$. Liikuvate paraboolide parve parameetriks on $h$ (lõiketasandi kaugus xz-tasandist $-\infty < h < \infty$).

Näide 3. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ võime saada parabooli liikumisel ruumis järgmiselt: liikuva parabooli tipp liigub mööda teist parabooli, liikuva parabooli telg on igal liikumise momendil vastassuunaline liikumatu parabooli teljega ja liikuva parabooli tasand on risti liikumatu parabooli tasandiga ning liikuva parabooli tasandid moodustavad paralleelsete tasandite kimbu. Teha joonis juhul, kui $p = 4$, $q = 2$.

Tõestus. Uurime pinna lõikeid tasandiga. Lõige yz-tasandiga $x = 0$ on parabool

$$\begin{cases} \frac{y^2}{q} = -2z, \\ x = 0, \end{cases} \qquad (15.10)$$

mille telje positiivne suund ühtib z-telje negatiivse suunaga ja mille parameeter on q (vt. joon. 15.5). Lõige xz-tasandiga $y = 0$ on parabool

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} = 2z, \\ y = 0, \end{cases} \qquad (15.11)$$

mille telje positiivne suund ühtib z-telje positiivse suunaga ja parameeter on p. Paraboolide (15.10) ja (15.11) tasandid on risti ja paraboolide teljed vastassuunalised.

Lõiked tasanditega $y = h$ on kongruentsed paraboolid

$$\begin{cases} x^2 = 2p(z + \frac{h^2}{2q}), \\ y = h, \end{cases} \qquad (15.12)$$

mille tasand on paralleelne xz-tasandiga (s.t. parabooli (15.11) tasandiga), telje suund ühtib z-telje positiivse suunaga ja tipp asub punktis $Q(0,h,\frac{h^2}{2p})$, mis on parabooli (15.10) punkt. Seega, tõepoolest, antud hüperboolset paraboloidi kirjeldab parabool (15.12) kirjeldatud liikumisel mööda parabooli (15.10). Joonise 15.5 korral $p = q = 4$.

1. Ühekattene hüperboloid

15.15. Leida hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{0,5} = 2z$ ja sirge $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$ lõikepunktid.

15.16. Tõestada, et hüperboolsel paraboloidil ei leidu elliptilisi lõikeid.

15.17. Leida hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = y$ pealõiked. Teha joonis.

15.18. Joonestada hüperboolse paraboloidi $\frac{x}{4} - y^2 = z$ pealõiked ja peatelgedega paralleelsete lõigete projektsioonid reepertasandile.

15.19. Veenduda, et tasand $y + 6 = 0$ lõikab hüperboolset paraboloidi $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ mööda parabooli. Leida lõikeparabooli parameeter ja tipp.

15.20. Millist kõverat mööda lõikab tasand $3x - 3y + 4z + 2 = 0$ hüperboolset paraboloidi $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y$? Tsentraalse lõikejoone korral leida lõikejoone keskpunkt.

15.21. Tõestada, et võrrand $z = xy$ määrab hüperboolse paraboloidi.

15.22. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi parameetrilisteks võrranditeks on

$$\begin{cases} x = \sqrt{p}\,(u + v), \\ y = \sqrt{q}\,(u - v), \\ z = 2uv, \end{cases} \qquad p > 0,\ q > 0,$$

kus u ja v on suvalised reaalarvud. Millised kõverad määravad võrrandid $u = \text{const}$ ja $v = \text{const}$.

## 2. Paraboloidide diameetertasandid ja diameetrid

15.23. Koostada elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ lõikamisel paralleelsete tasanditega $Ax + By + Cz + \lambda = 0$ $(-\infty < \lambda < +\infty,\ C \neq 0)$ tekkinud lõigete keskpunktide võrrand.

15.24. Leida hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ lõikamisel paralleelsete tasanditega $Ax + By + Cz + \lambda = 0$ $(-\infty < \lambda < \infty,\ C \neq 0)$ tekkinud lõigete keskpunktide võrrand.

15.25. Tõestada, et elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ lõikamisel kahe kaasdiameetertasandiga tekkinud lõikeparaboolide parameetrid $p'$ ja $q'$ rahuldavad seost $p' + q' = p + q$.

Märkus. Kahte diameetertasandit nimetatakse kaasdiameetertasanditeks, kui kumbki läbib teise kaasdiameetrit.

15.26. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ lõikamisel kahe kaasdiameetertasandiga lõikeparaboolide parameetrid $p'$ ja $q'$ rahuldavad seost $p' - q' = p - q$.

15.27. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ lõikamisel kahe ristuva diameetertasandiga lõikeparaboolide parameetrid $p'$ ja $q'$ rahuldavad seost $\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

### 3. Hüperboolse paraboloidi sirgjoonsed moodustajad

15.28. Veenduda, et punkt $M(1,3,-1)$ asub hüperboolsel paraboloidil $4x^2 - z^2 = y$. Koostada punkti $M$ läbivate sirgjoonsete moodustajate võrrandid.

15.29. Veenduda, et punkt $A(-2,0,1)$ asub hüperboolsel paraboloidil $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$. Leida punkti $A$ läbivate sirgjoonsete moodustajate vaheline teravnurk.

15.30. Leida hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ punkti $A(6,-1,2)$ läbivad sirgjoonsed moodustajad.

15.31. On antud hüperboolne paraboloid $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$ ja üks tema puutujatasanditest: $10x - 2y - z - 21 = 0$. Koostada sirgete, mida mööda puutujatasand lõikab antud pinda, kanoonilised võrrandid.

15.32. Tõestada, et tasand $2x - 12y - z + 16 = 0$ lõikab hüperboolset paraboloidi $x^2 - 4y^2 = 2z$ mööda sirgjoonseid moodustajaid. Koostada nende sirgjoonsete moodustajate võrrandid.

15.33. Leida paraboloidi $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ sirgjoonsed moodustajad, mis on paralleelsed tasandiga $3x + 2y - 4z = 0$.

15.34. Koostada hüperboolse paraboloidi $x^2 - y^2 = 2z$ ristuvate sirgjoonsete moodustajate lõikepunktide hulga võrrand.

15.35. Koostada hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ristuvate sirgjoonsete moodustajate lõikpunktide hulga võrrand.

15.36. Tõestada, et suvaline tasand, mis läbib hüperboolse paraboloidi sirgjoonset moodustajat ega ole paralleelne selle pinna teljega, läbib veel hüperboolse paraboloidi teist sirgjoonset moodustajat, kusjuures see tasand on pinna puutujatasandiks vaadeldud sirgjoonsete moodustajate lõikepunktis.

15.37. Leida hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ sirgjoonsete moodustajate projektsioonid xy-tasandil.

15.38. Tõestada, et pinna $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ sirgjoonsete moodustajate projektsioonid xz-tasandile puutuvad parabooli $x^2 = 2pz,\ y = 0$.

15.39. Uurida, kuidas asuvad hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$ sirgjoonsete moodustajate projektsioonid reeperitasanditel pinna pealõigete suhtes.

15.40. Leida hüperboolse paraboloidi sirgjoonsete moodustajate projektsioonid pinna tippu läbivale puutujatasandile.

15.41. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi sirgjoonse moodustaja projektsioon hüperboloidi tippu läbival puutujatasandil on paralleelne vaadeldud puutujatasandil asuva sirgjoonse moodustajaga.

15.42. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi iga kaks sirgjoonset moodustajat 1) erinevatest parvedest lõikuvad; 2) ühest ja samast parvest on kiivsirged.

15.43. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi tippu läbiv pinna iga puutuja poolitab sirgjoonse moodustaja lõigu, mis jääb selle pinna kahe sümmeetriatasandi vahele.

15.44. Koostada sellise sirgehulga võrrand, kus hulga iga sirge läbib paraboloidi $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2p} = z$ ainult tema tipus ja seejuures ei ole tema puutujaks.

15.45. Kahel kiivsirgel on võetud võrdsete vahemikega üksteisele järgnevad punktid: sirgel a punktid 1,2,3,..., sirgel a' punktid 1',2',3',... Tõestada, et sirged

11',22',33',44',... asuvad ühel ja samal hüperboolsel paraboloidil. Sellel omadusel põhineb hüperboolse paraboloidi niitmudeli konstruktsioon.

### 4. Mitmesuguseid ülesandeid

15.46. Leida ruumi punktihulk, mille iga punkt asub võrdsel kaugusel kahest antud kiivsirgest.

15.47. Koostada kahest antud sirgest $\bar{x} \times \bar{I} = \bar{0}$ ja $\bar{x} \times (\bar{I} + \bar{J}) = -\bar{I} + \bar{J}$ võrdsetel kaugustel asuvate punktide hulga võrrand vektor- ja koordinaatkujul.

15.48. Koostada punktihulga võrrand, kui hulga iga punkti kauguste suhe kahe antud kiivsirgeni on etteantud arv p.

15.49. Leida hüperboolse paraboloidi võrrand, kui reeperi alguspunkt asub pinna suvalises punktis $X_0$, x- ja y-teljeks on punkti $X_0$ läbivad sirgjoonsed moodustajad ja z-telg on paralleelne paraboloidi teljega.

15.50. Leida punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbiva paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ selline lõiketasand, mis annab lõikeks tsentraalse kõvera keskpunktiga punktis $X_0$.

15.51. Koostada sirge liikumisel ruumis kirjeldatud joonpinna võrrand, kui liikuv sirge toetub paraboolidele

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} z^2 = -2x, \\ y = 0 \end{cases}$$

ning jääb kogu liikumise vältel paralleelseks tasandiga $y - z = 0$.

15.52. Sirge libiseb mööda sirgeid $\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ ja $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$ paralleelselt tasandiga $2x + 3y - 5 = 0$. Koostada tekkiva joonpinna võrrand.

15.53. Paralleelselt iseendaga libiseb parabool $x^2 = 2pz$, $y = 0$ oma tipuga mööda teist parabooli $y^2 = -2qz$, $x = 0$. Koostada tekkinud pinna võrrand.

15.54. Tõestada, et ükskõik millised kolm antud tasandiga paralleelset paarikaupa kiivat sirget me ka ei võtaks, alati on antud sirgeid lõikavate sirgete punktide hulk hüperboolne paraboloid.

15.55. Mööda kahte sirget $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ ja $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ liiguvad kaks punkti ühesuguse konstantse kiirusega, nad läbivad samaaegselt xy-tasandi, kuid üks alt üles, teine ülalt alla. Koostada pinna võrrand, mille kirjeldab sirge, mis ühendab kahte kirjeldatud liikuvat punkti.

15.56. Paarikaupa ristuvatest tasanditest moodustatud kolmetahulise nurga tasandid puudutavad elliptilist paraboloidi. Tõestada, et selliste kolmetahuliste nurkade tipud määravad elliptilise paraboloidi teljega ristuva tasandi.

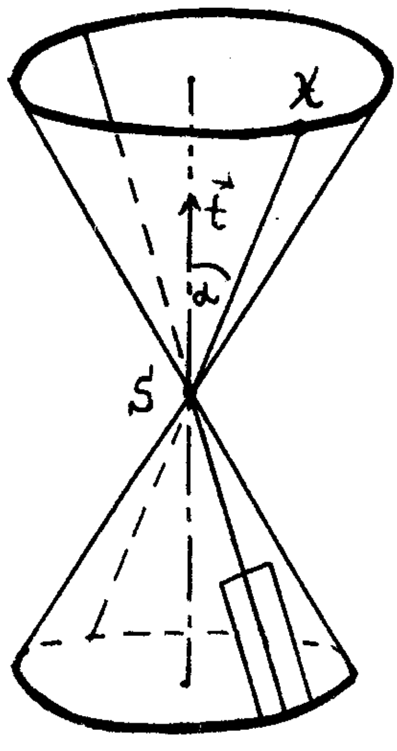
15.57. Paarikaupa ristuvatest tasanditest moodustatud kolmetahulise nurga tasandid puudutavad hüperboolset paraboloidi. Tõestada, et selliste kolmetahuliste nurkade tipud määravad hüperboolse paraboloidi teljega ristuva tasandi.

16. p e a t ü k k

# K O O N U S. S I L I N D E R

## §1. Koonus

1. Pöördkoonus. Ruumi kõigi selliste punktide X hulka, mille punktide korral antud punktist S suunduvad vektorid $\overline{SX}$ moodustavad antud sihi vektoritega antud nurga $\alpha$, nimetatakse pöördkoonuseks (joon. 16.1.). Punkti S nimetatakse koonuse tipuks, punkti S läbivat, antud sihiga sirget - teljeks (pöördeteljeks). Pöördkoonust võib vaadelda kui pöördpinda (või joonpinda), mille kirjeldab koonuse tippu läbiv sirge pöörlemisel ümber koonuse telje. Sirgeid, milledest pöördkoonus koosneb, nimetatakse koonuse sirgjoonseteks moodustajateks ehk lihtsalt moodustajateks. Tipp jagab pöördkoonuse kaheks osaks, nn. katteks. Olgu pöördkoonuse suvalise punkti X ja koonuse tipu S kohavektorid vastavalt $\bar{x} = (x,y,z)$, $\bar{s} = (x_0,y_0,z_0)$ ja telje sihiühikvektor $\bar{t} = (l,m,n)$, siis




Joon. 16.1.

koonuse vektorvõrrand omab kuju $\dfrac{\bar{t}\,(\bar{x} - \bar{s})}{|\bar{x} - \bar{s}|} = \cos\alpha$

ehk

$$\left[\bar{t}\,(\bar{x} - \bar{s})\right]^2 - (x - a)^2\cos^2\alpha = 0. \qquad (16.1)$$

Pöördkoonuse võrrand ei sõltu telje sihivektori suuna valikust. Pöördkoonuse võrrand (16.1) on ristreeperi korral kirjutatav kujul

$$[l(x - x_o) + m(y - y_o) + n(z - z_o)]^2 -$$
$$-[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2] \cos^2\alpha = 0, \quad (16.2)$$

Pöördkoonuse võrrand (16.2) on eriti lihtne, kui ristreeper on valitud selliselt, et pöördkoonuse tipp on reeperi alguspunktiks $O(0,0,0)$ ja pöördeteljeks on z-telg (sihivektor $\bar{t}=\bar{k}$, $\bar{k} = (0,0,1)$). Kirjeldatud reeperi valiku korral pöördkoonuse võrrand (16.2) omab kuju

$$x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = 0. \quad (16.3)$$

Tähistades $\tan\alpha = k$, saame

$$x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0$$

ehk

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} - z^2 = 0.$$

Võrrandit nimetatakse <u>pöördkoonuse kanooniliseks võrrandiks</u>.

Pöördkoonuse lõiget tasandiga, mis ei läbi koonuse tippu, nimetatakse koonuselõikeks (joon. 16.2-4). Pöördkoonuse lõikeks pöördeteljega ristuva tasandiga $z = h$ on ringjoon, mille keskpunkt asub z-teljel ja raadius on $R = |h \tan\alpha|$.

2. <u>Koonus.</u> Koonuseks ehk kooniliseks pinnaks nimetatakse pinda, mille kirjeldab liikuv sirge (<u>moodustaja</u>), läbides kogu liikumise vältel kindlat punkti S (koonuse tippu) ja lõigates mingit kõverat (<u>juhtjoont</u>).

Kui koonuse juhtjooneks L on reaalne mittelagunev teist järku kõver ja koonuse tipp S ei asu juhtjoone tasandil, siis sirgete hulk, mille sirged ühendavad punkti S juhtjoone kõikide punktidega, on teist järku koonus (määratakse ruutvõrrandiga). Teist järku koonuse kanooniline võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (16.4)$$

Teist järku koonuse erijuhuks on pöördkoonus. Kui yz-tasandil asuv sirge

$$\begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

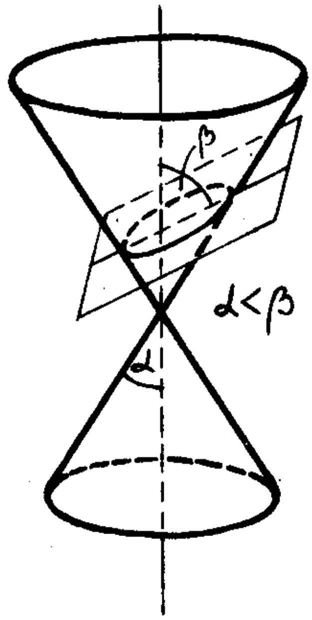
pöörleb ümber z-telje (vt. joon. 16.2), siis tekkinud pöördkoonuse võrrand on (vt. pöördpind)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Üldise teist järku koonuse (16.4) võime saada pöördkoonusest ruumi kokkusurumisel x-telje sihis:

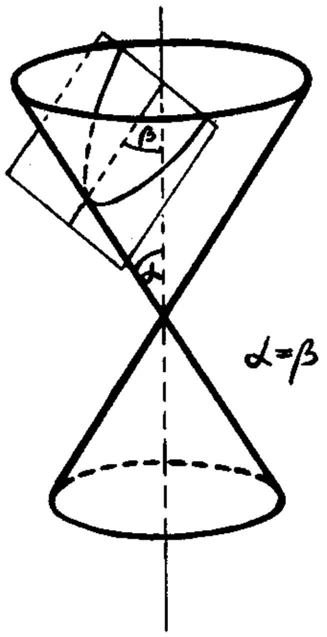
$$x = \frac{b}{a} X, \; y = Y, \; z = Z.$$

Teist järku koonusel (16.4) on kolm sümmeetriatasandit, kolm sümmeetriatelge ja üks sümmeetriakeskpunkt (koonuse tipp). Koonuse teljeks on sümmeetriatelg, mida läbivad sümmeetriatasandid lõikavad koonust rohkem kui ühes punktis.




Joonis 16.2.

Teist järku koonuse lõiked telge läbivate tasanditega on lõikuvate sirgete paarid, teljega lõikuvate tasanditega aga ellipsid, paraboolid või hüperboolid. Lõige tasandiga, mis lõikab koonuse kõiki moodustajaid, on ellips (vt. joon. 16.2). Lõige tasandiga, mis on paralleelne parajasti ühe moodustajaga, on parabool (vt. joonis 16.3). Teist järku koonuse lõige tasandiga, mis on paralleelne parajasti kahe moodustajaga, on hüperbool (vt. joonis 16.4). Koonust, mille iga moodustaja on antud pinna puutujaks, nimetatakse antud




Joonis 16.3.

pinna puutujakoonuseks. Antud pinna puutujakoonuseid on lõpmata palju.

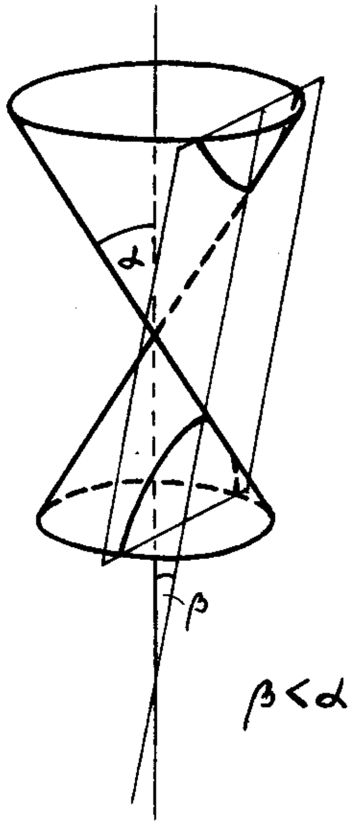
Näide 1. Koonuse tipp asub punktis S(a,b,c) ja koonuse juhtjoone võrrandid on

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0, \\ f_2(x,y,z) = 0. \end{cases} \qquad (16.5)$$

Koostada koonuse võrrand.

Lahendus. Olgu X(x,y,z) koonuse juhtjoone suvaline punkt ja P(X,Y,Z) punktiga X ja S määratud koonuse moodustaja suvaline punkt. Otsitava koonuse moodustaja võrrandid omavad kuju

$$\frac{X - a}{x - a} = \frac{Y - b}{y - b} = \frac{Z - c}{z - c}. \qquad (16.6)$$




Joonis 16.4.

Elimineerides võrrandisüsteemist (16.5) ja (16.6), mis koosneb neljast võrrandist, juhtjoone punkti koordinaadid x,y,z, saamegi otsitava koonuse võrrandi.

Märkus. Kui koonuse tipp asub reeperi alguspunktis, siis koonus määratakse homogeense võrrandiga.

Näide 2. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub reeperi alguspunktis ja juhtjoon on määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 9, \\ z = 4. \end{cases}$$

Lahendus. Olgu P(X,Y,Z) juhtjoone punkti X(x,y,z) läbiva koonuse moodustaja suvaline punkt. Siis koonuse moodustaja võrrandid on $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$. Elimineerides võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z - 5)^2 = 9, \\ z = 4, \\ \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \end{cases}$$

juhtjoone punkti $X$ koordinaadid x, y, z, saamegi otsitava koonuse võrrandi $X^2 + Y^2 - \frac{Z^2}{2} = 0$.

Märkus. Elimineerimine on lihtne, kui teisendada moodustaja võrrandid parameetrilisele kujule ja korrutada pinna võrrandit parameetri ruuduga.

Näide 3. Koostada teist järku pinna $F(x,y,z) = 0$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(a,b,c)$.

Lahendus. Otsitava koonuse moodustaja kanoonilised võrrandid on $\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$, millest saame parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = lt + a, \\ y = mt + b, \\ z = nt + c. \end{cases} \qquad (16.7)$$

Kuna iga otsitava koonuse moodustaja on antud pinna puutujaks, siis moodustaja omab pinnaga kaks ühtivat lõikepunkti. Asendades moodustaja parameetrilised võrrandid pinna võrrandisse, saame parameetri t suhtes ruutvõrrandi

$$At^2 + Bt + C = 0, \qquad (16.8)$$

mis peab ülesande eelduste järgi omama kaks ühtivat lahendit. Järelikult, võrrandi diskriminant peab olema null:

$$B^2 - 4AC = 0. \qquad (16.9)$$

Elimineerides süsteemist (16.7),(16.9) moodustaja sihivektori koordinaadid l, m, n ja puutepunkti parameetri t, saamegi otsitava puutujakoonuse võrrandi. Meenutame veel, et moodustaja sihivektori koordinaatidest ühe võib alati valida vabalt (sobiv nullist erinev arv, näiteks üks), sest sihivektorit võib alati korrutada nullist erineva arvuga.

Märkus. Kui huvitab ka puutujakoonuse moodustaja ja pinna puutepunkt, siis selle parameetri leiame võrrandist (16.8), arvestades seost (16.9) $t = -\frac{B}{2A}$. Asendades leitud t väärtuse moodustaja parameetrilistesse võrranditesse, saamegi otsitava puutepunkti.

Näide 4. Koostada reeperi alguspunkti läbivate sfääri $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16$ puutujate hulga võrrand.

Lahendus. Iga sirge, mis läbib reeperi alguspunkti, võib esitada võrranditega $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ehk $x = lt$, $y = mt$, $z = nt$. Kuna sirge puutub sfääri, siis sirgel on sfääriga kaks ühtivat lõikepunkti (puutepunkti). Järelikult, võrrandisüsteem (sirge võrrand pluss sfääri võrrand) peab omama kaks reaalset ja ühtivat lahendit, s.t. süsteemi lahendamisel tekkiva ruutvõrrandi $(lt - 5)^2 + (mt + 1)^2 + (nt)^2 = 16$ diskriminant peab olema võrdne nulliga. See ongi tingimus, mida peavad rahuldama puutuja sihivektori koordinaadid:

$$(l^2 + m^2 + n^2)t^2 - 2(5l - m)t + 10 = 0,$$

$$\Delta = (5l - m)^2 - 10(l^2 + m^2 + n^2).$$

Järelikult, $(5l - m)^2 - 10(l^2 + m^2 + n^2) = 0$.

Asendades viimases võrduses l ja n nende avaldistega moodustaja võrrandist $l = \frac{x}{t}$, $m = \frac{y}{t}$, $n = \frac{z}{t}$ ja korrutades saadud võrrandit $t^2$, saamegi otsitava puutujate hulga võrrandi $(5x - y)^2 - 10(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Otsitav puutujate hulk on koonus, mida nimetatakse sfääri puutujakoonuseks.

## 1. Koonus

16.1. Pöördkoonuse tipp asub reeperi alguspunktis, z-telg on koonuse teljeks ja punkt $M(3,-4,7)$ on koonuse punkt. Koostada koonuse võrrand.

16.2. Koostada pöördkoonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis S, koonuse telg on paralleelne vektoriga $\bar{e}$ ning moodustaja ja telje vaheline nurk on $\varphi$:
1) $S(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{e} = (a,b,c)$, $\varphi = \varphi_0$, 2) $S(1,2,3)$, $\bar{e} = (2,2,-1)$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

16.3. Leida koonuse 1) $x^2 + y^2 = z^2$, 2) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$ pöördetelje ja moodustaja vaheline nurk.

16.4. Sirge $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ pöörleb ümber x-telje. Koostada sirge pöörlemisel tekkinud pinna võrrand.

16.5. Hulga sirged läbivad punkti $A(3,0,5)$ ja moodustavad xy-tasandiga nurga $\frac{\pi}{4}$. Koostada sirgete hulga võrrand.

16.6. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(1,2,4)$ ja koonuse moodustajad moodustavad tasandiga $2x + 2y + z = 0$ nurga $45°$.

16.7. Leida koonuse $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ moodustajate ja tasandi $5x + 10y - 11z = 0$ vaheline teravnurk.

16.8. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(x_0, y_0, z_0)$ ja koonuse moodustajad lõikavad tasandit $ax + by + cz + d = 0$ nurga $\beta$ all.

16.9. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub reeperi alguspunktis ja juhtjoon on määratud võrrandisüsteemiga

1) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = b, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a. \end{cases}$

16.10. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub reeperi alguspunktis ja juhtjoon on määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

16.11. Pöördkoonuse tipp asub reeperi alguspunktis, y-telg on pöördkoonuse teljeks, pöördetelje ja moodustaja vaheline nurk on $60°$. Koostada pöördkoonuse võrrand.

16.12. Koostada pöördkoonuse võrrand, kui pöördkoonuse moodustajateks on reeperiteljed.

16.13. Koostada pöördkoonuse võrrand, kui tema tipp asub punktis $S(1,2,3)$, pöördetelg on risti tasandiga $2x + 2y - z + 1 = 0$ ning pöördetelje ja moodustaja vaheline nurk on $30°$.

16.14. Koostada esimeses ja seitsmendas oktandis asuva pöördkoonuse võrrand, kui x- ja y-telg on koonuse moodustajateks, aga z-telg moodustab koonuse pöördeteljega nurga $\frac{\pi}{4}$.

16.15. Pöördkoonuse juhtjooneks on xy-tasandil asuv ringjoon raadiusega r. Koonuse telg on risti juhtjoone tasandiga, tipp asub z-teljel ja tipu kaugus juhtjoone tasandist on h. Koostada pöördkoonuse võrrand. Teha joonis.

16.16. Pöördkoonuse juhtjooneks on ringjoon raadiusega 5, pöördetelg on risti juhtjoone tasandiga ja tipp asub juhtjoonest 7 ühiku kaugusel. Koostada pöördkoonuse võrrand.

16.17. Koostada koonuse võrrand, kui on antud koonuse tipp S ja juhtjoone võrrandid:

1) $S(0,0,c)$ ja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$;

2) $S(3,-1,-2)$ ja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$;

3) $S(-3,0,0)$ ja $3x^2 + 6y^2 - x = 0$, $x + y + z = 1$.

16.18. Koostada punktist $S(4,0,-3)$ ellipsit

$$\begin{cases} \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

projekteeriva koonuse võrrand.

16.19. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(2,3,6)$, xy-tasand lõikab otsitavat koonust mööda ellipsit, mille teljed on paralleelsed x- ja y-telgedega ja ellips puutub reeperitelgi.

16.20. Sirge läbib punkti $S(0,b,0)$ ja libiseb mööda hüperbooli

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Koostada liikuva sirge poolt kirjeldatud koonuse võrrand.

16.21. Sirge läbib punkti $A(0,0,2)$ ja libiseb mööda hüperbooli

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Koostada liikuva sirge poolt kirjeldatud koonuse võrrand.

16.22. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(0,0,a)$ ja juhtjooneks on hüperbool $2xy = a^2$, $z = 0$.

16.23. xy-tasandil asuva parabooli tipp on reeperi alguspunktis, parabooli teljeks on x-telg ja telje suunaks x-telje positiivne suund, parameeter $p = 2$. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis S(0,0,8) ja juhtjooneks on kirjeldatud parabool.

16.24. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis S(0,0,p) ja juhtjooneks on parabool $y^2 = 2px$, $z = 0$.

16.25. Koonuse tipp asub punktis C(0,0,2R) ja koonus läbib ringjoont

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, \\ ax + by + cz + d = 0. \end{cases}$$

Koostada koonuse võrrand.

16.26. Pöördkoonuse teljeks on sirge $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ ja tipp asub yz-tasandil. Koostada koonuse võrrand, teades, et punkt $M(1,1,-\frac{5}{2})$ asub pöördkoonusel.

16.27. Tõestada, et koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ suvaline normaal lõikab koonuse telge.

16.28. Tõestada, et koonus, mille tipp asub pöördparaboloidi meridiaanlõike fookuses ja juhtjooneks on sama pöördparaboloidi suvaline tasandiline lõige, on pöördkoonus.

Märkus. Pöördpinna meridiaanlõikeks nimetatakse pinna lõiget pöördetelge läbiva tasandiga.

16.29. Tõestada, et võrrand $z^2 = xy$ määrab koonuse, tipuga reeperi alguspunktis.

16.30. Tõestada, et koonuselõiked paralleelsete tasanditega on sarnased. (Välja arvatud koonuse lõiked tippu läbivate tasanditega, mille korral teist järku kõverad kiduvad kas sirgete paariks või punktiks.)

16.31. Tõestada, et teist järku koonus, mille tipp asub reeperi alguspunktis ja mille juhtjooneks on kõver $f(x,y) = 0$, $z = 1$, määratakse homogeense võrrandiga. Vaadeldud koonuse kõik punktid, välja arvatud reeperi alguspunkt, rahuldavad võrrandit $f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$.

## 2. Puutujakoonus

16.32. Koostada sfääri $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp asub reeperi alguspunktis.

16.33. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $C(0,0,c)$, $c > r$.

16.34. Koonuse tipp asub punktis $S(5,0,0)$ ja koonuse moodustajad puutuvad sfääri

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Koostada koonuse võrrand.

16.35. Leida sfääri $(x - a)^2 + (y - b)^2 - (z - c)^2 = R^2$ puutujakoonuse võrrand, koonuse tipp on $S(x_0, y_0, z_0)$.

16.36. Koonus puutub sfääri, mille raadius on 6 ja keskpunkt asub punktis $C(0,4,1)$. Koonuse tipp asub punktis $S(8,0,0)$. Koostada koonuse võrrand.

16.37. Koonuse tipp asub punktis $S(x_0, y_0, z_0)$ ja koonus puutub sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Millises suhtes jagab ringjoon, mida mööda koonus puutub sfääri, sfääri pinda?

16.38. Koostada punkti $S(5,1,0)$ läbivate pinna $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ puutujate hulga võrrand.

16.39. Koostada ellipsoidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{10} + \frac{z^2}{9} = 1$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(6,0,0)$.

16.40. Koonuse tipp asub punktis $S(3;0;0,5)$ ja koonuse kõik moodustajad puutuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$. Koostada koonuse võrrand.

16.41. Tõestada, et ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ puutujakoonuse võrrand on

$$\left(\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0,$$

kui koonuse tipp on punktis $S(x_0, y_0, z_0)$.

16.42. Koostada ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$ puutujate hulga alamhulga võrrand, kui alamhulga sirged moodustavad reeperitelgede sihivektoritega võrdsed nurgad.

16.43. Koostada koonuse võrrand, kui koonus puutub kahte antud sfääri

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + (z - 3)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

16.44. Koostada ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp asub ellipsoidi välispunktis $S(x_0, y_0, z_0)$.

16.45. Koostada koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $S(x_0, y_0, z_0)$ ja koonus on ühekattese või kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ puutujakoonuseks.

16.46. Sirgete hulga sirged läbivad teist järku pinna keskpunkti ega oma teist järku pinnaga ühtegi ühist reaalset lõikepunkti. Koostada sirgete hulga võrrand.

16.47. Punkt $S(x_0, y_0, z_0)$ on elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$, $p > 0$, $q > 0$, väline punkt. Koostada teist järku koonuse võrrand, kui koonuse tipp asub punktis S ja koonus on antud elliptilise paraboloidi puutujakoonuseks. Koostada punkti S polaartasandi võrrand antud elliptilise paraboloidi suhtes.

Märkus. Punkti S polaartasandiks antud teist järku pinna suhtes nimetatakse tasandit, millel asub antud pinna ja antud pinna puutujakoonuse puutepunktid, kui puutujakoonuse tipp asub antud punktis.

16.48. Koostada pöördkoonuse võrrand, kui koonus puutub xz- ja yz-tasandeid mööda x- ja y-telge.

16.49. Pöördkoonus puutub esimeses ja seitsmendas oktandis kõiki kolme reeperitasandit. Koostada pöördkoonuse võrrand.

## §2. Silinder

Silindriks ehk silindriliseks pinnaks nimetatakse joonpinda, mille kirjeldab sirge (silindri moodustaja) liikumisel ruumis, jäädes kogu liikumise vältel paralleelseks mingi fikseeritud sirgega ja lõigates kogu liikumise vältel mingit kindlat kõverat (juhtjoont).

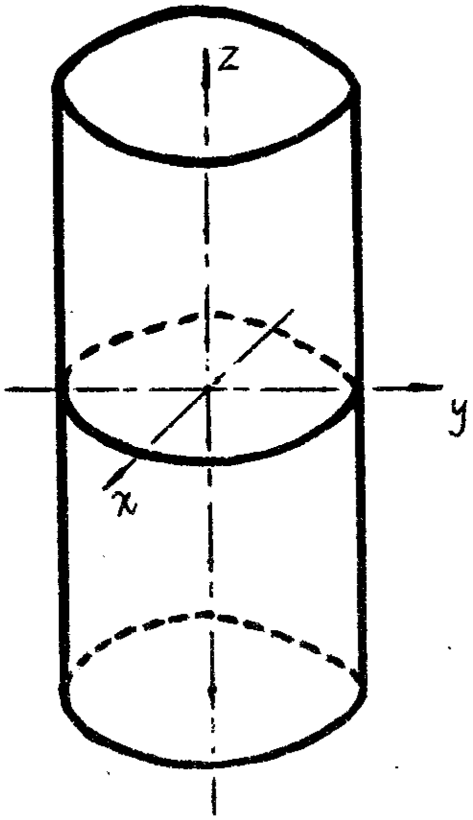
**Iga joont, mis asub silindril, nimetatakse silindri juhtjooneks, kui silindri iga moodustaja lõikab seda joont ühes ja ainult ühes punktis. Juhtjoont nimetatakse tasandiliseks juhtjooneks, kui ta on silindri ja mingi tasandi lõikejoon. Silindrit võime defineerida kui algebralist pinda, mille võrrand sobiva reeperi korral ei sisalda ühte muutujatest x,y,z. Näiteks f(x,y) = 0 (ei sisalda muutujat z).**

Kui silindri juhtjooneks L on reaalne mittelaguv teist järku kõver ja moodustaja sihivektor $\bar{s}$ ei ole paralleelne juhtjoone tasandiga, siis juhtjoone L kõiki punkte läbivate ja vektoriga $\bar{s}$ paralleelsete sirgete hulk on teist järku silinder. Teist järku silindreid (määratakse ruutvõrrandiga) on kolme tüüpi ja nende kanoonilised võrrandid on vastavalt:

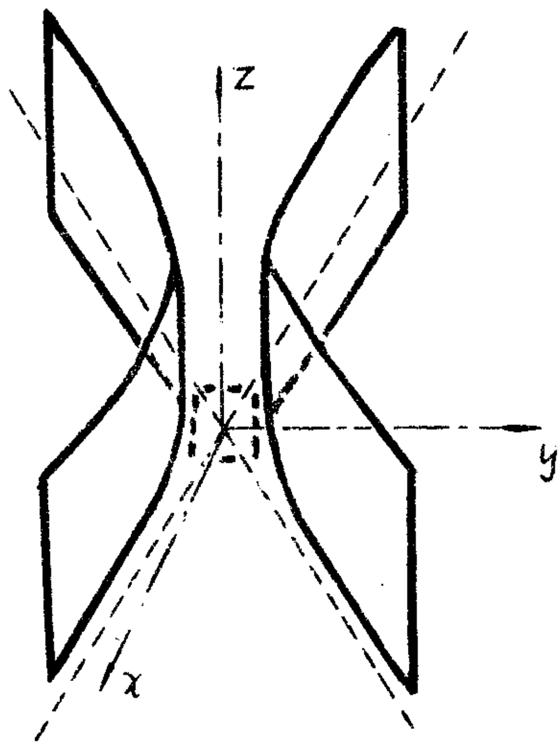
1) elliptiline silinder (vt. joon. 16.5 ):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad (16.10)$$

2) hüperboolne silinder (vt. joon. 16.5):




Joonis 16.5

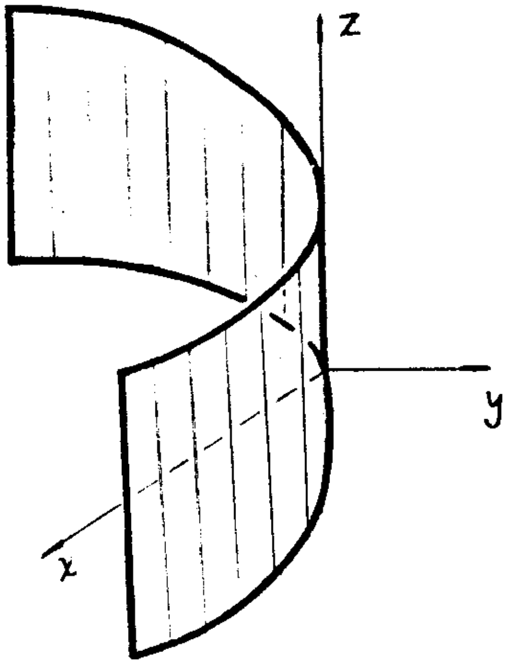



Joonis 16.6

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad (16.11)$$

3) **paraboolne silinder** (vt. joon. 16.7):

$$y^2 = 2px. \qquad (16.12)$$




Joonis 16.7

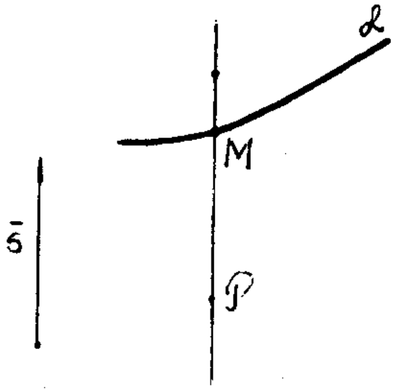
Elliptilise silindri erijuhuks on pöördsilinder. Pöördsilindri võime kergesti saada sirge pöörlemisel ümber endaga paralleelse telje (vt. pöördpind). Kui pöördsilindri telg on paralleelne z-teljega, siis pöördsilinder lõikab xy-tasandit mööda ringjoont. Kui selle ringjoone keskpunkt asub punktis C(a,b,0) ja ringjoone raadius on r, siis pöördsilindri võrrand on

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Näide 5. Silindri juhtjooneks on kõver

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0, \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (16.13)$$

ja silindri moodustaja on paralleelne vektoriga $\bar{s} = (l,m,n)$. Koostada silindri võrrand.




Joonis 16.8

Lahendus. 1) Otsitava silindri moodustaja võrrandid on

$$\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n}, \qquad (16.14)$$

kus X(x,y,z) on juhtjoone suvaline punkt ja P(X,Y,Z) on moodustaja suvaline punkt (vt. joon. 16.7). Elimineerides neljast võrrandist koosnevast süsteemist (16.13) ja (16.14) sihivektori koordinaadid l,m,n, saamegi otsitava silindri võrrandi.

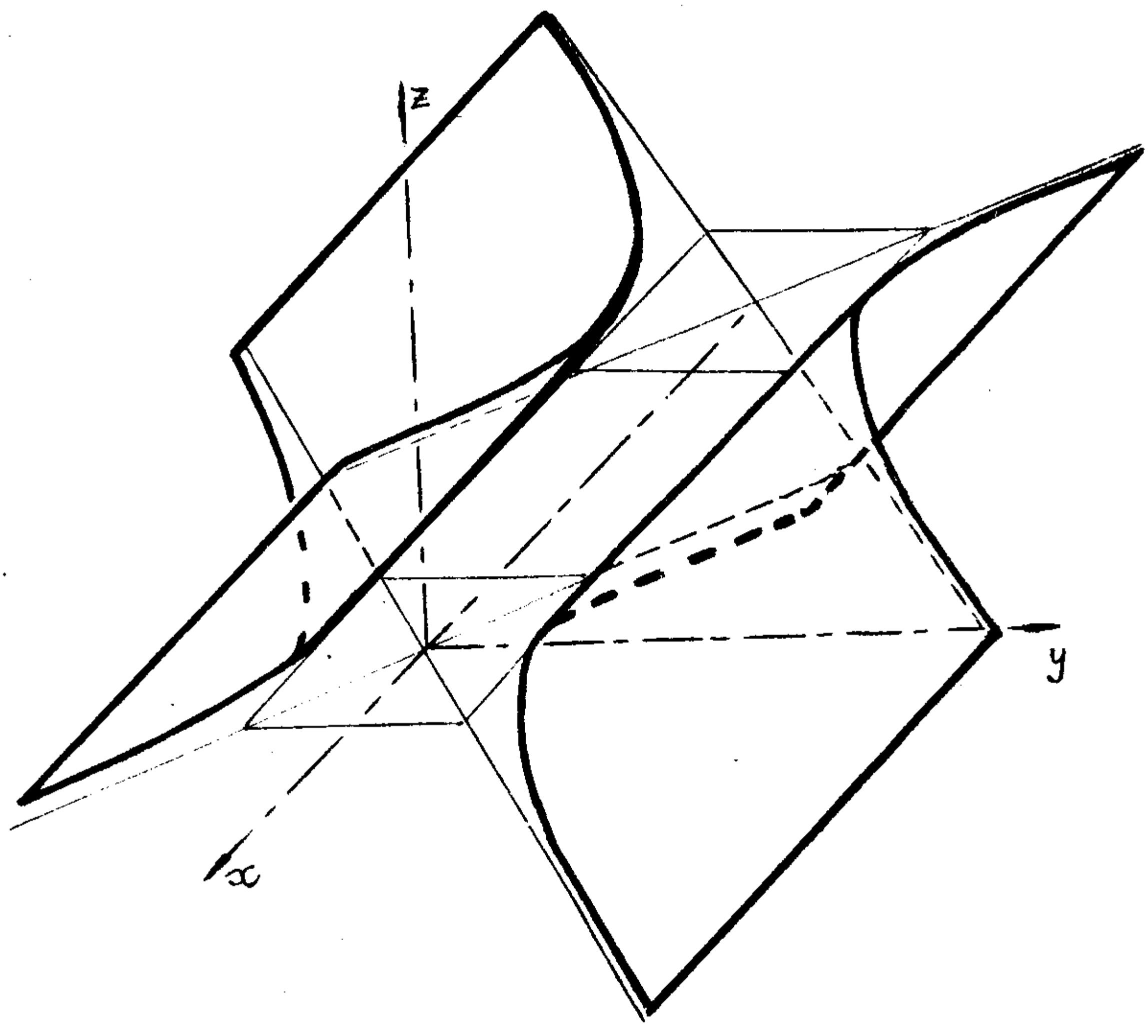
Märkus. Ülesande lahendamine lihtsustub, kui teisendada moodustaja võrrandid (16.14) parameetrilisele kujule.

Näide 6. Koostada silindri võrrand, kui silindri juhtjooneks on kõver

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$$

ja moodustajad on paralleelsed y- ja z-telje vahelise nurga poolteljega. Teha joonis.

Lahendus. y- ja z-telje vaheline nurgapoolitaja moodustab reeperitelgedega vastavalt $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°$ (vt. joon. 16.9). Vaadeldava nurgapoolitaja sihivektoriks on




Joonis 16.9

$\bar{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Kuna $\cos\alpha = \cos 90° = 0$, $\cos\beta = \cos\gamma = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, siis $\bar{a} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \parallel (0,1,1)$. Seega, otsitava silindri moodustaja sihivektoriks võib võtta vektori $\bar{s} = (0,1,1)$. Silindri moodustajaks on $\frac{X - x}{0} = \frac{Y - y}{1} = \frac{Z - z}{1}$. Elimineerime juhtjoone ja moodustaja võrranditest $x,y,z$. Avaldame $z = 0$, $y = Y - Z$, $x = X$ ja asendame juhtjoone esimesse võrrandisse, saamegi otsitava silindri võrrandi $X^2 - (Y - Z)^2 = 25$ ehk $X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ - 25 = 0$.

Näide 7. Koostada silindri võrrand, kui silindri moodustaja on paralleelne sirgega $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{3}$ ja juhtjooneks on kõver $y^2 = 4x$, $z = 0$.

Lahendus. Moodustaja parameetrilised võrrandid on $X = t + x$, $Y = 2t + y$, $Z = 3t + z$. Tundmatute $x$, $y$, $z$ ja $t$ elimineerimiseks avaldame moodustaja võrranditest $x$, $y$, $z$ ja asendame juhtjoone võrranditesse

$$\begin{cases} (Y - 2t)^2 = 4(X - t), \\ Z - 3t = 0; \end{cases}$$

viimasest võrrandist $t = \frac{1}{3} Z$ ja otsitava silindri võrrand on $(Y - \frac{2}{3} Z)^2 = 4(X - \frac{1}{3}Z)$ ehk $9Y^2 - 12YZ + 4Z^2 - 36X - 12Z = 0$.

Näide 8. Koostada silindri võrrand, kui silindri kõik moodustajad puutuvad teist järku pinda

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (16.15)$$

(s.t. on antud pinna puutujasilindriks) ja silindri moodustaja on paralleelne vektoriga $\bar{s} = (l,m,n)$.

Lahendus. Määrame otsitava silindri moodustaja kanooniliste võrranditega $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, millest saame parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0. \end{cases}$$

Kuna silindri moodustaja puutub antud pinda, siis moodustaja ja antud pind peavad omama kaht ühtivat lõikepunkti. Asendades sirge parameetrilised võrrandid pinna võrrandisse, saame parameetri $t$ suhtes võrrandi $At^2 + Bt + C = 0$. Et süsteemil oleks kaks ühtivat lahendit, peab võrrandi diskriminant olema võrdne nulliga:

$$B^2 - 4AC = 0. \tag{16.17}$$

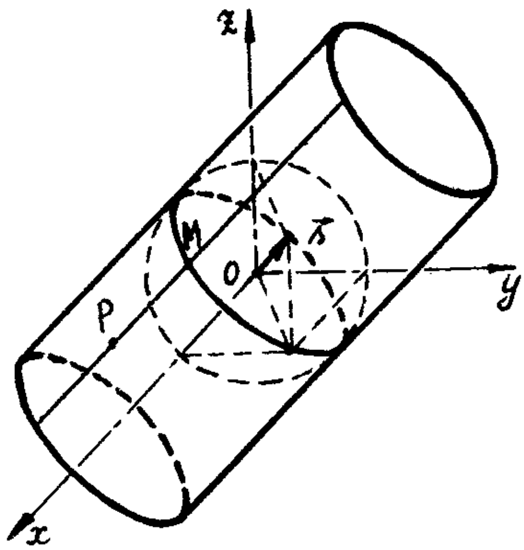
Elimineerides **süsteemist** (16.16–17) **moodustaja suvaliselt fikseeritud punkti** $X_0$ **koordinaadid** $x_0, y_0, z_0$, **saamegi** otsitava **silindri võrrandi.**

**Märkus. Kuna punkti** $X_0$ **valik moodustajal on suhteliselt vaba, siis võime võtta punkti** $X_0$ **ühe koordinaadi vabalt ette. Näiteks kui moodustaja ei ole paralleelne xy-tasandiga, võime võtta** $z_0 = 0$**, s.t. moodustajat määravaks punktiks on võetud antud moodustaja ja xy-tasandi lõikepunkt.**

**Näide 9. Koostada sfääri** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **puutujasilindri võrrand, kui silindri moodustaja moodustab võrdsed nurgad kõigi kolme reeperiteljega.**

Lahendus. 1) Olgu PM otsitava puutujasilindri suvaline moodustaja, kus $P(X,Y,Z)$ on moodustaja suvaline punkt ja $M(x,y,z)$ moodustaja ja silindri puutepunkt, s.t. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (vt. joon. 16.10). Moodustaja sihivektoriks võib võtta vektori $\bar{s} = (1,1,1)$ ja moodustaja võrrandid on

$$X = t + x, \; Y = t + y, \; Z = t + z. \tag{16.18}$$




Joon. 16.10

Sirge PM ja sfääri lõikepunktide parameetrite leidmise ruutvõrrand on

$$3t^2 + 2t(x + y + z) = 0,$$

kust $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}(x + y + z) = 0$. Et sirge oleks sfääri puutujaks, peab $t_1 = t_2 = 0$, s.t. $x + y + z = 0$. Seega, silindri juhtjoone võrrandid on

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases} \tag{16.19}$$

Elimineerides süsteemist (16.18–19) juhtjoone punkti M koordinaadid ja parameetri t, saamegi silindri võrrandi

$$2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ - 3 = 0.$$

2) Kuna x, y, z võrrandites (16.16) on sfääri punkti koordinaadid, siis

$$(X - t)^2 + (Y - t)^2 + (Z - t)^2 = 0.$$

Et silindri moodustaja oleks sfäärile puutujaks, peab saadud ruutvõrrandil olema kaks ühtivat lahendit, s.t. võrrandi diskriminant peab olema null:

$$(X + Y + Z)^2 - 3(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Saadud võrrand ongi silindri võrrand, sest punkt P on silindri suvaline punkt.

## 1. Silinder

**16.50. Koostada pöördsilindri võrrand, kui teljeks on sirge $x = t$, $y = 2t + 1$, $z = -2t - 3$ ja punkt $S(1,-2,1)$ asub pöördsilindril.**

**16.51. Pöördsilindri pöördeteljeks on sirge $x = 3t + 1$, $y = -2t - 2$, $z = t + 2$ ja pöördsilinder läbib punkti $S(2,-1,1)$. Koostada pöördsilindri võrrand.**

**16.52. Koostada silindri võrrand, kui silinder läbib kõverat**

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

**ja tema moodustaja on 1) paralleelne x-teljega; 2) paralleelne sirgega $x = y$, $z = c$.**

**16.53. Koostada silindri võrrand, kui silindri moodustaja on paralleelne vektoriga $\bar{l} = (2,-3,4)$ ja juhtjooneks on kõver $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$.**

**16.54. Pöördsilindri juhtjooneks on ringjoon raadiusega $R = 8$.** Leida antud pöördsilindri **ja tasandi lõikejoonena tekkinud ellipsi pooltelјed, kui lõiketasandi ja silindri pöördetelje vaheline nurk on $\frac{\pi}{6}$.**

**16.55.** Pöördsilindri juhtjooneks on ringjoon raadiusega $R = \sqrt{3}$. Vaadeldud pöördsilindri lõige tasandiga $\alpha$ on ellips, mille suurem pooltelg $a = 2$. Leida pöördsilindri telje ja tasandi $\alpha$ vaheline nurk.

**16.56.** Koostada silindri võrrand, kui silindri juhtjooneks on ringjoon

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$$

ja moodustaja sihivektor $\bar{s} = (l, m, n)$ on määratud suhtega $l : m : n = 5 : 3 : 2$.

**16.57.** Silindri juhtjooneks on kõver $x = y^2 + z^2$, $x = 2z$ ja moodustaja on risti juhtjoone tasandiga. Koostada silindri võrrand.

**16.58.** Koostada silindri võrrand, kui silindri juhtjooneks on kõver $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$ ja moodustaja on risti juhtjoone tasandiga.

**16.59.** Koostada silindri võrrand, kui silinder on ringjoont

$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

ortogonaalselt

1) xy-tasandile,
2) xz-tasandile,
3) yz-tasandile projekteerivaks silindriks.

**16.60.** Leida silinder, mis projekteerib kõvera

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3yz - 2x + 3z - 3 = 0, \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

xz-tasandile (paralleelselt y-teljega). Leida antud kõvera projektsioon xz-tasandile.

**16.61.** Koostada silindri võrrand, kui silindri moodustaja on paralleelne sirgega $x = y = z$ ja juhtjoone määrab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

**16.62.** On antud kolm sirget: $x = y = z$, $x + 1 = y = z - 1$ ja $x - 1 = y + 1 = z - 2$. Koostada antud sirgeid läbiva pöördsilindri võrrand.

## 2. Puutujasilinder

**16.63.** Koostada teist järku silindri võrrand, kui silindri moodustajad puutuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja silindri moodustaja sihivektoriks on vektor $\bar{a} = (l,m,n)$.

**16.64.** Tõestada, et ei leidu sellist pöördsilindrit, mis oleks ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$ puutujasilindriks.

**16.65.** Koostada sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puutujasilindri võrrand, kui silindri moodustajad on risti tasandiga $x + y - 2z - 5 = 0$.

**16.66.** Koostada sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ puutujasilindri võrrand, teades, et silindri moodustaja on paralleelne sirgega $x = 2t - 3$, $y = -t + 7$, $z = -2t + 5$.

**16.67.** Koostada silindri võrrand, kui silinder on kahe sfääri

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

puutujasilindriks.

**16.68.** Koostada silindri võrrand, kui silindri moodustajad puutuvad sfääre

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 36,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

**16.69.** Koostada 1) ühekattese, 2) kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ puutujasilindri võrrand, kui moodustaja on paralleelne vektoriga $\bar{a} = (l,m,n)$. Eeldatakse, et vektoriga $\bar{a}$ määratud siht ei ole pinna asümptootiline siht.

16.70. Koostada silindri võrrand, kui silindri moodustaja on paralleelne vektoriga $\bar{s} = (l,m,n)$ ja silinder on elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ puutujasilinder.

### 3. Mitmesuguseid ülesandeid

16.71. Tõestada, et kui pöördparaboloid ja pöördsilinder lõikuvad ja nende pöördteljed on paralleelsed, siis nad lõikuvad mööda ellipsit. Saadud ellipsi suurem telg asub tasandil $\alpha$, mis läbib pöördsilindri ja pöördparaboloidi telgi, väiksem telg on risti tasandiga $\alpha$.

16.72. Koostada koonuse $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ kõõlude keskpunktide hulga võrrand eeldusel, et sirged, millel asuvad vaadeldavad kõõlud, läbivad punkti $S_0(x_0,y_0,z_0)$.

16.73. Koonus tipuga $S\ (x_0,y_0,z_0)$ lõikab koonust $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ nii, et lõikejoone igat punkti läbivad kummagi koonuse moodustajad on omavahel risti. Leida lõikejoone võrrand.

16.74. Näidata, et iga pooluse $P\ (x_0,y_0,z_0)$ korral koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ polaartasand läbib koonuse tippu ning määratakse võrrandiga $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0$.

16.75. On antud pöördsilinder $(\bar{a} - \bar{x})^2 = c^2$ ja sirge $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{b}t$. Leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et sirge

1) ei lõikuks silindriga,
2) lõikaks silindrit,
3) puutuks silindrit,
4) oleks antud silindri moodustaja.

16.76. On antud pöördkoonus $(\bar{a}\bar{x})^2 = \bar{a}^2\bar{x}^2\cos^2\alpha\ (\alpha = \text{const})$. Millised on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et sirge $\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{b}$

1) ei lõikuks koonusega,
2) läbiks koonuse tippu,
3) oleks koonuse moodustajaks,

4) lõikaks koonust,

5) oleks koonuse puutujaks ?

16.77. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_1(\bar{x}_1)$ asuks pöördkoonuse $(\bar{a}\bar{x})^2 = \bar{a}^2\bar{x}^2\cos^2\alpha$ ($\alpha$ = = const) sees.

16.78. Koostada pöördkoonuse pöördetelje võrrand, kui koonuse tipp asub punktis $X_0(\bar{x}_0)$ ja kolme koonuse moodustaja sihivektorid on $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Koostada ka pöördkoonuse võrrand.

16.79. Tõestada, et kui silindri moodustajad on paralleelsed sirgega $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ $(n \neq 0)$ ja juhtsirgeks on xy-tasandil asuv kõver $\varphi(x,y) = 0$, $z = 0$, siis silindri võrrand on kujuga $\varphi(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z) = 0$.

16.80. Mitmest parameetrist sõltub kõigi pöördkoonuste hulk ruumis?

16.81. Mitmest parameetrist sõltub kõigi pöördsilindrite hulk ruumis?

16.82. Mitmest parameetrist sõltub kõigi pöördsilindrite hulk ruumis, kui

1) pöördsilindrid on antud sfääri puutujasilindrid,
2) pöördsilindrite raadiused on võrdsed,
3) pöördsilindritel on sama pöördetelg,
4) pöördsilindrid läbivad antud sirget.

16.83. Tõestada, et iga kolme muutujaga homogeenne teise astme võrrand määrab koonuse, tipuga reeperi alguspunktis, või reeperi alguspunkti läbivate tasandite paari.

16.84. Tõestada, et iga elliptilise silindri korral leidub selline tasand $\alpha$, mis lõikab elliptilist silindrit mööda ringjoont.

16.85. Leida sirge, mis läbib punkti A(5,1,2) ja lõikab pinda $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ühes punktis.

## 17. peatükk

# TEIST JÄRKU PINDADE PUUTUJATASANDID

Teist järku pinna puutujatasandiks pinna punktis $X_0$ nimetatakse tasandit, millel asuvad kõik punkti $X_0$ läbivad pinna puutujad. Puutujatasandi ja pinna ühist punkti nimetatakse puutepunktiks.

Kõigi teist järku pindade korral puutepunktis $X_0(x_0,y_0,z_0)$ saadakse pinna puutujatasandi võrrand nn. poolitiasendusvõttega.

Poolitiasendusvõte seisneb selles, et pinna võrrandis tuleb igast liidetavast pooled tundmatutest asendada puutepunkti vastavate koordinaatidega, s.t. teha võrrandisse asendused:

$x^2 \to x_0x$, $y^2 \to y_0y$, $z^2 \to z_0z$, $2x \to x + x_0$, $2y \to y + y_0$, $2z \to z + z_0$, $2xy \to x_0y + xy_0$, $2xz \to x_0z + xz_0$, $2yz \to$ $\to yz + yz_0$.

Ellipsoidi
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{17.1}$$
puutujatasandi võrrand pinna punktis $X_0(x_0,y_0,z_0)$ on
$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1. \tag{17.2}$$

Hüperboloidide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \tag{17.3}$$
puutujatasandi võrrand pinna punktis $X_0$ on vastavalt
$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = \pm 1. \tag{17.4}$$

Paraboloidide
$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{17.5}$$
puutujatasandi võrrandid punktis $X_0$ on vastavalt

$$\frac{x_0x}{a^2} \pm \frac{y_0y}{b^2} = z + z_0. \qquad (17.6)$$

Kui punkt $X_0$ on pinna suvaline punkt, siis võrrandid (17.2), (17.4) ja (17.6) määravad vastavalt ellipsoidide, hüperboloidide ja paraboloidide puutujatasandite parved.

**Näide 1.** Koostada punkti $A(5,4,-3)$ läbiva ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ puutujatasandi võrrand.

**Lahendus.** Punkti $A$ koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Järelikult punkt $A$ on otsitava tasandi ja antud pinna puutepunkt. Kasutades võrrandit (17.4), saame $\frac{5x}{25} + \frac{(-4)y}{16} - \frac{(-3)z}{9} = 1$ ehk $12x - 15y + 20z - 60 = 0$.

**Näide 2.** Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} + z^2 = 1$ puutujatasandid, mis on paralleelsed tasandiga $2y + z - 5 = 0$.

**Lahendus.** Otsime ellipsoidi puutujatasandite parvest $\frac{x_0x}{8} + \frac{y_0y}{6} + z_0z = 1$ välja tasandid, mis on paralleelsed antud tasandiga. Kaks tasandit on paralleelsed parajasti siis, kui tundmatute kordajad on võrdelised[1]

$$\frac{\frac{x_0}{8}}{0} = \frac{\frac{y_0}{6}}{2} = \frac{z_0}{1},$$

millest saame $x_0 = 0$, $y_0 = 12z_0$. Kuna puutepunkt $X_0(x_0,y_0,z_0)$ asub ka ellipsoidil, siis tema koordinaadid peavad rahuldama ellipsoidi võrrandit $\frac{144z_0^2}{6} + z_0^2 = 1$, millest $z_0 = \pm\frac{1}{5}$. Seega puutepunktide koordinaadid on $X_0(0,\frac{12}{5},\frac{1}{5})$ ja $X_0' = (0,-\frac{12}{5},-\frac{1}{5})$. Asendades leitud puutepunktide koordinaadid puutujatasandite parve võrrandisse, saamegi otsitavate puutujatasandite võrrandid $12y + 6z \mp 30 = 0$.

[1] Lahenduse käigus tasandite normaalvektorite suhete korral esines meil nulliga jagamine. Sihivektori üks (või ka kaks) koordinaati võivad olla vabalt nullid. Siin midagi korrast ära ei ole. Meenutame, et seda tuleb tõlgendada järgmiselt: suhe $\frac{0}{0}$ on määramatus ja on võrdne iga arvuga. Selleks, et kehtiks seos $\frac{\frac{x_0}{8}}{0} = \frac{z}{1}$, peab esimene suhe olema $\frac{0}{0}$. Siit $\frac{x_0}{8} = 0$ ja $x_0 = 0$.

17.1. Koostada ellipsoidi $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{75} = 1$ puutujatasandi võrrand, kui puutujatasand läbib punkti $A(3,2,5)$.

17.2. Tõestada, et tasand $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ on ellipsoidi $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ puutujatasand. Leida puutepunkti koordinaadid.

17.3. Tõestada, et kui puutepunktiks on punkt $X_o(x_o, y_o, z_o)$, siis ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ puutujatasandi võrrand on $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} + \frac{z_o z}{c^2} = 1$.

17.4. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ puutujatasandi võrrand on $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} - \frac{z_o z}{c^2} = 1$, kui puutepunktiks on $X_o(x_o, y_o, z_o)$.

17.5. Koostada kahekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$ punktis $M(-6,2,6)$ puutuva tasandi võrrand.

17.6. Tõestada, et kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, puutujatasandi võrrand on $\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} - \frac{z_o z}{c^2} = 1$, kui puutepunktiks on $X_o(x_o, y_o, z_o)$.

17.7. Leida koonuse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0$ puutujatasandid, mis läbivad punkti $A(4,-6,4)$.

17.8. Tõestada, et koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ puutujatasandi võrrand on $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} - \frac{z_o z}{c^2} = 0$, kui üheks puutepunktiks on $X_o(x_o, y_o, z_o)$.

17.9. Koostada punkti $A(9,3,18)$ läbiva elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{3} + y^2 = 2z$ puutujatasandi võrrand.

17.10. Tõestada, et elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ puutujatasandi võrrand on $\frac{x_o x}{p} + \frac{y_o y}{q} = z + z_o$, kui puutepunktiks on $X_o(x_o, y_o, z_o)$.

17.11. Koostada hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 2z$ puutujatasandi võrrand, kui puutujatasand läbib punkti $X_o(7,-5,1)$.

17.12. Tõestada, et hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ puutujatasandi võrrand on $\frac{x_0 x}{p} - \frac{y_0 y}{q} = z + z_0$, kui puutepunktiks on punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$.

17.13. Kontrollida, kas sirge $\frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{1}$ on hüperboloidi $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ puutujaks. Jaatava vastuse korral leida puutepunkt.

17.14. Määrata, millise m väärtuse korral tasand $x - 2y - 2z + m = 0$ puutub ellipsoidi $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$.

17.15. Elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$ puutujatasandi normaalvektoriks on $\bar{n} = (2,-1,-2)$. Koostada selle puutujatasandi võrrand.

17.16. Tõestada, et kahekattesel hüperboloidil $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ on tasandiga $5x + 2z + 5 = 0$ ainult üks ühine punkt. Leida selle punkti koordinaadid.

17.17. Tõestada, et tasand $2x - 2y - z - 10 = 0$ on elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$ puutujatasandiks. Leida puutepunkt.

17.18. Koostada ellipsoidi $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ normaali võrrandid, kui normaal läbib punkti $X_0(-2,1,-\frac{1}{2})$.

17.19. Leida ellipsoidi $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ puutujatasandid, mis on paralleelsed tasandiga $2x + 2y - 3z = 0$.

17.20. Leida ellipsoidi $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$ puutujatasandid, mis on paralleelsed tasandiga $x - 2y + 2z + 17 = 0$. Arvutada leitud puutujatasandite vaheline kaugus.

17.21. Leida paraboloidi $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$ puutujatasandid, mis on paralleelsed tasandiga $x - y - 2z = 0$.

17.22. Tõestada, et koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ puutujatasand tema suvalises punktis läbib koonuse tippu.

17.23. Milliseid tingimusi peavad rahuldama ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pooltelјed, et ellipsoidi kõik normaalid läbiksid reeperi alguspunkti ?

17.24. Leida ellipsoidil $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ punktid, mida läbivad pinnanormaalid lõikavad z-telge.

17.25. Leida silindri $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ sellise puutujatasandi võrrand, mille kahe esimese telglõigu (x- ja y-teljel) suhe on 5 : 4.

17.26. Tõestada, et silindri $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kõik normaalid on paralleelsed ühe ja sama tasandiga.

17.27. Tõestada, et teist järku pinna iga kaks puutujatasandit, mille puutepunktid asuvad selle pinna mingil diameetril, on paralleelsed, ja vastupidi, teist järku pinna iga kahe omavahel paralleelse puutujatasandi puutepunktid asuvad selle pinna mingil diameetril.

17.28. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ puutuks ellipsoidi
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

17.29. Milliseid tingimusi peavad rahuldama tasandi võrrandi $Ax + By + Cz + D = 0$ kordajad, selleks et tasand puutuks 1) tsentraalset pinda; 2) paraboloidi
$\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z$?

17.30. Koostada sfääride keskpunktide hulga võrrand, kui sfäärid puutuvad xy-tasandit ja sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

17.31. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ selliste diameetrite hulk, mille diameetrid on konjugeeritud kõverate $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x + y + z = 1$ punkte läbivate pinna $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ puutujatasanditega.

17.32. Leida ühekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ puutujatasandid, mis läbivad antud sirget:
1) $\frac{x}{3} = \frac{y + 9}{3} = \frac{z}{1}$,

2) $\frac{x-9}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$,

3) $\frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

Selgitada, kuidas need sirged asuvad antud pinna suhtes.

17.33. Leida kahekattese hüperboloidi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = -1$ puutujatasandid, mis läbivad sirget $y = 0$, $z = 1$. Leida puutepunktid.

17.34. Kuidas peab asuma sirge teist järku pinna

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$,

2) $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z$

suhtes, et läbi tema saaks panna kaks erinevat ja reaalset antud pinna puutujatasandit ?

17.35. Tõestada, et ühekattese hüperboloidi iga puutujatasand lõikab pinda mööda sirgjoonseid moodustajaid.

17.36. Koostada hüperboolse paraboloidi $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$ ja tema puutujatasandi $10x - 2y - z - 21 = 0$ lõikesirgete võrrandid.

17.37. Tõestada, et iga tasandi korral, mis on paralleelne kahekattese hüperboloidi suvalise puutujatasandiga, kehtib üks järgmistest võimalustest:

1) ei lõika antud pinda,

2) omab pinnaga ühe ühise punkti (puutujatasand),

3) lõikab pinda mööda ellipsit.

17.38. Koostada ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ puutujatasandite ja ellipsoidi keskpunktist puutujatasanditele langetatud ristsirgete lõikepunktide hulga võrrand.

17.39. Ellipsoidil 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 2) $\frac{x^2}{22} + \frac{y^2}{10} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ leida punktid, mida läbivad puutujatasandid on ellipsoidi keskpunktist võrdsel kaugusel d.

17.40. Ellipsoid liigub nii, et puutub kogu aeg kolme vastastikku ristuvat tasandit. Koostada liikuva ellipsoidi keskpunktide hulga võrrand.

17.41. Ristuvatest tasanditest moodustatud kolmetahulise nurga tasandid puutuvad ellipsoidi. Koostada kõigi selliste kolmetahuliste nurkade tippude võrrand.

17.42. Pinna $x^2 + y^2 = 2z$ puutujatasandid lõikavad sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Koostada lõikejoonte keskpunktide hulga võrrand.

17.43. Ühekattese hüperboloidi asümptootilise koonuse puutujatasand lõikab ortogonaalselt ellipsoidi. Tõestada, et lõikejooneks oleva ellipsi pindala ei sõltu puutujatasandi valikust.

17.44. Koostada paraboloidi $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ kõikvõimalike kolme vastastikku ristuva puutujatasandi lõikepunktide hulga võrrand.

17.45. Tõestada, et iga tasandi korral, mis on paralleelne elliptilise paraboloidi suvalise puutujatasandiga, kehtib üks järgmistest võimalustest:

1) ei lõika antud pinda,
2) puutub antud pinda,
3) lõikab pinda mööda ellipsit.

17.46. Ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sisse on joonestatud kuup ja kuubi sisse sfäär. Tõestada, et iga tasand, mis on määratud ellipsoidi kolme sellise punktiga, mille raadiusvektorid on paarikaupa risti, on ülalnimetatud sfääri puutujatasandiks.

17.47. Tõestada, et kõik tasandid, mis läbivad ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ kolme paari kaupa kaasdiameetri kolme otspunkti, puutuvad ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$, kusjuures tasandite puutepunktid teise ellipsoidiga on esimese ellipsoidi ja vastava tasandi lõikejoone keskpunktiks.

17.48. Ellipsoid pöörleb ümber oma keskpunkti nii, et puutub kogu aeg etteantud tasandit. Leida ellipsoidil punktid, mis saavad märgitud liikumisel olla puutepunktideks ja leida kõver, mille kirjeldab puutepunkt etteantud tasandil.

# TEIST JÄRKU PINDADE ÜLDINE TEOORIA

## § 1. Teist järku pinna üldvõrrand. Reeperinihe. Keskpunkt

1. Teist järku pinna üldvõrrand. Teist järku pinnaks ehk kvadrikuks kolmemõõtmelises ruumis nimetatakse pinda, mille iga punkti X koordinaadid x, y, z, leituna mingi reeperi $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ suhtes, rahuldavad võrrandit[1]

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{18.1}$$

Võrrandit (18.1) nimetatakse teist järku pinna üldvõrrandiks. Kui võrrandi (18.1) vasakut poolt tähistada $F(x,y,z)$, siis saame teist järku pinna võrrandi kirjutada lühidalt $F(x,y,z) = 0$. Teist järku pinna üldvõrrandi (18.1) kordajatest moodustatud maatrikseid

---

[1] Tihti tähistatakse punkti X koordinaate $(x^1, x^2, x^3)$, mistõttu teist järku pinna üldvõrrand saab kuju

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0. \tag{18.1'}$$

Kasutades Einsteini summeerimiskokkulepet, on viimane võrrand kirjutatav

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0; \quad \alpha, \beta = 1,2,3,4$$

ehk

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i4}x^i + a_{44} = 0, \quad i,j,\ldots = 1,2,3, \tag{18.1''}$$

kusjuures tuleb nõuda $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ ja $x^4 \equiv 1$. Ruutvormi $F = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ nimetatakse teist järku pinda (18.1) määravaks ruutvormiks ja ruutvormi $\Phi = a_{ij}x^ix^j$ teist järku pinna ruutliikmete ruutvormiks.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

nimetatakse vastavalt teist järku pinna maatriksiks ja ta võrrandi ruutliikmete maatriksiks. Maatriksi A determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

nimetatakse teist järku pinna <u>diskriminandiks</u> ja maatriksi B determinanti

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

teist järku pinna ruutliikmete diskriminandiks[1].

Kuna käesolevas peatükis vaatleme ainult teist järku pindu, siis teksti lihtsustamiseks kirjutame <u>teist järku pinna</u> asemel <u>pind</u>. Teist järku pind tarvitame ainult teooriaosades, kui tahame mõnda reeglit või omadust täpsemalt välja tuua.

2. <u>Reeperinihe</u>. Tehes reeperinihke (rööplükke), läheme reeperilt $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ üle uuele reeperile $\{O', \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Kui uue reeperi alguspunkti O' koordinaate vana ruumi suhtes tähistada x',y',z', siis teist järku

[1] Determinandid $\Delta$ ja $\delta$ säilitavad märki reeperi teisendamisel, olgugi et kordajad $a_{\alpha\beta}$ teist järku pinna üldvõrrandis (18.1) muutuvad. Seega on $\Delta$ ja $\delta$ märgi säilitamise mõttes teist järku pinna invariandid. Ristreeperite korral $\Delta$ ja $\delta$ on koguni muutumatud. Invariante $\Delta$ ja $\delta$ nimetatakse teist järku pinna ortogonaalseteks invariantideks.

pinna üldvõrrand (18.1) teiseneb kujule[1]

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + \\ + 2F_{x'}X + 2F_{y'}Y + 2F_{z'}Z + 2F' = 0, \tag{18.2}$$

kus

$$\begin{aligned} 2F' &= a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + \\ &+ 2a_{23}y'z' + 2a_{14}x' + 2a_{24}y' + 2a_{23}z' + a_{44}, \\ F_{x'} &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}, \\ F_{y'} &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}, \\ F_{z'} &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + a_{44}. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Valemis (18.2) on punkti X koordinaate uue reeperi suhtes tähistatud (X,Y,Z). Seega reeperinihke korral pinna üldvõrrandi ruutliikmete kordajad ei muutu, küll aga muutuvad lineaarliikmete kordajad ja vabaliige. Lineaarliikmete kordajateks uues võrrandis (18.2) on pinna esialgse üldvõrrandi(18.1) vasaku poole F(x,y,z) osatuletised vastava muutuja järgi võetuna kohal O'(x',y',z'):

---

[1] Kasutades indekstähistusi ja Einsteini lühendatud summeerimiskokkulepet, saame võrrandid (18.2-3) kirjutada kujul

$$a_{ij}X^iX^j + 2F_{x'^i}X^i + 2F' = 0, \tag{18.2'}$$

kus

$$2F' = a_{\alpha\beta}\, x'^{\alpha}x'^{\beta}$$

ja

$$F_{x'^i} = a_{i\beta}x'^{\beta}, \tag{18.3'}$$

kus $O'(x'^1, x'^2, x'^3)$ on uue reeperi alguspunkt ning punkti X koordnaadid uue reeperi suhtes on $(X^1, X^2, X^3)$. Teist järku pinna keskpunkti $C(X_o^1, X_o^2, X_o^3)$ koordinaadid leitakse võrrandisüsteemist

$$a_{ij}x_o^j + a_{i4} = 0, \tag{18.4''}$$

mille võib lühidalt kirjutada ka kujul

$$F_{x_o^i} = 0, \tag{18.4'''}$$

$$F_{x'} = \frac{1}{2}\frac{\partial F(x',y',z')}{\partial x}, \qquad F_{y'} = \frac{1}{2}\frac{\partial F(x',y',z')}{\partial y},$$

$$F_{z'} = \frac{1}{2}\frac{\partial F(x',y',z')}{\partial z}$$

ning vabaliige $2F' = F(x',y',z')$.

3. <u>Keskpunkt</u>. Teist järku pinna keskpunktiks nimetatakse pinna sümmeetriakeskpunkti. Pinna keskpunkti $C(x_0,y_0,z_0)$ koordinaadid leitakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0, \end{cases} \tag{18.4}$$

mille kordajateks on pinna maatriksi esimese kolme rea elemendid. Kuna pinna keskpunkti C koordinaadid muudavad nulliks $F_{x_0}$, $F_{y_0}$ ja $F_{z_0}$, siis pinna keskpunkti määrava süsteemi saame lühidalt kirjutada ka kujul (võrdle seosed (18.3))

$$\begin{cases} F_{x_0} = 0, \\ F_{y_0} = 0, \\ F_{z_0} = 0. \end{cases} \tag{18.4'}$$

Pinna keskpunktide arv on võrdne süsteemi (18.4) lahendite arvuga.

1) Kui $\delta \neq 0$, siis süsteemil on ainult üks lahend. Sel korral on teist järku pinnal (18.1) ka ainult üks keskpunkt (tsenter). Pinda, millel on ainult üks keskpunkt, nimetatakse <u>tsentraalseks pinnaks</u>. Tsentraalse pinna keskpunkti $C(x_0,y_0,z_0)$ koordinaatide leidmiseks võrrandisüsteemist (18.4) võib kasutada näiteks Crameri valemeid, mille kohaselt

$$x_0 = \frac{D_x}{\delta}, \quad y_0 = \frac{D_y}{\delta}, \quad z_0 = \frac{D_z}{\delta}, \tag{18.5}$$

kus

$$D_x = \begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{13} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{34} \end{vmatrix}$$

Tsentraalseteks teist järku pindadeks on ellipsoidid, hüperboloidid ja koonus.

2) Kui $\delta = 0$, siis võrrandisüsteemil (18.4) lahend puudub või on lahendeid enam kui üks.

Pindu, mille korral kas keskpunkti ei eksisteeri või on neid rohkem kui üks, nimetatakse mittetsentraalseteks pindadeks.

Teist järku mittetsentraalne pind on keskpunktita, kui süsteemil (18.4) puudub lahend, s.t. $r < r'$ (vt. Kroneckeri-Capelli teoreem[1]). Selliseid pindu nimetatakse keskpunktita pindadeks. Keskpunktita teist järku pindadeks on paraboloidid ($\Delta \neq 0$, $\delta = 0$) ja paraboolne silinder ($\Delta = 0$. $\delta = 0$).

Teist järku mittetsentraalsel pinnal on enam kui üks keskpunkt, kui süsteem (18.4) on kooskõlas ($r=r'$, $r<n$). Sel korral on teist järku pinnal lõpmata palju keskpunkte, mis $r = r' = 2$ korral moodustavad sirge ja $r = r' = 1$ korral tasandi. Esimesel juhul süsteem (18.4) koosneb kahest, teisel juhul ainult ühest sõltumatust võrrandist. Sellisteks teist järku pindadeks on elliptilised ja hüperboolsed silindrid, lõikuvate tasandite paarid ($r = 2$) ning paralleelsete tasandite paarid ($r = 1$).

Kui teist järku pinnal eksisteerib keskpunkt, siis reeperi alguspunkti kandmisel reeperinihkega pinna keskpunkti, pinna teisendatud üldvõrrand ei sisalda lineaarliikmeid:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{23}Z^2 + 2a_{12}XZ + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + \\ + 2F^{\circ} = 0. \quad (18.6)$$

---

[1] Kroneckeri-Capelli teoreem. Lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui süsteemi maatriksi astak $r$ on võrdne süsteemi laiendatud maatriksi astakuga $r'$. Seejuures on lineaarsel võrrandisüsteemil ainult üks lahend parajasti siis, kui $r = n$, kus $n$ on tundmatute arv süsteemis (vt. [1], lk. 69).

Tsentraalse teist järku pinna korral võrrandi (18.6) vabaliige avaldub lähtevõrrandi (18.1) kordajate kaudu järgmiselt:

$$2F^{o} = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{18.7}$$

Kokkuvõttes, kui tsentraalse teist järku pinna korral reeperi alguspunkt asub pinna keskpunktis, siis pinna võrrandil on kuju

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + \\ + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{18.8}$$

<u>Kidunud teist järku pinnaks</u> nimetatakse pinda, mille korral

$$\Delta = 0. \tag{18.9}$$

Sellisteks pindadeks on koonused, silindrid ja tasandite paarid. Kui süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \\ a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \end{cases} \tag{18.10}$$

maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud rahuldavad tingimust $r = r' = 3$, siis võrrand (18.1) määrab koonuse, mille tipuks (keskpunktiks) on süsteemi (18.10) lahend.

<u>18.1</u>. Millise kuju omandab pinna võrrand $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 6yz + 10x - 5 = 0$, kui reeperi alguspunkt kanda punkti $O'(-1,1,2)$?

<u>18.2</u>. Milliseks teiseneb pinna võrrand $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz - 2x - 10y + 4z = 0$, kui reeperi alguspunkt kanda punkti $O'(3,0,1)$?

<u>18.3</u>. Leida pinna $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$ keskpunkt. Milliseks teiseneb pinna võrrand, kui reeperi alguspunkt kanda pinna keskpunkti?

<u>18.4</u>. Milliseks teiseneb pinna võrrand $x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy + 6xz - 24yz + 2x + 20y + 8z - 9 = 0$, kui reeperi alguspunkt kanda pinna keskpunkti?

18.5. Kasutades reeperi alguspunkti nihet, lihtsustada järgmiste tsentraalsete teist järku pindade võrrandeid:

1) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0$,

2) $y^2 + 3xy + xz + 2yz + 3x + 2y = 0$,

3) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$.

18.6. Leida antud pinna keskpunkt ja määrata keskpunktide arvu järgi pinna tüüp:

1) $4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 12xz + 8yz + 14x - 10y + 7=0$,

2) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6yz + 12x - 36z = 0$,

3) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 4y - 4z + 4 = 0$,

4) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xz + 6yz - 8x + 10y = 0$,

5) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz + 8x - 4y + 12z - 5=0$,

6) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$,

7) $3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$,

8) $x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy + 6xz - 30yz - 2x - 2y = 0$.

18.7. Veenduda, et võrrand $2x^2 + 4y^2 - z^2 - 8xy + 8x - 8y + 4 = 0$ määrab reaalse koonuse ja leida tema keskpunkt.

18.8. Milliseks teiseneb pinna võrrand $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$, kui reeperi alguspunkt kanda pinna keskpunkti. Kas antud pinnal eksisteerib üheselt määratud keskpunkt?

18.9. Sfäärid raadiusega R lõikavad ellipsoidi $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ mööda ringjooni. Koostada nende sfääride keskpunktide hulga võrrand.

18.10. Leida teist järku pinna üldvõrrand, kui pinna keskpunktiks on punkt $C(x_o, y_o, z_o)$.

18.11. Leida paraboloidi $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z)^2 + (A_2x + B_2y + C_2z)^2 = A_3x + B_3y + C_3z + D_3$ tipp, kui funktsioonid $f_1 = A_1x + B_1y + C_1z$, $f_2 = A_2x + B_2y + C_2z$ ja $f_3 = A_3x + B_3y + C_3z$ on lineaarselt sõltumatud.

## 2. Teist järku pinna tüübi ja asendi määramine invariantide abil

1. Pinna tüüp. Teist järku pinna ortogonaalseks invariandiks[1] nimetatakse avaldist pinna üldvõrrandi kordajatest, mis ei muutu üleminekul ühelt ristreeperilt teisele. Avaldisi võrrandi kordajatest, mis jäävad invariantseks ainult ristreeperi pöörde korral, nimetatakse ortogonaalseteks poolinvariantideks (ehk semiinvariantideks).

Teist järku pinna, mis on määratud mingi ristreeperi suhtes võrrandiga (18.1), ortogonaalseteks invariantideks on

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Teist järku pinna karakteristlikuks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$|B - \lambda E| = 0 \qquad (18.11)$$

ehk üksikasjalikult

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (18.11')$$

mis on $\lambda$ suhtes kuupvõrrand:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - \delta = 0. \qquad (18.12)$$

Kuna karakteristliku võrrandi kordajateks on ortogonaalsed invariandid, siis on karakteristlik võrrand, aga järelikult ka võrrandi lahendid $\lambda_1$, $\lambda_2$ ja $\lambda_3$ (omaväärtused) teist järku pinna ortogonaalseteks invariantideks. Kui meid

---

[1] Kuna käesolevas peatükis vaatleme ainult ortogonaalseid invariante, siis teksti lihtsustamise huvides tarvitame termini "ortogonaalne invariant" asemel "invariant".

huvitab ainult teist järku pinna tüüp ega huvita kanoonilise võrrand, siis ei ole meil vajadust karakteristliku võrrandi lahendamiseks. Piisab täielikult, kui määrame võrrandi (18.12) lahendite arvu ja märgid (vt. tabelid 1-7). Kui teist järku pind on tsentraalne, siis maatriksi A astak on 3 ning karakteristlikul võrrandil on kolm nullist erinevat lahendit, muudel juhtudel aga vähem. Positiivsete ja negatiivsete lahendite arvu saame määrata võrrandi (18.12) vasaku poole kuju järgi, kasutades Descartes'i märgireeglit[1].

Teist järku pinna ortogonaalseteks poolinvariantideks on

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Kui $\Delta = 0$ ja $\delta = 0$, siis on $K_3$ ortogonaalne invariant, kui $\Delta = \delta = I_2 = K_3 = 0$, siis ka $K_2$ on reeperinihke suhtes ortogonaalne invariant. Kasutades ortogonaalseid invariante, on lihtne määrata üldvõrrandiga (18.1) antud teist järku pinna tüüpi. Ortogonaalsete invariantide $\Delta$ ja $\delta$ järgi jagatakse teist järku pinnad kõigepealt nelja põhiklassi (tabel 1). Tabelid 2-7 annavad teist järku pindade põhiklasside detailsema jaotuse. Seejuures tabelites märk "+" või "-" tähistab vaadeldava suuruse märki.

---

[1]Descartes'i märgireegel. Reaalsete kordajatega polünoomi $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_n \neq 0$ positiivsete lahendite arv, loetud vastavalt iga lahendi kordsusele, võrdub märgimuutude arvuga selle võrrandi kordajate jadas $a_0, a_1, \dots, a_n$ või on sellest paarisarvu võrra väiksem. Negatiivsete lahendite arvu leidmiseks tuleb Descartes'i märgireeglit rakendada polünoomile $f(-x)$ (vt. [1], lk. 325).

Tabel 1. Teist järku pindade põhiklassid

| Nimetus | | Kidumata teist järku pinnad | Kidunud teist järku pinnad |
|---|---|---|---|
| | | $\Delta \neq 0$ | $\Delta = 0$ |
| Tsentraalsed teist järku pinnad | $\delta \neq 0$ | Ellipsoidid, hüperboloidid | Koonused |
| Mittetsentraalsed teist järku pinnad | $\delta = 0$ | Paraboloidid | Silindrid, tasandite paarid |

Tabel 2. Ellipsoidid ja hüperboloidid ($\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$)

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\frac{\Delta}{\delta}$ | Nimetus |
|---|---|---|---|---|
| $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | $\mp$ | Reaalne ellipsoid |
| $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | Imaginaarne ellipsoid |
| $\pm$ | $\pm$ | $\mp$ | $\mp$ | Ühekattene hüperboloid |
| $\pm$ | $\pm$ | $\mp$ | $\pm$ | Kahekattene hüperboloid |

Tabel 3. Paraboloidid ($\Delta \neq 0$, $\delta = 0$, $\lambda_3 = 0$)

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | Nimetus |
|---|---|---|
| $\pm$ | $\pm$ | Elliptiline paraboloid |
| $\pm$ | $\mp$ | Hüperboolne paraboloid |

Tabel 4. Koonused ($\Delta = 0$, $\delta \neq 0$)

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | Nimetus |
|---|---|---|---|
| $\pm$ | $\pm$ | $\mp$ | Koonus |
| $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | Imaginaarne koonus |

Tabel 5. Silindrid ja tasandite paarid ($\Delta = 0$, $\delta = 0$)

| | $I_2 \neq 0$ | $I_2 = 0$ | |
|---|---|---|---|
| $K_3 \neq 0$ | Elliptiline või hüperboolne silinder | Paraboolne silinder | |
| $K_3 = 0$ | Lõikuvate tasandite paarid | $K_2 \neq 0$ | $K_2 = 0$ |
| | | Paralleelsete tasandite paarid | Ühtivate tasandite paarid |

Tabel 6. Elliptilised ja hüperboolsed silindrid
($\Delta = \delta = 0$, $I_2 \neq 0$, $K_3 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$)

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\frac{K_3}{I_2}$ | Nimetus |
|---|---|---|---|
| $\pm$ | $\pm$ | $\mp$ | Elliptiline silinder |
| $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | Imaginaarne elliptiline silinder |
| $+$ | $-$ | $\neq 0$ | Hüperboolne silinder |

Tabel 7. Lõikuvate tasandite paarid
($\Delta = \delta = K_3 = 0$, $I_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$)

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | Nimetus |
|---|---|---|
| $\pm$ | $\mp$ | Lõikuvate tasandite paar |
| $\pm$ | $\pm$ | Imaginaarsete lõikuvate tasandite paar |

Tabel 8. Teist järku pindade kanoonilised ja peaaegu kanoonilised vôrrandid ortogonaalsete invariantide kaudu

| Nr. | | Nimetus | Kanooniline vorrand | Peaaegu kanooline vorrand |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Tsentraalsed pinnad | Ellipsoid | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ | $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ |
| 2. | | Imaginaarne ellipsoid | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$ | |
| 3. | | Ühekattene hüperboloid | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ | |
| 4. | | Kahekattene hüperboloid | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$ | |
| 5. | | Koonus | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$ | |
| 6. | | Imaginaarne koonus | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$ | |
| 7. | Paraboloidid | Elliptiline paraboloid | $\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z$ | $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{I_2}}\, Z = 0$ |
| 8. | | Hüperboolne paraboloid | $\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z$ | |
| 9. | Elliptilised, hüperboolsed silindrid, loikuvate tasandite paarid | Elliptiline silinder | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ | $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$ |
| 10. | | Imaginaarne elliptiline silinder | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ | |
| 11. | | Hüperboolne silinder | $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ | |
| 12. | | Lôikuvate tasandite paar | $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ | |
| 13. | | Imaginaarsete lôikuvate sirgete paar | $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ | |
| 14. | | Paraboolne silinder | $X^2 = 2pY$ | |

| Nr. | | Nimetus | Kanooniline võrrand | Peaaegu kanooline võrrand |
|---|---|---|---|---|
| 15. | Paralleelsete tasandite paarid | Paralleelsete tasandite paar | $X^2 - a^2 = 0$ | $I_1^2X^2 + K_2=0$ |
| 16. | | Imaginaarsete paralleelsete tasandite paar | $X^2 + a^2 = 0$ | |
| 17. | | Ühtivate tasandite paar | $X^2 = 0$ | |

Reeperit, milles teist järku pinna võrrandil on kanooniline kuju, nimetatakse antud pinna kanooniliseks reeperiks. Viimasest tabelist näeme, et kõigi tsentraalsete teist järku pindade võrrandid (tabelis klassid 1-6) saab kanoonilise reeperi korral esitada samaaegselt ühise võrrandiga

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + a'_{14} = 0$$

ehk invariantide kaudu

$$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \lambda_3Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \qquad (18.13)$$

millest on kerge saada juba kanoonilist võrrandit. Analoogiliselt saab paraboloidid (klassid 7 - 8) määrata võrrandiga

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + 2a'_{34}Z = 0$$

või

$$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I_2}}\ Z = 0; \qquad (18.14)$$

elliptilised ja hüperboolsed silindrid ning lõikuvate tasandite paarid (klassid 9 - 13) võrrandiga

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{44} = 0$$

ehk

$$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0; \qquad (18.15)$$

paraboolse silindri (klass 14) võrrandiga

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{24}Y = 0$$

ehk

$$X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}\ Y = 0; \qquad (18.16)$$

paralleelsete tasandite paarid (klassid 15 - 16) võrrandiga

$$a'_{11}X^2 + a'_{44} = 0$$

ehk

$$I_1^2X^2 + K_2 = 0 \tag{18.17}$$

ja ühtivate tasandite paari (klass 17) võrrandiga

$$X^2 = 0 \tag{18.18}$$

Nimetame teist järku pindade võrrandeid (18.13-18) teist järku pindade peaaegu kanoonilisteks võrranditeks.

2. Teist järku pinna asend. Selleks et määrata pinna asendit antud ristreeperi suhtes, milles on antud pinna võrrand, on vaja leida pinna kanoonilise reeperi alguspunkt O' ja reeperitelgede sihivektorid, milledeks on pinna peasihilised vektorid. Pinna peasihilisteks vektoriteks on ruutliikmete maatriksi B omaväärtustele (pinna omaväärtustele) vastavad omavektorid (vt. ruutvormid [1], lk. 446). Pinna omaväärtused leitakse pinna karakteristlikust võrrandist (18.11') või 18.12). Pinna omaväärtusele $\lambda$ vastava omavektori $\bar{s} = (l,m,n)$ koordinaadid leitakse võrrandisüsteemist ([1], lk. 370):

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n = 0, \\ a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0, \\ a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - \lambda)n = 0. \end{cases} \tag{18.19}$$

Süsteemi homogeensuse tõttu on pinna omavektorid määratud nullist erineva kordaja täpsusega. Seega saab alati vajaduse korral valida sellised kordajad, et saadavad omavektorid oleksid ühikvektorid. Pinna erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed (kui sümmeetrilise teisenduse erinevate omaväärtuste vastavad omavektorid (vt. [1], lk. 434)). Pöördpinna korral on kaks omaväärtust võrdsed ja pöördetelje sihivektoriks on erinevale omaväärtusele vastav omavektor.

Kui pinnal eksisteerib keskpunkt (keskpunkt ei pea olema üheselt määratud), siis kanoonilise reeperi alguspunktiks O' võetakse pinna mistahes keskpunkt. Pinna keskpunkti koordinaadid leitakse süsteemist (18.4). Kui pinnal eksisteerib keskpunktidest koosnev sirge, siis see sirge osutub pinna teljeks.

Teist järku pinna (18.1) korral sihi $\bar{s} = (l,m,n)$ kaasdiameetertasandi võrrand on

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0. \qquad (18.20)$$

Pinna peasihtide kaasdiameetertasanditeks on pinna sümmeetriatasandid.

Selgitame pinna asendi ja kanoonilise reeperi määramist lähemalt pinna tüüpide kaupa.

<u>Tsentraalsete pindade</u> korral (tabel 8, klassid 1 - 6) on kanoonilise reeperi alguspunktiks pinna keskpunkt ja reeperitelgedeks pinna teljed.

Paraboloidide (elliptilise paraboloidi või hüperboolse paraboloidi, tabel 8, klassid 7 - 8) peaaegu kanooniline võrrand omab kuju (18.14), kus $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ on karakteristliku võrrandi nullist erinevad lahendid. Paraboloidi telje sihivektoriks suunaga pinna nõgususe poole on vektor

$$\bar{p} = I_1(A_1, A_2, A_3),$$

kus $A_1$, $A_2$, $A_3$ on järgemööda determinandi $\Delta$ elementide $a_{14}$, $a_{24}$, $a_{34}$ algebralised täiendid:

$$A_1 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Paraboloidi tipp määratakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{A_1} = \dfrac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{A_2} = \\ \qquad = \dfrac{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}}{A_3}, \qquad (18.21) \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{cases}$$

Kanoonilise reeperi saamiseks tuleb reeperi alguspunktiks võtta pinna tipp, reeperivektoriteks $\bar{I}'$ ja $\bar{J}'$ nullist erinevatele omaväärtustele $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ vastavad normeeritud omavektorid ja vektoriks $\bar{K}'$ pinna nõgususe poole suunatud telje sihivektor

$$\bar{K}' = \frac{1}{|\bar{p}|}\,\bar{p}.$$

<u>Elliptilise</u> ja <u>hüperboolse silindri</u> ning <u>lõikuvate tasandite paari</u> kanoonilise reeperi saamiseks viiakse reeperi alguspunkt keskpunktide sirge (pinna telje) mistahes punkti, z-teljeks valitakse pinna telg, x- ja y-telgede sihiühikvektoriteks $\bar{I}'$ ja $\bar{J}'$ on nullist erinevatele omaväärtustele $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ vastavad normeeritud omavektorid.

Selleks et määrata paraboolse silindri asendit (tabel 8, klass 15), on piisav, kui teada

1) silindri moodustajaga paralleelset <u>sümmeetriatasandit</u>;

2) silindri puutujatasandit, mis on risti selle sümmeetriatasandiga;

3) vektorit, mis on risti vaadeldud puutujatasandiga ja suunatud silindri nõgususe poole.

Kui paraboolne silinder on määratud üldvõrrandiga (18.22), siis tema võrrandi võib ümber kirjutada kujul

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (18.23)$$

ehk

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z - m)^2 - [2(m\alpha - a_{14})x + 2(m\beta - a_{24})y + \\ + 2(m\gamma + a_{24})z + m^2 - a_{44}] = 0.$$

Paraboolse silindri moodustajaga paralleelse sümmeetriatasandi võrrand on

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + m = 0, \qquad (18.24)$$

kus

$$m = \frac{a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Tasand

$$2(m\alpha - a_{14})x + 2(m\beta - a_{24})y + 2(m\gamma - a_{34})z + m^2 - \\ - a_{44} = 0 \qquad (18.25)$$

on paraboolse silindri puutujatasand, mis on risti leitud sümmeetriatasandiga; vektor

$$\bar{n} = (\alpha m - a_{14}, \beta m - a_{24}, \gamma m - a_{34}) \qquad (18.26)$$

on risti leitud puutujatasandiga ja suunatud pinna nõgususe poole.

Kui teist järku pinna üldvõrrand (18.1) määrab <u>tasandite paari</u>, siis tasandite asendi määramiseks on vaja teada tasandite võrrandeid eraldi. Need võrrandid me saame, kui jagame võrrandi (18.1) vasaku poole mingil viisil lineaartegurite korrutiseks. Selleks et teist järku pinna üldvõrrand (18.1) määraks tasandite paari, on tarvilik ja piisav, et maatriksi

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

astak oleks 2 või 1.

Võrrandi vasaku poole esitamiseks korrutisena kasutatakse Lagrange'i meetodit (vt. [1], lk. 118).

3. <u>Reeperi teisendusvalemid</u>. Olgu kolmemõõtmelises ruumis antud kaks reeperit $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, mida nimetame vanaks reeperiks, ja $R' = \{O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$, mida nimetame uueks reeperiks, kusjuures uue reeperi alguspunkt ja baasivektorid avalduvad vana reeperi kaudu järgmiselt:

$$O'(a', b', c'), \qquad \begin{aligned} \bar{e}'_1 &= (l_1, m_1, n_1), \\ \bar{e}'_2 &= (l_2, m_2, n_2), \\ \bar{e}'_3 &= (l_3, m_3, n_3). \end{aligned} \qquad (18.27)$$

Olgu ruumi suvalise punkti X koordinaadid vana reeperi suhtes (x,y,z) ja uue reeperi suhtes (x',y',z'), siis punkti X uued ja vanad koordinaadid on seotud valemitega[1]

[1] Kasutades maatrikssümboolikat, saab baasvektorite ja muutujate teisendusvalemid anda lihtsalt ja meeldejääval kujul. Tähistame

$$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + a', \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + b', \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + c', \end{cases} \tag{18.28}$$

---

$$E = \begin{Vmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{Vmatrix}, \quad E' = \begin{Vmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \quad X' = \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix},$$

siis <u>uued</u> baasvektorid <u>vanade</u> baasvektorite kaudu avalduvad

$$E' = C^T E \tag{18.27'}$$

ja punkti <u>vanad</u> koordinaadid <u>uute</u> koordinaatide kaudu

$$X = CX', \tag{18.28'}$$

kus $C^T$ on maatriksi C transponeeritud maatriks (vt. [1], lk. 348). Kasutades indekstähistust ja Einsteini summeerimiskokkulepet, saame valemid (18.27' - 28') kirjutada ümber järgnevalt:

$$\bar{e}'_i = c_i^j\, \bar{e}_j, \qquad i,j = 1,2,3 \tag{18.27"}$$

ehk üksikasjalikult

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = c_1^1\bar{e}_1 + c_1^2\bar{e}_2 + c_1^3\bar{e}_3, \\ \bar{e}'_2 = c_2^1\bar{e}_1 + c_2^2\bar{e}_2 + c_2^3\bar{e}_3, \\ \bar{e}'_3 = c_3^1\bar{e}_1 + c_3^2\bar{e}_2 + c_3^3\bar{e}_3; \end{cases} \tag{18.27"'}$$

$$x^i = c_j^i x^{j'} + a'^i \tag{18.28"}$$

ehk üksikasjalikult

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1x'^1 + c_2^1x'^2 + c_3^1x'^3 + a^1, \\ x^2 = c_1^2x'^1 + c_2^2x'^2 + c_3^2x'^3 + a^2, \\ x^3 = c_1^3x'^1 + c_2^3x'^2 + c_3^3x'^3 + a^3, \end{cases} \tag{18.28"'}$$

kus punkti X koordinaadid vana reeperi suhtes on $(x^1,x^2,x^3)$, uue reeperi suhtes $(x'^1,x'^2,x'^3)$ ja uue reeperi alguspunkti vanad koordinaadid on $(a^1,a^2,a^3)$.

Maatriks

$$C = \begin{Vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_2^2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{Vmatrix}$$

on koordinaatide teisendusmaatriks.

kus maatriksit

$$C = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix},$$

mille veergude elementideks on uute baasivektorite koordinaadid vanal baasil, nimetatakse <u>koordinaatide teisendusmaatriksiks</u>. Koordinaatide teisendusmaatriks on regulaarmaatriks, s. t.

$$\det \| C \| \neq 0.$$

Kui reeper $\{\bar{O}', \bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$ on pinna (18.1) kanooniline reeper, siis võrrandid (18.28) on pinna punkti koordinaatide teisendusvalemid üleminekul üldvõrrandilt kanoonilisele võrrandile. Asendades x,y,z valemitest (18.28) pinna üldvõrrandisse (18.1), saame pinna kanoonilise võrrandi. Kanoonilise võrrandi leidmist kahel teel (ortogonaalsete invariantide abil ja reeperiteisenduste teel) võib kasutada arvutuste õigsuse kontrollimiseks.

<u>Näide 1</u>. Määrata pinna tüüp ja asend, kui pind on teatud ristreeperi suhtes määratud võrrandiga

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Leida pinna kanooniline reeper.

Lahendus. Leiame

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Pind on kidumata tsentraalne pind, seega kas ellipsoid või hüperboloid (vt. tabel 1). Seetõttu on meil ette teada, et tema karakteristlikul võrrandil on kolm lahendit.

Kuna

$$I_1 = 1 + 5 + 1 = 7,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

siis karakteristlik võrrand on praegu kujuga

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Kasutades Descartes'i märgireeglit, leiame, et pinnal on kaks positiivset ja üks negatiivne lahend. Kuna $\frac{\Delta}{\delta} < 0$, siis pind on <u>ühekattene hüperboloid</u>. Karakteristliku võrrandi lahendite $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ ja $\lambda_3 = -2$ abil saame ühekattese hüperboloidi peaaegu kanoonilise võrrandi (vt. 18.13)

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

ehk antud juhul

$$3X^2 + 6Y^2 - 2Z^2 - 1 = 0.$$

Järelikult, pinna kanooniline võrrand on

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

seejuures

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pinna asendi määramiseks leiame süsteemist (18.4)

$$\begin{cases} x + y + 3z - 1 = 0, \\ x + 5y + z + 3 = 0, \\ 3x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

pinna keskpunkti, milleks on $C(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Süsteemist (18.19)

$$\begin{cases} (1 - 3)l_1 + m_1 + 3n_1 = 0, \\ l_1 + (5 - 3)m_1 + n_1 = 0, \\ 3l_1 + m_1 + (1 - 3)n_1 = 0 \end{cases}$$

määrame X-telje sihivektori $\bar{e}_1' = (l_1, m_1, n_1)$. Saame $\bar{e}_1' = (1,-1,1)$. Siin $\bar{e}_1'$ on omaväärtustele $\lambda_1 = 3$ vastav omavektor. Analoogiliselt leiame $\bar{e}_2' = (1,2,1)$ ja $\bar{e}_3' = (1,0,-1)$, mis on vastavalt Y-telje ja Z-telje sihivektorid. Kuna omavektorid on määratud kordaja täpsusega, siis peale normeerimist saame pinna kanoonilise reeperi sihivektorid

$$\bar{I}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \quad \bar{J}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \quad \bar{K}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1).$$

Kerge on kontrollida, et saadud vektorid on tõepoolest risti, nagu õige lahenduse korral peabki olema.

Pinna kanooniliseks reeperiks on $\{O', \bar{I}', \bar{J}', \bar{K}'\}$, kus $O' = C$ ning $\bar{I}' = \frac{1}{|\bar{e}_1'|}\bar{e}_1'$, $\bar{J}' = \frac{1}{|\bar{e}_2'|}\bar{e}_2'$.

__Näide 2.__ **Määrata antud pinna**

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$$

**tüüp ja asend.**

__Lahendus.__ **Antud pinna korral**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -125, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Seega, pind on paraboloid (vt. tabel 1). Invariantide**

$$I_1 = 2 + 2 + 3 = 7,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

**abil saame karakteristliku võrrandi**

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0,$$

**mille lahendid on**

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 0.$$

**Seega, antud pind on __elliptiline paraboloid__ (vt. tabel 3). Kasutades võrrandit (18.14), saame elliptilise paraboloidi võrrandiks**

$$2X^2 + 5Y^2 - 2\sqrt{-\frac{-125}{10}}\, Z = 0.$$

**Järelikult, antud elliptilise paraboloidi kanooniline võrrand on** $\dfrac{X^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \dfrac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2Z$, **seejuures** $p = \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$, $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**Paraboloidi telje sihivektoriks suunaga nõgususe poole on vektor $\bar{p}$ (vt. seosed (18.20-21)).**

$$\bar{p} = 7\left(-\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 7(25,-25,0) \uparrow\uparrow (1,-1,0).$$

**X-telje sihivektori $\bar{e}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ leiame süsteemist**

$$\begin{cases} (2 - 2)l_1 + 2m_1 + n_1 = 0, \\ 2l_1 + (2 - 2)m_1 + n_1 = 0, \\ l_1 + m_1 + (3 - 2)n_1 = 0, \end{cases}$$

kust $l_1 = 1$, $m_1 = 1$, $n_1 = -2$ ja järelikult, X-telje sihivektoriks on $\bar{e}_1 = (1,1,-2)$. Analoogiliselt leiame süsteemist

$$\begin{cases} (2-5)l_2 + 2m_2 + n_2 = 0, \\ 2l_2 + 2m_2 + n_2 = 0, \\ l_2 + m_2 + (3-5)n_2 = 0 \end{cases}$$

Y-telje sihivektori $\bar{e}_2 = (1,1,1)$. Tipu koordinaadid määrame võrrandisüsteemist (18.22), mis antud juhul omab kuju

$$\begin{cases} \dfrac{2x+2y+z-2}{25} = \dfrac{2x+2y+z+3}{-25} = \dfrac{x+y+3z-1}{0}, \\ 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 2 = -(2x + 2y + z + 3), \\ x + y + 3z - 1 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0, \end{cases}$$

kust leiame tipu $O'(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2})$. Pinna kanooniliseks reeperiks on $\{O', \bar{I}', \bar{J}', \bar{K}'\}$, kus $O'$ on pinna tipp ning $\bar{I}' = \frac{1}{|\bar{e}_1|}\bar{e}'$, $\bar{J}' = \frac{1}{|\bar{e}'_2|}\bar{e}'_2$, $\bar{K}' = \frac{1}{|\bar{e}'_3|}\bar{e}'_3$.

<u>Näide 3</u>. **Määrata antud pinna**

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 4 = 0$$

**tüüp ja asend.**

<u>Lahendus</u>. **Antud pinna korral**
$\Delta = \delta = 0$. **Järelikult, vaadeldud pind on kas <u>silinder</u> või <u>tasandite paar</u> (vt. tabel 1). Pinna tüübi täpsemaks määramiseks kasutame tabeleid 5 ja 6 ning arvutame selleks** $I_2 = 36$, $I_1 = 12$ ja $K_3 = -36$.

Kuna $I_2 \neq 0$ ja $K_3 \neq 0$, siis on pind kas elliptiline või hüperboolne silinder (vt. tabel 5). Karakteristliku võrrandi $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$ lahenditeks on $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ ja $\lambda_3 = 0$. Kuna $\frac{K_3}{I_2} < 0$, siis pind on elliptiline silinder (vt. tabel 6). Et $\lambda_1 = \lambda_2$, siis antud pind on <u>pöördsilinder</u>, mille peaaegu kanooniline võrrand on (vt. valem (18.15)) $6x^2 + 6y - 1 = 0$.

Viimasest saame silindri kanoonilise võrrandi $x^2 + y^2 = \frac{1}{6}$. Põördsilindri raadius on $\frac{1}{6}$. Silindri telg, mis on keskpunktidest koosnev sirge, määratakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 5x - 2y - z + 5 = 0, \\ -2x + 2y - 2z - 2 = 0, \\ -x - 2y + 5z + 1 = 0, \end{cases}$$

mis sisaldab kaks sõltumatut võrrandit.

Näide 4. Määrata antud pinna

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

tüüp ja asend.

Lahendus. $\Delta = \delta = 0$. Järelikult, pind on kidunud mittetsentraalne pind, s.t. kas silinder või tasandite paar (vt. tabel 1). Invariantide $I_2 = 0$, $I_1 = 6$ ja

$$K_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

abil saame, et võrrand määrab paraboolse silindri (vt. tabel 5). Otsime paraboolse silindri võrrandit kujul $X^2 = 2pY$ ehk peaaegu kanoonilisel kujul $a'_{11}X^2 - 2a'_{24}Y = 0$. Lähtudes viimasest võrrandist, kirjutame uuesti välja invariandid $I_1 = a'_{11}$,

$$K_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{24} \\ 0 & a'_{24} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ a'_{24} & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

saame võrrandi kordajate $a'_{11}$ ja $a'_{24}$ suhtes

$$\begin{cases} a'_{11} = I_1, \\ a'^2_{24} = -\dfrac{K_3}{I_1}, \end{cases}$$

seega, $a'_{11} = 6$, $a'_{24} = \sqrt{3}$.

Asendades $a'_{11}$ ja $a'_{24}$ peaaegu kanoonilisse võrrandisse, saame $6X^2 - 2\sqrt{3}\ Y = 0$. Seega, otsitava paraboolse silindri kanooniline võrrand on $X^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y$.

Märkus. Kanoonilise võrrandi oleksime saanud ka vahetult valemist (18.16). Me aga näitasime ka teise vahetu lahendamise võimaluse. Pinna asendi määramiseks kasutame valemeid (18.22-26). Pinna võrrandi kujust (vt. 18.22)

$$(x + y + 2z)^2 - 6z + 1 = 0$$

saame $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$, $m = -1$.

Paraboolse silindri moodustajaga paralleelse sümmeetria-tasandi võrrand on $x + y + 2z - 1 = 0$ ning temaga ristuva puutujatasandi võrrand on $x + y - z = 0$. Leitud puutujatasandiga ristuvaks ja pinna nõgususe poole suunatud vektoriks on $\bar{n} = (-1,-1,2)$.

<u>Näide 5</u>. Määrata antud pinna

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$$

tüüp ja asend.

<u>Lahendus</u>. Kuna

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

siis pind on kidunud mittetsentraalne pind, seega kas silinder või tasandite paar (vt. tabel 1). Leides invariandid

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

saame teada, et tegemist on <u>lõikuvate tasandite</u> paariga (vt. tabel 5). Edasi tuleb veel selgitada, kas meil on tegemist reaalsete lõikuvate tasandite paariga või imaginaarsete lõikuvate tasandite paariga. Pinna karakteristlik võrrand on $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$, sest $I_1 = 1$, siit $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ ja $\lambda_3 = 0$. Seega, pind on <u>reaalsete lõikuvate tasandite paar</u>. Selleks et leida nende tasandite võrrandeid, jagame võrrandi vasaku poole lineaartegurite korrutiseks (Lagrange'i meetodil). Kui rühmitamine ei ole lihtne, leiame tasandite lõikesirge kui keskpunktidest koosneva sirge süsteemist

$$\begin{cases} y + 2z - 2 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Kuna süsteemi astak on 2, siis valime süsteemist kaks lineaarselt sõltumatut võrrandit. Võtame esimese ja kolmanda võrrandi kui suhteliselt lihtsamad:

$$\begin{cases} y + 2z - 2 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0 \cdot \end{cases}$$

Leiame süsteemi kuuluvate tasandite normaalvektorite

$$\bar{n}_1 = (0,1,2),$$
$$\bar{n}_2 = (2,1,1)$$

abil lõikesirge sihivektori $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (-2,4,-2) \parallel (1,-2,1)$. Lõikesirge üheks punktiks on $C(0,0,1)$. Tasandite lõikesirge võrrand on

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Tasandite lõplikuks määramiseks on piisav, kui leida kummalgi tasandil punkt, mis ei asu lõikesirgel. Näiteks punkt $A(0,2,0)$ rahuldab pinna võrrandit ega asu lõikesirgel. Määrame tasandi $\alpha$ vektoritega $\overline{CA} = (0,2,-1)$ ja $\bar{s} = (1,-2,1)$ ning punktiga $C$. Seega normaalvektoriks on $\bar{s} \times \overline{CA} = (0,1,2)$ ja tasandi $\alpha$ võrrandiks $y + 2z - z = 0$. $B(1,-2,0)$ on pinna punkt, mis ei kuulu tasandile $\alpha$. Analoogiliselt tasandi $\alpha$ juhuga saame tasandi $\beta$ võrrandiks $2x + y = 0$. Tasandite $\alpha$ ja $\beta$ võrrandid võime kätte saada kimbust $\mu(y + 2z - 2) + \nu(2x + y - 1) = 0$, mille teljeks on tasandite lõikesirge, määrates parameetrid $\mu$ ja $\nu$ nii, et antud pinna võrrand oleks rahuldatud.

Vastus. Antud võrrand määrab reaalsete lõikuvate tasandite paari, mille võrrandid on $y + 2z - 2 = 0$ ja $2x + y = 0$.

## 1. Pinna tüüp

18.12. Kasutades invariante, määrata antud pinna tüüp:

$$x^2 - 2y^2 - 4xy - 8xz + 6y - 5 = 0.$$

18.13. Määrata järgmiste pindade tüübid:

1) $3x^2 + y^2 - z^2 + 6xz - 4y = 0$,
2) $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yz + 2x - 6z + 1 = 0$,
3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 8 = 0$,
4) $4x^2 - 9z^2 + 2xz - 8x - 4y + 36z - 32 = 0$,
5) $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz - 2y + 2z - 4 = 0$.

18.14. Millise $\lambda$ väärtuse korral võrrand $x^2 + 3y^2 + 2xz + 2\lambda yz - 2x - 8y - 2z - 3 = 0$ määrab koonuse?

18.15. Määrata $\lambda$ ja $\mu$ nii, et võrrand $x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 - 1 = 0$ määraks pöördsilindri.

18.16. Leida tingimus, mille korral võrrand $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2xz) + c(z^2 + 2xy) = 1$ määrab pöördpinna.

18.17. Tõestada, et võrrand $y^2 + (z^2 - 2z)(1 - \lambda^2) + 2\lambda xz - 2x = 0$ määrab pöördpinna. Koostada pöördetelje võrrand.

18.18. Määrata kordaja k nii, et koonus $x^2 - 2xy + kz^2 = 0$ oleks pöördkoonus. Leida pöördetelg.

18.19. Uurida pinna $x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2xy - 2xz - 2yz - 2m^2 + 3m - 1 = 0$ muutumist sõltuvalt parameetri m muutumisest $-\infty < m < +\infty$.

18.20. Teisendada antud paraboloidi võrrand $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$ lihtsamale kujule. Leida pinna peasihid.

18.21. Lihtsustada antud pinna võrrand $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

18.22. Selgitada, millised järgmistest võrranditest määravad koonuse, silindri või tasandite paari:

1) $9x^2 - 4y^2 - 91z^2 + 18xz - 40yz - 36 = 0$,
2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6z + 3 = 0$,
3) $2x^2 - 3z^2 + 4xy - 5xz + 2yz - 8x - 12y + 17z + 6 = 0$,
4) $x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - 7x - 6y - 2z + 10 = 0$,
5) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 2x - 2y - 4 = 0$,
6) $x^2 + 3y^2 + 8x^2 + 2xy + 8yz - 4x + 8z + 6 = 0$.

18.23. Määrata teist järku pinna tüüp:

1) $6x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 4xz = 0$,
2) $4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 4xy + 12yz = 0$,
3) $x^2 - 3y^2 + 4xz - 2yz = 0$,
4) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz = 0$,
5) $4x^2 + 2y^2 + 10z^2 - 4xy + 12xz - 8yz = 0$.

18.24. Lihtsustada järgmiste pindade võrrandid. Määrata pinna tüüp:

1) $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$,
2) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$,
3) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$,
4) $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$,
5) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

## 2. Lagrange'i meetod

18.25. Kasutades Lagrange'i täisruutudeks teisendamise meetodit, määrata iga järgmise võrrandiga määratud pinna tüüp:

1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$,
2) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$,
3) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$,
4) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$,
5) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$,
6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$,
7) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0$,
8) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$,
9) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$,
10) $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$,
11) $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$.

18.26. Kasutades Lagrange'i meetodit, põhjendada, et järgmised võrrandid määravad tasandite paarid. Leida tasandite võrrandid ja määrata tasandite vastastikune asend igal toodud juhul:

1) $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$,
2) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - x + 2y - 3z - 6 = 0$,
3) $3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 10xz - 4yz + 6x - 20y - 14z - 24 = 0$,
4) $5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 9xy + 8xz + 7yz + 7x + 6y + 5z + 2 = 0$,
5) $4x^2 + 49y^2 + z^2 - 28xy + 4xz - 14yz + 8x - 28y + 4z + 3 = 0$,
6) $16x^2 + 9y^2 + 100z^2 + 24xy + 80xz + 60yz + 56x + 42y +$
$+ 140z + 49 = 0$.

## 3. Pinna tüüp ja asend

18.27. Leida pinna kanooniline võrrand ja määrata asend:

1) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0,$
2) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0,$
3) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0,$
4) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0,$
5) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0,$
6) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0,$
7) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0,$
8) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0,$
9) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0,$
10) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0,$
11) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 4 = 0,$
12) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0,$
13) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0,$
14) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0.$

18.28. Leida antud pinna $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$ kanooniline võrrand. Leida koordinaatide teisendusvalemid.

18.29. Määrata pinna tüüp ja asend, kasutades reeperiteisendust või liikmete rühmitamist Lagrange'i meetodil:

1) $z = 2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 1,$
2) $z = x^2 + 3y^2 - 6y + 1,$
3) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0,$
4) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0,$
5) $z^2 = 3x + 4y + 5,$
6) $z = x^2 + 2xy + y^2 + 1,$
7) $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1,$
8) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0,$
9) $2xy + z^2 - 2z + 1 = 0,$
10) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2z - 1 = 0,$
11) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0,$
12) $2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0,$
13) $3x^2 + 6x - 8y + 6z - 7 = 0,$
14) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0,$
15) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6z + 4y - 1 = 0,$

16) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0,$
17) $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0,$
18) $4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0.$

18.30. Teisendada antud pinna võrrand $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 27 = 0$ lihtsamale kujule. Leida koordinaatide teisendusvalemid.

## § 3. Teist järku pinna lõikumine sirgega. Asümptootilised sihid. Asümptoodid. Sirgjoonsed moodustajad. Puutujatasand

Sirge

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0 \end{cases} \qquad (18.29)$$

ja teist järku pinna (18.1) lõikepunktide leidmiseks asendatakse sirge parameetrilised võrrandid pinna võrrandisse, mille tulemusena saadakse ruutvõrrand lõikepunktide parameetrite leidmiseks[1].

$$Et^2 + 2Ft + G = 0, \qquad (18.30)$$

kus

---

[1] Kasutades indekstähistust, saame valemid (18.29-33) esitada järgnevalt:
sirge $x^i = x_0^i + ts^i$ $(i = 1,2,3)$
ja teist järku pinna

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i4}x^i + a_{44} = 0$$

lõikepunktide parameetri leidmiseks saadakse ruutvõrrand (18.30'), kus

$$\begin{aligned} E &= a_{ij}s^is^j, \\ 2F &= a_{ij}(x_0^is^j + x_0^js^i) + 2a_{i4}s^i, \\ G &= a_{ij}x_0^ix_0^j + 2a_{i4}x_0^i + a_{44} . \end{aligned} \qquad (18.31')$$

Sihti $\bar{s} = (4s^1, s^2, s^3)$ nimetatakse pinna asümptootiliseks sihiks, kui

$$a_{ij}s^is^j = 0. \qquad (18.33')$$

$$E = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn, \quad (18.31)$$

$$F = a_{11}l^2x_0 + a_{22}m^2y_0 + a_{33}n^2z_0 + a_{12}(ly_0 + mx_0) +$$
$$+ a_{13}(lz_0 + nx_0) + a_{23}(mz_0 + ny_0) + a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n,$$

$$G = a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 +$$
$$+ 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}.$$

Kui $E \neq 0$, siis sirge (18.29) lõikab pinda (18.1) kahes punktis (reaalses või imaginaarses). Tingimus $E \neq 0$ on sirge (18.29) sihivektori $\bar{s} = (l,m,n)$ koordinaatide vaheline tingimus. Sel korral ka kõik antud sirgega paralleelsed sirged lõikavad pinda kahes punktis.

Iga sihti $\bar{s} = (l,m,n)$, mis rahuldab tingimust $E \neq 0$ ehk

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}m^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn \neq 0, \quad (18.32)$$

nimetatakse teist järku pinna (18.1) <u>mitteasümptootiliseks sihiks</u>.

Sihti $\bar{s} = (l,m,n)$ nimetatakse pinna <u>asümptootiliseks sihiks</u>, kui $E = 0$, s.t.

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = 0. \quad (18.33)$$

Iga asümptootilise sihiga sirge kas

1) lõikab pinda enam kui kahes punktis (lõikepunktide leidmise võrrand on samaselt rahuldatud, s. t. $E = F = G = 0$). Selliseid sirgeid nimetatakse pinna <u>sirgjoonseteks moodustajateks</u>;

2) lõikab pinda ühes punktis ($E = 0$, $F \neq 0$);

3) ei lõiku pinnaga ($E = F = 0$, $G \neq 0$).

Selliseid pinna keskpunkti läbivaid asümptootilise sihiga sirgeid, mis ei lõika pinda, nimetatakse pinna <u>asümptootideks</u>. Pinna kõigi asümptootide hulk moodustab koonuse, mida nimetatakse antud pinna <u>asümptootiliseks koonuseks</u>. Asümptootilised koonused on olemas ühe- ja kahekattesel hüperboloidil.

Sirget, mis lõikab pinda (18.1) kahes ühtivas punktis, nimetatakse antud pinna <u>puutujaks</u> antud punktis. Pinna ja puutuja ühist punkti nimetatakse <u>puutepunktiks</u>. Pinna (18.1)

punkti $X_o(x_o,y_o,z_o)$ läbivad kõik puutujad asuvad tasandil, mida nimetatakse pinna puutujatasandiks pinna punktis $X_o$. Pinna (18.1) puutujatasandi võrrandi pinna punktis $X_o$ saame kergesti pinna võrrandist nn. poolitiasendusvõttega[1]:
$a_{11}x_ox + a_{22}y_oy + a_{33}x_oz + a_{12}(x_oy + xy_o) + a_{13}(x_oz + xz_o) + a_{23}(y_oz + yz_o) + a_{14}(x + x_o) + a_{24}(y + y_o) + a_{23}(z + z_o) + a_{33} = 0$, mille sarnaste liikmete koondamisel saame

$$F_{x_o}x + F_{y_o}y + F_{z_o}z + a_{14}x_o + a_{24}y_o + a_{34}z_o + a_{44} = 0$$

ehk üksikasjalikult:

$$(a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13}z_o + a_{14})x + (a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_{23}z_o + a_{24})y + (a_{13}x_o + a_{23}y_o + a_{33}z_o + a_{34})z + (a_{14}x_o + a_{24}y_o + a_{34}z_o + a_{44}) = 0.$$

Sirget, mis läbib pinna punkti $X_o$ ja on risti punkti $X_o$ läbiva pinna puutujatasandiga, nimetatakse pinna punkti $X_o$ läbivaks pinna normaaliks. Pinna normaali sihivektoriks on vektor

$$\bar{\nabla}F = (F_{x_o}, F_{y_o}, F_{z_o}). \qquad (18.34)$$

1. Pinna ja sirge lõikepunktid. Sirgjoonsed moodustajad

18.31. Leida pinna $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 5xz - 3yz - 10x + 12z + 4 = 0$ lõikepunktid reeperitelgedega.

18.32. Leida pinna $z^2 + xy - yz - 5x = 0$ lõikepunktid sirgega.

18.33. Leida antud pinna lõikepunktid sirgega:
1) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{1}$;
2) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy + 4xz - yz + 3x - 5z = 0$, $\frac{x+3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$.

18.34. Milliseid tingimusi peavad rahuldama teist järku pinna üldvõrrandi kordajad, et abstsisstelg

---

[1] Poolitiasendusvõte seisneb selles, et pooled tundmatud pinna võrrandis tuleb asendada puutepunkti vastavate koordinaatidega järgmiselt:

$$x^2 \longrightarrow x_ox, \quad y^2 \longrightarrow y_oy, \quad z^2 \longrightarrow z_oz$$
$$2x \longrightarrow x_o + x, \quad 2y \longrightarrow y_o + y, \quad 2z \longrightarrow z_o + z,$$
$$2xy \longrightarrow x_oy + xy_o, \quad 2xz \longrightarrow x_oz + xz_o, \quad 2yz \longrightarrow yz_o + y_o.$$

1) puutuks pinda,
2) oleks asümptootilise sihiga sirge antud pinna suhtes,
3) oleks pinna asümptoodiks,
4) oleks sirgjoonne moodustaja,
5) ei omaks pinnaga reaalseid lõikepunkte?

18.35. Millist kuju peab omama teist järku pinna võrrand, et
1) pind lõikaks kõiki kolme reeperitelge,
2) kõik kolm reeperitelge oleksid pinna asümptootideks?

18.36. Leida pinna $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$ sirgjoonsed moodustajad, mis läbivad punkti $A(-1,-1,1)$.

18.37. Leida sirged, mis läbivad reeperi alguspunkti ja asuvad täielikult pinnal $y^2 + 3xy - zx + 2yz + 3x + 2y = 0$.

18.38. Leida pinna $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 12 = 0$ sirgjoonsed moodustajad, mis on paralleelsed sirgega $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$.

18.39. Leida pinna $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6 = 0$ suvalist punkti läbivate sirgjoonsete moodustajate võrrandid.

18.40. Leida pinna $xy + xz + x + y + 1 = 0$ sirgjoonsete moodustajate võrrandid.

18.41. Leida pinna $y^2 - 2xy - 4xz + 2yz - 4x + 2y - 1 = 0$ sirgjoonsed moodustajad.

18.42. Koostada pinna võrrand, kui on teada tema kolm sirgjoonset moodustajat:

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

18.43. Leida ühekattesel hüperboloidil punktid, mida läbivad sirgjoonsed moodustajad on risti. Leida leitud punkti läbiva pinna puutujatasandiga paralleelse tasandi ja pinna lõikejoon.

18.44. Tõestada, et teist järku joonpinna suvalise moodustaja punktides võetud pinna normaalid moodustavad hüperboolse paraboloidi.

## 2. Asümptootilised sihid. Asümptoodid

18.45. Leida pinna $2xy - xz + yz - 2x + 2y - 3z - 2 = 0$ korral reeperi alguspunkti läbivate asümptootiliste sihtidega sirged.

18.46. Leida pinna $2x^2 - y^2 - 3z^2 - xy - xz + 4yz + 5x - 3y + 7 = 0$ korral reeperi alguspunkti läbivad asümptootiliste sihtidega sirged.

18.47. Leida sirged, mis läbivad reeperi alguspunkti ja lõikavad pinda $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz + 5x - z + 3 = 0$ ainult ühes punktis.

18.48. Leida pinna $2x^2 + y^2 + 2xy - 3x + z - 1 = 0$ korral punkti $A(1,-1,3)$ läbivad asümptootiliste sihtidega sirged.

18.49. Milliseid tingimusi peavad rahuldama sirge sihivektori koordinaadid, et sirge oleks pinna

1) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$,

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$,

3) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$

asümptootilise sihiga sirge?

18.50. Millised sirgetest 1) $\frac{x-4}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$, 2) $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{1}$, 3) $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-1}{-4}$, 4) $\frac{x+1}{6} = \frac{y}{-6} = \frac{z-4}{5}$, 5) $\frac{x-0.5}{14} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{42}$ on asümptootilise sihiga pinna $x^2 - 4xy + 6yz + 2z - 5 = 0$ korral?

18.51. Kas leidub sirgeid, mis oleksid asümptootilise sihiga antud pinna $x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 4xy - \frac{5}{4}xz + 5y + 3 = 0$ korral ja samal ajal oleksid risti z-teljega? Kas leidub antud pinnal z-teljega ristuvaid sirgjoonseid moodustajaid?

18.52. Koostada pindade

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2x = 0$,

2) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 72x + 24z - 144 = 0$,
3) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$
asümptootiliste koonuste võrrandid.

18.53. Uurida antud pinna $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xz - 2yz + 4x = 0$ asümptootilist koonust.

18.54. Leida koonuse $z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$ moodustajate vaheline suurim nurk ning koonuse telje ja reeperi telgede vahelised nurgad.

### 3. Puutujatasand. Normaal

18.55. Koostada antud pinna $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis $X_0(0,-4,4)$.

18.56. Koostada antud pinna $4x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 8x + 18z + 12 = 0$ puutujatasandi võrrand pinna punktis $X_0(1,0,-\frac{2}{3})$ ning määrata pinna ja puutujatasandi lõikejoone tüüp.

18.57. Leida pinnal $x^2 + 5y^2 - z^2 - 4xz + 6x - 20y - 2z - 1 = 0$ punktid, kus normaal on risti ordinaatteljega.

18.58. Leida tasandiga $x + 2y + 7 = 0$ paralleelsed pinna $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$ puutujatasandid.

18.59. Leida pinna $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0$ puutujatasandid, mis läbivad sirget

$$\begin{cases} 4x - 5y = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

18.60. Leida pinna $5x^2 - 8y^2 + 5z^2 + 6xz + 4x - 2z = 0$ puutujatasandid, mis läbivad ordinaattelge.

18.61. Millist kõverat mööda lõikab ühekattest hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tema asümptootilise koonuse puutujatasand?

18.62. Leida sirged, mis on paralleelsed z-teljega ja puutuvad pinda $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

**18.63.** Leida pinna $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$ puutujad, mis läbivad reeperi alguspunkti.

**18.64.** Leida kõver, mida mööda eelmises ülesandes leitud koonus puutub antud pinda. Leida tasand, millel asub puutujakoonuse ja pinna lõikejoon.

**18.65.** Milliseid tingimusi peavad rahuldama teist järku pinna üldvõrrandi kordajad selleks, et pind puutuks reeperitasandeid?

**18.66.** Tõestada, et kui kaks tasandit puutuvad teist järku koonust mööda moodustajaid, siis koonuse kõõlud, mis on paralleelsed nende tasandite lõikesirgega, poolitatakse tasandi poolt, mis läbib vaadeldud moodustajaid.

## 4. Diameetrid ja diameetertasandid. Peasihid

Olgu teist järku pind määratud ortonormeeritud reeperi suhtes üldvõrrandiga (18.1)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Fikseeritud sihiga $\bar{s} = (l,m,n)$ paralleelsete pinnakõõlude keskpunktid asuvad tasandil, mida nimetatakse selle sihi <u>kaasdiameetertasandiks</u>, ta määratakse võrrandiga

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0 \tag{18.35}$$

ehk üksikasjalikult:

$$\begin{aligned} &l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + \\ &+ m(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ &+ n(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \end{aligned} \tag{18.36}$$

Teist järku pinna kõik diameetertasandid labivad pinna keskpunkti.

Kahe erineva diameetertasandi lõikesirget – keskpunkti läbivat sirget – nimetatakse diameetriks. Seejuures tasandi (18.36) puhul diameetrit sihivektoriga $\bar{s} = (l,m,n)$ nimetatakse selle tasandi kaasdiameetriks. Üldiselt tasandi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

kaasdiameeter määratakse võrranditega

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{A} = \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{B} =$$

$$= \frac{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}}{C}. \qquad (18.37)$$

Pinna (18.1) kaasdiameetriteks nimetatakse kahte diameetrit, millest kumbki asub teise kaasdiameetertasandil.

Vektoreid $\bar{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ja $\bar{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ nimetame kaassihilisteks teist järku pinna (18.1) suhtes, kui nende vektorite koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\begin{aligned}&(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)l_2 + \\ &+ (a_{12}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)m_2 + \\ &+ (a_{13}l_1 + a_{23}m_1 + a_{33}n_1)n_2 = 0.\end{aligned} \qquad (18.38)$$

Teist järku pinna (18.1) peasihiks nimetatakse sihti, mis on risti oma kaasdiameetertasandiga. Peasihtide kaasdiameetertasandeid nimetatakse pinna peadiameetertasanditeks. Pinna peatelgedeks (telgedeks) nimetatakse pinna peasihilisi diameetreid.

Pinna peasihtide leidmiseks tuleb lahendada kõigepealt pinna karakteristlik võrrand (18.11). Sellel kuupvõrrandil on alati kolm reaalset lahendit, mis on maatriksi A omaväärtusteks. Need omaväärtused on reeglina erinevad. Võrdsed omaväärtused on ainult pöördpinna korral. Igale omaväärtusele vastab maatriksi A omavektor, mis määratakse süsteemist (18.19). Pinna omavektorid on pinna peasihtide sihivektoriteks.

Kui reeperiteljed on paralleelsed pinna peatelgedega, siis pinna võrrandis ei esine muutujate korrutisega liikmeid.

18.67. Leida

1) sirge $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5}$,

2) x-telje,

3) y-telje,

4) z-telje

kaasdiameetertasand pinna

$$2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 2xy + 6xz + 12yz + 8x + 14y + 18z = 0$$

korral.

18.68. Leida pinna

$$x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6xz + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0$$

selline diameeter, mis läbib reeperi alguspunkti. Koostada antud diameetri kaasdiameetertasandi võrrand.

18.69. Leida pinna

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$$

diameetertasand, mis läbib reeperi alguspunkti ja punkti A(3,6,2). Määrata siht, mille kaasdiameetertasandiks on leitud diameetertasand.

18.70. Leida pinna

$$6x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2y - 3 = 0$$

diameetertasand, mis on paralleelne tasandiga

$$x + 3y - z + 5 = 0.$$

Koostada otsitava diameetertasandi kaasdiameetri võrrand.

18.71. Leida pinna

$$x^2 + 3z^2 - 6xy + 8x + 5 = 0$$

diameetertasandid, mis läbivad sirget $\frac{x + 3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z - 1}{3}$.

18.72. Leida pinna

$$3x^2 - 5y^2 + 4xy - 6yz + 4x + 2y = 0$$

korral y-telge läbiva diameetertasandi ja tema kaassihi vahelise nurga koosinus.

18.73. Leida kolme pinna

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 11 = 0,$$
$$3y^2 + 4xy - 8xz + 6z + 5 = 0,$$
$$8x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 4xy - 9xz - 15 = 0$$

ühine diameetertasand.

18.74. On antud teist järku pind

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 6yz + 8x - 2z + 3 = 0$$

ja üks tema diameetertasand $y - 2z + 9 = 0$. Leida antud diameetertasandiga ristuv kaasdiameetertasand.

18.75. On antud pind

$$y^2 + 3z^2 - 6xz + 12x + 5 = 0.$$

Leida kolm paarikaupa kaasdiameetertasandit, milledest üks läbib sirget $\frac{x - 2}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{4}$ ja teine - reeperi alguspunkti.

18.76. Leida pinna

$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$$

peasihid.

18.77. Leida pinna

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$$

peateljed.

18.78. Leida pinna

$$x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$$

peadiameetertasandid.

18.79. Leida pinna

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 4x - 1 = 0$$

diameetertasand, mis on paralleelne tasandiga $x + y + z = 0$.

18.80. Leida pinna

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x - 1 = 0$$

diameetertasand, mis läbib punkte $O(0,0,0)$, $M(1,1,0)$. Leida otsitava diameetertasandi kaasdiameetri sihivektor.

18.81. Leida pinna

$$x^2 - xy + 2yz + x - z = 0$$

punkti $A(1,1,1)$ läbiv diameetertasand, mille kaasdiameeter on paralleelne xy-tasandiga.

18.82. Leida tasandi $x = 0$ kaassihi sihivektor pinna $z = xy$ korral.

18.83. Koostada pinna

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$$

diameetri $x = 1$, $y = z$ kaasdiameetertasandi võrrand.

18.84. Koostada pinna

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz + 8y - 4z + 3 = 0$$

korral y-teljega paralleelse diameetri võrrand.

18.85. Koostada pinna

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x - 1 = 0$$

diameetertasandi

$$x + y + z + 1 = 0$$

kaasdiameetri võrrand.

18.86. Leida pinna

$$2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 2xy + 6xz + 12yz + 8x + 14y + 18z = 0,$$

diameetertasand, mille kaassihi vektor $\bar{a} = (3,2,-5)$.

18.87. Vaadeldakse kõikvõimalikke teist järku pindu, mis läbivad antud tetraeedri kahte vastasküljgede paari. Tõestada, et selliste pindade keskpunktid moodustavad sirge, mis läbib tetraeedri kolmanda vastasküljgede paari keskpunkti.

18.88. Näidata, et kahe teist järku pinna teljed on paarikaupa paralleelsed siis, kui pindade võrrandite ruutosa kordajatest moodustatud maatriksid kommuteeruvad.

18.89. Tõestada, et elliptilise paraboloidi korral tema lõiked mistahes kahe ristuva diameetertasandiga on sellised paraboolid, mille parameetrite pöördväärtuste summa on konstantne.

18.90. On antud teist järku pind ja sirgesidum keskpunktiga $S(a,b,c)$. Sidumi iga sirge korral leitakse lõikepunkt tema kaasdiameetertasandiga. Leida tekkinud lõikepunktide hulk.

18.91. Tõestada, et teist järku pinna diameetertasandid, mis vastavad tasandiga $\alpha$ paralleelsetele sihtidele, kas lõikuvad mööda mingit sirget S või on paralleelsed. Diameetertasand, mis vastab sirgele S, on paralleelne tasandiga $\alpha$.

18.92. Leida teist järku pinna

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a = 0$$

diameetertasand, mis on sihi $\bar{s} = (l,m,n)$ kaasdiameetertasandiks.

## 5. Teist järku pindade tasandilised lõiked

Teist järku pinna, mis on määratud üldvõrrandiga

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

lõikamisel erinevate tasanditega

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ kus } A^2 + B^2 + C^2 \neq 1,$$

tekkinud lõigete uurimiseks saab moodustada terve rea ortogonaalseid invariante. Nendeks on

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & C \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix},$$

$$\delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$J_1^* - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{12} & a_{22} & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A \\ a_{13} & a_{33} & C \\ A & C & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & B \\ a_{23} & a_{33} & C \\ B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$K_2^* = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} & B \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & A \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} & B \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & B \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} & C \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & D \\ B & C & D & 0 \end{vmatrix}.$$

Lõikekõvera kuju määramine ja kanoonilise võrrandi leidmine invariantide $\Delta^*$, $\delta^*$, $I_1^*$, $K_2^*$ järgi toimub samade valemite järgi kui teist järku kõvera uurimisel tasandil invariantide $\Delta$, $\delta$, $I_1$, $K_2$ järgi. Nii näiteks teist järku lõikekõvera karakteristlik võrrand omab kuju

$$\lambda^2 - I_1^* \lambda + \delta^* = 0, \qquad (18.39)$$

mis on saadud võrrandist

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Selleks et lõikejoonena saadud teist järku kõver oleks tsentraalne, on tarvilik ja piisav, et

$$\delta^* \neq 0.$$

Tsentraalse lõikejoone peaaegu kanooniline võrrand on

$$\lambda_1^* X^2 + \lambda_2^* Y^2 + \frac{\Delta^*}{\delta^*} = 0, \qquad (18.40)$$

kus $\lambda_1^*$ ja $\lambda_2^*$ on karakteristliku võrrandi (18.41) lahendid.

Kui lõikejoon on tsentraalne, siis tema keskpunkti koordinaadid leitakse süsteemist

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = At, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = Bt, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = Ct, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{18.42}$$

Lõikejoone telgede sihivektorid $\bar{s} = (l,m,n)$ määratakse süsteemist

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n - A\beta = 0, \\ &a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n - B\beta = 0, \\ &a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - \lambda)n - C\beta = 0 \\ &Al + Bm + Cn = 0, \end{aligned} \tag{18.43}$$

kus $\lambda$ on karakteristliku võrrandi (18.41) lahend. Kui lõikejooneks on parabool, siis vektor $\bar{a}$

$$\bar{a} = \left( \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{34} & a_{23} & a_{33} & C \\ D & B & C & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} & A \\ a_{12} & a_{24} & a_{23} & B \\ a_{13} & a_{34} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} \right)$$

on paralleelne parabooli teljega ja on suunatud parabooli nõgususe poole. Parabooli telg määratakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + \\ \quad + m(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ \quad + n(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) = 0, \end{cases} \tag{18.44}$$

kus $l$, $m$, $n$ määratakse süsteemist (18.43) ja $\lambda_1 = I_1^*$. Parabooli tipu määrame kui parabooli telje ja pinna lõikepunkti.

<u>18.93</u>. Tasand $\alpha$ lõikab teist järku koonust. Tasand $\beta$ on paralleelne tasandiga $\alpha$ ja läbib koonuse tippu. Tõestada, et

1) kui tasandil $\beta$ ei ole koonusega teisi ühiseid punkte peale tipu, siis tasand $\alpha$ lõikab koonust mööda ellipsit;

2) kui tasand $\beta$ lõikab koonust mööda kahte moodustajat, siis tasand $\alpha$ lõikab koonust mööda hüperbooli;

3) kui tasand $\beta$ puutub koonust, siis tasand $\alpha$ lõikab koonust mööda parabooli.

18.94. Leida ellipsoidi
$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$$
ja tasandi $x + y + z = 0$ lõikejoonena saadud ellipsi pooltelјed.

18.95. Leida parabooli
$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x - 6z = 0,$$
$$x - z = 0$$
parameeter.

18.96. Leida pinna
$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 6y + 2z = 0$$
ja tasandi $x + 2y + z - 1$ lõikejoone keskpunkt.

18.97. Leida teist järku pinna lõikejoon tasandiga. Määrata lõikejoone tüüp:

1) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 2xy - 3yz + 5x - 8 = 0$, xy-tasand;

2) $x^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 5x - z - 1 = 0$, yz-tasand;

3) $x^2 + y^2 - 2xy + 5yz + xz - x + 3y - z = 0$, xz-tasand.

18.98. Uurida pinna
$$3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360$$
ja tasandi $x - y + z = 1$ lõikejoont.

18.99. Määrata tasandi $2x - y + z = 0$ ja pinna
$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$
lõikejoone tüüp.

18.100. Uurida pinna ja tasandi lõikejoont:

1) $x^2 - 3y^2 + z^2 - 6xy + 2yz - 3y + z - 1 = 0$,
$2x - 3y - z + 2 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 9 = 0$,
$x + y - 2z - 1 = 0$.

18.101. Kas hüperboolse silindri

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lôikamisel tasandiga

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

vôib saada lôikejooneks vôrdhaarse hüperbooli?

18.102. Leida tingimused, mille korral tasand

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

lôikab üldvôrrandiga antud teist järku pinda mööda kahte sirget.

18.103. Tôestada, et tasand $x + y + 2z + 5 = 0$ lôikab pinda

$$z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$$

mööda sirgete paari. Leida nende sirgete vôrrandid.

18.104. Leida tasand, mis läbib punkte $A(0,-2,2)$ ja $B(-1,0,0)$ ning lôikab koonust $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ mööda parabooli.

18.105. Leida kôik tasandid, mis läbivad punkte $A(0,-2,2)$ ja $B(-1,0,0)$ ja lôikavad koonust $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ mööda ellipsit.

18.106. Leida tasand, mis läbib sirget $2x = 2y = z$ ja lôikab pinda $4x^2 - y^2 + z = 0$ mööda vôrdhaarset hüperbooli.

18.107. Pinna

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 2x + 8y - 4z - 2 = 0$$

ja tasandi lôikejoone keskpunkt asub reeperi alguspunktis. Koostada lôiketasandi vôrrand.

18.108. Leida silindri $y^2 = 2x$ ja tasandi $x + y + z - 1 = 0$ lôikejoone kanooniline vôrrand ja parameeter ning määrata lôikejoone asend antud reeperi suhtes.

18.109. Leida ellipsoidi

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$$

ja tasandi $2x + y + z = 0$ lôikejoone kanooniline vôrrand. Määrata kôvera asend.

18.110. Leida parabooli $x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0$, $x + y - 2z - 1 = 0$ telje vôrrand.

18.111. Tasandiga $y - z = 0$ paralleelsed tasandid lõikavad pinda

$$y^2 + 2z^2 - 2x = 0$$

mööda paraboole. Leida tasand, millel asuvad vaadeldud paraboolide sümmeetriateljed.

## Ringjoonlõiked

18.112. Millise kuju omab ühekattese hüperboloidi võrrand, kui xy-tasandiks võtta tasand, mis läbib reeperi alguspunkti ja on paralleelne ringjoonlõike tasandiga ja z-teljeks võtta

1) xy-tasandi kaasdiameeter,

2) xy-tasandi normaal?

18.113. Millise kuju saab kahekattese hüperboloidi võrrand, kui xy-tasandiks võtta reeperi alguspunkti läbiv ringjoonlõike tasandiga paralleelne tasand ja z-teljeks võtta

1) xy-tasandi kaasdiameeter,

2) xy-tasandi normaal?

18.114. Leida tasandid, mis lõikavad pinda

$$2x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - 2x = 0$$

mööda ringjooni.

18.115. Leida tasand, mis läbib punkti $A(0,-1,3)$ ja lõikab ellipsoidi

$$x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 2x - 12y - 72z + 109 = 0$$

mööda ringjoont.

18.116. Leida pinna $z^2 + 6xy = 1$ ringjoonlõigete tasandid.

18.117. Koostada ellipsoidi

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y + 4z + 2 = 0$$

ringjoonlõigete keskpunktide hulga võrrand.

18.118. Leida tasand, mis läbib punkti $M(-1,-1,-1)$ ja lõikab pinda

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + x + 2y + 2z = 0$$

mööda ringjoont.

18.119. Konstantse raadiusega sfäärid lõikavad elliptilist paraboloidi mööda ringjooni. Koostada saadud ringjoonte keskpunktide hulga võrrand.

18.120. Koostada silindri võrrand, kui silinder läbib ringjoont $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $z = 0$ ja punkti $A(0,1,1)$ ning mille korral leiduvad ristuvatel tasanditel asuvad ringjoonlõiked.

18.121. Tõestada, et tasand $x - y = 0$ lõikab elliptilist paraboloidi

$$2y^2 + z^2 - 2x = 0$$

mööda ringjoont ja leida selle ringjoone raadius.

18.122. Leida tasandid, mis lõikavad teist järku pindu

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$2)\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

$$3)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$4)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

$$5)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

mööda ringjooni.

18.123. Tasandid läbivad teist järku pinna

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$2)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

keskpunkti ja lõikavad teist järku pinda mööda ringjoont. Leida lõikeringjoonte raadiused.

18.124. Leida tasandid, mis lõikavad hüperboolset paraboloidi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

mööda võrdhaarset hüperbooli.

18.125. Leida tasandid, mis lõikavad koonust

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

mööda võrdhaarset hüperbooli.

18.126. Tõestada, et kui kahe teist järku pinna lõikepunktide hulk sisaldab teist järku kõverat, siis ülejäänud lõikepunktide hulk (kui see ei ole tühi) on ka teist järku kõver.

18.127. Tõestada, et läbi kolme teist järku kõvera, mille tasandid ei läbi ühist sirget ja kui kõverad paarikaupa omavad kaks ühist punkti, kusjuures ükski nendest punktidest ei kuulu korraga kolmele vaadeldud kõverale, võib panna teist järku pinna ja sealjuures ainult ühe.

18.128. Leida ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kahe mitteparalleelse ringjoonlõike tasandi vaheline nurk. Millise tingimuse korral need ringjoonlõigete tasandid on vastastikku risti.

## 6. Teist järku pinna võrrandi koostamine

### 1. Pinna võrrandi koostamine

18.129. Koostada kahest antud sirgest

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}; \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$$

võrdsel kaugusel asuvate punktide hulga võrrand. Iseloomustada saadud punktihulka geomeetriliselt.

18.130. Koostada z-teljest ja sirgest $x = 1$, $y = z$ võrdsel kaugusel olevate ja z-teljega mitte ühel tasandil asuvate punktide hulga võrrand. Iseloomustada saadud punktihulka geomeetriliselt.

18.131. Leida sirgetest

$$\begin{aligned} y &= kx, \\ z &= c; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= -kx, \\ z &= -c \end{aligned}$$

võrdsel kaugusel asuvate punktide hulga võrrand.

18.132. Koostada pinna võrrand, kui on teada pinna üks punkt $X_0(2,0,-1)$, keskpunkt $C(0,0,-1)$ ja pinna ning xy-tasandi lõikejoon $x^2 - 4xy - 1 = 0$, $z = 0$.

18.133. Koostada pöördkoonuse võrrand, kui koonus puutub xz- ja yz-tasandeid vastavalt mööda x- ja y-telge.

18.134. Koostada teist järku pinna võrrand, kui pind lõikab reeperitasandeid mööda hüperboole

$x = 0$, $yz = a$; $y = 0$, $xz = b$; $z = 0$, $xy = c$.

18.135. Koostada teist järku koonuse võrrand, kui koonus lõikab yz-tasandit mööda ringjoont $x = 0$, $y^2 + z^2 = 2ry$ ja xz-tasandit mööda parabooli $y = 0$, $z^2 - 2px = 0$.

18.136. Koostada teist järku koonuse võrrand, kui koonus läbib ringjooni

$$x = 0,\ y^2 + z^2 - 2by = 0;$$
$$y = 0,\ x^2 + z^2 - 2ax = 0.$$

18.137. Koostada teist järku pinna võrrand, kui pind lõikab xy-tasandit mööda sirgete paari, xz- ja yz-tasandit mööda ringjoont raadiusega r, puutub z-telge reeperi alguspunktis. Lõikeringjoonte keskpunktid asuvad positiivsetel pooltasanditel.

18.138. Koostada teist järku pinna võrrand, kui pind lõikab xy-tasandit mööda ringjoont

$$x^2 + y^2 - 12x - 18y + 32 = 0,\ z = 0$$

ja xz- ning yz-tasandeid mööda paraboole, mille teljed on paralleelsed ja samasuunalised z-telje sihivektoriga, kusjuures xz-tasandil asuva parabooli parameeter on 1.

18.139. Koostada pöördparaboloidi võrrand, kui paraboloid läbib ringjoont

$$x - z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0$$

ja punkti $A(1,1,0)$.

18.140. Koostada teist järku pinna võrrand, kui pind läbib z-telge ja lõikab reeperitasandeid xy-tasandit mööda ringjoont raadiusega r; puutub y-telge reeperi alguspunktis; xz-tasandit mööda sirget, mille telglõigud on võrdsed ja positiivsed; yz-tasandit mööda sirget, mis moodustab y- ja z-telje positiivsete pooltelgedega võrdsed nurgad.

18.141. Koostada paraboloidi võrrand, kui paraboloid läbib sirgeid

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = -2 \end{cases}$$

ja punktid $A(0,1,-1)$ ning $B(1,-1,0)$ on paraboloidi punktid.

18.142. Leida kolme ringjoont

$$x^2 + y^2 = 1, \ z = 0;$$
$$x^2 + y^2 = 3, \ z = 1;$$
$$x^2 + y^2 = 5, \ z = 2$$

läbiva teist järku pinna võrrand.

18.143. Teist järku pinna keskpunkt asub punktis $C(0,0,-1)$, pind läbib punkti $A(2,0,-1)$ ja lõikab xy-tasandit mööda kõverat $x^2 - 4xy - 1 = 0$, $z = 0$. Koostada pinna võrrand.

18.144. Milline on ühekattese hüperboloidi võrrand, kui reeperi alguspunktiks valida pinna punkt $X_0$, x- ja y-teljeks antud punkti läbivad pinna sirgjoonsed moodustajad ja z-teljeks xy-tasandi kaasdiameeter?

18.145. Koostada hüperboolse paraboloidi võrrand, võttes reeperi alguspunktiks pinna mingi punkti $X_0$, x- ja y-teljeks punkti $X_0$ läbivad sirgjoonsed moodustajad ja z-teljeks punkti $X_0$ läbiva pinna diameetri.

18.146. Milline on kahekattese hüperboloidi võrrand, kui reeperi alguspunktiks valida suvaliselt fikseeritud pinna punkt O, x- ja y-teljeks kaks sirget, mis asuvad pinna punktis O võetud pinna puutujatasandil ja on kaassihilised pinna lõike suhtes, mis on saadud pinna lõikamisel vaadeldud puutujatasandiga suvalise paralleelse tasandiga, ja z-teljeks valida punkti O läbiv pinna diameeter?

18.147. Tasandid

$$x + y + z - 1 = 0, \ x + y - 2z = 0, \ x - y + 1 = 0$$

on ellipsoidi sümmeetriatasanditeks, ellipsoidi suur telg asub esimese ja teise tasandi lõikejoonel ja ta pikkus on 8, keskmine telg asub esimese ja kolmanda tasandi lõikejoonel ja ta pikkus on 4, väike telg asub teise ja kolmanda tasandi lõikejoonel ja ta pikkus on 8. Koostada ellipsoidi võrrand.

18.148. Tasandid

$$x + y + z = 0,\ 2x - y - z - 2 = 0,\ y - z + 1 = 0$$

on teist järku pinna sümmeetriatasanditeks ja punktid $A(1,0,0)$, $B(1,1,-1)$ ja $C(0,-1,0)$ on pinna punktid. Koostada teist järku pinna võrrand.

18.149. Tasandid

$$x + y + z = 0,\ 2x - y - z = 0,\ y - z + 1 = 0$$

on teist järku pinna sümmeetriatasanditeks ja punktid $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,-1)$ on pinna punktid. Koostada pinna võrrand.

18.150. Koostada paraboloidi võrrand, kui paraboloid läbib ringjoont

$$x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0$$

ja ta telg on paralleelne vektoriga $\bar{s} = (l,m,n)$.

18.151. Leida pinna võrrand, kui pind kirjeldatakse muutuva ringjoone liikumisel, nii et ringjoone tasand jääb kogu liikumise vältel paralleelseks tasandiga $x + y = 0$ ning see ringjoon lõikab kogu aeg x- ja y-telge ja sirget $y = x$, $z = a$.

18.152. Koostada teist järku pindade keskpunktide hulga võrrand, kui vaadeldavad pinnad läbivad antud ellipsit ja kahte antud punkti, mis on sümmeetrilised antud ellipsi tasandi suhtes.

18.153. Koostada kolme antud sirget

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - z = 0, \\ 1 + y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + z = 0, \\ 1 - y = 0 \end{cases}$$

lõikavate sirgete hulga võrrand.

18.154. Üldvõrrandiga antud teist järku pinna igale puutujatasandile on tõmmatud reeperi alguspunktist ristsirge. Koostada puutujatasandite ja vaadeldud ristsirgete lõikepunktide hulga võrrand.

18.155. Ristuvate tasandite paari tasanditest esimene tasand läbib sirget $y = kx$, $z = c$ ja teine sirget $y = -kx$, $z = -c$. Koostada sellise omadusega tasandipaaride tasandite lõikesirge poolt moodustatud pinna võrrand.

18.156. Kolm vastastikku ristuvat ja ühises punktis lõikuvat sirget lõikavad parabooli

$$y^2 = 2px, \quad z = 0.$$

Leida selliste sirgekolmikute ühise lõikepunkti poolt kirjeldatud pinna võrrand.

## 2. Teist järku pindade üldisi omadusi

18.157. Tõestada, et iga teist järku reaalse pinna võib määrata võrrandiga

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2bz = 0,$$

kusjuures mõned kordajatest $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ja b võivad olla nullid. Avaldada kordaja b pinna invariantide kaudu juhul, kui pind on tsentraalne.

18.158. Võrrand

$$l_1 F_x + m_1 F_y + n_1 F_z = 0$$

määrab teist järku pinna peatasandi, mis vastab karakteristliku võrrandi lahendile $\lambda = \lambda_1$ ja tema normeeritud omavektorile $\bar{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$. Leida antud tasandi võrrandit normeeriv tegur.

18.159. Millise kuju omab reaalse mittekidunud teist järku pinna üldvõrrand $F(x,y,z) = 0$, kui xy-tasandiks võtta pinna mingi puutujatasand, puutepunkt võtta reeperi alguspunktiks ja x- ja y-telje sihivektoriks võtta xy-tasandiga paralleelsel tasandil asuva lõikekõvera peasihilised vektorid?

18.160. Leida üldvõrrandiga määratud ellipsoidi ruumala.

18.161. Teist järku pinna üldvõrrand määrab ellipsoidi. Milliste punktide koordinaadid rahuldavad tingimust

$$F(x,y,z) - \frac{\Delta}{\delta} = 0?$$

18.162. Ellipsoid on antud üldvõrrandiga. Mis toimub ellipsoidiga, kui pidevalt muuta võrrandi vabaliiget?

18.163. Tõestada, et pind

$$F(x,y,z) - \left\{\lambda_2\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right] + \frac{K_4}{I_3}\right\} = 0$$

koosneb kahest tasandist, mis lõikavad ellipsoidi $F(x,y,z) = 0$ mööda ringjoont ja läbivad ellipsoidi keskpunkti. Siin $\lambda_2$ on ellipsoidi $F(x,y,z) = 0$ karakteristliku võrrandi keskmine lahend, $C(a,b,c)$ – tema keskpunkt, $\Delta$ ja $\delta$ – ellipsoidi invariandid.

18.164. Tõestada, et kui võrrand

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

määrab hüperboloidi, siis võrrand

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = \frac{\Delta}{\delta}$$

määrab tema asümptootilise koonuse.

18.165. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kahel erineval hüperboloidil on ühine asümptootiline koonus?

18.166. Teist järku pinna üldvõrrand

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

määrab ühekattese hüperboloidi. Millise pinna määrab uus võrrand, mille me saame antud võrrandist, asendades vabaliikme $a_{44}$ suurusega $b_{44}$?

18.167. Teist järku pinna üldvõrrand määrab hüperboloidi. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks hüperboloidi ja tema asümptootilise koonuse vahel.

18.168. Millist kõverat mööda lõikab ühekattese hüperboloidi puutujatasand tema asümptootilist koonust?

18.169. Millist kõverat mööda lõikab kahekattese hüperboloidi puutujatasand tema asümptootilist koonust?

18.170. Millised on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et teist järku pinna üldvõrrand määraks

1) pöördsilindri,
2) pöördkoonuse,
3) sfääri?

18.171. Teist järku pinna üldvõrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab elliptilise silindri. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks silindri sees?

18.172. Teist järku pinna üldvõrrand määrab elliptilise silindri. Mis toimub pinnaga, kui
1) muuta vabaliiget,
2) muuta lineaarliikmete kordajaid?

18.173. Lahendada eelnev ülesanne juhul, kui pinna üldvõrrand määrab paraboolse silindri.

18.174. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks üldvõrrandiga antud elliptilise või hüperboolse silindri teljel?

18.175. Teist järku pinna üldvõrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab hüperboolse silindri. Millise pinna määrab võrrand

$$F(x,y,z) - \frac{K_3}{I_2} = 0?$$

18.176. Teist järku pinna üldvõrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab paralleelsete tasandite paari. Leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks antud tasandite vahel.

18.177. Teist järku pinna üldvõrrand määrab paralleelsete tasandite paari. Leida tasanditevaheline kaugus.

18.178. Millistel tingimustel teist järku pinna üldvõrrand määrab ristuvate tasandite paari?

18.179. Teist järku pinna üldvõrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab lõikuvate, kuid mitte ristuvate tasandite paari. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $X_0(x_0, y_0, z_0)$ asuks nende tasandite poolt moodustatud teravnurgas?

18.180. Teist järku pinna üldvõrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab lõikuvate tasandite paari. Leida nende tasandite vahelise nurga tangens.

V a s t u s e d

12. peatükk

SFÄÄR

12.1. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 4$; 3) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 36$; 4) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 18$; 5) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 21$; 6) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$. 12.2. Punktid $M_1, M_2$, $M_4$ asuvad sfääril, punktid $M_3$ ja $M_6$ on sfääri sisepunktid ja punkt $M_5$ sfääri välispunkt. Märkus. Sfääri punktid rahuldavad sfääri võrrandit, sfääri sisepunktide korral punkti kaugus sfääri keskpunktist on väiksem kui sfääri raadius. Kui punkt on sfääri välispunkt, siis ta kaugus sfääri keskpunktist on suurem kui raadius. 12.3. A, D - sisemised, B - väline, C on sfääri punkt. Sfääri keskpunkt asetseb punktis Q(1,-2,1) ja sfääri raadius on 7. 12.4. 1) Sfääri välispiirkonnas; 2) ja 5) sfääril; 3) ja 4) sfääri sisepiirkonnas. 12.5. Punktid $M_1$ ja $M_3$ asuvad antud ringjoonel, $M_2$ ja $M_4$ ei asu ringjoonel. Ringjoon on saadud sfääri lõikamisel tasandiga. 12.6. 1) (1,2,2) ja (1,2,-2); 2) ja 4) antud pinnal sellist punkti ei leidu; 3) (2,1,2) ja (2,-1,2). 12.7. 1) (3,2,6) ja (3,-2,6); 2) (3,2,6) ja (-3,2,6); 3) antud ringjoonel selliseid punkte ei eksisteeri. 12.8. (2,3,-6), (-2,3,-6). 12.9. Kõvera puhul 1) ja 3) läbivad reeperi alguspunkti. Kõik kõverad on ringjooned, mis on saadud sfääri lõikamisel tasandiga. 12.10. $x = a \pm\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}$. 12.11. 1) 21; 2) 7. 12.12. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 289$. 12.13. 1) C(3,-2,5), r = 4; 2) C(-1,3,0), r = 3; 3) C(2,1,-1), r = 5; 4) C(0,0,3), r = 3; 5) C(0,-10,0), r = 10. 12.14. 1) R = 4, C(1,-2,2); 2) R = 7, C(6,-2,3); 3) R = 4, C(-4,0,0); 4) R = 6, C(1,-2,3); 5) R = 4, C(0,0,3); 6) imaginaarne sfäär, kuna $R = \sqrt{-1}$; 7) $R = 0$, ainult üks reaalne punkt $C(2,-6,1)$; 8) $R = 2$, $C(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},1)$. <u>12.15</u>. $d = \frac{Aa + Bb + Cc + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. <u>12.16</u>. $\frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C}$.

<u>12.17</u>. $x = 5t - 1$, $y = -t + 3$, $z = 2t - 0{,}5$. <u>12.18</u>. $\frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y + \frac{3}{2}}{-3} = \frac{z + \frac{1}{2}}{4}$. <u>12.19</u>. $(x - 1)^2 + (y - \frac{5}{2})^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{38}{4}$. <u>Märkus</u>. Kõik tetraeedri tipud peavad rahuldama sfääri võrrandit $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Nii saame 4 võrrandit nelja tundmatu a, b, c ja R leidmiseks. <u>12.20</u>. 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 81$. <u>12.21</u>. $Q(2,1,-2)$, $R = 3$. <u>12.22</u>. $\left(-\frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2}, -\frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2}, -\frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$. <u>12.23</u>. 1) $C(-1,2,3)$, $R = 8$. <u>Märkus</u>. Vt. näide nr. 2; 2) $C(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{5}{3})$, $r = 3$. <u>12.24</u>. $5x - 8y + 5z - 7 = 0$. <u>12.25</u>. $C(0,0,6)$, $r = \sqrt{13}$. <u>Märkus</u>. Kui lahutada esimesest võrrandist teine, taandub ülesanne juhule, kus ringjoon on määratud sfääri ja tasandi lõikejoonena $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, $z = 6$. Edasi vt. näide nr. 2; 2) $C(\frac{9}{4},-2,-\frac{5}{4})$, $r = \frac{2}{5}\sqrt{55}$. <u>12.26</u>. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $y = 0$. <u>12.27</u>. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y + 2 = 0$. <u>12.28</u>. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 169$, $x = 0$. <u>12.29</u>. $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 27$, $x + y - 2 = 0$. <u>12.30</u>. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36$, $2x - z - 1 = 0$. <u>12.31</u>. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 65$, $18x - 22y + 5z - 30 = 0$. <u>12.32</u>. $M_1(-2,-2,7)$, $d = 3$. <u>12.33</u>. 1) **Lõikab**; 2) puutub punktis $(-\frac{7}{3},-\frac{4}{3},\frac{7}{3})$; 3) ei lõika. <u>12.34</u>. 1) Tasand ja sfäär lõikuvad; 2) tasand on antud sfääri puutujatasand; 3) tasandil ja sfääril ei ole ühiseid punkte. <u>12.35</u>. 1) Sirge lõikab sfääri; 2) sirge ja sfäär ei oma ühiseid punkte; 3) sirge on sfääri puutujaks. <u>12.36</u>. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$. <u>Märkus</u>. Otsitava sfääri keskpunkt peab asuma z-teljel (tasandilise lõike keskpunkti läbival lõiketasandi normaalil), seetõttu otsitava sfääri võrrand omab kuju $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2$, mis sisaldab ainult parameetreid c ja R. Kuna sfääri lõige tasandiga $z = 0$ annab an-

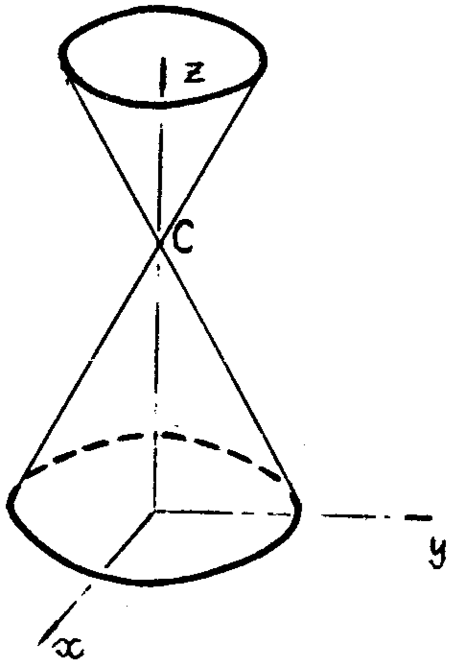
tud ringjoone, siis $R^2 = 16 + c^2$. Edasi jääb ainult arvestada, et punkt A on sfääri punkt. 12.37. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y - 6z = 0$. 12.38. 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 10y + 2z + 7 = 0$. Märkus. Otsitav sfäär kuulub kimpu $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 11 + \lambda(4x + y - z - 9) = 0$. Parameetri $\lambda$ väärtuse leiame tingimusest, et sfäär läbib antud punkti. 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 27x + 21y - \frac{33}{2}z + 10 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 + 13x - 9y + 9z - 14 = 0$. 12.39. 1) $x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 41$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 10z - 9 = 0$. 12.40. $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 25$. Lõikejooneks on reaalne ringjoon. 12.41. $x^2 + y^2 = 36$. 12.42. Ellips $5x^2 + 5z^2 - 8xz - 74x + 70z + 274 = 0$; $y = 0$. 12.43. 1) $8x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 3 = 0$, $z = 0$; 2) $2x - 2z - 7 = 0$, $y = 0$; 3) $4y^2 + 8z^2 + 16y + 20z - 31 = 0$, $x = 0$. 12.44. $x = 5 \cos u \cos v$, $y = 5 \sin u \cos v$, $z = 5 \sin v$ ehk $\bar{x} = 5(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$. 12.45. $M_1(2,4,-4)$, $M_2(-2,-4,4)$. Märkus. Antud sfääri kanooniline võrrand omab kuju $x^2 + y^2 + z^2 = 36$. Teisendame sirge võrrandi parameetrilisele kujule $x = t$, $y = 2t$, $z = -2t$ ja leiame lõikepunktide parameetri $9t^2 = 36$, $t = \pm 2$. Asendades parameetri sirge parameetrilistesse võrranditesse, saamegi otsitavad punktid. 12.47. $6x - 3y - 2z - 49 = 0$. 12.48. 1) $2x - y - z + 5 = 0$; 2) $6x + 2y + 3z - 55 = 0$. 12.49. $3x - 2y + 6z - 11 = 0$, $6x + 3y + 2z - 30 = 0$. 12.50. $2x + 4y - 4z = \pm 36$. 12.51. 1) $2x + 2\sqrt{3}\, y + 4\sqrt{3}\, z = 64$; 2) $x + \sqrt{3}\, y + 2z - 16\sqrt{2} = 0$. 12.52. $x - y + 2z - 3 = 0$ ja $x - y + 2z - 15 = 0$. Märkus. Lõikepunkti leidmiseks on soovitav teisendada sirge võrrand parameetrilisele kujule. Edasi on lihtne kasutada sfääri puutujatasandi üldvõrrandit (12.9). 12.53. $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 + (z - 3)^2 = 100$. 12.54. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; 2) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 = 121$; 3) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56$. 12.55. $P_x(\frac{r^2}{x_0},0,0)$, $P_y(0,\frac{r^2}{y_0},0)$, $P_z(0,0,\frac{r^2}{z_0})$. 12.56. 1)$(-3,3,3)$; 2) $(3,3,-3)$; 3) $(-3,3,-3)$; 4)$(-3,-3,-3)$; 5) $(3,-3,-3)$. 12.57. $C(3,-3,3)$, $R = 3$. 12.58. $(x \pm R)^2 + (y \pm R)^2 + (z \pm R)^2 = R^2$. 12.59. $R^2(A^2 + B^2 + C^2) - D^2 = 0$, puutepunkt $X_0(-\frac{AR^2}{D}, -\frac{BR^2}{D}, -\frac{CR^2}{D})$. Märkus. Otsitava tingimuse saame, väljendades analüütiliselt, et sfääri keskpunkti kaugus tasandist on võrdne sfääri raadiusega. 12.60. (2,-6,3). 12.61. $a = \pm 6$. 12.62. $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) \pm$ $\pm R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0$. 12.63. 1) $4x + 3z - 40 = 0$, $4x + 3z + 10 = 0$. Märkus. Otsitava tasandi võrrand omab kuju $4x + 3z + D = 0$. Vabaliige määratakse tingimustest, et puutujatasand asub sfääri keskpunktist $C(3,-2,1)$ raadiuse kaugusel. Antud juhul $r = 5$. Võrdusest $\frac{12 + 3 + D}{\sqrt{16 + 9}} = \pm 5$ saame $D_1 = 10$, $D_2 = -40$. 2) $10x - 11y - 2z + 189 = 0$, $10x - 11y - 2z - 261 = 0$. 12.64. 1) $2x + 2y - z \pm 15 = 0$. Märkus. Antud sirge sihivektor on otsitava tasandi normaalvektoriks, s. t. tasandi võrrandi võime võtta kujul $2x + 2y - z + D = 0$. Vabaliikme leiame tingimusest, et puutujatasand asub sfääri keskpunktist O(0,0,0) raadiuse kaugusel, $r = 5$. $\frac{D}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \pm 5$, $D = \pm 15$. 2) $4x + 3y + 24 = 0$, $4x + 3y - 36 = 0$. 12.65. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$ ja $x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$. 12.66. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$. 12.67. $R = 5$. 12.68. $(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 25$. Märkus. Otsitava sfääri raadius $R = r + d$, kus $r$ on antud sfääri raadius ja $d$ on keskpunktidevaheline kaugus. 12.69. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$. 12.70. $(l^2 + m^2 + n^2)R^2 = \begin{vmatrix} a-x_0 & b-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b-y_0 & c-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c-z_0 & a-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2$. 12.71. 1) $\begin{vmatrix} b-y_1 & c-z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c-z_1 & a-x_1 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a-x_1 & b-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2 > R^2(l^2 + m^2 + n^2)$; 2) lõikuvad, kui osas 1) toodud seostes märk $>$ asendada märgiga $<$. 12.72. $(x+5)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 121$. Märkus. Otsitava sfääri keskpunkt asub kolme tasandi lõikepunktis. Kaks tasandit on risti puutujatega $(s_1)$ ja $(s_2)$ ning läbivad vastavalt puutepunkte $P_1$ ja $P_2$. Kolmas tasand on risti puutepunkte $P_1$ ja $P_2$ ühendava lõiguga ning läbib lõigu $P_1P_2$ keskpunkti. 12.73. $3y + 4z = 0$, $5y - 12z = 0$. Märkus. x-telge läbiv tasandi võrrand on $By + Cz = 0$. Tuleb leida kordajad B ja C tingimusest, et tasandi kaugus sfääri keskpunktist C(-5,8,-1) oleks võrdne sfääri raadiusega $r = 4$, s.t. otsitavate kordajate suhe määratakse seosest $\frac{8B - C}{\sqrt{B^2 + C^2}} = \pm 4$.

<u>12.74.</u> $\begin{vmatrix} a-x_1 & b-y_1 & c-z_1 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}^2 = R^2\left[\begin{vmatrix} y-y_1 & z-z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-z_1 & x-x_1 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2\right]$. <u>12.75.</u> $4x + 6y + 5z - 103 = 0$, $4x + 6y + 5z + 205 = 0$. <u>12.76.</u> $2x - 3y + 4z - 10 = 0$, $3x - 4y + 2z - 10 = 0$. <u>12.78.</u> $x - y - z - 2 = 0$. <u>12.79.</u> $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{58}{65}x + \frac{116}{65}y - \frac{144}{65}z - \frac{188}{65} = 0$. <u>12.80.</u> $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-z_1 & x-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y-y_2 & z-z_2 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-z_2 & x-x_2 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2$. <u>12.81.</u> $[x(x - x_o) + y(y - y_o) + z(z - z_o)]^2 = R[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]$. <u>12.82.</u> $x^2 \pm 2yz = 1$. <u>12.83.</u> Keskpunkti kohavektor $\bar{c} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$, $R = 7$. <u>12.84.</u> $\bar{n}^2 > c$, $C(-\bar{n})$, $R = \sqrt{\bar{n}^2 - c}$. <u>12.85.</u> $C(\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2})$, $R = \frac{1}{2}|\bar{a} - \bar{b}|$. <u>12.86.</u> $\bar{x}^2 - \bar{x}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{a}\bar{b} = 0$. <u>12.87.</u> 1) Sfäär keskpunktiga $C(-4\bar{k})$ ja raadiusega $R = 2$; 2) sfäär raadiusega $R = 15$, keskpunktiga $C(6\bar{j} + 8\bar{k})$. <u>12.88.</u> $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$. <u>12.89.</u> $\bar{x}^2 - 6\bar{x}\bar{i} = 16$, $\bar{x}\bar{k} = 0$. <u>Märkus.</u> Esimene võrrand määrab sfääri raadiusega 5 ja keskpunktiga C, teine on xy-tasandi võrrand. <u>12.90.</u> $\bar{x}_1 = \frac{R}{\bar{a}}\bar{a}$; $\bar{x}_2 = -\frac{R}{\bar{a}}\bar{a}$; $x_1 = \frac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $y_1 = \frac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $z_1 = \frac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, $z_2 = -z_1$. <u>12.91.</u> $\bar{x}_1 + \frac{1}{\bar{a}^2}\bar{a}\left\{-\bar{a}(\bar{x}_1 - \bar{x}_o) \pm \sqrt{R^2\bar{a}^2 - [\bar{a}(x_1 - x_o)]^2}\right.$. <u>12.92.</u> 1) $(\bar{x}_o\bar{n} - c)^2 > R^2\bar{n}^2$; 2) $(\bar{x}_o\bar{n} - c)^2 = R^2\bar{n}^2$; 3) $(\bar{x}_o\bar{n} - c)^2 < R^2\bar{n}^2$. <u>12.93.</u> $(\bar{x} - \bar{x}_1 - \bar{a}\,\frac{c - \bar{x}_1\bar{n} \pm R|\bar{n}|}{\bar{a}\bar{n}})^2 = R^2$. <u>12.94.</u> $\sqrt{R^2 - \frac{(\bar{x}_o\bar{n} - c)^2}{\bar{n}^2}}$. 12.95. $(\bar{x} - \bar{\rho}_o)(\bar{x}_o - \bar{\rho}_o) = 0$.

12.96. $\frac{\bar{n}\bar{x}}{\bar{n}} - R = 0$, $\frac{\bar{n}\bar{x}}{\bar{n}} + R = 0$; $\frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - R = 0$, $\frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + R = 0$. 12.97. $-7$; $23$; $73$. 12.98. $4x - 6y + 6z - 11 = 0$. 12.99. $4y - 5z = 0$. 12.100. $2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x} = -R_1^2 + \bar{x}_1^2 + R_2^2 - \bar{x}_2^2$. 12.101. $(\frac{31}{12}, \frac{31}{12}, \frac{31}{12})$. 12.103. Radikaaltelg $\begin{cases} 5x - 3y + 3z + 7 = 0, \\ 2x - 4y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

12.104. $2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x} = -R_1^2 + R_2^2 + \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2$, $2(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)\bar{x} = -R_1^2 + R_3^2 + x_1^2 - x_3^2$. 12.106. Radikaaltsentri raadiusvektor on $R = \frac{1}{2r_2r_3r_4}(R_2^2 - R_1^2 - \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)\bar{r}_3\,\bar{r}_4 + (R_3^2 - R_1^2 + \bar{x}_1^2 - \bar{x}_3^2)\bar{r}_2\bar{r}_4 + (R_4^2 - R_1^2 + \bar{x}_1^2 - \bar{x}_4^2)\bar{r}_2\bar{r}_3$, kus $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{r}_2$, $\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = \bar{r}_3$, $\bar{x}_1 - \bar{x}_4 = \bar{r}_4$. 12.107. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 17$. Märkus. Otsitava sfääri keskpunktiks on nelja antud sfääri radikaaltsenter, s.t. punkt, mille korral puutuja lõigud, mis on tõmmatud antud punktist kõigile neljale sfäärile, on sama pikkusega. Igaüks nendest puutuja lõikudest on võrdne otsitava sfääri raadiusega. 12.108. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 12.109. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 12.111. $2x + y + 2z - 13 = 0$. 12.112. Sfäär $x(x - x_o) + y(y - y_o) + z(z - z_o) = 0$. 12.113. Sfäär $x^2 + y^2 + Rx = 0$. 12.114. Sfäär $(x - a)(x-x_o) + (y - b)(y - y_o) + (z - c)(z - z_o) = 0$. 12.115. Sfäär, mille diameetriks on $S_1S_2$. 12.116. $\frac{x}{\begin{vmatrix} A_1 & u_1 \\ A_2 & u_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} B_1 & u_1 \\ B_2 & u_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} C_1 & u_1 \\ C_2 & u_2 \end{vmatrix}}$, kus $u_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1$, $u_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. 12.118. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 5 - x - z$, $(2x + 2y + z - 12)^2 = 5 - x - x$. 12.119. $x + y + z = 0$, $9(x^2 + y^2 + z^2) = [x(x - 1) + y(y - 2) + z(z + 1)]^2$. 12.121. 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) 3; 6) 2; 7) 3; 8) 2; 9) 1. 12.122. $(x_o - a)^2 + (y_o - b)^2 + (z_o - c)^2 < R^2$, $(Aa + Bb + Cc + D)(Ax_o + By_o + Cz_o + D) < 0$. 12.124. $\pm (A_1x + B_1y +$

$+ C_1z + D_1) = \pm (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = \pm (A_3x + B_3y +$ $+ C_3z + D_3)$ (neli sirget), mille korral $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 = 1$ $(i = 1,2,3)$. <u>12.125</u>. $x' = \frac{R^2x}{x^2+y^2+z^2}$, $y' = \frac{R^2y}{x^2+y^2+z^2}$, $z' = \frac{R^2z}{x^2+y^2+z^2}$. **<u>12.126</u>**. $2ax + 2by + 2cz - R^2 = 0$. <u>12.127</u>. $x^2 + y^2 + z^2 + (\frac{A}{D} x + \frac{B}{D} y + \frac{C}{D} z)R^2 = 0$. <u>12.128</u>. Sfäär $\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{n} \frac{R^2}{C} = 0$. <u>12.129</u>. $\bar{n}\bar{x} = \frac{1}{2} R^2$ (tasand). <u>12.130</u>. Sfäär $(a^2 - \bar{x}_0^2)x^2 + 2\bar{x}_0\bar{x}R^2 - R^4 = 0$. <u>12.133</u>. $y^2 + z^2 = 16$ – pöördsilinder. <u>12.134</u>. $z \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0$ ehk $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 2z - 4 = 0$. Pöördkoonus, mille tipp asub punktis $C(0,0,2)$ (vt. joon. 12.6 ).



Joonis 12.6.

<u>12.135</u>. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$. <u>12.136</u>. $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. <u>12.137</u>. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$. <u>12.138</u>. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ühekattene pöördhüperboloid; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kahekattene pöördhüperboloid. <u>12.139</u>. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$. <u>Märkus</u>. Juhtjoone võrrand on $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, $x = 0$, kui juhtjoone tasand on valitud yz-tasandiks (vt. joon. 14.1). Asendus $y \longrightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. <u>12.140</u>. $x^2 + y^2 = 4$. <u>Märkus</u>. Ülesanne lihtsustub tunduvalt sobiva reeperi valikuga. Valime sirgete poolt määratud tasandi yz-tasandiks ja sirge, mille ümber toimub pöörlemine, valime z-teljeks. Siis teise

antud sirge võrrand on $y = 2$, $x = 0$. Edasi asendus $y \longrightarrow$ $\longrightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ . 12.141. $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$.

## 13. peatükk

## ELLIPSOID

13.2. $P_1(2,-3,0)$, $P_2(0,0,2)$. 13.3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$. 13.4. $a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 > D^2$. 13.5. Sümmeetriatasandid ühtivad reeperitasanditega. Kõik lõiked on ellipsid. Lõige xy-tasandiga: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$; xz-tasandiga: $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, $y = 0$; b
yz-tasandiga: $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, $x = 0$. Tipud: $A_1(6,0,0)$, $A_2(-6,0,0)$, $B_1(0,4,0)$, $B_2(0,-4,0)$, $C_1(0,0,3)$, $C_2(0,0,-3)$. Pooltelјed: $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$. 13.6. Lõiked tasanditega $z = h$, $h < b$ on ringjooned. Lõiked tasanditega $x = h$ (või $y = h$), $h < a$ ($h < b$), on omavahel sarnased ellipsid. Antud ellipsoid on pöördellipsoid, mille pöördeteljeks on z-telg. Märkus. Kahte ellipsit nimetatakse sarnasteks, kui nende vastavad pooltelјed on võrdelised. 13.8. $a : a_1 = c : c_1 = 3 : \sqrt{5}$ . 13.9. Teljed: 3 ja $\sqrt{3}$; tipud $A_1(2,3,0)$, $A_2(2,-3,0)$, $B_1(2,0,\sqrt{3})$, $B_2(2,0,-\sqrt{3})$. 13.10.
$\left(-\frac{a^2AD}{\Delta}, -\frac{b^2BD}{\Delta_1}, -\frac{c^2CD}{\Delta}\right)$, kus $\Delta = a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2$. 4
13.11. $Q(2,0,\frac{1}{2})$. 13.12. Ellips, keskpunkt $(2,-1,1)$. Märkus. Kõvera keskpunktiks nimetatakse pinna sümmeetriakeskpunkti. 13.13. $\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0$. 13.14. $3, \sqrt{3}$; $(2,3,0)$, $(2,-3,0)$, $(2,0,\sqrt{3})$, $(2,0,-\sqrt{3})$. 13.15. Ellips, $Q(2,-1,1)$ - ellipsi keskpunkt. 13.16. Ellips $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 4x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ 13.18. $(1,2,2)$, $(-1,2,2)$. 13.20. 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{7} = 1$; 3) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} + \frac{z^2}{39} = 1$. Märkus. Vt. näide 1. 13.21. Kaks ellipsoidi $\frac{(x \pm a)^2}{4a^2} + \frac{(y \pm b)^2}{4b^2} + \frac{(z \pm c)^2}{4c^2} = 1$. 13.22. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. 13.23. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$. 13.24. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{7,2} = 1$. 13.25. $\frac{x^2}{12} +$

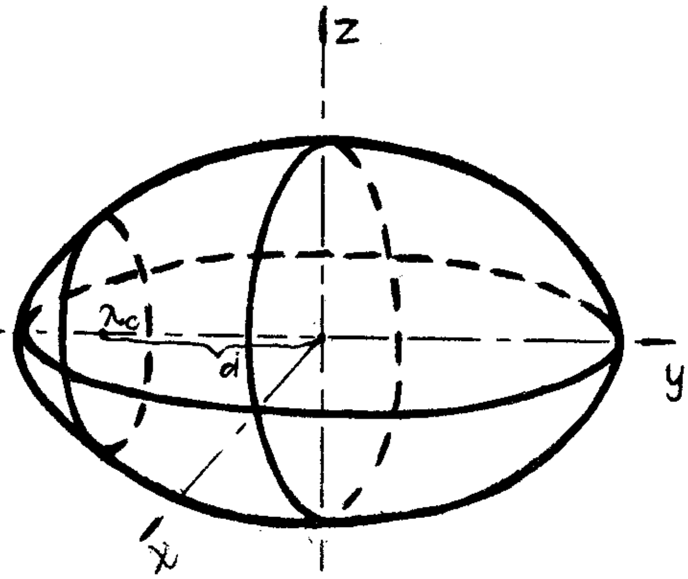
$+ \frac{y^2}{12} + \frac{(z-2)^2}{16} = 1$. <u>13.26</u>. $c\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}x \pm a\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}z +$ $+ \lambda ac = 0$, **kus** $\lambda$ on **absoluutväärtuselt** ühest väiksem suvaline reaalarv. <u>13.28</u>. Lôikejoon koosneb kahest ellipsist. <u>13.30</u>. Diameeter $\frac{x}{a^2A} = \frac{y}{b^2B} = \frac{z}{c^2C}$. <u>13.31</u>. $\frac{x}{4} = \frac{z}{-16}$, $y = 0$. <u>13.32</u>. $16x \pm 13z = 0$. <u>13.33</u>. $x - z = 0$, $\frac{x}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{1}$. <u>13.34</u>. $32x + 9y + 72z = 0$. <u>13.36</u>. Kaks diameetrit $x = a\sqrt{a^2-b^2}\,t$, $y = 0$, $z = \pm c\sqrt{b^2-c^2}\,t$. <u>13.37</u>. Selliseid sirgeid on lôpmatult palju ja kôik nad asuvad tasandil $288x + 225y - 400z - 1201 = 0$. <u>Märkus</u>. Otsitav sirge määratakse vôrrandisüsteemiga $\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z+1}{1}$. Otsitavateks on sirge sihivektori koordinaadid m ja n. Sirge ja ellipsoidi lôikepunktide leidmiseks tuleb lahendada vôrrandisüsteem, mis koosneb ellipsoidi ja sirge vôrrandist. Avaldades sirge vôrrandist x ja y, asendades ellipsi vôrrandisse ja arvestades veel lisaeeldust, et kôôl poolitub punktis A, s.t. $\frac{z_1 + z_2}{2} = -1$, saame m ja n määramiseks ainult ühe seose $228m + 225n - 400 = 0$, mida peavad rahuldama sirge sihivektori koordinaadid. Elimineerides m ja n süsteemist, mis koosneb viimati saadud seosest ja sirge vôrrandist, saamegi otsitavate sirgete hulga – tasandi vôrrandi.

<u>13.38</u>. $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} + \frac{z_1z}{c^2} - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\right) = 0$. <u>13.39</u>. $\frac{x(x-x_o)}{a^2} + \frac{y(y-y_o)}{c^2} + \frac{z(z-z_o)}{c^2} = 0$. <u>13.40</u>. Sirge, mis on konjugeeritud tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$ ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ suhtes. <u>13.41</u>. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 - R^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = 0$. <u>13.43</u>. $5x - 8y + 20z - 40 = 0$. <u>13.44</u>. 1) $C\left(\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2}\right)\left(\frac{Cx}{a^2} - \frac{Ax}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + B\left(\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2}\right)\left(\frac{Ay}{b^2} - \frac{Bx}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) + A\left(\frac{Cx}{a^2} - \frac{Az}{c^2}\right)\left(\frac{Ay}{b^2} - \frac{Bx}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$; 2) $(3z - 2y)(x - 3z) - 2(3z - 2y)(2y - x) + (x - 3z)(2y - x) = 0$ ehk $x + 2 - 2\sqrt{3})y-$

$-(6 - 3\sqrt{3})z = 0$, $x + (2 + 2\sqrt{3})y - (6 + 3\sqrt{3})z = 0$. <u>13.45.</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. <u>13.47.</u> <u>Märkus</u>. Liikuv ellips (vt. joon. 13.4) määratakse tasandil $y = d$ võrrandiga

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(\lambda a)^2} + \frac{z^2}{(\lambda c)^2} = 1, \\ y = d. \end{cases}$$

Pooltelje $\lambda c$ pikkus on võrdne suurusega $|z|$, mis on arvutatud liikumatu ellipsi võrrandist $y = d$ korral. Saame $\lambda = \frac{b^2 - d^2}{b^2}$.




Joonis 13.4.

Seega igal tasandil $y = d$ liikuva ellipsi võrrandiks on $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{d^2}{b^2}$. Otsitava pinna võrrandi saame, kui suuruse d loeme muutuvaks. Järelikult viimases võrrandis tuleb d asendada muutujaga y, mille tulemusena saamegi otsitava pinna võrrandi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. <u>13.48.</u> <u>Tõestus</u>. Eelmise ülesande põhjal võime väita, et kui eksisteerib tasand, mis läbib ellipsoidi keskpunkti ja lõikab ellipsoidi mööda ringjoont, siis lõikejoone raadius on b. Vaatame sfääri, mille keskpunkt asub reeperi alguspunktis ja raadius on b $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ehk $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Lahutades sfääri võrrandist ellipsoidi võrrandi, saame $(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2})x^2 - (\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2})z^2 = 0$. Kuna $c < b < a$, siis $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} > 0$, $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} > 0$. Tähistame $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = A^2$, $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} = C^2$. Saame $A^2x^2 - C^2z^2 = 0$. Järelikult, võrrand määrab tasandite paari $Ax + Cz = 0$ ja $Ax - Cx = 0$.



21

13.50. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2+z^2}{25} = 1$. 13.51. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$. 13.52. $q_1 = \frac{2}{5}$, $q_2 = \frac{4}{5}$.

## 14. peatükk

## HÜPERBOLOIDID

14.1. $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. 14.4. Otsitav joon koosneb kahest lõikepunktiga Q(6,-2,2) lõikuvast sirgest, s.t. antud tasand puutub pinda antud punktis. 14.5. a = 4, b = 3, (4,0,-1), (-4,0,-1). 14.6. Hüperbool, reaalpooltelg $c = \frac{4}{3}$, imaginaarpooltelg $b = \frac{8}{3}$, keskpunkt C(5,0,0), reaaltelg on paralleelne z-teljega, imaginaartelg y-teljega. 14.7. Vt. joon. 14.7.

1) lõikejooned xy-tasandiga paralleelsete tasanditega:

$z = 0, \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1;$

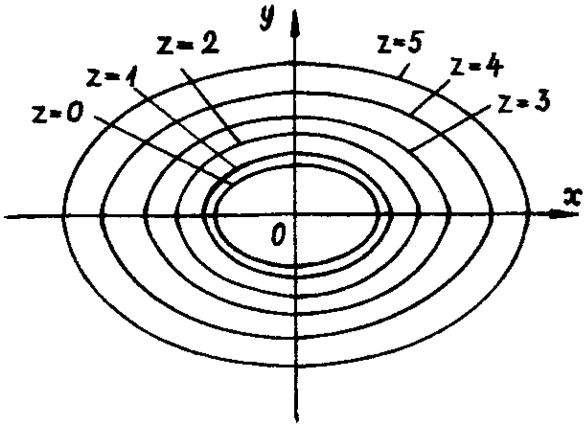
$z = \pm 1, \quad \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1;$

$z = \pm 2, \quad \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{32} = 1;$

$z = \pm 3, \quad \frac{x^2}{117} + \frac{y^2}{52} = 1;$

$z = \pm 4, \quad \frac{x^2}{180} + \frac{y^2}{80} = 1;$

$z = \pm 5, \quad \frac{x^2}{261} + \frac{y^2}{116} = 1;$




Joonis 14.7

2) lõikejooned xz-tasandiga paralleelsete tasanditega:

$y = 0, \quad \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1;$

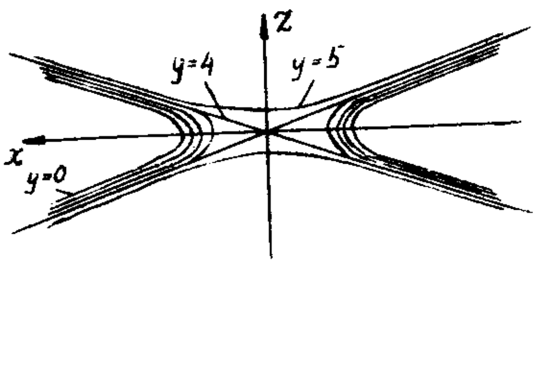
$y = \pm 1, \quad \frac{4x^2}{135} - \frac{4z^2}{15} = 1;$

$y = \pm 2, \quad \frac{x^2}{27} - \frac{z^2}{3} = 1;$

$y = \pm 3, \quad \frac{4x^2}{63} - \frac{4z^2}{7} = 1;$

$y = \pm 4, \quad \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 0;$

$y = \pm 5, -\frac{4x^2}{81} + \frac{4z^2}{9} = 1;$




Joonis 14.8

3) lõikejooned yz-tasandiga paralleelsete tasanditega:

$x = 0, \quad \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1;$

$x = \pm 1, \quad \frac{y^2}{\frac{140}{9}} - \frac{z^2}{\frac{35}{9}} = 1;$

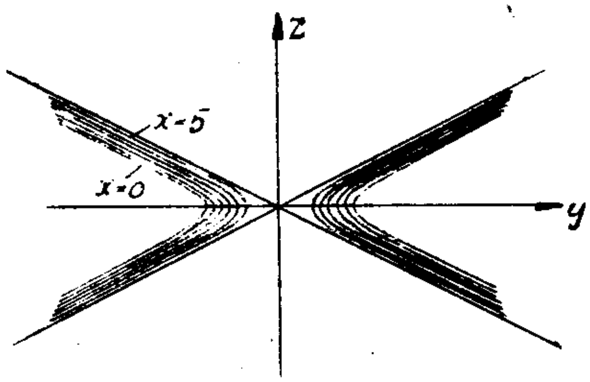
$x = \pm 2, \quad \frac{y^2}{\frac{128}{9}} - \frac{z^2}{\frac{32}{9}} = 1;$

$x = \pm 3, \quad \frac{y^2}{12} - \frac{z^2}{3} = 1;$

$x = \pm 4, \quad \frac{y^2}{\frac{80}{9}} - \frac{z^2}{\frac{20}{9}} = 1;$

$x = \pm 5, \quad \frac{y^2}{\frac{44}{9}} - \frac{z^2}{\frac{11}{9}} = 1;$

$x = \pm 6, \quad \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 0.$




Joonis 14.9

14.9. Ühekattene hüperboloid $x^2 \pm 2yz = 1$. 14.10. $\bar{x} = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} v)$. 14.11. $x = a\frac{uv + 1}{u + v}$, $y = b\frac{v - u}{u + v}$, $z = c\frac{uv - 1}{u + v}$. Vektorvõrrand $\bar{x} = \frac{1}{u + v}\left[a(uv + 1), b(v - u), c(uv - 1)\right]$. 14.12. Ühekattene hüperboloid. 14.13. $\frac{x - 6}{3} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 8}{4}$ ja $\frac{x - 6}{9} = \frac{y - 2}{8} = \frac{z - 8}{20}$. 14.14. $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{-1}$. 14.15. $\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{3}$, $\frac{x}{4} - \frac{z}{2} = 1 - \frac{y}{3}$ ja $\frac{x}{4} - \frac{z}{2} = 0$, $1 - \frac{y}{3} = 0$. 14.16. Kui antud pinna sirgjoonsete moodustajate parvede võrrandid on antud kujul $\begin{cases} x - z = u(1 - y) \\ u(x + z) = 1 + y \end{cases}$ ja $\begin{matrix} x - z = v(1 + y), \\ v(x + z) = 1 - y, \end{matrix}$ siis $\cos\theta = \frac{(uv - 1)^2}{(u^2 + 1)(v^2 + 1)}$. 14.17. $\frac{x}{1} = \frac{y - 3}{0} = \frac{z}{-2}$, $\frac{x - 2}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$. 14.18. $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ x - 5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 5z = 0, \\ y \cancel{+} 4 = 0. \end{cases}$

14.20. $u\cos v \mp \sqrt{u^2 - 1} = c(1 \mp u \sin v)$, $c(u \cos v \pm \sqrt{u^2 - 1}) = 1 \pm u \sin v$.

14.21. $\begin{cases} x = a(\cos\varphi + t\sin\varphi), \\ y = b(\sin\varphi - t\cos\varphi), \\ z = ct, \end{cases}$ $\begin{cases} x = a(\cos\varphi - t\sin\varphi), \\ y = b(\sin\varphi + t\cos\varphi), \\ z = ct. \end{cases}$

14.22. 45°. 14.23. On kaelaellipsi puutujad. 14.24. Märkus. Otsitavate projektsioonide võrrandeid on mugav leida, kasutades teist järku kõvera ja sirge puutumise tingimust.

14.27. $\bar{s} = (l,m,n)$, kus $l = a\dfrac{\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c} \mp \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$, $m = b\dfrac{\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_0}{c} \pm \frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$,

$n = c$ ehk $l = a(\frac{x_0z_0}{ac} \mp \frac{y_0}{b})$, $m = b(\frac{y_0z_0}{bc} \pm \frac{x_0}{a})$, $n = c(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2})$.

14.28. $\bar{s} = (0,\pm 4,1)$. 14.29. $x = \dfrac{2acz_0}{z_0^2 + c^2}(\pm\frac{y_0}{b} - \frac{z_0x_0}{ac})$, $y = \dfrac{2bcz_0}{z_0^2 + c^2}(\mp\frac{z_0}{a} - \frac{y_0z_0}{bc})$, $z = -\dfrac{2c^2z_0}{z_0^2 + c^2}(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2})$. 14.33. $x = \pm 6$. 14.34. Kaks xy-tasandiga paralleelset tasandit $y = \pm\sqrt{18}$ ja kaks yz-tasandiga paralleelset tasandit $x = \pm\sqrt{24}$; xy-tasandiga paralleelseid tasandeid ei ole vaja vaadelda, kuna vastav pealõige on imaginaarne. 14.35. Sirge on pinna puutuja. Puutepunkt Q(4,2,9). 14.36. 1) Ellips, hüperbool, parabool, kaks lõikuvat sirget, kaks paralleelset sirget; 2) ellips, hüperbool, punkt, imaginaarne kõver. 14.37. 1) $1 < |m| < \sqrt{2}$; 2) $|m| < 1$. 14.38. Puutepunkt P(9,4,2). 14.39. $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} < -1$. 14.41. Kahekattene pöördhüperboloid

$$-\frac{x^2}{c^2 - a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$ Märkus. Vt. pt. 13, näide 1.

14.42. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$. 14.43. $\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v, \\ y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v, \\ z = \mathrm{ch}\,u. \end{cases}$

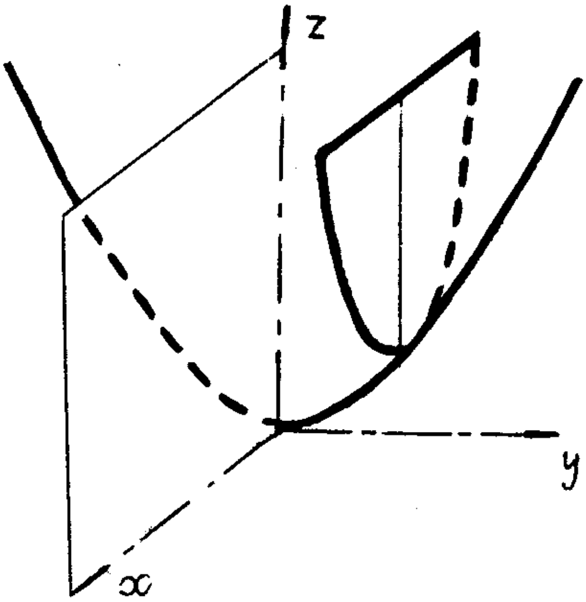
$\bar{x} = (a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ a\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\ c\,\mathrm{sh}\,u)$.

14.44. $\begin{cases} x = a\cos u\tan v, \\ y = b\sin u\tan v, \\ z = \dfrac{c}{\cos v}. \end{cases}$

$\bar{x} = (a\cos u\tan v,\ b\sin u\tan v,\ \frac{c}{\cos v})$. 14.45. $l = 11$. 14.46. Diameetertasand $x + 4y - 3z = 0$. 14.47. Diameetertasand $6x - 9y + 4z = 0$. 14.48. Kaks diameetertasandit: $4x - 3z = 0$ ja $4x + 8y - 5z = 0$, kuna läbi punkti A kulgeb kaks pinna sirgjoonset moodustajat $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}$ ja $\frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}$. Kumbki otsitavatest diameetertasanditest on määratud pinna keskpunktiga O(0,0,0) ja ühega sirgjoonsetest moodustajatest. 14.49. $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-2}$. 14.50. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{0}$. 14.51. $3x + 6y - 4z = 0$. 14.52. $3x + 6y - 4z = 0$. 14.53. $xy - yz - zx = 0$ (koonus). 14.54. Antud tasandite parv hüperboloidi diameetrit ei määra, kuna lõikejoonteks on mittetsentraalsed kõverad - paraboolid. 14.55. $x(x - x_0) + y(y - y_0) - z(z - z_0) = 0$. 14.57. $r = \frac{6\sqrt{10}}{5}$. Märkus. Antud pinna ringjoonsete lõigete tasandid on paralleelsed abstsissteljega ja määratakse parameetrit k sisaldavate võrranditega $y \pm 3z = k$. Ringjoonsed lõiked võivad puutuda kaelellipsit ainult siis, kui ta läbib ühte tema tippu, mis asub y-teljel, s. t. läbib punkti $B_1(0,-2,0)$ või $B_2(0,2,0)$. Vastavad parameetri väärtused on $k = \pm 2$. Kõik neli ringjoont, mis rahuldavad ülesande tingimusi, asuvad kahel tasandil $y \pm 3z = \pm 2$ ja kõigi raadiused on võrdsed. Raadiuse arvutamiseks leiame kõigepealt vastava lõike keskpunkti (projekteerime ta xz-tasandile). 14.58. Märkus. Tõestuseks on piisav näidata, et kõik pöördparaboloidi sirgjoonsed moodustajad moodustavad võrdsed nurgad pöördeteljega (z-teljega) ja et iga sirgjoonse moodustaja lühimat kaugust pöördeteljest mõõdetakse kaelellipsi ($x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$) vastavat raadiust mööda ja suuruselt on ta võrdne selle raadiusega. Võib ka vahetult tuletada pinna võrrandi kui sirge pöörlemisel tekkinud pinna võrrandi, kui pöördetelg ei asetse antud sirgega samal tasandil. 14.59. Ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ korral otsitava sirge hulgaks on imaginaarne koonus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, s. t. reaalseid sirgeid, mis rahuldaksid ülesande tingimusi, ei leidu; hüperboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ korral saame ühe ja sama koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, mille moodustajad on pinna asümptootideks. Seda koonust nimetatakse pinna asümptootiliseks koonuseks. Märkus. Ülesandest järeldub, et ellipsoidil ei ole reaalseid asümptoote. Mõlemal hüperboloidil on lõpmata palju asümptoote ja asümptootiline koonus, mille tipp asub pinna keskpunktis. 14.60. Ühekattene hüperboloid $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$. Märkus. Sirge libisemine määratakse võrranditega $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z}{1}$. Selle sirge ja antud sirgete lõikumise tingimused annavad kolm võrrandit, mis seovad parameetreid a,b,m ja n. Elimineeerides need neli parameetrit saadud kolmest seosest ja kahest sirge võrrandist, saamegi otsitava pinna võrrandi.

## 15. peatükk
## PARABOLOID

15.1. $x^2 + y^2 - x + 1 = 0$. Antud kõver on elliptilise paraboloidi ja tasandi lõikejoon. 15.2. 1) $m \neq 0$ ja $m > -\frac{1}{4}$, juhul $m = -\frac{1}{4}$ – ellips kidub punktiks; 2) $m = 0$. 15.3. Projektsioon 1) xy-tasandile $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$, $z = 0$; 2) xz-tasandile $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$, $y = 0$; 3) yz-tasandile $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$, $x = 0$. 15.4. Lõige xy-tasandiga O(0,0,0); xz-tasandiga $x^2 = 4z$ (parabool), $y = 0$; yz-tasandiga $y^2 = 2z$ (parabool), $x = 0$, xy-tasandiga paralleelsete lõigete projektsioonid xy-tasandile on ellipsid $\frac{x^2}{4h} + \frac{y^2}{2h} = 1$, $z = 0$, kus h on lõiketasandi $z = h$ kaugus xy-tasandist. xz-tasandiga (yz-tasandiga) paralleelsete lõigete projektsioonid vastavalt xz-tasandile (yz-tasandile) on paraboolid: $x^2 = 4z - 2h^2$ $(y^2 = 2z - 0{,}5h^2)$. 15.6. $\frac{x_o^2}{p} + \frac{y_o^2}{q} < 2z_o$. 15.7. $\frac{x_o}{p}(x - x_o) + \frac{y_o}{q}(y - y_o) = z - z_o$. 15.8. $(0,-1,\frac{1}{2})$ ja $(0,1,\frac{1}{2})$. 15.9. Ellips, parabool, punkt. 15.10. $x^2 + y^2 = 2pz$. 15.12. Pöördparaboloid. 15.13. $x^2 + y^2 = a^2 \pm 2az$. 15.14. Elliptiline paraboloid $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ või hüperboolne paraboloid $z = \frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p}$ sõltuvalt sellest, kas liikumatu ja liikuva parabooli teljed on sama- või vastassuunalised. Märkus. Koostame liikuva parabooli võrrandi. Selleks viime sisse abiparameetri d – liikuva parabooli tasandi kaugus xz-tasandist. Parabooli tipu koordinaadid on $(0, d, \frac{d^2}{2q})$ (vt. joon. 15.5) ja parabooli võrrand $y = d$, $x^2 = \pm 2p(z - \frac{d^2}{2q})$. Elimineerides nendest võrranditest abiparameetrid, saamegi otsitava pinna võrrandi. 15.15. $P_1(4,1,3)$. 15.17. Lõige xy-tasandiga $x^2 = 4y$, $z = 0$ on parabool. Lõikeks xz-tasandiga on




Joonis 15.6

kaks lõikuvat sirget $x - z = 0$, $y = 0$ ja $x + z = 0$, $y = 0$. Lõige yz-tasandiga on parabool $z^2 = -4y$. 15.19. 15; $(0, -6, -\frac{3}{2})$. 15.20. Hüperbool. Keskpunkt $(1, -1, -2)$. 15.23. $x = -\frac{Ap}{C}$, $y = -\frac{Bq}{C}$. 15.24. $x = -\frac{Ap}{C}$, $y = \frac{Bq}{C}$. 15.28. $\frac{x}{1} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 1}{-2}$, $\frac{x}{1} = \frac{y + 9}{12} = \frac{z + 3}{2}$. 15.29. $\arccos \frac{1}{17}$. 15.30. $\frac{x}{2} = \frac{y + 4}{1} = \frac{z + 4}{2}$, $\frac{x}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{1}$. 15.31. Sirgjoonsed moodustajad $\frac{x - 5}{1} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 21}{6}$, $\frac{x - 5}{1} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z - 21}{14}$.

15.32. $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$

15.33. $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{1}$ ja $\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z}{2}$. Märkus. Üks parv sirgjoonseid moodustajaid määratakse süsteemiga $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = k$, $k(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}) = z$. Viime kanoonilisele kujule $\frac{x - 2k}{2} = \frac{y - k}{-1} = \frac{z}{k^2}$. Parameetri k määrame tingimusest, et sirge on paralleelne antud tasandiga. 15.34. 1) $x - y = 0$, $z = 0$; 2) $x + y = 0$, $z = 0$. 15.35. Hüperbool $z = \frac{q - p}{2}$, $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = q - p$ (juhul $p \neq q$), juhul $p = q$ kaks lõikuvat sirget (sirgjoonset moodustajat) $z = 0$, $x = y$ ja $z = 0$, $x = -y$.

15.37. $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = c_1, \\ z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = c_2, \\ z = 0. \end{cases}$

15.39. Sirgjoonsete moodustajate projektsioonid puudutavad paraboolset lõiget xz- ja yz-tasandil, aga xy-tasandil moodustavad paralleelsete sirgete kimbud, mis on paralleelsed kahe sirgega, milleks laguneb pinna ja xy-tasandi lõikejoon. 15.40. Kaks üheparameetrilist paralleelsete sirgete parve. 15.44. Mõlemal paraboloidil on üksainus tipp. Reeperi alguspunkt. Otsitav sirge hulk määratakse võrrandiga $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = 0$. Elliptilise paraboloidi korral on sirge hulgaks kaks imaginaarset tasandit, mis lõikuvad mööda z-telge, s.t. z-telg on ainus reaalne sirge, mis rahuldab ülesande tingimusi. Hüperboolse paraboloidi korral otsitavaks sirgehulgaks on kaks reaalset tasandit, mis samuti lõikuvad mööda z-telge. Kumbki tasand $\frac{x}{2p} + \frac{y}{2q} = 0$, $\frac{x}{2p} - \frac{y}{2q} = 0$ läbib xy-tasandil asuvast pinna kahest sirgjoonsest moodustajast ühte. 15.46. Hüperboolne paraboloid.

15.47. $|\bar{x} \times \bar{i}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\bar{x} \times (\bar{i} + \bar{j}) + \bar{i} - \bar{j}|$ ehk $x^2 - y^2 - 2xy - 4z + 2 = 0$, s. t. otsitavate punktide hulk on hüperboolne paraboloid. 15.48. Ühekattene hüperboloid ($p \neq 1$) või hüperboolne paraboloid ($p = 1$). 15.49. $z = -\lambda xy$, kus $\lambda \neq 0$. 15.50. $\frac{x_0}{p}(x - x_0) - \frac{y_0}{q}(y - y_0) = z - z_0$. 15.51. $z^2 - y^2 + 2x = 0$ – hüperboolne paraboloid. 15.52. Hüperboolne paraboloid $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = z$. Märkus. Joonpinna moodustaja $\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$ rahuldab kolme tingimust: lõikab kahte antud sirget ja on paralleelne antud tasandiga. Elimineerides saadud kolmest tingimusest moodustaja sihivektori koordinaatide suhted (s. t. andes ühe koordinaatidest vabalt ette, elimineerime ülejäänud kaks), saame ühe võrrandi, mida rahuldavad moodustaja suvalise punkti M(a,b,c) koordinaadid. See ongi otsitava pinna võrrand. Pinna võrrandi saamiseks muutujatest x, y ja z tuleb a, b ja c asendada vastavalt muutujatega x, y ja z. 15.53. $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$. 15.55.

Hüperboolne paraboloid $\frac{x^2}{4} - y^2 = z$. <u>Märkus</u>. Leiame kahe liikuva punkti asendid xy-tasandil. Need on $(1, -\frac{1}{2}, 0)$ ja $(-1, \frac{1}{2}, 0)$ ja võtame need punktid liikuvate punktide algasenditeks liikumise algmomendil. Oletame, et mööda esimest sirget punkt tõuseb (loeme positiivseks suunaks), aga mööda teist sirget langeb (loeme negatiivseks suunaks). Siis on sirgete võrrandid mugavam ümber kirjutada kujul $\frac{x-1}{2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{1} = \frac{z}{2}$ ja $\frac{x+1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z}{-2}$ ehk parameetriliselt

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - \frac{1}{2}, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t_1 - 1, \\ y = t_1 + \frac{1}{2}, \\ z = 2t_1. \end{cases}$$

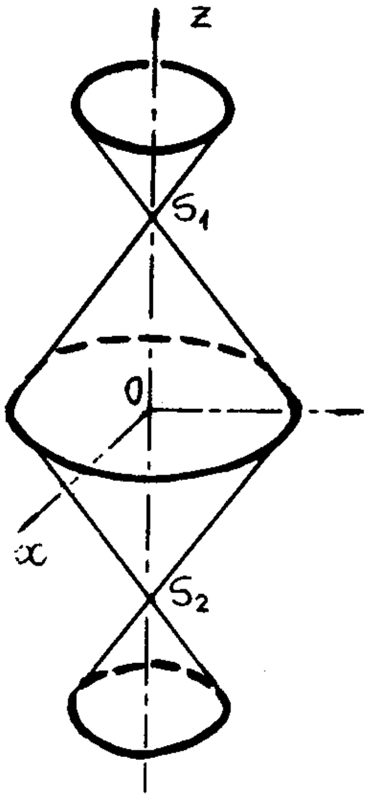
Neis võrrandites parameetrid $t$ ja $t_1$ on võrdelised punktide kaugustega algasendist. Ülesande eelduste järgi need kaugused on võrdsed igal liikumise momendil. Peale selle mõlema sirge korral $\frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} = \frac{1}{3}$. Seega võib oletada, et $t = t_1$. Liikuvaid punkte läbiva sirge võrrand momendil $t$ on $\frac{x - 2t - 1}{2} = \frac{y - t + 1/2}{1} = \frac{z - 2t}{-4t}$. Elimineerides saadud võrranditest parameetri $t$, saamegi otsitava pinna võrrandi.

## 16. peatükk

## KOONUS. SILINDER

<u>16.1</u>. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{49} = 0$. <u>16.2</u>. 1) $[a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)]^2 = (a^2 + b^2 + c^2)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]\cos^2\varphi$. <u>Märkus</u>. Kasutada koonuse telje ja moodustaja SX vahelise nurga leidmise valemit, kusjuures $X(x,y,z)$ on koonuse suvaline punkt. 2) $11x^2 + 11y^2 + 23z^2 - 32xy + 16xz + 16yz - 6x - 60y - 186z + 342 = 0$. <u>16.3</u>. 1) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$. <u>Märkus</u>. Ülesande lahendamiseks võib lõigata koonust telge läbiva tasandiga, näiteks xz-tasandiga ja leida telje ja lõikesirge vaheline nurk. Võib kasutada valmis valemit $\varphi = \arctan\frac{a}{b}$. Viimasel juhul tuleb tõestada toodud valem. <u>16.4</u>. Koonus $40(x - 2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$. <u>Märkus</u>. Antud sirge

lôikab x-telge punktis C(2,0,0). Järelikult, otsitav pöördpind on pöördkoonus tipuga C. Moodustaja sihivektori koordinaate siduva tingimuse saame nôudest, et kogu pöörlemise vältel jääb pöördetelje ja moodustaja vaheline nurk vôrdseks antud sirge ja x-telje vahelise nurgaga. <u>16.5</u>. Koonus $(x - 3)^2 + y^2 - (z - 5)^2 = 0$. <u>16.6</u>. $x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz + 62x + 44y - 32z - 11 = 0$. <u>16.7</u>. $\arccos\frac{121}{125}$. <u>16.8</u>. $[a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o)]^2 - [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]\cdot(a^2 + b^2 + c^2)\sin^2\beta = 0$. <u>16.9</u>. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$; 3) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$. <u>16.10</u>. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. <u>16.11</u>. $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$. <u>16.12</u>. $xy + xz + yz = 0$ (koonus asub esimeses ja seitsmendas oktandis); $xy + xz - yz = 0$ (teine ja kaheksas oktant); $xy - xz - yz = 0$ (kolmas ja viies oktant); $xy - xz + yz = 0$ (neljas ja kuues oktant). <u>Märkus</u>. Koonuse moodustajaks vôib vôtta ringjoone, mis[*] lôikab kôiki kolme reeperiteljega ja asub suvalisel tasandil, mis moodustab reeperitasandiga vôrdsed nurgad. Näiteks ringjoon, mis eraldab reeperitelgedest lôigud pikkusega a, on antud süsteemiga $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = a$. Kui $X(x,y,z)$ on juhtjoone suvaline punkt ja $P(X,Y,Z)$ punkti X läbiva moodustaja suvaline punkt, siis vaadeldud koonuse moodustaja OX vôrrand on $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$ vôi $X = xt$, $Y = yt$, $Z = zt$. Elimineerides vôrrandisüsteemist, mis koosneb juhtjoone ja moodustaja vôrrandist, juhtjoone punkti X koordinaadid, saamegi otsitava koonuse vôrrandi. Elimineerimine on lihtne, kui korrutada juhtjoone esimest vôrrandit $t^2$ ja teist parameetriga t $(xt)^2 + (yt)^2 + (zt)^2 = (at)^2$, $xt + yt + zt = at$, siit $X^2 + Y^2 + Z^2 = (X + Y + Z)^2$ ehk $XY + XZ + YX = 0$. <u>16.13</u>. $27[(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z-3)^2] = 4(2x + 2y - z - 3)^2$. <u>16.14</u>. $z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}\,xz + 2\sqrt{2}\,yz = 0$. 16.15. Kaks koonust $\frac{x^2 + y^2}{r^2} - \frac{(z \mp h)^2}{h^2} = 0$. (Vt. joon. 16.10). <u>16.16</u>. $\frac{x^2 + y^2}{25} - \frac{z - 7}{49} = 0$. <u>Märkus</u>. Antud ülesande korral on reeperi valik vaba. Sobiv reeperi valik lihtsustab tunduvalt lahendust. Valime juhtjoone tasandi xy-tasandiks




Joonis 16.10

ja koonuse pöördtelje z-teljeks. Valitud reeperi korral on juhtjoone võrrand $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$ ja tipu koordinaadid on $(0, 0, \pm 7)$.

16.17. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z - c)^2}{c^2} = 0$; 2) $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$; 3) $3x^2 + 123y^2 + 23z^2 - 18xy - 22xz + 50yz + 18x - 54y - 66z + 27 = 0$.

16.18. $18y^2 + 50z^2 + 75xz + 225x - 450 = 0$. Märkus. Antud ellips on otsitava koonuse juhtjooneks ja antud punkt koonuse tipuks. 16.19. $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{9} - \frac{(z - 6)^2}{36} = 0$. 16.20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. 16.21. $\frac{x^2}{4} + \frac{(z - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$. 16.22. $2xy = (z - a)^2$. 16.23. $2y^2 + xz - 8x = 0$. Märkus. Juhtjoone võrrandid on $y^2 = 4x$, $z = 0$. Esimene võimalus: moodustaja võrrand on $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = z - 2$. Moodustaja sihivektori koordinaatide vaheline seos $2m^2 = -l$. Teine võimalus. Kui $M(x,y,z)$ on juhtjoone suvaline punkt ja $P(X,Y,Z)$ on punkti M läbiva koonuse moodustaja suvaline punkt, siis moodustaja võrrandid on $X = xt$, $Y = yt$, $Z - 8 = t(z - 8)$. Viimasest seosest $t = -\frac{1}{8}Z + 1$, ja korrutades juhtjoone esimest võrrandit parameetri ruuduga, $(yt)^2 = 4(xt)t$, ja asendades $yt$, $xt$ parameetrilistest võrranditest ja arvestades leitud parameetri t väärtust, saamegi vastuses toodud koonuse võrrandi. 16.24. $Y^2 + 2X(Z - p) = 0$. Märkus. Moodustaja võrrandid $X = xt$, $Y = yt$, $Z - p = t(z - p)$. Korrutades juhtjoone võrrandeid $t^2$, saame $(yt)^2 = 2(xt)pt$, $z = 0$. Asendades parameetrilistest võrranditest $xt$, $yt$, $pt$, saamegi toodud koonuse võrrandi. 16.25. $X^2 + Y^2 + (Z - 2R).(Z - 2R + aX + bY + cZ + d - 2cR) = 0$. 16.26. $35x^2 + 35y^2 - 52z^2 - 232xy - 116xz + 116yz + 232x - 70y - 116z + 35 = 0$. 16.27. Märkus. Koonuse normaali võrrandid koonuse suvalises punktis $X_0(x_0, y_0, z_0)$ on $\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z - z_0}{-\frac{z_0}{c^2}}$. Koonuse teljeks on z-telg, s.t. sirge $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$. Kerge on kontrollida, et antud sirged lõikuvad. 16.32. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 4xy + 12xz - 6yz = 0$. 16.33. $x^2 + y^2 - \frac{r^2}{c^2 - r^2}(z - c)^2 = 0$. 16.34. 1) $(x - 5)^2 - 24(y^2 + z^2) = 0$; 2) $9x^2 - 16y^2 - 16z^2 - 90x + 225 = 0$. 16.35. $[(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c)]^2 - [(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2] \cdot [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2)] = 0$. 16.36. $19x^2 - 29y^2 - 44z^2 - 64xy - 16xz + 8yz - 304x + 512y + 128z + 1216 = 0$.

16.37. $\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} - R}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + R}$. 16.38. Koonus: $10(x - 5)^2 + 20(x - 5)(y - 1) - 34(y - 1)^2 - 55z^2 = 0$. 16.39. $(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1)\frac{11}{25} - (\frac{6x}{25} - 1)^2 = 0$. 16.40. $4x^2 - 15y^2 - 6z^2 - 12xz - 36x + 24z + 66 = 0$. 16.42. Silinder: $2(x - z)^2 + 2(x - z)(y - z) + 4(y - z)^2 - 7 = 0$. 16.43. Koonus: $8(x^2 + y^2) - (z - 6)^2 = 0$. Teine puutujakoonus kidub kaheks ühtivaks tasandiks $z = 2$.

16.44. $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1) - (\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1)^2 = 0$. 16.45. $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \pm 1)(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \pm 1) - (\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} \pm 1)^2 = 0$. Märkus. Kui punkt S on hüperboloidi keskpunkt, siis puutujakoonuse iga moodustaja puutub pinda lõpmata kauges punktis, s.t. on antud pinna asümptoodiks, ja puutujakoonus osutub pinna asümptootiliseks koonuseks. 16.46. Ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ korral reaalseid ülesande tingimusi rahuldavaid sirgeid ei eksisteeri, saame imaginaarse koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Hüperboloidide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ korral saame mõlemal juhul koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, mis on antud pinna asümptootiliseks koonuseks (vt. eelnev ülesanne). Märkus. Antud ülesandest järeldub, et ellipsoidil ei eksisteeri reaalseid asümptoote, hüperboolidel on lõpmata palju asümptoote, mis moodustavad asümptootilise koonuse. 16.47. $(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z)(\frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} - 2z_0) - (\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} - z - z_0)^2 = 0$. Punkti S polaartasandi võrrand on $\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} = z + z_0$.

16.48. $z^2 = \pm 2xy$. 16.49. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$. 16.50. $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$. 16.51. $5x^2 + 10y^2 + 13z^2 + 12xy - 6xz + 4yz + 26x + 20y - 38z + 3 = 0$. 16.52. 1) $2y^2 + 2z^2 - 2yz + 12y - 10z - 3 = 0$; 2) $(x - y)^2 + 3z^2 - 8(x - y) - 8z - 26 = 0$. 16.53. $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$. 16.54. 16, 8. 16.55. 60°. 16.56. Märkus. Olgu $X(x,y,z)$ juhtjoone suvaliselt fikseeritud punkt ja $P(X,Y,Z)$ punkti $X$ läbiv silindri moodustaja suvaline punkt, siis moodustaja võrrand on $\frac{X - x}{5} = \frac{Y - y}{3} = \frac{Z - z}{2}$ ehk $x = X - 5t$, $y = Y - 3t$, $z = Z - 2t$. Kuna $X$ on juhtjoone punkt, siis viimased seosed rahuldavad juhtjoone võrrandit $(X - 5t)^2 + (Y - 3t)^2 = 25$, $Z - 2t = 0$ ehk $(X - \frac{5}{2} Z)^2 + (Y - \frac{3}{2} Z)^2 = 25$. 16.57. $(2x + 3z)^2 + 25y^2 -$

$-10(2x+z)=0$. 16.58. $x^2-y^2-2xz+2yz+x+y-2z=0$. 16.59. 1) $x^2+5y^2-8y-12=0$, 2) $4x^2+5z^2+4z-60=0$, 3) $2y-z-2=0$. 16.60. Silinder $(x-1)^2+4z^2=4$, ristprojektsioon xz-tasandile $(x-1)^2+4z^2=4$, $y=0$. 16.61. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-1{,}5=0$. 16.62. $(10x-5y-5z+2)^2+(-5x+10y-5z+11)^2+(5x+5y-10z+13)^2=294$. Märkus. Silindri juhtjooneks on iga ringjoon, mis asetseb antud sirgetega ristuval tasandil ja läbib selle tasandi ja antud sirgete lõikepunkte. 16.63. $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^3}-1)(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2})-(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2})^2=0$.

16.65. $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$.
16.66. $5x^2+8y^2+5z^2+4xy+8xz-4yz+6x+4y-6z-63=0$. 16.67. $x^2+4y^2+5z^2-4xy-125=0$. 16.68. $(x-\frac{x+2y-2z}{9})^2+(y-2\frac{x+2y-2z}{9})^2+(z+2\frac{x+2y-2z}{9})^2=36$. 16.69. $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1)(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2})-(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2})^2=0$. 16.70. $(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z)(\frac{l^2}{p}+\frac{m^2}{q})-(\frac{lx}{p}+\frac{my}{q}-n)^2=0$. 16.72. $x(x-x_o)+y(y-y_o)-z(z-z_o)=0$. 16.73. Otsitav lõikejoon on antud koonuse ja sfääri $x(x-x_o)+y(y-y_o)+z(z-z_o)=0$ lõikepunktide hulk. 16.75. Tähistame $p=[(\bar a\times\bar b)\times(\bar a\times\bar x_o)]^2-c^2(\bar a\times\bar b)^2$. 1) $p>0$; 2) $p<0$; 3) $p=0$, $\bar a\times\bar b\neq\bar 0$; 4) $\bar a\times\bar b=\bar 0$, $(\bar a\times\bar r_o)^2=c^2$. 16.76. Tähistame $p=\{(\bar a\bar b)^2-a^2b^2\cos^2\alpha\}\{(\bar a\bar x_o)^2-a^2\bar x_o^2\cos^2\alpha-(\bar a\bar b)(\bar a\bar x_o)-a^2(\bar x_o\bar b)\cos^2\alpha)^2$. 1) $p>0$; 2) $\bar x_o\times\bar b=\bar 0$; 3) $\bar x_o\times\bar b=\bar 0$, $(\bar a\bar b)^2=a^2b^2\cos^2\alpha$; 4) $p<0$; 5) $(\bar a\bar b)^2=a^2b^2\cos^2$; 4) $p<0$; 5) $(\bar a\bar b)^2-a^2b^2\cos^2\alpha\neq 0$, $p=0$.
16.77. $(\bar a\bar x_1)^2<a^2x_1^2\cos^2\alpha$. 16.78. Telje võrrand: $\bar x=\bar x_o+\lambda(\frac{\bar x_1}{|\bar x_1|}-\frac{\bar x_3}{|\bar x_3|})$. Koonuse võrrand:

$$\left[\left(\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|} - \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right)\left(\frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|} - \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right)\right]^2 = x^2 \frac{(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)^2}{\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2\bar{x}_3^2},$$

kus $\bar{x}$ on koonuse suvalise punkti raadiusvektor ja reeperi alguspunkt asetseb koonuse tipus. 16.80. 6. 16.81. 5. 16.82. 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 2. 16.85. Selliseid sirgeid on lõpmatu palju. Nende hulk on koonus $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} - (z-2)^2 = 0$. Sirged on koonuse moodustajad.

## 17. peatükk
## TEIST JÄRKU PINDADE PUUTUJATASANDID

17.1. $10x + 15y + 6z - 90 = 0$. 17.2. $(6,-2,2)$. 17.5. $4x - 12y + 9z - 6 = 0$. 17.7. $x - 2y - 4z = 0$. Märkus. Otsitav tasand puutub koonust mööda antud punkti läbivat moodustajat. 17.9. $3x + 3y - z - 18 = 0$. 17.11. $x - y - z - 1 = 0$. 17.13. Puutepunkt $P(9,4,2)$. 17.14. $m = \pm 18$. 17.15. $2x - y - 2z - 4 = 0$. 17.16. $(3,0,-10)$. 17.17. $(9,5,-2)$. 17.18. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+\frac{1}{2}}{2}$. 17.19. $2x + 2y - 3z \pm 12 = 0$. Märkus. Puutepunktide koordinaatide leidmiseks arvestame, et pinna puutujatasand $\frac{x_0x}{21} + \frac{y_0y}{6} + \frac{z_0z}{4} = 1$ ja antud tasand on paralleelsed, s.t. vastavate muutujate kordajad on võrdelised. Kuna puutepunkt asub ellipsoidil, siis puutepunkti koordinaadid rahuldavad ellipsoidi võrrandit. 17.20. $x - 2y + 2z - 1 = 0$; $x - 2y + 2z + 1 = 0$; $\frac{2}{3}$. 17.21. $x - y - 2z - 2 = 0$. 17.22. Märkus. Koonuse suvalises punktis $X_0(x_0,y_0,z_0)$ võetud normaali võrrand on $\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z - z_0}{-\frac{z_0}{c^2}}$ ja koonuse teljeks on z-telg $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$. Saadud kaks sirget lõikuvad. 17.23. $a = b = c$, s.t. ellipsoid on sfäär. 17.24. Pealõigete $x = 0$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja $y = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ kõik punktid. 17.25. $4x + 5y \pm 40 = 0$. Märkus. Antud silindri kõik puutujatasandid on paralleelsed z-teljega. 17.26. Märkus. Tõestada, et antud silindri kõik normaalid on risti silindri moodustajaga. Järelikult on siis normaalid paralleelsed moodustajatega ristuva tasandiga. 17.28. $a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 = D^2$. 17.29. a) $A^2a^2 + B^2b^2 \pm C^2c^2 = \pm D^2$; b) $A^2p \pm B^2q = 2CD$. 17.30. $x^2 + y^2 = a^2 \pm 2az$ – kaks pöördparaboloidi. 17.31. $z^2 + xy - xz - yz = 0$. 17.32. 1) $x - 3z = 0$, $3x - 2y - 3z - 18 = 0$; sirge lõikab pinda kahes reaalses punktis; 2) selliseid reaalseid puutujatasandeid ei leidu; sirgel ja tasandil ei ole reaalseid lõikepunkte; 3) $x - 2y - 3z - 6 = 0$; sirge puutub pinda ja läbi tema on võimalik panna ainult ühe puutujatasandi. 17.33. $\sqrt{15}\cdot y - 2z + 2 = 0$ ja $\sqrt{15}\cdot y + 2z - 2 = 0$; $(0, 2\sqrt{15}, 16)$ ja $(0, -2\sqrt{15}, 16)$. 17.34. Ellipsoidi, kahekattese hüperboloidi ja elliptilise paraboloidi korral ei tohi sirge lõigata pinda reaalsetes punktides. Ühekattese hüperboloidi ja hüperboolse paraboloidi korral peab sirge lõikama pinda kahes erinevas punktis. 17.36. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-21}{6}$ ja $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-21}{14}$. Märkus. Võib leida antud puutujatasandi ja antud pinna puutepunkti $X_0$. Puutujatasand punktis $X_0$ lõikab pinda mööda punkti $X_0$ läbivaid sirgjoonseid moodustajaid. 17.38. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$. 17.39. Antud ellipsoidi ja ellipsoidi $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{d^2}$ lõikejoon. 17.40. Sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$. 17.41. $x^2 + y^2 + k^2z^2 = 1$, kus $k \neq 0$. 17.42. $(x^2 + y^2)(1 + 2z) + 2z^3 = 0$.

Märkus. Pinna $x^2 + y^2 = 2z$ puutujatasand pinna punktis $X_0(x_0, y_0, z_0)$ lõikab sfääri mööda sirgjoont, keskpunktiga $Q(x,y,z)$, kus $x = \frac{x_0z_0}{2z_0+1}$, $y = \frac{y_0z_0}{2z_0+1}$, $z = -\frac{z_0}{2z_0+1}$. Viimastest $x_0 = -\frac{x}{z}$, $y_0 = -\frac{y}{z}$, $z_0 = -\frac{z}{2z+1}$; kuna $x_0^2 + y_0^2 = 2z_0$, siis peale asendust saamegi toodud keskpunktide hulga võrrandi. 17.44. Tasand $z + \frac{p+q}{2} = 0$. 17.48. Kui ellipsoid on määratud kanoonilise võrrandiga (13.1) ja tasand võrrandiga $x = p$, $p = \text{const}$, siis poloidi võrrand on
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{p^2}$$
ning herpoloidi võrrand on

$$x = p\begin{vmatrix} p^2 - a^2 & py & pz \\ p^2 & py - b^2 & pz \\ p^2 & py & pz - c^2 \end{vmatrix}.$$

Herpoloid on teist järku kõver. Märkus. See ülesanne leiab rakendamist kõva keha mehaanikas, kui kõva keha liigub inertsi toimel ümber püsipunkti. Puutepunktid ellipsoidil moodustavad kõvera, mida nimetatakse poloidiks, puutepunktid etteantud tasandil moodustavad kõvera, mida nimetatakse herpoloidiks.

## 18. peatükk

## TEIST JÄRKU PINDADE ÜLDINE TEOORIA

18.1. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 6yz + 20y + 12z + 12 = 0$. 18.2. $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz - 1 = 0$. 18.3. $C(1,1,-1)$; $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz - 1 = 0$. 18.4. $x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy + 6xz - 24yz - 5 = 0$. 18.5. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4 = 0$; 2) $y^2 + 3xy + xz + 2yz + 0{,}8 = 0$; 3) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$. 18.6. 1) $(-1,\frac{3}{2},0)$; tsentraalne pind, $\Delta \neq 0$; 2) keskpunktidest koosnev sirge: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$; $\Delta \neq 0$; kidunud teist järku pind; 3) keskpunkti ei eksisteeri $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$, paraboloid; 4) $(\frac{14}{3},3,\frac{1}{3})$, $\Delta \neq 0$, tsentraalne pind; 5) keskpunktidest koosnev tasand: $2x - y + 3z + 2 = 0$, paralleelsete tasandite paar; 6) keskpunkti ei eksisteeri, $\Delta \neq 0$, paraboloid; 7) $(0,2,-2)$, $\Delta = 0$, koonus; 8) keskpunkti ei eksisteeri, $\Delta = 0$, $\delta = 0$, paraboolne silinder. 18.7. $\Delta = 0$, tipp $S(0,1,0)$. Et tegemist on reaalse koonusega, näitab kas või näiteks see, et tema lõige xz-tasandiga on hüperbool $2x^2 - z^2 + 8x + 4 = 0$, $y = 0$. 18.8. $4XY + 4XZ - 1 = 0$, keskpunktide sirge $x = 1$, $y = t$, $z = -t$. 18.9. $2x^2 - 6z^2 = 1 - 2R^2$, $y = 0$. Kui $R \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, siis hüperbool; kui $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, siis kaks sirget. 18.10. $a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) + 2a_{31}(z - z_0)(x - x_0) + a = 0$. 18.11

$$x = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & B_1 & C_1 \\ \beta & B_2 & C_2 \\ \gamma & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad y = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_1 & \alpha & C_1 \\ A_2 & \beta & C_2 \\ A_3 & \gamma & C_3 \end{vmatrix},$$

$$z = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \alpha \\ A_2 & B_2 & \beta \\ A_3 & B_3 & \gamma \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

$$\alpha = \frac{(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)(\bar{n}_2 \times \bar{n}_3)}{2\lambda(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)^2}, \qquad \beta = \frac{(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)(\bar{n}_3 \times \bar{n}_1)}{2\mu(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)^2},$$

kusjuures $\bar{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$, $i = 1,2,3$, $\gamma = D_3 + \lambda\alpha^2$. 18.12. Kahekattene hüperboloid. Märkus. $\Delta = -16$, $\delta = 32$. Järelikult, meil on tegemist kidumata tsentraalse teist järku pinnaga, s.t. pind võib olla ellipsoid või hüperboloid (vt. tabel 1). Edasiseks pinna tüübi täpsustamiseks leiame pinna karakteristliku võrrandi (18.12). Kuna $I_1 = -1$, $I_2 = -22$, siis karakteristlik võrrand on $\lambda^3 + \lambda^2 - 22\lambda - 32 = 0$. Ainult pinna tüübi määramiseks, kui ei nõuta kanoonilist võrrandit, ei ole meil vaja karakteristlikku võrrandit lahendada. Piisab, kui määrame lahendite märgid. Lahendite märkide määramiseks kasutame Descartes'i märgi reeglit. Antud juhul on karakteristliku võrrandi kordajate jada märgid: + + − −, s.t. meil on üks märgimuut (teise ja kolmanda kordaja vahel). Kuna antud juhul on karakteristlikul võrrandil kolm reaallahendit (ellipsoid või hüperboloid), siis karakteristlikul võrrandil on üks positiivne ja kaks negatiivset lahendit. Suhe $\frac{\Delta}{\delta}$ on negatiivne. Kasutades tabelit 2 saame, et pind on kahekattene hüperboloid. 18.13. 1) Ühekattene hüperboloid. Märkus. $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$, karakteristlikul võrrandil $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$ on kaks positiivset ja üks negatiivne lahend, $\frac{\Delta}{\delta} < 0$; 2) kahekattene hüperboloid. Märkus. $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\frac{\Delta}{\delta} > 0$; karakteristlikul võrrandil $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$ on kaks positiivset ja üks negatiivne lahend; 3) ellipsoid. Märkus. $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\frac{\Delta}{\delta} < 0$. Kõik karakteristliku võrrandi $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ lahendid on positiivsed; 4) hüperboolne paraboloid. Märkus. $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$. 5) Elliptiline silinder. Märkus. $\Delta = \delta = 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$. Piisab ka, kui leiame, et $\Delta = \delta = 0$ ja pinna ja xy-tasandi lõikejooneks $4x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y - 4 = 0$, $z = 0$ on reaalne ellipsoid. 18.14. $\lambda = -2$. 18.15. $\lambda = \pm 1$; $\mu = \pm\sqrt{2}$. Märkus.

Parameetrid määrame tingimusest $\Delta = \delta = 0$, $I_1^2 = 4I_2$. 18.16. $ab + bc + ac = 0$. 18.17. $y = 0$, $\lambda x + z + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Märkus. Karakteristlikul võrrandil on kordne lahend $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 18.18. Kaks koonust $2x^2 - 2y + (1 \pm \sqrt{5})z^2 = 0$, ühe koonuse pöördetelg $z = 0$, $(1+\sqrt{5})x - 2y = 0$, teise koonuse pöördetelg $z = 0$, $(1 - \sqrt{5})x - 2y = 0$. 18.19. 1) $-\infty < m < -1$ korral pind on ellipsoid; 2) $m = -1$ korral elliptiline silinder; 3) $-1 < m < \frac{1}{2}$ korral ühekattene hüperboloid; 4) $m = \frac{1}{2}$ korral koonus; 5) $\frac{1}{2} < m < 1$ korral kahekattene hüperboloid; 6) $m = 1$ korral kaks imaginaarset lõikuvat tasandit; 7) $m > 1$ korral ellipsoid. 18.20. $14x^2 - 4y^2 - \frac{16z}{\sqrt{14}} = 0$. Märkus. Karakteristliku võrrandi lahendid: $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$. Peasihid: $\bar{e}_1 = (2,4,1)$, $\bar{e}_2 = (1,-1,2)$, $\bar{e}_3 = (-3,1,2)$. Paraboloidi peaaegu kanooniline võrrand on $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}}\, z = 0$. 18.21. Elliptiline paraboloid. $2x^2 + 5y^2 - 5\sqrt{2}\, z = 0$. Märkus. Vt. eelneva ülesande märkust. 18.22. 1) Hüperboolne silinder. 2) Imaginaarne koonus $\Delta = 0$, tipp $S(0,0,0)$, lõige xy-tasandiga on imaginaarne ellips $x^2 + 2y^2 + 3 = 0$, $z = 0$. 3) Reaalsete lõikuvate tasandite paar, lõikesirge $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$, ($\Delta = 0$, xy-tasand lõikab pinda mööda kahte reaalset lõikuvat sirget $2x^2 + 4xy - 8x - 12y + 6 = 0$). 4) Koonus, keskpunkt (koonuse tipp) $S(2,1,4)$, $\Delta = 0$, yz-tasand lõikab pinda mööda hüperbooli). 5) Elliptiline silinder ($\Delta = 0$, keskpunkti ei eksisteeri, xz-tasand lõikab pinda mööda reaalset ellipsit $x^2 + 4z^2 + 2x - 4 = 0$, $y = 0$). 6) Imaginaarsete tasandite paar, mis lõikuvad mööda reaalset sirget $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$. (Lõige suvalise tasandiga, mis ei läbi antud sirget, lõikab pinda mööda kahte imaginaarset sirget). 18.23. 1) Imaginaarne koonus tipuga reeperi alguspunktis. 2) Kaks lõikuvat tasandit, lõikesirge $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$. 3) Koonus tipuga reeperi alguspunktis. 4) Ühtuvate tasandite paar. 5) Imaginaarsete tasandite paar. 18.24. 1) Ühekattene hüperboloid $4x^2 + 8y^2 - 2z^2 - 5 = 0$ ( $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = -2$, keskpunkt $C(-1,-1,1)$). 2) Pöördkoonus $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ ( $\lambda_1 =$

$= \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$, keskpunkt $C(1,1,-1)$. 3) Kahekattene hüperboloid $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + 6 = 0$ ($\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$, $\frac{\Delta}{\delta} = 6$). 4) Ellipsoid $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 32 = 0$ ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$, keskpunkt $C(-1,-1,0)$. 5) Elliptiline silinder $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$, kesksirge $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$. Kandes reeperi alguspunkti kesksirge ühte punkti, näiteks punkti $C(0,1,0)$, siis $2F' = -6$). 18.25. 1) Ellipsoid; 2) ühekattene hüperboloid; 3) kahekattene hüperboloid; 4) koonus; 5) elliptiline paraboloid; 6) hüperboolne paraboloid; 7) elliptiline silinder; 8) hüperboolne silinder; 9) paraboolne silinder; 10) hüperboolne paraboloid; 11) ühekattene hüperboloid. 18.26. 1), 3), 4) lõikuvad tasandid, 2),5) paralleelsed tasandid, 6) ühtuvate tasandite paar. Tasandite võrrandid: 1) $2x + y = 0$, $y + 2z - 2 = 0$; 2) $x - 2y + 3z + 2 = 0$, $x - 2y + 3z - 3 = 0$; 3) $x + 2y + 3z + 4 = 0$, $3x - 2y + z - 6 = 0$; 4) $x + y + z + 1 = 0$, $5x + 4y + 3z + 2 = 0$; 5) $2x - 7y + z + 3 = 0$, $2x - 7y + z + 1 = 0$; 6) $(4x + 3y + 10z + 7)^2 = 0$. 18.27. 1) Ühekattene hüperboloid $\frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{1}{\sqrt{6}})^2} - \frac{Z^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$, keskpunkt $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; kanoonilise reeperi ühikvektorid $\bar{e}_1' = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\bar{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\bar{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. 2) Elliptiline silinder $\frac{X^2}{\frac{2}{3}} + \frac{Y^2}{1} = 1$, sümmeetriatelg $x = t$, $y = 2 + 2t$, $z = -1 - t$, x-telje sihivektor $\bar{e}_1' = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, y-telje sihivektor $\bar{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. 3) Paraboolne silinder $6X^2 - 2\sqrt{3}Y = 0$. 4) Paralleelsete tasandite paar $2x - 3y + z = -1 \pm \sqrt{6}$. 5) Ellipsoid $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{(\frac{2}{3})^2} = 1$ keskpunkt $(1,2,-1)$, $\bar{e}_1' = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\bar{e}_2' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $\bar{e}_3' = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. 6) Kahekattene hüperboloid $\frac{X^2}{\frac{4}{5}} + \frac{Y^2}{\frac{4}{15}} - \frac{Z^2}{\frac{4}{25}} = 1$, keskpunkt $(0, 1, -\frac{2}{5})$, $e_1' =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\bar{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\bar{e}_3' = (0,0,1)$. 7) Pöördkoonus $X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 0$, tipp $S(1,1,-1)$, telje sihivektor $\bar{s} = (2,1,-2)$. 8) Elliptiline paraboloid $\frac{X^2}{\frac{2}{2\sqrt{2}}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2Z$. Telje sihi ühikvektor, suunaga nõgususe poole $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, teljega ristuvate pealõigete peasihilised vektorid $\bar{u} = (1,1,-2)$, $\bar{v} = (1,1,1)$, tipp $S\left(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\right)$. 9) Elliptiline silinder $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1$, $A(0,1,0)$ - punkt silindri teljel, $\bar{s} = (1,0,1)$ silindri telje sihivektor, teljega ristuvate lõigete peasihilised vektorid $\bar{u} = (1,1,-1)$, $\bar{v} = (-1,2,1)$. 10) Ühekattene hüperboloid $\frac{X^2}{\frac{1}{3}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{6}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{2}} = 1$, tipp $O'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, telgede sihtide ühikvektorid $\bar{e}_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\bar{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\bar{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 11) Pöördsilinder $X^2 + Y^2 = \frac{1}{6}$, telje võrrand $5x - 2y - z + 5 = 0$; $x - y + z + 1 = 0$. 12) Hüperboolne silinder $X^2 - Y^2 = \frac{1}{3}$, telje võrrand $x + 2y - 5z + 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$. Pealõike reaaltelje sihivektor $\bar{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, imaginaartelje sihivektor $\bar{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 13) Hüperboolne paraboloid $p = \frac{4}{7\sqrt{14}}$, $q = \frac{2}{\sqrt{14}}$, tipp $S\left(-\frac{617}{392}, -\frac{113}{196}, \frac{1011}{392}\right)$, paraboloidi ja XZ-tasandi lõikena tekkinud parabooli telje sihivektor $\bar{u} = (1,2,-3)$, mis määrab ka telje positiivse suuna, X-telje sihivektor $\bar{e}_1 = (4,1,2)$, Y-telje sihivektor $\bar{e}_2 = (-1,2,1)$. 14) Hüperboolne paraboloid $7X^2 - 2Y^2 - \frac{8Z}{\sqrt{14}} = 0$. Tipp $S\left(-\frac{183}{784}, -\frac{499}{784}, \frac{509}{392}\right)$. X- ja Y-telgede sihivektorid vastavalt $\bar{e}_1 = (2,4,1)$, $\bar{e}_2 = (1,-1,2)$. Vektor $\bar{s} = (-3,1,2)$ on suunatud mööda paraboloidi telge suunaga väiksema parameetriga pealõike poole (O'XZ-tasandiga). 18.28. Ellipsoid $X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 - 2 = 0$. Märkus. Teisendusvalemite leidmiseks leiame kõigepealt pinna keskpunkti $C(1,2,-1)$, mille võtame uue reeperi alguspunktiks. Uue reeperi telgedeks võtame pinna teljed (s.t. uue reeperi vektoriteks võtame pinna peasihilised vektorid). Pinna karakteristliku võrrandi lahenditeks on $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$ ja lahenditele vastavad peasihilised vektorid on $\bar{e}_1 = (1,2,2)$, $\bar{e}_2 = (2,1,-2)$, $\bar{e}_3 = (2,-2,1)$. Uue ja vana reeperi vektorite vahelised nurgad on $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\cos\beta_1 = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma_1 = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\cos\beta_2 = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma_2 = -\frac{2}{3}$, $\cos\alpha_3 = \frac{2}{3}$, $\cos\beta_3 = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma_3 = \frac{1}{3}$. Koordinaatide teisendusvalemid $x = \frac{1}{3}(X + 2Y + 2Z) + 1$, $y = \frac{1}{3}(2X + Y - 2Z) + 2$, $z = \frac{1}{3}(2X - 2Y + Z) - 1$. Pinna lihtsaima (kanoonilise) võrrandi saamiseks ei ole vaja teisendusvalemeid. Karakteristliku võrrandi lahendid $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ annavad ruutliikmete kordajad, vabaliikme saame, kui asendame keskpunkti koordinaadid pinna võrrandisse $2F_o = -6$. 18.29. 1) Hüperboolne paraboloid $Z = 2X - 4Y$, tipp $S(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$; 2) elliptiline paraboloid $Z = X^2 + 3Y^2$, tipp $S(0,1,-2)$; 3) koonus $X^2 + Y^2 - 3Z^2 = 0$, tipp $S(-1,-1,-1)$; 4) tasandite paar $x + y \pm z = 0$; 5) paraboolne silinder $Z^2 = 5X$; 6) paraboolne silinder $Z = 2X^2$; 7) hüperboolne silinder $Z^2 - 2X^2 = 1$; 8) ellipsoid $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} + \frac{Z^2}{4} = 1$, keskpunkt $C(3,-1,1)$; 9) koonus $X^2 - Y^2 + Z^2 = 0$; 10) tasandite paar $X - Y \pm ( Z - 1 ) = 0$; 11) ühekattene hüperboloid $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} - \frac{Z^2}{16} = 1$, keskpunkt $C(5,2,3)$; 12) hüperboolne paraboloid $X^2 - Y^2 = 2Z$; 13) paraboolne silinder $3X^2 - 10Y = 0$: 14) pöördsilinder $X^2 + Z^2 = 1$; 15) sfäär $(X - 1)^2 + (Y + \frac{2}{3})^2 + Z^2 = \frac{16}{9}$; 7) pöördkoonus $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$; 18) tasandite paar $(2X - 1) \pm (Y - 2) = 0$. 18.30. $X^2 + Y^2 = 3$. Märkus. Kuna antud pind on pöördpind, siis on määratud üheselt ainult üks peasiht ja nimelt see, mis vastab omaväärtusele $\lambda = 0$. Võtame selle peasihi reeperi Z-telje sihiks $\bar{e}_3 = (2,-1,2)$. X-ja Y-telje sihivektoriteks võime võtta suvalised vastastikku ristuvad ja leitud sihiga ristuvad vektorid. Kui näiteks võtta $\bar{e}'_1 = (1,0,-1)$ ja $\bar{e}'_2(1,4,1)$, siis koordinaatide teisendusvalemid on $x = \frac{3X + Y + 2\sqrt{2}Z}{3\sqrt{2}}$, $y = \frac{4Y - \sqrt{2}Z}{3\sqrt{2}}$, $z = \frac{-3X + Y + 2\sqrt{2}Z}{3\sqrt{2}}$. Reeperi alguspunkt jääb muutmata, kuna kesksirge $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ läbib reeperi alguspunkti. 18.31. x-teljega: $A_1(2,0,0)$, $A_2(\frac{1}{2},0,0)$; y-teljega pinnal reaalseid lõikepunkte ei ole; z-telg puutub pinda punktis $C(0,0,-\frac{3}{2})$. 18.32. $M_1(1,2,3)$ ja $M_2(2,-1,-4)$. Märkus. Lõikepunktide leidmine on lihtne, kui teisendada eelnevalt sirge võrrand parameetrilisele kujule: $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7} = t$, millest $x = -t$, $y = 3t + 5$, $z = 7t + 10$. 18.33. 1) Sirge on pinnal; 2) sirge puutub pinda punktis $Q(-3,0,0)$. 18.34. $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} = 0$; 2) $a_{11} = 0$; 3) $a_{11} = a_{14} = 0$; 4) $a_{11} = a_{14} = a_{44} = 0$; 5) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} < 0$. Märkus. Ülesanne taandub ruutvõrrandi $a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0$ uurimisele. Viimase võrrandi me saame teist järku pinna üldvõrrandist, võttes $y = 0$ ja $z = 0$. 18.35. 1) $a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}xz = 0$; 2) $2a_{12}xy + 2a_{31}xz + 2a_{23}yz + a_{44} = 0$. 18.36. $z - 1 = 0$, $x + y - z + 3 = 0$ ja $x - z + 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$. 18.37. z-telg ja sirge $\frac{x}{-16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{9}$. Märkus. Reeperi alguspunkti läbiva iga sirge võrrandi võib esitada kujul $x = lt$, $y = mt$, $z = nt$. Kui sirge asub pinnal, siis sirge ja pinna lõikepunktide leidmise võrrand peab olema samasus, s.t. kõik kordajad peavad olema nullid. Saadud seostest määrame sirge sihivektori koordinaadid l, m, n. Meenutame, et sihivektor määratakse kordaja täpsusega. 18.38. $\frac{x + \sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ ja $\frac{x - \sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Märkus. Otsitavad sirged võib esitada võrrandiga $\frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{1} = \frac{z-c}{-1}$ ehk $x = 2t + a$, $y = t + b$, $z = -t + c$. Kuna sirge asub pinnal, siis peab sirge ja pinna lõikepunktide leidmise võrrand olema samasus. Sirget määrava punkti $A(a,b,c)$ koordinaatidest ühe võib valida suhteliselt vabalt, sest sirget võib määrata ükskõik millise tema punkti abil. Võttes näiteks $c = 0$, tähendab, et me võtame punktiks A sirge ja xy-tasandi lõikepunkti. 18.39. $x - y - z = 2k(\sqrt{3} + y - z)$, $k(x - y - z) =$

$= \sqrt{3} - y + z$. 18.40. Üks parv: $x = u$, $u(y + z) = - x - y - 1$, teine parv: $y + z = v$, $vx = -x - y - 1$. 18.41. $u(x + z + 1) = y - x + z + 2$, $x + z + 1 = u(y - x + z)$. 18.42. $xz + yz - 2y = 0$. 18.43. Otsitava omadusega punktide hulgaks ühekattesel hüperboloidil on neljandat järku pinna $-\frac{y^2}{b^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{c^2x^2}{a^2} + 2y^2 - b^2 = 0$ ja antud ühekattese hüperboloidi lõikejoon. Tasandid, mis on paralleelsed nendes punktides võetud puutujatasandiga, lõikavad pinda mööda võrdhaarseid hüperboole. 18.44. Märkus. Võtta z-teljeks joonpinna moodustaja, mille punktidest on võetud pinna normaalid. 18.45. Sirgete hulk on koonus $2xy - xz + yz = 0$. 18.46. Tasandite paar $2x + y - 3z = 0$ ja $x - y + z = 0$. 18.47. Ainult üks sirge $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$. Märkus. Asümptootiline koonus lagub imaginaarsete tasandite paariks, mis lõikuvad mööda reaalset sirget. 18.48. Leidub ainult üks ülesande tingimusi rahuldav sirge $x = 1$, $y = -1$. 18.49. 1) $a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{23}np + 2a_{31}pm = 0$; 2) $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{p^2}{c^2} = 0$; 3) $\frac{m}{n} = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$. 18.50. 1), 4), 5) on asümptootilise sihiga; 2) ja 3) - ei ole. 18.51. Kõik vektoriga $\overline{s} = (2,1,0)$ paralleelsed sirged. Sirgjoonsed moodustajad $\frac{x + 2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{0}$ ja $\frac{x - 4,5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{0}$. 18.52. 1) Koonus $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) - 2(y - 1)(z + 1) + 6(x - 1)(z + 1) = 0$; 2) maginaarne koonus $9(x - 4)^2 + 36y^2 + 4(z + 3)^2 = 0$; 3) koonus $(x + \frac{1}{3})^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 + (z - \frac{2}{3})^2 + 4(x + \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3}) = 0$. 18.53. Asümptootiline koonus on reaalne mittelaguv teist järku koonus. 18.54. 1) $\varphi = 135°$; 2) $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 45°$. 18.55. $5x + 6y + 7z - 4 = 0$; $\frac{x}{5} = \frac{y + 4}{6} = \frac{z - 4}{7}$. 18.56. $3z + 2 = 0$. Lõikejooneks on imaginaarsete sirgete paar. 18.57. $M_1(-1, 2 + \sqrt{5}, 1)$ ja $M_2(-1, 2 - \sqrt{5}, 1)$. 18.58. $x + 2y - 2 = 0$ ja $x + 2y = 0$. Märkus. Antud pinna puutujatasandi võrrand pinna punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ on $(4x_0 + 2z_0)x + (6y_0 - 4)y + (2x_0 + 4z_0 - 2)z +$

$+ (-4y_o - 2z_o + 3) = 0$. Puutepunkti $M_o$ koordinaadid määratakse tingimustest, et 1) puutujatasand on paralleelne antud tasandiga, s.t. vastavate tundmatute kordajad on võrdelised ehk $\frac{4x_o + 2z_o}{1} = \frac{6y_o - 4}{2}$, $2x_o + 4z_o - 2 = 0$. 18.59. $4x - 5y - 2z + 2 = 0$. Märkus. Antud sirget läbiva iga tasandi võrrandi võib esitada kujul $4x - 5y + \lambda(z - 1) = 0$. Ülesande lahendamiseks tuleb leida ainult parameeter $\lambda$, mille korral see tasand puutub pinda, s.t. mille korral võrrandi kordajad oleksid võrdelised pinna puutujatasandi üldvõrrandi (18.35) vastavate kordajatega. Läbi antud sirge võib panna ainult ühe puutujatasandi, kuna antud sirge on pinna puutuja. 18.60. $2x - z = 0$. Märkus. Kui puutujatasand läbib ordinaattelge, siis tema võrrandis ordinaadi kordaja ja vabaliige peavad olema võrdsed nulliga ($y_o = 0$, $2x_o - z_o = 0$). Saadud võrranditest ja pinna võrrandist (puutepunkt on pinna punkt) leiame puutepunkti $M_o(x_o, y_o, z_o)$ koordinaadid. 18.61. Mööda kahte sirgjoonset moodustajat. 18.62. Elliptiline silinder $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y = 0$. Märkus. z-teljega paralleelsed sirged määratakse võrrandiga $x = a$, $y = b$. Kuna vaadeldud sirge puutub pinda, siis pinnaga lõikepunktide leidmise ruutvõrrandi diskriminant peab olema null, s.t. $a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a - 4b = 0$. Elimineerides parameetrid a ja b saadud võrrandist ja moodustaja võrrandist, saamegi otsitava pinna võrrandi. 18.63. Koonus $x^2 - 4xz - 8yz = 0$. Märkus. Iga reeperi alguspunkti läbiva sirge võrrandi võib esitada kujul $x = lz$, $y = mz$. Selleks et sirge oleks pinna puutujaks, peab ta pinnaga omama kaks ühtuvat lõikepunkti: $(l^2 + 2m^2 + 2lm + 2)z^2 - 2(l + 2m + 2)z + 2 = 0$, s.t. saadud ruutvõrrandi determinant peab olema null: $\Delta = -b^2 + 4l + 8m = 0$. Elimineerides saadud võrrandist ja sirge võrranditest sihivektori koordinaadid l ja m, saame otsitava koonuse võrrandi. 18.64. Lõikejoon on ellips $3x^2 + 8xy + 8y^2 - 4x - 8y = 0$, $x + 2y + 2z - 2 = 0$, lõiketasand $x + 2y + 2z - 2 = 0$. Märkus. Selleks et leida puutujakoonuse ja pinna puutepunkte, lahendame koos koonuse moodustaja ($x = lz$, $y = mz$) ja pinna võrrandi. Puutepunkti aplikaadi jaoks saame ruutvõrrandi $(l^2 + 2m^2 + 2lm + 2)z^2 - 2(l + 2m + 2)z + 2 = 0$, kust võrrandi lahendite võrdsuse tõttu saame $z = \frac{l + 2m + 2}{l^2 + 2m^2 + 2lm + 2}$. Elimineerides saadud võrrandist ja moodustaja võrranditest parameetrid $l$ ja $m$, saame võrrandi, mida rahuldavad puutepunktide koordinaadid $x^2 + 2y^2 + 2xy + 2z^2 - x - 2y - 2z = 0$. Puutepunktidest koosnev kõver asub lähtepinnal ja saadud pinnal. Saadud võrrandite ruutliikmete osad ühtivad. Lahutades esimesest võrrandist teise, saame tasandi võrrandi $x + 2y + 2z - 2 = 0$, mis läbib otsitavat kõverat. Seega, puutepunktidest koosnev kõver on tasandiline kõver ja teda võib vaadelda kui koonuse $x^2 - 4xz - 8yz = 0$ ja tasandi $x + 2y + 2z - 2 = 0$ või kui selle tasandi ja silindri, mis projekteerib selle kõvera koordinaattasandile, lõikejoont. 18.65. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$

Märkus. Otsitav tingimus on samaväärne pinna ja tasandi lõikejoone sirgete paariks lagumise tingimusega. 18.66. Märkus. Koostada koonuse võrrand reeperi suhtes, mille teljed ühtivad puutujatasandite puutujasirgetega ja nende endi lõikesirgega. 18.67. 1) $7x + 17y + 19z + 19 = 0$; 2) $2x + y + 3z + 4 = 0$; 3) $x + 5y + 6z + 7 = 0$; 4) $3x + 6y + 8z + 9 = 0$. Märkus. Kasutada võrrandit (18.36). Kui köölud on paralleelsed x-teljega, siis sihivektoriks on $\bar{i} = (1,0,0)$, ja kasutades võrrandit (18.36), saame, et x-telje kaasdiameetertasandi võrrand on $F_x = 0$. 18.68. $x = y = z$; $x - 2y + 1 = 0$. Märkus. Otsitava diameetri (sirge) määravad reeperi alguspunkt ja pinna keskpunkt. 18.69. $2x - 2y + 3z = 0$; $\bar{s} = (1,-2,4)$. Märkus. Leiame pinna keskpunkti C. Diameetertasand on nüüd määratud kolme punktiga O, A ja C. Otsitava sihivektori koordinaadid saame leitud diameetertasandi ja diameetertasandi üldvõrrandi kordajate võrdelisuse tingimusest. Selle ülesande lahendamisel võib kasutada ka pinna diameetertasandite kimbu võrrandit ja määrata parameeter tingimustest, et otsitav diameetertasand läbib kahte antud punkti. Sel meetodil lahendamisel ei ole vaja leida pinna keskpunkti. 18.70. $x + 3y - z - 1 = 0$; $\frac{x + \frac{1}{3}}{2} = \frac{y - \frac{2}{9}}{-1} = \frac{z + \frac{2}{3}}{5}$. 18.71. $27x - 33y + 37z + 44 = 0$. 18.72. $\cos = \frac{23}{37\ 21}$. Märkus. Otsitava diameetertasandi võrrand on $x - 6z = 0$, tema kaassihi sihivektor on $\bar{s} = (1,-2,4)$. 18.73. $2x + y + 4z = 0$. 18.74. $7x - 28y - 14z - 8 = 0$. Märkus. Iga diameetertasand omab lõpmata palju kaasdiameetertasandeid; nendeks on kõik tasandid, mis läbivad tema kaasdiameetrit. 18.75. $3x - 5y - 6 = 0$; $x - z = 0$ ja $5x - y - 10 = 0$. 18.76. $\bar{e}_1 = (0,0,1)$, $\bar{e}_2 = (1,1,0)$, $\bar{e}_3 = (1,-1,0)$. Märkus. Karakteristliku võrrandi lahendid on $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Esimene peasiht on paralleelne z-teljega, teine ja kolmas poolitavad x- ja y-telje vahelised nurgad. 18.77. $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 1}{0}$; $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 1}{1}$; $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 1}{2}$. Märkus. Leiame pinna keskpunkti $C(1,-1,1)$ ja peasihid. Karakteristliku võrrandi lahendid on $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Pinna teljed on keskpunkti läbivad peasihilised sirged. 18.78. $x - y = 0$; $x + y - z = 0$; $3x + 3y + 6z - 2 = 0$. Märkus. Karakteristliku võrrandi lahendid on $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -6$, peasihid $\bar{e}_1 = (-1,1,0)$, $\bar{e}_2 = (1,1,-1)$, $\bar{e}_3 = (1,1,2)$. Peadiameetertasanditeks on peasihtide kaasdiameetertasandid. 18.79. $x + y + z = 0$ 18.80. $x - y - z = 0$, $(0,0,1)$. 18.81. $4x - y - 4z + 1 = 0$. 18.82. $(0,1,0)$. 18.83. $Y = h$. 18.84. $3x + 1 = 0$, $3z - 2 = 0$. 18.85. $z = 1$, $2x - 3y = 0$. 18.86. $7x + 17y + 19z + 19 = 0$. 18.87. Märkus. Koostada pinna võrrand reeperi suhtes, mille telgedeks on antud tetraeedri ühest tipust lähtuvad kolm serva. 18.88. Märkus. Tarvilikkus. Olgu A ja B teist järku pindade ruutosa maatriksid. Leiduvad ortogonaalsed teisendused, mis teisendavad mõlema pinna maatriksid diagonaalkujudele $\lambda$ ja $\mu$. Kui C on baasiteisenduse maatriks, siis $C^{-1}AC = \lambda$, $C^{-1}BC = \mu$, kust $AB = C\lambda\mu C^{-1}$, $BA = C\mu\lambda C^{-1}$. Kuna $\lambda\mu = \mu\lambda$, siis $AB = BA$. 18.89. Märkus. Koostame elliptilise paraboloidi võrrandi järgmise ristreeperi suhtes: z-teljeks võtame ristuvate diameetertasandite lõikesirge, ühe märgitud tasanditest loeme xz- ja teise yz-tasandiks. Sellise reeperi korral pinna võrrandil on kuju $2z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Siit $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = a_{11} + a_{22} = I_1$. 18.90. Teist järku pind $(x - a)F_x + (y - b)F_y + (z - c)F_z = 0$, kui $2F(x,y,z) = 0$ on antud pinna võrrand. 18.92. $l(a_{11}x + a_{14}) + m(a_{22} + a_{24}) + n(a_{33}z + a_{34}) = 0$. 18.94. $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 18.95. $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 18.96. (0,0,1). 18.97. 1) Ellips $3x^2 + 4y^2 + 2xy + 5x - 8 = 0$, $z = 0$; 2) hüperbool $3z^2 + 2yz - z - 1 = 0$, $x = 0$; 3) kaks sirget $x + z = 0$, $y = 0$ ja $x - 1 = 0$, $y = 0$. 18.98. Ellips. Märkus. Koostame vaadeldavat kõverat yz-tasandile projekteeriva silindri võrrandi $3y^2 + 4z^2 + 3by - 96z + 384 = 0$. Saadud silindri lõikejooneks yz-tasandiga on ellips. Järelikult, vaadeldav silinder on elliptiline silinder ja joon, mida ta projekteerib, on ellips. 18.99. Hüperbool. 18.100. 1) Lõikuvate sirgete paar; 2) imaginaarne teist järku kõver. 18.101. Selline lõige leidub, kui võrrandi $\frac{B^2}{b^2} - \frac{A^2}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ korral leiduvad sellised lahendid A ja B, et $A^2 + B^2 < 1$.

18.102.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & C \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

18.103. $x + y + 2z + 5 = 0$, $x + (-3 \pm \sqrt{8})y - 5 \pm 2\sqrt{8} = 0$. 18.104. $4x - 3y - 5z + 4 = 0$. Märkus. Otsitav tasand on paralleelne koonuse puutujatasandiga. 18.105. $2x + y + 2 + \lambda(y + z) = 0$, kui $\lambda < -\frac{5}{2}$. 18.106. $x - y + (-2 \pm \sqrt{7})(2x - z) = 0$. Märkus. Määrata vastastikku ristuvad asümptootilised sihid. 18.107. $x - 4y + 2z = 0$. Märkus. Otsitaval tasandil asuvad pinna kõõlud, mis läbivad reeperi alguspunkti ja poolituvad selles. 18.108. Parabool $y^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}x$, parameeter $p = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, parabooli teljed $2x + 1 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$, tipp $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{8})$, parabooli telje sihivektor suunaga parabooli nõgususe poole (1,0,-1). 18.109.

$\frac{27-\sqrt{33}}{12}x^2 + \frac{27+\sqrt{33}}{12}y^2 - 1 = 0$. Keskpunkt asub reeperi alguspunktis, peasihtide sihivektorid on $(\sqrt{33}+15,\ -12-4\sqrt{33},\ -18+2\sqrt{33})$, $(-15+\sqrt{33},\ 12-4\sqrt{33},\ 18+2\sqrt{33})$. 18.110. $x = \frac{3}{4} + t,\ y = \frac{3}{4} + t,\ z = \frac{1}{4} + t$. 18.111. $y + 2z = 0$. 18.112. 1) $x^2 + y^2 - k^2z^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 + \alpha z^2 + 2\beta xz + 2\gamma yz - 1 = 0$; siin $\alpha > \beta^2 + \gamma^2$, kusjuures $\alpha \leqslant -2$ või $1 + 2\alpha - \gamma^2 - \beta^2 \leqslant 0$. 18.113. 1) $x^2 + y^2 - k^2z^2 = -1$; 2) $x^2 + y^2 + \alpha z^2 + 2\beta xz + 2\gamma yz + 1 = 0$, kus $\alpha < \beta^2 - \gamma^2$, $\alpha \leqslant -2$ või $1 + 2\alpha - \gamma^2 - \beta^2 \leqslant 0$. 18.114. $x - \lambda = 0,\ x + y - z - \mu = 0$. 18.115. $2x + 3\sqrt{2}\,z = 9\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}\,z - 2x = 9\sqrt{2}$. 18.116. $x - (3 \pm 2\sqrt{2})y + \lambda = 0$, kus $\lambda$ on reaalarv. 18.117. $z + 1 = 0,\ x + 2y - 2 = 0$ ja $z + 1 = 0,\ 3x + 4y - 4 = 0$. 18.118. $x + 1 = 0,\ y + 1 = 0$. 18.119. $-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\beta^2 + \frac{1}{\lambda_1} - 2\gamma + \lambda_1R^2 = 0$, $\alpha = 0$ – parabool. Märkus. Koostada pindade parve võrrand $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 - 2z - \sigma[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - R^2] = 0$ ja nõuda, et $\Delta = \delta = I_2 = 0$. 18.120. $x^2 + y^2 + z^2 \pm \sqrt{3}\,xz - yz - 1 = 0$. Märkus. Tingimusest $\Delta = \delta = 0$ järeldub, et $a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2 = 0$, $a_{34}^2 = 0$. Kuna silinder läbib antud ringjoont, siis silindri võrrand on $x^2 + y^2 - 1 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$. See pind lõikab sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ mööda kahte ringjoont. 18.121. $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 18.122. Tasandid, mis lõikavad teist järku pindu mööda ringjooni: 1) $\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}x \pm \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}z + \lambda\frac{ac}{b} = 0$, kus $|\lambda| < 1$; 2) $\pm\sqrt{\frac{p-q}{p}}\,y + \sqrt{\frac{q}{p}}\,z + (p-q)\sqrt{\frac{q}{p}}\,\lambda = 0$, kus $\lambda < \frac{1}{2}$ ehk $\pm\sqrt{\frac{p-q}{q}}\,y + z + \lambda(p-q) = 0$, $\lambda < \frac{1}{2}$; 3) $c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z + \lambda = 0$ suvalise $\lambda$ väärtuse korral; 4) $\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}y \pm \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}z + \lambda\frac{bc}{a} = 0$, kus $|\lambda| > 1$; 5) $c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z + D = 0$, kus

$D \neq 0$. 18.123. 1) Keskmine pooltelg $b$; 2) kui $a > b$, siis $R = a$, kui $b > a$, siis $R = b$. 18.124. Tasand $Ax + BY + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ lõikab hüperboolset paraboloidi mööda võrdhaarset hüperbooli, kui $C \neq 0$, $pA^2 - qB^2 + (p - q)C^2 = 0$, $D \neq \frac{1}{2}(p - q)C$. 18.125. Tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ määratakse tingimustega $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, $C^2c^2 < A^2a^2 + B^2b^2$, $D^2 + C^2c^2 - A^2a^2 - B^2b^2 \neq 0$. $A^2(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}) + B^2(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}) + C^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) = 0$. Lahend eksisteerib, kui $b > c$ või $a > c$. 18.126. Märkus. Võtta tasandiks, millel asub teist järku kõver, $xy$-tasand. 18.127. Märkus. Võtta antud teist järku kõverate tasandid reeperitasanditeks. 18.128. $\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \pm\dfrac{2ac\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2(a^2 + c^2) - 2a^2c^2}$; tasandid on risti, kui $b^2(a^2 + c^2) - 2a^2c^2 = 0$. 18.129. $31x^2 - 51y^2 + 20z^2 - 26xy + 60xz + 20yz + 26x + 102y - 20z - 51 = 0$. Lõikuvate tasandite paar lõikesirgega, mis läbib antud sirgete lõikepunkti ja on risti nendega. 18.130. Hüperboolne paraboloid $y^2 + 2yz - z^2 + 4x - 2 = 0$. 18.131. $kxy + (k^2 + 1)cz = 0$. 18.132. $x^2 + 3z^2 - 4xy + 6z - 1 = 0$. 18.133. $z^2 = \alpha xy$. 18.134. $\frac{xy}{c} + \frac{xz}{b} + \frac{yz}{a} = 1$. 18.135. $y^2 + z^2 + \frac{p}{r}xy - 2px - 2ry = 0$. 18.136. $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2 + b^2}{ab}xy - 2ax - 2by = 0$. 18.137. Elliptiline silinder $(x + y - r)^2 + z^2 = r^2$. 18.138. $x^2 + y^2 - 12x - 18y - 2z + 32 = 0$. 18.139. $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 3x - 5z = 0$. Märkus. Eelnevalt koostada paraboloidi võrrand uues reeperis, mille korral $x'y'$-tasand ühtib tasandiga $x - z = 0$. 18.140. $x^2 + y^2 + xz - yz - 2rx = 0$. 18.141. $z^2 + 3xz - yz + 6x + 2y - 4 = 0$ ja $z^2 - 2xy + 2xz - yz + 4x + 2y - 4 = 0$. 18.142. Elliptiline paraboloid $x^2 + y^2 - 2z - 1 = 0$. 18.143. $x^2 + 3z^2 - 4xy + 6z - 1 = 0$. 18.144. $xy - \lambda z^2 = 0$, $\lambda \neq 0$. 18.145. $2a_{12}xy + 2a_{24}z = 0$. Märkus. $x$- ja $y$-telje kuuluvusest pinnale järeldub, et $a_{11} = a_{14} = a_{24} = a_{22} = a_{44} = 0$; kuna diameeter ($z$-telg) on $xy$-tasandiga kaassihiline, siis $a_{13} =$

$= a_{23} = 0$. Paraboloidi korral $a_{33} = 0$. 18.146. $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$. 18.147. $\frac{(x - y + 1)^2}{32} + \frac{(x + y - 2z)^2}{24} + \frac{(x + y + z - 1)^2}{3} = 4$. 18.148. $x + y + z \pm 1 = 0$ – kaks paralleelset tasandit. 18.149. Ühekattene hüperboloid $4(x + y + z)^2 - 3(2x - y - z)^2 + (y - z + 1)^2 = 1$. 18.150. $x^2 + y^2 + (l^2 + m^2)z^2 - 2lxz - 2myz + 2a_{34}z - r^2 = 0$, $a_{34} \neq 0$. 18.151. $z^2 - 2xy - az + \frac{z}{2a}(x + y)^2 = 0$. 18.152. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{\gamma^2}(1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2})z^2 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 0$, kui $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on antud ellipsi võrrand ja $A(\alpha, \beta, \gamma)$, $B(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ on kaks antud punkti. 18.153. $4x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

18.154.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & z \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -(x^2 + y^2 + z^2) \\ x & y & z & -(x^2 + y^2 + z^2) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

18.155. $k^2x^2 - y^2 + (k^2 - 1)z^2 = (k^2 - 1)c^2$. 18.156. $y^2 + z^2 = 2px$. 18.157. $b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}}$. 18.158. $\frac{1}{\lambda_1}$. 18.159. $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_3z = 0$. 18.160. $V = \frac{\pi\sqrt{-\Delta^3}}{\delta^2}$. Märkus. Kui ellipsoid on määratud kanoonilise võrrandiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, siis ruumala $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

18.161. Ellipsoidi keskpunkti koordinaadid. 18.162. Kui $a'_{44} = a_{44} - \frac{\Delta}{\delta}$, siis saame võrrandi, mida rahuldavad ainult antud ellipsoidi keskpunkti koordinaadid, $a'_{44}$ muutumisel ühele poole arvust $a_{44} - \frac{\Delta}{\delta}$ saame antud ellipsoidiga homoteetsed ellipsoidid, muutumisel teisele poole näidatud arvust saame imaginaarsed ellipsoidid. Märkus. Homoteetiaks nimetatakse teisendust, mille korral igale ruumipunktile M seatakse vastavusse punkt M' nii, et $\overline{SM'} = k\,\overline{SM}$, kus S on fikseeritud punkt, nn. homoteetia keskpunkt (tsenter), k nullist erinev konstant, mida nimetatakse homoteetia koefitsiendiks. Homoteetia määratakse tsentriga S ja vastavate punktide paariga ning tähistatakse H(S,A,A'). Homoteetia on erijuht afiinsest teisendusest, mille korral eksisteerib ainult üks püsipunkt. Homoteetia erijuht on sarnasusteisendusest. 18.163. Märkus. Tasandipaar, mille tasandid läbivad ellipsoidi keskpunkti ja lõikavad teda mööda ringjoont, on antav reeperi suhtes, mille telgedeks on ellipsoidi teljed võrrandiga $(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)z_1^2 = 0$ või $(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \frac{\Delta}{\delta}) - [\lambda_2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \frac{\Delta}{\delta}] = 0$. 18.165. Kui hüperboloidide võrrandite kõik vastavad kordajad, välja arvatud vaba liige, on võrdelised. 18.166. Tähistame $Q = \frac{\Delta}{\delta} + b_{44} - a_{44}$. $Q > 0$, $\frac{\Delta}{\delta} > 0$ või $Q < 0$, $\frac{\Delta}{\delta} < 0$ – ühekattene hüperboloid; $Q < 0$, $\frac{\Delta}{\delta} > 0$ või $Q > 0$, $\frac{\Delta}{\delta} < 0$ – kahekattene hüperboloid; $Q = 0$ korral asümptootiline koonus. 18.167. Asendades punkti $X_0$ koordinaadid võrrandi vasakusse poolde, siis saadud avaldis peab olema arvude 0 ja $\frac{\Delta}{\delta}$ vahel. 18.168. Mööda hüperbooli. 18.169. Mööda ellipsit. 18.170. 1) $\Delta = \delta = 0$, $I_1^2 = 4I_2^2$, $I_1 K_3 < 0$; 2) $\Delta = 0$, $I_1\delta$ või $I_2 \leq 0$ ja kaks karakteristliku võrrandi lahendit on võrdsed; 3) $\Delta < 0$, $3I_2 = I_1^2$, $27\delta = I_2^3$. 18.171. $I_1 \cdot 2F(x_0,y_0,z_0) < 0$. 18.172. 1) Sümmeetriatelg säilib, uued silindrid on homoteetilised esialgsega; 2) sümmeetriatelg nihkub paralleelselt iseendaga, uus silinder on sarnane esialgsega. 18.173. 1) Silindri parameeter ei muutu, toimub ainult silindri rööplüke nõgususe poole ja moodustaja sihis; 2) muutub parameeter ja muutub moodustaja siht. 18.174. Asetades punkti $X_0$ koordinaadid silindri üldvõrrandi vasakusse poolde, peab vasak pool olema võrdne suurusega $\frac{K_3}{I_2}$. 18.175. Kaks asümptootilist tasandit. 18.176. $2F(x_0,y_0,z_0) \cdot I_1 < 0$. 18.177. $d = 2\frac{\sqrt{-K_3}}{|I_1|}$. 18.178. $\Delta = \delta = I_1 = K_3 = 0$, $I_2 \neq 0$. 18.179. $I_1 \cdot 2F(x_0,y_0,z_0) < 0$. 18.180. $\tan\alpha_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{-I_2}}{I_1}$.

30 kop.