Palun kirjutage lahenduste lehele oma nimi, variandi tähis ja rühma tähis või juhendaja nimi.
Ülesannete leht ja mustandipaberid **tuleb** ära anda koos valminud tööga.

Ülesanne 1

(5 p) Vektorruumid, vektorite lineaarne sõltuvus

Defineerige **vektorruumi alamruum**. Kas ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on vektorruumi $\mathbb{R}$ alamruum? Põhjendage.

Ülesanne 2

(10 p) Vektorruumid, vektorite lineaarne sõltuvus

Sõnastage ja tõestage **teoreem vektorsüsteemi lineaarse sõltuvuse kohta**

Ülesanne 3

(5 p) Read

Defineerige **arvrea absoluutne koonduvus**. Sõnastage d'Alembert'i koonduvustunnus. Tooge näide arvreast, mis koondub absoluutselt ja näidake arvrea koondumist d'Alembert'i tunnuse järgi.

Ülesanne 4

(10 p) Mitme muutuja funktsioonid

(a) (3 p) Defineerige kahe muutuja funktsiooni **esimest järku osatuletised**, esitage osatuletiste **valemid** definitsiooni põhjal (piirväärtuse kaudu). Tooge **näide** kahe muutuja funktsioonist $f(x, y)$, mille osatuletis argumendi y järgi punktis (0,7) on võrdne arvuga 14.

(b) (3 p) Defineerige kahe muutuja funktsiooni **pidevus** (koos vastava valemiga). Tooge näide funktsioonist $f(x, y)$, mis ei ole pidev punktis $(0, 0)$ ja mille piirväärtus punktis $(0, 0)$ võrdub ühega.

(c) (2 p) Defineerige funktsiooni $u = u(x, y, z)$ **gradient**. Tooge näide gradiendi leidmise kohta. Mida näitab gradient?

(d) (2 p) Sõnastage teoreem kahe muutuja funktsiooni lokaalsete **ekstreemumite tarvilike ja piisavate tingimuste** kohta.

Ülesanne 5

(4 p) Kordsed integraalid

Selgitage **muutuja vahetust kahekordses integraalis**, minnes üle polaarkoordinaatidele. Esitage vastav valem. Millistel juhtudel on vaja polaarkoordinaatidele üleminekut? Tooge näide.

Ülesanne 6

(7 p) Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Nimetage järgnevate **diferentsiaalvõrrandite liigid**, esitage nende **üldkuju** (muutujate selgitus) ja **lahendusmeetodid** (näiteks muutuja vahetuse avaldis)

$$1)\ y' - 2y = 5xy^2; \quad 2)\ y' + 2x^2y = \frac{e^{2x}}{x^5}; \quad 3)\ y' = \frac{-x + 2y + 1}{3x - 6y}.$$

Ülesanne 7

(5 p) Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Defineerige **eksaktne diferentsiaalvõrrand**, kirjutage võrrand üldisel kujul, võrrandi lahendi kuju ja **eksaktsuse tingimus**. Näidake võrrandi **lahenduskäik** üldisel kujul.

Ülesanne 8

(4 p) Teist ja kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Kirjutage diferentsiaalvõrrandile $y'' - 3y' = F(x)$ vastava **homogeense võrrandi lahend** ja esitage avaldis, millisel **kujul tuleks otsida erilahendit** määramata kordajate meetodil järgmistel juhtudel: 1) $F(x) = \cos(5x)$; 2) $F(x) = 12xe^{4x}$; 3) $F(x) = x^3 + x$.

Ülesanne 9

(10 p) Teist ja kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Esitage teist järku **lineaarse homogeense konstantsete kordajatega** diferentsiaalvõrrandi üldine kuju ning sõnastage kaks teoreemi ja järeldus võrrandi lahendite kohta. Näidake, et funktsioon $y = e^{kx}$ rahuldab võrrandit, kui k on konstant.

Ülesanne 10

(5 p) Diferentsiaalvõrrandisüsteemid ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

(a) (3 p) Defineerige **normaalsüsteem**, kirjeldage kahte erinevat lahendusmeetodit.

(b) (2 p) Defineerige **osatuletistega** diferentsiaalvõrrand. Kirjutage võrrandi üldkuju.

Ülesanne 11

(10 p) Leidke lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend $u = u(x, y, z)$, kui

$$-x\frac{\partial u}{\partial x} + (y + 2x)\frac{\partial u}{\partial y} + x^2e^{2x^2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$