ELMAR REIMERS

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

I

ALGEBRA VALEMID

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

HÜPERBOOLSE TRIGONOMEETRIA VALEMID

$$\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{sh}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta \pm \mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{ch}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta \pm \mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{sh}\,2\alpha = 2\mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha$$

$$\mathrm{ch}\,2\alpha = \mathrm{sh}^2\alpha + \mathrm{ch}^2\alpha$$

$$2\mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{sh}\,\beta = \mathrm{ch}(\alpha + \beta) - \mathrm{ch}(\alpha - \beta)$$

$$2\,\mathrm{sh}\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta = \mathrm{sh}(\alpha + \beta) + \mathrm{sh}(\alpha - \beta)$$

$$2\mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta = \mathrm{ch}(\alpha + \beta) + \mathrm{ch}(\alpha - \beta)$$

$$\mathrm{th}\,\alpha\ \mathrm{cth}\,\alpha = 1$$

$$2\mathrm{sh}^2\alpha = \mathrm{ch}\,2\alpha - 1$$

$$2\mathrm{ch}^2\alpha = \mathrm{ch}\,2\alpha + 1$$

TRIGONOMEETRIA VALEMID

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha \cot\alpha = 1$

$\sin(\alpha \pm \alpha) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \pm \sin\alpha \cos\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$\sin^{-2}\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha$

$\cos^{-2}\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

$4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$

$2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

$2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$

$2\sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arccos x = \operatorname{arccot}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$\operatorname{arccot} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

ELMAR REIMERS

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

I

Eesti NSV Kõrg- ja Keskerihariduse Ministeerium lubab kasutada kõrgkoolis õppevahendina matemaatika, rakendusmatemaatika ja füüsika erialadel

TALLINN «VALGUS» 1988

Retsenseerinud TPedI matemaatikakateeder ja J. Lamp
Kaane kujundanud T. Aru

R $\frac{1702050000-197}{902\ (15)-88}$ 13—88

ISBN 5—440—00229—4

EESSÕNA

Käesolev raamat annab ülevaate piirväärtuste teooria ning ühe muutuja funktsiooni diferentsiaal- ja integraalarvutuse meetoditest. Raamat sisaldab näiteid nende meetodite kasutamise kohta ja ülesandeid. Väljaanne on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi läbiviimiseks G. Kangro õpiku «Matemaatiline analüüs. I» (2., parand. ja täiend. tr. — Tln.: Valgus, 1983. — 504 lk.) järgi ENSV kõrgkoolides, eeskätt TRÜ matemaatika teaduskonnas ja füüsika osakonnas. Et teoreetiline osa on ulatuslik, siis sobib raamat ka käsiraamatuks paljude erialade spetsialistidele, kes puutuvad kokku ühe muutuja funktsiooni diferentsiaal- ja integraalarvutusega.

Praktikumi materjal on jaotatud kaheksasse peatükki ja see katab matemaatika ning rakendusmatemaatika eriala üliõpilaste õppeprogrammi. Üldse on vaatluse all 44 teemat, mis on esitatud paragrahvidena. Iga teema (paragrahv) jaotub kolmeks osaks: teoreetiline osa, näited ja ülesanded.

Teoreetilises osas defineeritakse kõik vajalikud põhimõisted, antakse ülesannete lahendusmeetodid ja tuuakse ära põhilised teoreemid ning tunnused, mis on vajalikud lahenduste põhjendamiseks. Teoreetiline osa võtab enda alla veidi üle kolmandiku raamatu mahust. Teooriat on isegi mõnevõrra rohkem esitatud, kui on vaja praktikumis, selleks et raamatut saaks iseseisvalt kasutada ka kaugõppijad.

Näited on toodud kõigi põhiliste lahendusvõtete kohta ja nad on tüüpilised antud ülesannete lahendamisel. Neis rõhutatakse neid momente, millele peab lahendaja eriti tähelepanu pöörama.

Ülesanded on üldiselt esitatud raskusastme järgi — algul lihtsamad ja kergemad, siis keerulisemad ja raskemad. Sageli on ülesanded rühmitatud tüüpide järgi, nii et ühe võttega lahendatavad ülesanded on järjestikku. Suurem osa ülesandeist on originaalsed või matemaatilise analüüsi tüüpülesanded, kuid palju ülesandeid on võetud ka ülesannete kogudest, millest eriti tuleks mainida järgmisi:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — 20-е изд. — М.: Наука, 1985. — 384 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. — 9-е изд. — М.: Наука, 1977. — 527 с.

Üldiselt on väljaanne mõeldud tööks õppejõu juhendamisel, kuid on jälgitud, et väljaannet saaks kasutada ka iseseisvaks tööks aine lahendusvõtete praktilisel omandamisel.

Kui praktikum toimub õppejõu juhendamisel, siis on soovitatav, et uue teema käsitlemisel õppejõud annaks ülevaate aine teoreetilisest osast vajalikus ulatuses ja analüüsiks soovitatud näiteid. Alles siis tuleks üliõpilastel asuda õppejõu juhendamisel ülesannete lahendamisele. On soovitatav iga näite järel kohe lahendada vastav grupp ülesandeid.

Ülesannete iseseisval lahendamisel on samuti soovitatav enne lahendama asumist läbi vaadata teoreetiline osa ja soovitatud näited. Kui aga ülesannete lahendamisel ilmnevad raskused või tekib soov kontrollida valitud lahendusviisi sobivust, on soovitatav vaadata lahendatava ülesande vastust, sest suurele osale ülesannetest on vastustes antud lahenduse põhjendus või juhised lahendamiseks, mis kõige kiiremini viivad sihile.

Seoses laboratoorsete tööde sisseviimisega õppeprotsessi TRÜ matemaatikateaduskonnas, on väljaandesse lisatud ülesandeid, mis on sobivad seda laadi töödeks.

Autor kasutab võimalust avaldada siirast tänu TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri töötajale Kersti Kolgile hoolika töö eest käsikirja trükitehnilisel vormistamisel.

Tartu, 1986. a.

Autor

Kasutatavad lühendid

D	— definitsioon	PT	— piisav tunnus
T	— teoreem	M	— meetod
KT	— koonduvustunnus	N	— näide
TT	— tarvilik tunnus	Mott	— tõestuse lõpp

Kasutatavad matemaatilised sümbolid

$\forall$ — iga, mis tahes

$\exists$ — on olemas, eksisteerib, eksisteerivad,

$\Leftrightarrow$ — siis ja ainult siis, parajasti siis,

$\Rightarrow$ ($\Leftarrow$) — järeldub (noole suunas),

$\wedge$ — ja

$\vee$ — või

Kasutatavad arvuhulkade tähistused

N — naturaalarvude hulk
Z — täisarvude hulk
Q — ratsionaalarvude hulk
R — reaalarvude hulk
$\varnothing$ — tühihulk
$[a, b]$ — lõik (punktide $x \in \mathbf{R}$ hulk, kus $a \leqslant x \leqslant b$)
(a, b) — vahemik (punktide $x \in \mathbf{R}$ hulk, kus $a < x < b$)
$[a, b)$ — poollõik (punktide $x \in \mathbf{R}$ hulk, kus $a \leqslant x < b$)
$(a, b]$ — poollõik (punktide $x \in \mathbf{R}$ hulk, kus $a < x \leqslant b$)

I. SISSEJUHATUS ANALÜÜSI

§ 1.1. SUMMA SÜMBOL

Järjestikuliste indeksitega suuruste $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ summa märkimiseks kasutatakse sümbolit $\sum$ (kreeka täht «sigma») järgmiselt:

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = \sum_{i=k}^{n} a_i, \tag{1}$$

kus sümboli $\sum$ all ja peal olevad indeksid k ja n näitavad vastavalt summa esimese liikme a_k ja viimase liikme a_n indeksit. Indeksit i nimetatakse **summeerimisindeksiks**. Sümboli $\sum$ järel kirjutatakse summa **üldliige**, s. o. avaldis a_i, millest saame summa kõik liikmed, andes summeerimisindeksile i väärtused $k, k+1, \ldots, n$.

Näited

N 1.1.1. Kirjutada sümboli $\sum$ abil summa

$$1+2+2^2+2^3+2^4.$$

Lahendus. Olgu summeerimisindeksiks täht j, siis summa kõik liikmed saame näiteks avaldisest 2^j, kui $j=0, 1, 2, 3, 4$. Seega

$$1+2+2^2+2^3+2^4 = \sum_{j=0}^{4} 2^j.$$

Sama summa liikmed saame näiteks ka avaldisest 2^{m-2}, kui $m=2, 3, 4, 5, 6$. Seega ka

$$1+2+2^2+2^3+2^4 = \sum_{m=2}^{6} 2^{m-2}.$$

Võib leida ka veel teisi kirjutisi antud summale sümboli $\sum$ abil.

N 1.1.2. Kirjutada sümboli $\sum$ abil summa

$$1-2+3-4+5-6+7.$$

Lahendus. Selle summa liikmed saame näiteks avaldisest $(-1)^{k+1}k$, kui $k=1, 2, \ldots, 7$. Seega

$$1-2+3-4+5-6+7 = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1}k.$$

Ülesanded

Kirjutada sümboli $\sum$ abil järgmised summad (vt. näited N 1.1.1 ja N 1.1.2).

1. $1+2+3+4+5$
2. $1-1+1-1+1-1$
3. $1+1+1+1+1+1$
4. $1-4+9-16+25$
5. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$
6. $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7$
7. $20+8+1+2+4+16$
8. $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$
9. $1+q+q^2+\ldots+q^k$
10. $a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$

Kirjutada ilma summa sümbolita järgmised summad.

11. $\sum_{k=1}^{6} b_k$
12. $\sum_{j=2}^{5} 3^j$
13. $\sum_{i=0}^{4} (2+i)$
14. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \log k$
15. $\sum_{n=1}^{1} (-1)^{n+1}5^n$
16. $\sum_{k=0}^{n} 3$

Tõestada järgmised summa sümboli omadused.

17. $\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$
18. $\sum_{i=1}^{n} ca_i=c\sum_{i=1}^{n} a_i$, kus $c=\text{const}$
19. $\sum_{i=0}^{n} a_i=\sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$
20. $\sum_{i=m}^{n} a_i=\sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$

§ 1.2. REAALARVU ABSOLUUTVÄÄRTUS JA JUURED

D 1.2.1. *Reaalarvu* a a b s o l u u t v ä ä r t u s e k s *nimetatakse arvu* $|a|$, *mis rahuldab tingimust*

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{kui } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{kui } a\leqslant 0.\end{cases} \tag{2}$$

Reaalarvu absoluutväärtuse omadused on antud ülesandeis 21—32.

Avaldise (2) põhjal võib kirjutada ka järgmised võrdused:

$$a=\begin{cases} |a|, & \text{kui } a\geqslant 0,\\ -|a|, & \text{kui } a\leqslant 0.\end{cases} \tag{3}$$

Arvu ξ nimetatakse reaalarvu a *n*-astme juureks, kui $\xi^n = a$.

Kui n on paaris naturaalarv ja $a > 0$, siis on olemas vaid kaks reaalarvu ξ_1 ja ξ_2, mis on arvu a n-astme juurteks, kusjuures $\xi_1 = -\xi_2$. Vaadeldaval juhul arvul $a < 0$ juuri ei ole.

Kui n on paaritu naturaalarv, siis igal arvul a on olemas vaid üks reaalarv ξ, mis on arvu a n-astme juureks, kusjuures $a > 0$ korral on $\xi > 0$ ja $a < 0$ korral $\xi < 0$.

Sümboliga $\sqrt[n]{a}$, mida kasutatakse ainult naturaalarvu n korral, tähistatakse

1) paarisarvulise n korral arvu a seda n-astme juurt ξ, mis on mittenegatiivne, s. o. $\xi \geqslant 0$.

2) paarituarvulise n korral arvu a ainsat n-astme juurt ξ.

Seega naturaalarvu n korral

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{kui } n \text{ on paarisarv,} \\ a, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv.} \end{cases}$$

Kui $n = 2$ kirjutatakse $\sqrt[2]{a^2}$ asemel $\sqrt{a^2}$. Seega

$$\sqrt{a^2} = |a|. \tag{4}$$

Sümbolit $\sqrt{\ }$ nimetatakse **juuremärgiks** ehk **radikaaliks**.

Näited

N 1.2.1. Juurida avaldis $\sqrt{x^2 y}$.

Lahendus. Võrduste (4) ja (2) põhjal saame:

$$\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y} = \begin{cases} x\sqrt{y}, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ -x\sqrt{y}, & \text{kui } x \leqslant 0. \end{cases}$$

N 1.2.2. Viia avaldises $x\sqrt{y}$ arv x juuremärgi alla.

Lahendus. Võrduste (3) ja (4) põhjal saame

$$x\sqrt{y} = \begin{cases} |x|\sqrt{y} = \sqrt{x^2 y}, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ -|x|\sqrt{y} = -\sqrt{x^2 y}, & \text{kui } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ülesanded

Tõestada järgmised reaalarvu absoluutväärtuse omadused.

21. $|a| \geqslant 0$

22. $|-a| = |a|$

23. $a \leqslant |a|$

24. $-a \leqslant |a|$

25. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

26. $|a-b| \leqslant |a| + |b|$

27. $|a| - |b| \leqslant |a+b|$

28. $|a| - |b| \leqslant |a-b|$

29. $||a|-|b||\leqslant|a+b|$

30. $||a|-|b||\leqslant|a-b|$

31. $|ab|=|a||b|$

32. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

Näidata, et võrratused järgmistes paarides on samaväärsed.

33. $|a|\leqslant b \Leftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b$ (kus $b\geqslant 0$)

34. $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$ (kus $b>0$)

Juurida järgmised avaldised (vt. näide *N* 1.2.1).

35. $\sqrt{(x-2)^2y}$

36. $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{(a-b)^2}}$

37. $x+\sqrt{x^2}$

38. $\sqrt[3]{x^3}$

39. $\sqrt{x^3}$

40. $\sqrt{25x^3y^3}$

41. $\sqrt{x(x^2-x+1)^2}$

42. $\sqrt{x^3-4x^2+4x}$

Viia kordaja juuremärgi eest selle alla (vt. näide *N* 1.2.2).

43. $x\sqrt{2}$

44. $(1-m)\sqrt{m-2}$

45. $x\sqrt{x-1}$

46. $(x^2-2x)\sqrt{x}$

§ 1.3. MATEMAATILISE INDUKTSIOONI MEETOD

Olgu antud seeria mingeid väiteid

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n,\ \ldots .$$

M 1.3.1. (Matemaatilise induktsiooni meetod). *Antud seerias iga väide V_n on õige, kui*

1° *V_1 on õige, s.t. seerias esimene väide on õige.*

2° *$V_k \Rightarrow V_{k+1}$, s.t. oletusest, et suvaline väide V_k on õige, järeldub, et järgnev väide V_{k+1} on õige.*

Sageli ülesannete lahendamisel matemaatilise induktsiooni meetodi abil tuleb eelnevalt püstitada väidete seeria, lähtudes ülesande sisust.

N 1.3.1. Leida summa

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

L a h e n d u s. Arvutades selle summa juhtudel $n=1, 2, 3$, saame

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=S_1+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=S_2+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

Saadud erijuhtude põhjal võime oletada, et

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

iga $n=1, 2, \ldots$ korral. Oletuse (väite) õigsust kontrollime matemaatilise induktsiooni meetodil. Väiteks V_n $(n=1, 2, \ldots)$ on meil oletus, et $S_n=n/(n+1)$.

1° Esimene väide V_1 on õige saamisviisi järgi.

2° Oletame, et väide V_k on õige suvalise k korral, s. t., et $S_k=k/(k+1)$. Siis võime kirjutada

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Saime väite V_{k+1}, s. t. $S_{k+1}=(k+1)/(k+2)$.

Matemaatilise induktsiooni meetodil oleme tõestanud, et tehtud oletus on õige. Seega iga $n=1, 2, \ldots$ korral on

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

Ülesanded

Leida järgmised summad (vt. näide N 1.3.1).

47. $S_n=1+3+\ldots+(2n-1)$ **48.** $S_n=2+4+\ldots+2n$

49. $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Tõestada järgmised valemid.

50. $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

51. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

52. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

53. $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x\neq 1)$

Tõestada järgmised võrratused.

54. $(1+x)^n>1+nx$, kui $x>-1$, $x\neq 0$, $n=2, 3, \ldots$

55. $2^n>2n+1$ kui $n=3, 4, \ldots$

56. $2^n>n^2$, kui $n=5, 6, \ldots$

57. $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$, kui $n=1, 2, \ldots$

§ 1.4. ABSOLUUTVÄÄRTUSTEGA ESIMESE ASTME VÕRRATUSED

Vaatleme absoluutväärtustega esimese astme võrratusi, s.o. esimese astme võrratusi, kus tundmatu x esineb ka avaldistes kujuga $|ax+b)$, näiteks

$$|x-1|+x>|2x+1|.$$

M 1.4.1. Absoluutväärtustega esimese astme võrratuste lahendamiseks toimime järgmiselt.

1° Leiame absoluutväärtuste, s.o. liikmete $|ax+b|$ nullkohad.

2° Jaotame saadud nullkohtade abil x-telje osadeks (võttes seejuures ka nullkohad saadud osade parempoolseteks või vasakpoolseteks otspunktideks).

3° Lahendame võrratuse x-telje igal saadud osal eraldi, kõrvaldades iga kord absoluutväärtused liikmetes $|ax+b|$ absoluutväärtuse definitsiooni D 1.2.1 abil. See on võimalik, sest nii saadud x-telje osadel $ax+b$ ei muuda märki. Tulemuseks saame osavastused $V_1, V_2, \ldots$, millest igaüks annab võrratuse lahendid x-telje vastava osa kohta.

4° Ühendame saadud osavastused $V_1, V_2, \ldots$ üldvastuseks V.

Näited

N 1.4.1. Lahendada võrratus

$$|x-1|+x>|2x+1|.$$

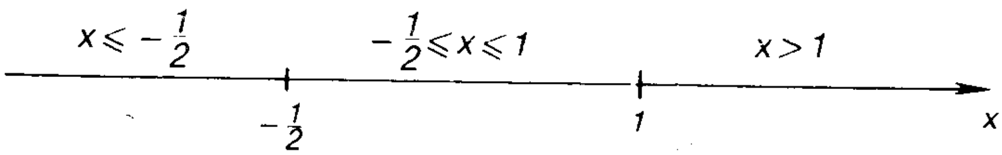
Lahendus. Lahendame võrratuse meetodi M 1.4.1 järgi.

1° Leiame absoluutväärtuste nullkohad, s.o. punktid x, kus

$$x-1=0, \quad 2x+1=0.$$

Saame kaks nullkohta $x=-1/2$ ja $x=1$.

2° Jaotame saadud nullkohtade $x=-1/2$ ja $x=1$ abil x-telje osadeks (vt. joon. 1.1). Saame osad $(-\infty, -1/2]$, $(-1/2, 1]$ ja $(1, \infty)$.



Joon. 1.1

3° Lahendame võrratuse x-telje igal saadud osal eraldi.

I. Kui $x \leqslant -1/2$, siis definitsiooni D 1.2.1 põhjal

$$|x-1|=-(x-1), \quad |2x+1|=-(2x+1).$$

Järelikult võime võrratuse esitada kujul

$$-(x-1)+x>-(2x+1),$$

mille lahendamine annab:

$$x>-1.$$

Näeme, et x-telje vaadeldaval osal $(-\infty, -1/2]$ on võrratus rahuldatud, kui $x>-1$. Seega oleme saanud esimese osavastuse

$$V_1:\ x\in(-1, -1/2].$$

II. Kui $-1/2<x\leqslant 1$, siis definitsiooni D 1.2.1 põhjal

$$|x-1|=-(x-1), \quad |2x+1|=2x+1.$$

ja võrratus x-telje sellel osal esitub kujul

$$-(x-1)+x>2x+1,$$

mille lahendamine annab:

$$x<0.$$

Näeme, et x-telje vaadeldaval osal $(-1/2, 1]$ on võrratus rahuldatud, kui $x<0$. Seega saime teise osavastuse

$$V_2:\ x\in(-1/2, 0).$$

III. Kui $x>1$, siis definitsiooni D 1.2.1 põhjal

$$|x-1|=x-1, \quad |2x+1|=2x+1$$

ja võrratus esitub kujul

$$(x-1)+x>2x+1,$$

mille lahendamine annab vastuolu $-1>1$, mis ütleb, et x-telje vaadeldaval osal $(1, \infty)$ võrratusel lahendeid ei ole. Seega saime kolmanda osavastuse

$$V_3:\ x\in\varnothing.$$

4) Ühendame osavastused kokku üldvastuseks

$$V:\ x\in(-1, 0).$$

Seega vaadeldava võrratuse lahenditeks on vahemiku $(-1, 0)$ punktid.

N 1.4.2. Lahendada võrratus

$$\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\geqslant 1.$$

Lahendus. Kasutades absoluutväärtuse omadust ülesandest 32, kirjutame võrratuse kujul

$$\frac{|1-x|}{|x+1|}\geqslant 1.$$

Kohal $x=-1$ kaotab võrratus mõtte, sest see punkt on nimetaja nullkoht. Seega punkt $x=-1$ ei ole võrratuse lahend. Eeldades nüüd, et $x\neq-1$, mille tõttu $|x+1|>0$, viime võrratuse kujule

$$|1-x|\geqslant|x+1|.$$

Edasi lahendame selle võrratuse nagu näites N 1.4.1, jättes välja punkti $x=-1$. Saame vastuseks $V:\ x\in(-\infty, -1)\cup(-1, 0]$. Seega vaadeldava võrratuse lahenditeks on vahemiku $(-\infty, -1)$ ja poollõigu $(-1, 0]$ punktid.

Ülesanded

Lahendada järgmised võrratused (vt. näited *N* 1.4.1 ja *N* 1.4.2).

58. $|x-2|<|2x-1|$
59. $|x|<|x+2|$
60. $|x+2|-|x-2|\leqslant x-1$
61. $2|x+1|>3x-|x+2|$
62. $|x|>x$
63. $|2x-1|\leqslant|1-x|$
64. $|x-3|-|2-x|\geqslant|x-1|$
65. $\left|\dfrac{x-3}{1-x}\right|>1$
66. $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|\geqslant 2$
67. $\dfrac{1}{|x-2|}<\dfrac{2}{|x+1|}$
68. $\dfrac{|x|-1}{|x-1|}\geqslant 1$

§ 1.5. RUUTVÕRRATUSED

Vaatleme ruutvõrratusi, kus esinevad ka absoluutväärtustega liikmed $|ax+b|$, näiteks

$$x^2-2|x+2|-4\leqslant 0.$$

Selliste võrratuste lahendamiseks kasutatakse järgnevates näidetes N 1.5.1 ja N 1.5.2. antud võtteid, kusjuures jällegi absoluutväärtuse kõrvaldame definitsiooni D 1.2.1 abil.

Näited

N 1.5.1. Lahendada võrratus

$$x^2+2x-3<0.$$

L a h e n d u s. Lahendamiseks joonestame võrratuses esineva ruutpolünoomi

$$y=x^2+2x-3$$

graafiku. Selleks leiame polünoomi nullkohad, s. o. punktid, kus

$$x^2+2x-3=0,$$

saame $x_1=-3$, $x_2=1$. Kanname need nullkohad xy-tasandil x-teljele ja joonestame graafiku, nagu näidatud joonisel 1.2. Võrratuse lahenditeks on need punktid x, kus $y<0$. Jooniselt on näha, et sellisteks punktideks on $x\in(-3, 1)$. Seega vaadeldava võrratuse lahenditeks on vahemiku $(-3, 1)$ punktid.

N 1.5.2. Lahendada võrratus

$$x^2-2|x+2|-4\leqslant 0.$$

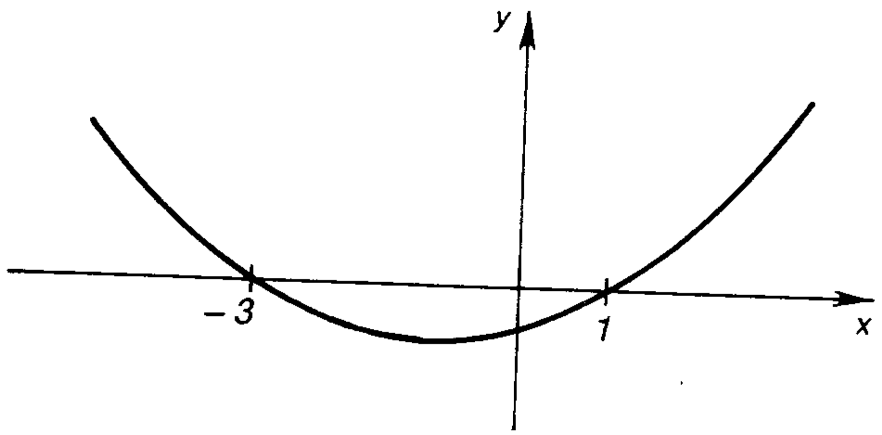
L a h e n d u s. Leiame absoluutväärtuse nullkoha, saame $x=-2$. Kanname leitud nullkoha x-teljele, millega x-telg jaotub kaheks osaks $(-\infty, -2]$ ja $(-2, \infty)$ (joon. 1.3). Lahendame nüüd võrratuse x-telje mõlemal saadud osal eraldi, kõrvaldades absoluutväärtuse definitsiooni D 1.2.1 põhjal.

1. Kui $x\leqslant-2$, siis $|x+2|=-(x+2)$ ja võrratus esitub kujul

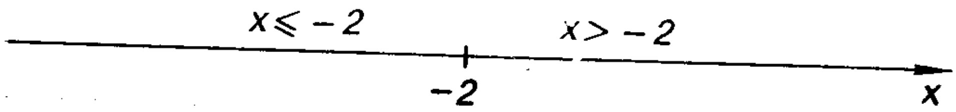
$$x^2-2[-(x+2)]-4\leqslant 0$$

ehk

$$x^2+2x\leqslant 0,$$



Joon. 1.2



Joon. 1.3

mille lahendamine (näites N 1.5.1 antud meetodiga) annab $-2 \leqslant x \leqslant 0$. Seega vaadeldaval x-telje osal $(-\infty, -2]$ on võrratus rahuldatud, kui $x=-2$. Saame esimese osavastuse V_1: $x=-2$.

2. Kui $x>-2$, siis $|x+2|=x+2$ ja võrratus esitub kujul

$$x^2-2(x+2)-4 \leqslant 0$$

ehk

$$x^2-2x-8 \leqslant 0,$$

mille lahendamine (näites N 1.5.1 antud meetodiga) annab $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Seega vaadeldaval x-telje osal $(-2, \infty)$ on võrratus rahuldatud, kui $-2<x \leqslant 4$. Saime teise osavastuse V_2: $x \in (-2, 4]$.

Ühendame osavastused üldvastuseks:

$$V: \ x \in [-2, 4].$$

Seega vaadeldava ruutvõrratuse lahenditeks on lõigu $[-2, 4]$ punktid.

Ülesanded

Lahendada järgmised ruutvõrratused (vt. näited N 1.5.1. ja N 1.5.2).

69. $x^2-3x+2 \geqslant 0$

70. $x^2+x-2<0$

71. $x^2+2x+2>0$

72. $x^2-|x|-6<0$

73. $x^2-6|x-1|+11 \geqslant 0$

74. $x^2-|4x-5|>x-1$

75. $|5x+3|>x^2+2x+3$

§ 1.6. KÕRGEMA ASTME VÕRRATUSED

Olgu polünoom

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (5)$$

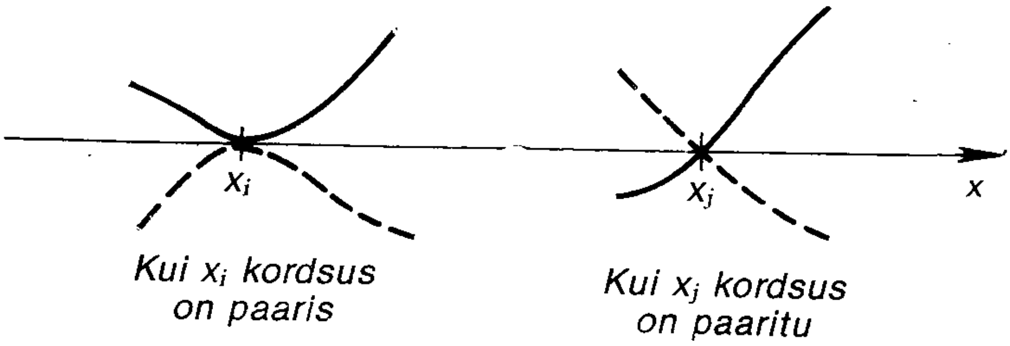
reaalsete kordajatega ja olgu $a_0>0$. Vaatleme võrratuste

$$P(x)>0 \qquad (<0,\ \geqslant 0,\ \leqslant 0) \qquad (6)$$

lahendamist. Selleks lahutame polünoomi (5) reaalsete tegurite korrutiseks

$$P(x)=a_0(x-x_1)^k(x-x_2)^l\ldots(x^2+px+q)^\varkappa(x^2+rx+s)^\lambda\ldots \qquad (7)$$

kus $x_1, x_2, \ldots$ on polünoomi erinevad nullkohad, mille kordsus on vastavalt $k, l, \ldots$, ja $x^2+px+q>0$, $x^2+rx+s>0, \ldots$ iga x korral. Seejärel kanname nullkohad $x_1, x_2, \ldots$ x-teljele ja joonestame polünoomi graafiku. Et küllalt suurte arvude x korral on $P(x)>0$, siis graafiku joonestamist alustame paremalt ülalt ning tõmbame joone läbi iga nullkoha. Seejuures arvestame, et kui nullkoha kordsus on paaritu arv, siis graafik ületab x-telge selles nullkohas, kui aga nullkoha kordsus on paarisarv, siis graafik vaid puudutab x-telge selles nullkohas (joon. 1.4). Saadud graafiku abil on kerge leida võrratuste (6) lahendid.



Joon. 1.4

Võrratuste

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \qquad (<0,\ \geqslant 0,\ \leqslant 0) \qquad (8)$$

lahendamisel jäetakse vaatluse alt ära punktid x, kus nimetaja $Q(x)=0$. Seejärel korrutatakse võrratuste (8) mõlemat poolt suurusega $[Q(x)]^2>0$, mille tõttu võrratused (8) omandavad kuju

$$P(x)Q(x)>0 \qquad (<0,\ \geqslant 0,\ \leqslant 0). \qquad (9)$$

Sellega võrratuste (8) lahendamine taandub võrratuste (9) lahendamisele. Kuna $P(x)Q(x)$ on polünoom, siis võrratuste (9) lahendamine toimub analoogiliselt võrratuste (6) lahendamisele.

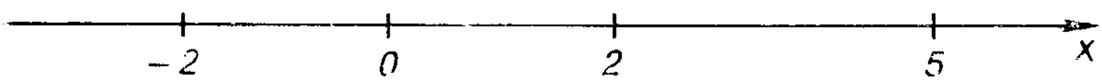
Näited

N 1.6.1. Leida võrratuste (6) lahendid, kui

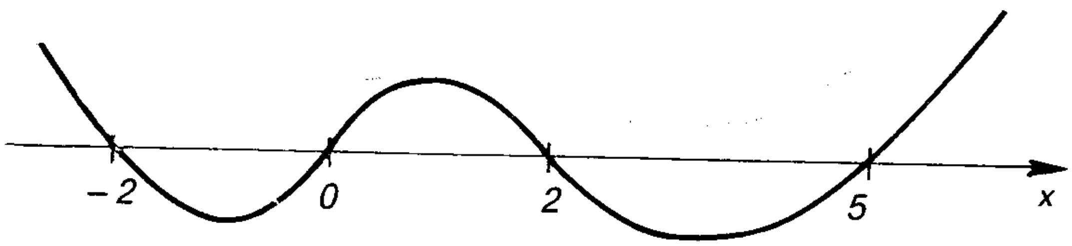
$$P(x)=(x-5)(x-2)x(x+2).$$

L a h e n d u s. Kanname polünoomi nullkohad xy-tasandil x-teljele (joon. 1.5). Et kõik nullkohad on paaritu kordsusega, siis polünoomi graafik ületab x-telje igas nullkohas. Nüüd alustame graafiku joonestamist paremalt ülalt ja läbime pideva joonega järjekorras kõik nullkohad. Saame joonise 1.6, kust on näha, et

$$\begin{aligned}
&P(x)>0, && \text{kui} \quad x\in(-\infty, -2)\cup(0, 2)\cup(5, \infty),\\
&P(x)<0, && \text{kui} \quad x\in(-2, 0)\cup(2, 5),\\
&P(x)\geqslant 0, && \text{kui} \quad x\in(-\infty, -2]\cup[0, 2]\cup[5, \infty),\\
&P(x)\leqslant 0, && \text{kui} \quad x\in[-2, 0]\cup[2, 5].
\end{aligned}$$



Joon. 1.5



Joon. 1.6

N 1.6.2. Lahendada võrratus

$$2x^4(x+1)^3(3-x)(x-5)^2\geqslant 0.$$

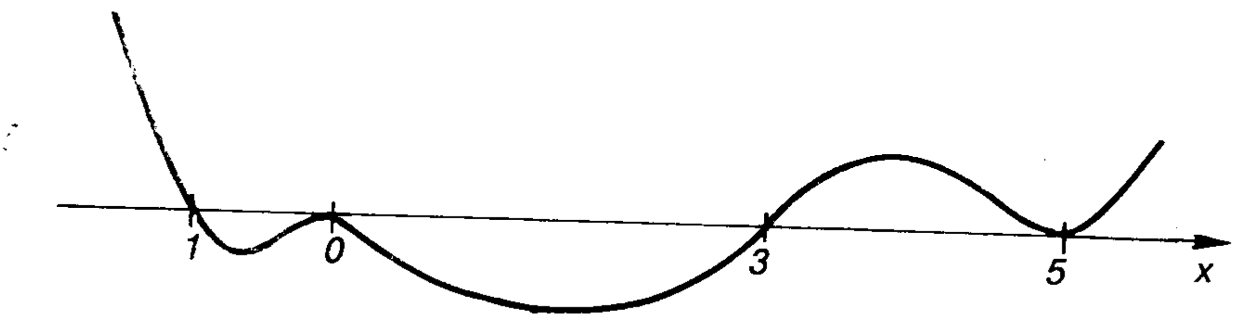
L a h e n d u s. Teisendame polünoomi kujule (7), arvestades, et $3-x=-(x-3)$. Saame:

$$2x^4(x+1)^3(x-3)(x-5)^2\leqslant 0.$$

Kanname polünoomi nullkohad xy-tasandil x-teljele. Graafiku joonestamist alustame paremalt ülalt. Graafik puudutab x-telge nullkohtades $x=5$ ja $x=0$ ning ületab x-telge nullkohtades $x=3$ ja $x=-1$. Seega saame joonisel **1.7** kujutatud graafiku.

Jooniselt 1.7 on näha, et võrratuse lahenditeks on punktid

$$x\in[-1, 3]\cup\{5\}.$$



Joon. 1.7

N 1.6.3. Lahendada võrratus

$$x^6-2x^5-x^4+x^3+2x^2+x-2>0.$$

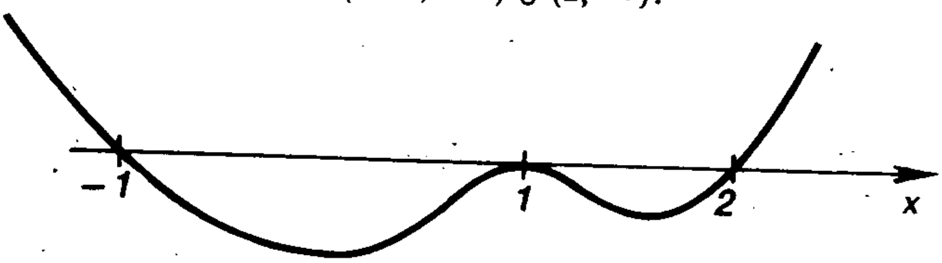
L a h e n d u s. Lahutame polünoomi reaalsete tegurite korrutiseks, siis saame võrratuse esitada kujul

$$(x+1)(x-2)(x-1)^2(x^2+x+1)>0,$$

kus $x^2+x+1>0$ ei lagune enam reaalsete lineaartegurite korrutiseks. Edasi kanname polünoomi nullkohad x-teljele ja alustame jälle graafiku joonestamist paremalt ülalt. Graafik ületab x-telge nullkohtades $x=-1$ ja $x=2$ ning puudutab x-telge nullkohas $x=1$. Saame joonise 1.8.

Jooniselt 1.8 näeme, et võrratuse lahenditeks on

$$x\in(-\infty,\ -1)\cup(2,\ \infty).$$



Joon. 1.8

Ülesanded

Lahendada järgmised võrratused (vt. näited N 1.6.1, N 1.6.2 ja N 1.6.3).

76. $x(x-1)(x+2)(x+1)<0$
77. $(x-2)(x-1)^2(x+1)\geqslant 0$
78. $x(x-1)(2-x)(x^2+x+2)<0$
79. $x^3-x^2-4x+4\leqslant 0$
80. $x^6-3x^5+3x^3+3x^2-4\leqslant 0$
81. $x^5+x^4-2x^3-x^2-x+2<0$
82. $\dfrac{(x-2)(x-3)^3(x+5)(x^2+x+5)}{x-5}<0$
83. $\dfrac{(x-2)^3(x-1)(x^2+12x+36)}{(x-8)^2(9-x)}\geq 0$

§ 1.7. ARVUHULKADE RAJAD

Olgu $X=\{x\}$ mingi reaalarvude x hulk. Kui leidub selline arv M, et iga $x \in X$ korral on $x \leqslant M$, siis öeldakse, et hulk X on ülalt tõkestatud, ja arvu M nimetatakse hulga X ülemtõkkeks (ülemiseks tõkkeks). Kui leidub selline arv m, et iga $x \in X$ korral on $x \geqslant m$, siis öeldakse, et hulk X on alt tõkestatud, ja arvu m nimetatakse hulga X alamtõkkeks (alumiseks tõkkeks). Igal ülalt tõkestatud hulgal on lõpmata palju ülemtõkkeid M. Igal alt tõkestatud hulgal on lõpmata palju alamtõkkeid m. Hulka X nimetatakse tõkestatud hulgaks, kui ta on alt ja ülalt tõkestatud.

Hulga X väikseimat ülemist tõket nimetatakse hulga X ülemrajaks (ülemiseks rajaks) ja märgitakse sümboliga $\sup X$ ehk $\sup\limits_{x \in X} x$. Hulga X suurimat alumist tõket nimetatakse hulga X alamrajaks (alumiseks rajaks) ja märgitakse sümboliga $\inf X$ ehk $\inf\limits_{x \in X} x$.

Sümbol

$$\sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (x+y)$$

tähendab sellise hulga ülemraja, mille elementideks on kõik võimalikud summad $x+y$, kus $x \in X$ ja $y \in Y$. Analoogiliselt tuleb mõista ka sümboleid

$$\sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (x-y), \qquad \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (xy)$$

jt.

Pidevuse aksioom. *Igal ülalt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas ülemraja.*

Pidevuse aksioomist järeldub, et ka igal alt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas alamraja.

Hulga X ülemist tõket M nimetatakse selle hulga suurimaks elemendiks, kui $M \in X$, ja kirjutatakse $M=\max X$ ehk $M=\max\limits_{x \in X} x$. Hulga X alumist tõket m nimetatakse selle hulga vähimaks elemendiks, kui $m \in X$, ja kirjutatakse $m=\min X$ ehk $m=\min\limits_{x \in X} x$.

Arvhulkade rajade leidmiseks kasutatakse järgmisi teoreeme.

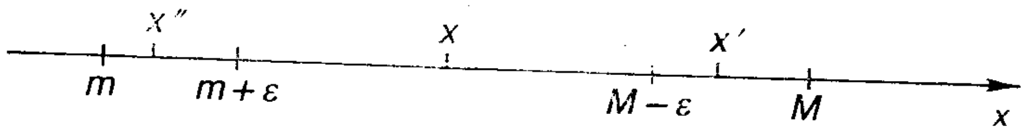
T 1.7.1. *Arv M on hulga X ülemraja siis ja ainult siis, kui*

1) *iga $x \in X$ korral $x \leqslant M$;*

2) *iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $x' \in X$, et $x' > M-\varepsilon$* (joon. 1.9).

T 1.7.2. *Arv m on hulga X alumine raja siis ja ainult siis, kui*

1) *iga $x \in X$ korral $x \geqslant m$,*



Joon. 1.9

2) *iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub $x''\in X$, et* $x''<m+\varepsilon$ (joon. 1.9).

Kui hulk X ei ole ülalt (alt) tõkestatud, siis kirjutatakse $\sup X=\infty$ $(\inf X=-\infty)$.

N 1.7.1. Leida hulga

$$X=\left\{\frac{n+1}{n}:\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}$$

suurim ja vähim element ning hulga rajad.

Lahendus. Kirjutame välja hulga X esimesed elemendid, kui $n=1, 2, 3, 4, 5$:

$$X=\left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots\right\}.$$

Saadud jadas iga järgnev element on väiksem eelnevast, kuid suurem arvust 1. Seejuures erinevus jada elementide ja arvu 1 vahel saab n kasvades kui tahes väikeseks. Tõepoolest, kui $\varepsilon>0$ on suvaline (kui tahes väike) arv, siis tingimus

$$1<\frac{n+1}{n}<1+\varepsilon$$

hakkab kehtima, kui $n>1/\varepsilon$. Seega $\max X=2$, $\min X$ ei eksisteeri, $\sup X=2$, $\inf X=1$.

Ülesanded

Järgmistes hulkades leida vähim ja suurim element ning alam- ja ülemraja (vt. näide N 1.7.1).

84. $X=\left\{\dfrac{n-1}{n^2+1}:\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}$

85. $X=\left\{\dfrac{1}{n}:\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}$

86. $X=\left\{\dfrac{n(-1)^n}{n+1}:\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}$

87. $X=\{n^2-2n+3:\ n=1,\ 2,\ \ldots\}$

88. $X=[0,\ 1]$

89. $X=(0,\ 1)$

90. $X=[-1,\ \infty)$

91. $X=\left\{\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$

Tõestada, et mis tahes reaalarvude hulga $X=\{x\}$ korral kehtivad järgmised võrdused.

92. $\inf\limits_{x\in X}(-x)=-\sup\limits_{x\in X} x$ 93. $\sup\limits_{x\in X}(-x)=-\inf\limits_{x\in X} x$

Tõestada, et mis tahes reaalarvude hulkade $X=\{x\}$ ja $Y=\{y\}$ korral kehtivad järgmised võrdused.

94. $\inf\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}(x+y)=\inf\limits_{x\in X} x+\inf\limits_{y\in Y} y$ 96. $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}(x-y)=\sup\limits_{x\in X} x-\inf\limits_{y\in Y} y$

95. $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}(x+y)=\sup\limits_{x\in X} x+\sup\limits_{y\in Y} y$ 97. $\inf\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}(x-y)=\inf\limits_{x\in X} x-\sup\limits_{y\in Y} y$

Tõestada, et mis tahes reaalarvude hulkade $X=\{x\colon x\geqslant 0\}$ ja $Y=\{y\colon y\geqslant 0\}$ korral kehtivad järgmised võrdused.

98. $\inf\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}(xy)=\inf\limits_{x\in X} x\inf\limits_{y\in Y} y$ 99. $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}(xy)=\sup\limits_{x\in X} x\sup\limits_{y\in Y} y$

100. Leida viga järgmises «tõestuses». Olgu $X=\{x\}$ ja $Y=\{y\}$ mis tahes reaalarvude hulgad ja $Z=\{z\}$ kõigi võimalike arvude $z=x-y$ hulk, kus $x\in X$ ja $y\in Y$. Ülesandes 95 oleva valemi põhjal

$$\sup_{x\in X} x=\sup_{\substack{z\in Z\\ y\in Y}}[(x-y)+y]=\sup_{z\in Z}(x-y)+\sup_{y\in Y} y.$$

Ülesandes 96 oleva valemi põhjal saame edasi

$$\sup_{x\in X} x=\sup_{x\in X} x-\inf_{y\in Y} y+\sup_{y\in Y} y.$$

Pärast suuruste $\sup\limits_{x\in X} x$ koondamist saame

$$\inf_{y\in Y} y=\sup_{y\in Y} y,$$

s.t. iga hulga alamraja on alati võrdne selle hulga ülemrajaga. Mott.

§ 1.8. FUNKTSIOONI MÕISTE

Olgu X mingi reaalarvude hulk. Kui x tähendab mis tahes arvu hulgast X, siis öeldakse, et x on muutuv suurus ehk muutuja hulgas X. Iga arvu $x\in X$ nimetatakse muutuja x väärtuseks.

D 1.8.1. *Kui igale arvule $x\in X$ on mingi eeskirja f abil seatud vastavusse üks reaalarv y, siis öeldakse, et hulgas X on määratud funktsioon $y=f(x)$ ja kirjutatakse:*

$$y=f(x), \quad x\in X. \tag{8}$$

Muutujat x nimetatakse funktsiooni (8) argumendiks ehk sõltumatuks muutujaks ja muutujat y tema sõltuvaks muutujaks. Hulka X nimetatakse funktsiooni (8) määramispiirkonnaks ja hulka $Y=\{y: y=f(x), x\in X\}$ tema väärtuste hulgaks ehk muutumispiirkonnaks. Arvu $y\in Y$, mille määrab võrdus (8), nimetatakse funktsiooni väärtuseks punktis (kohal) x.

Kui muutujate x ja y märkimine ei ole oluline, siis (8) asemel kõneldakse lihtsalt funktsioonist f määramispiirkonnaga X.

Funktsiooni (8) märkimiseks kasutatakse ka tähistust $y=y(x)$, $x\in X$. Millal x, y ja $f(x)$ tähendavad muutujaid ja millal nende väärtusi, selgub alati tekstist.

Vastavalt definitsioonile D 1.8.1 on funktsioon (8) antud, kui on teada

a) tema määramispiirkond X,

b) vastavust määrav eeskiri f.

Mõnikord funktsiooni (8) määramispiirkonda X ei anta. Siis selle all mõeldakse argumendi väärtuste x hulka, kus eeskiri f kehtib.

D 1.8.2. *Funktsiooni* (8) *graafikuks nimetatakse punktide* (x, y) *hulka* $\{(x, y): y=f(x), x\in X\}$ *xy-tasandil.*

Võrdus (8) on funktsiooni f graafiku võrrand.

D. 1.8.3. *Kui iga arvu* $y\in Y$ *korral leidub ainult üks arv* $x\in X$, *mille korral* $y=f(x)$, *siis öeldakse, et funktsioonil* f *on olemas pöördfunktsioon*

$$x=\varphi(y), \qquad y\in Y$$

muutumispiirkonnaga X.

Seega, kui funktsioonil f on olemas pöördfunktsioon φ, siis funktsioon f korraldab üksühese vastavuse piirkondade X ja Y punktide vahel.

Kasutatakse ka mitmeseid (kaheseid, kolmeseid, ...) funktsioone, mille korral igale arvule $x\in X$ vastab mitu (kaks, kolm, ...) reaalarvu $y\in Y$. Mitmese funktsiooni korral võib piirkondadest X ja Y eraldada osa, kus vaadeldav funktsioon (nn. ahendfunktsioon) on juba ühene funktsioon, s.o. definitsiooni D 1.8.1 järgi defineeritud funktsioon.

Allpool ülesannetes esinevad järgmised funktsioonid:

1. $y=[x]$ (loe: $y=\text{antjee}\, x$), kus $[x]$ on suurim täisarv, mis ei ületa arvu x. Kui $x\geqslant 0$, siis $[x]$ on arvu x täisosa.

2. $y=\operatorname{sgn} x$ (loe: $y=\text{signum}\, x$), kus

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & \text{kui } x<0 \\ 0, & \text{kui } x=0 \\ 1, & \text{kui } x>0. \end{cases}$$

Kui $x\neq 0$, siis

$$\operatorname{sgn} x=\frac{x}{|x|}=\frac{|x|}{x}.$$

3. $y=D(x)$ (Dirichlet' funktsioon), kus

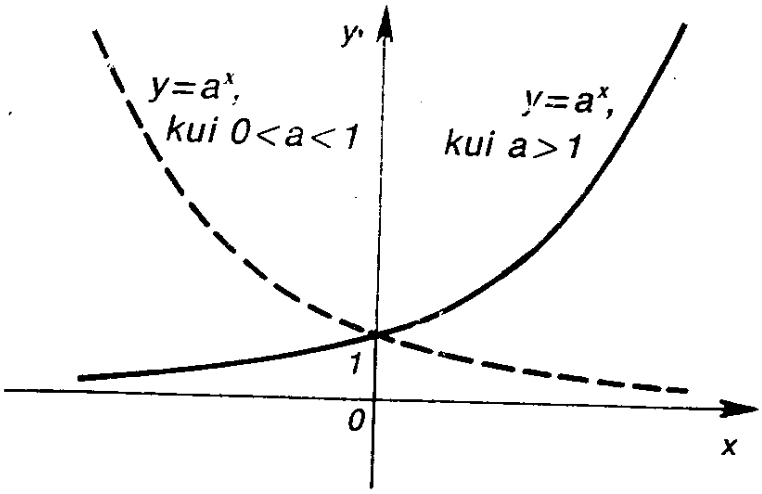
$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{kui } x\in\mathbf{Q}\\ 0, & \text{kui } x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Kasutamist leiavad ka nende funktsioonide ahendid, kus määramispiirkonnaks on osa reaalarvude hulgast **R**.

Järgnevas on esitatud enam kasutatavate funktsioonide definitsioonid, määramispiirkonnad X, muutumispiirkonnad Y ja graafikud, mida on vaja teada ülesannete lahendamisel.

1. **Konstantne funktsioon:** $y=c=\text{const}$, $X=(-\infty, \infty)$, $Y=\{c\}$. Graafikuks on sirge $y=c$. Pöördfunktsiooni ei ole.

2. **Eksponentfunktsioon:** $y=a^x=\exp_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $X=(-\infty, \infty)$, $Y=(0, \infty)$. Graafik on antud joonisel 1.10 kahel juhul, kui $0<a<1$ ja kui $a>1$. Pöördfunktsioon on olemas. Juhul $a=1$ kujutaks funktsioon $y=a^x$ konstantset funktsiooni $y=1$, millel ei ole pöördfunktsiooni.



Joon. 1.10

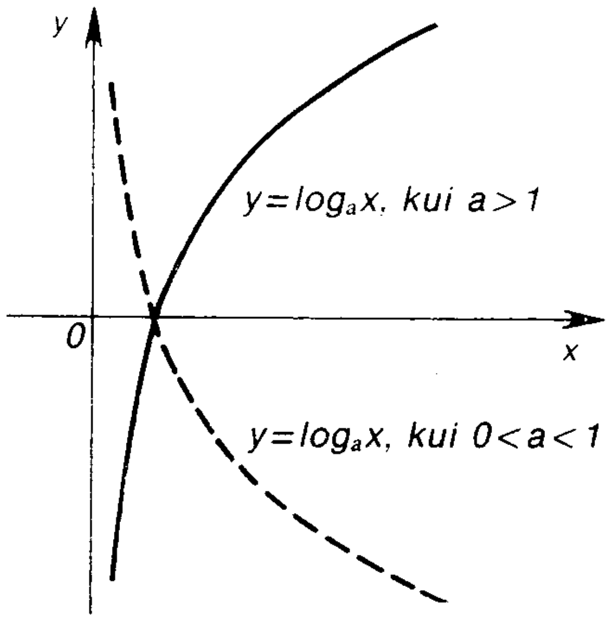
Ulatuslikku kasutamist leiab eksponentfunktsioon $y=e^x=\exp x$, kus e on teatav irratsionaalarv, mille ligikaudne väärtus on $e=2{,}71828\ldots$. Selle arvu definitsioonavaldis on antud allpool (vt. § 2.1 ja § 2.2).

3. **Logaritmfunktsioon:** $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, on eksponentfunktsiooni $y=a^x$ pöördfunktsioon, $X=(0, \infty)$, $Y=(-\infty, \infty)$. Graafik on antud joonisel 1.11 kahel juhul, kui $0<a<1$ ja kui $a>1$.

Tähistame logaritmi alusel $a=e$ sümboliga ln ja nimetame *loomulikuks* ehk *naturaallogaritmiks*. Sel korral saame logaritmfunktsiooni

$$y=\ln x=\log_e x,$$

mis on eksponentfunktsiooni $y=e^x$ pöördfunktsioon.



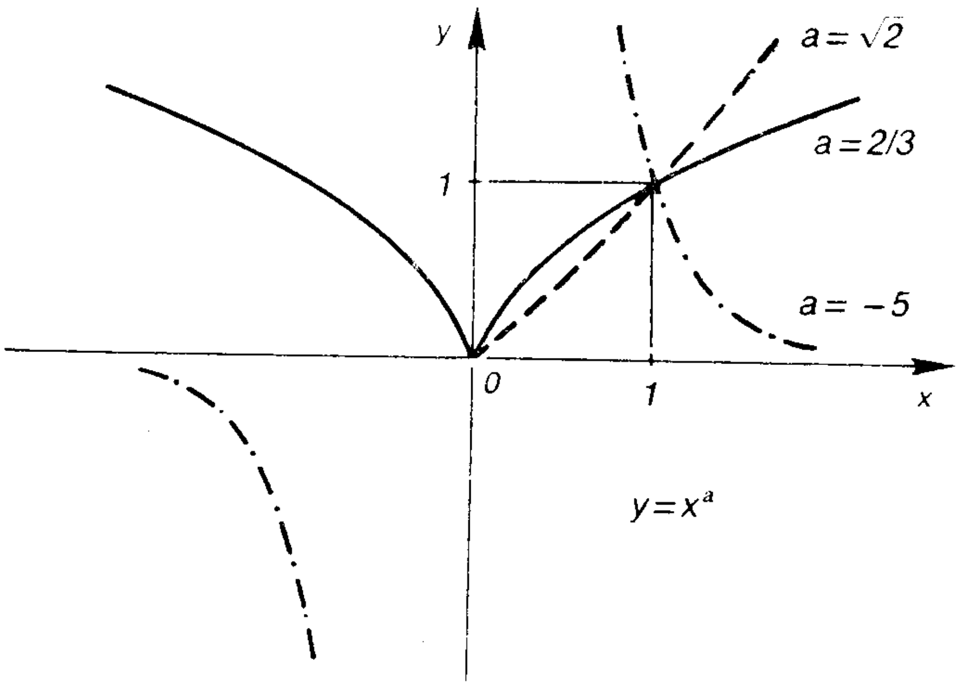
Joon. 1.11

4. **Astmefunktsioon:** $y=x^a$ $(a\in\mathbf{R})$. Määramis- ja muutumispiirkond olenevad astendajast a. Kui $a=m/(2n+1)$, $m,n\in\mathbf{Z}$, siis

$$X=\begin{cases}(-\infty,\infty), & \text{kui } a>0\\ (-\infty,0)\cup(0,\infty) & \text{kui } a<0.\end{cases}$$

Kui $a\neq m/(2n+1)$, $m,n\in\mathbf{Z}$, siis

$$X=Y=\begin{cases}[0,\infty), \text{ kui } a>0\\ (0,\infty), \text{ kui } a<0.\end{cases}$$



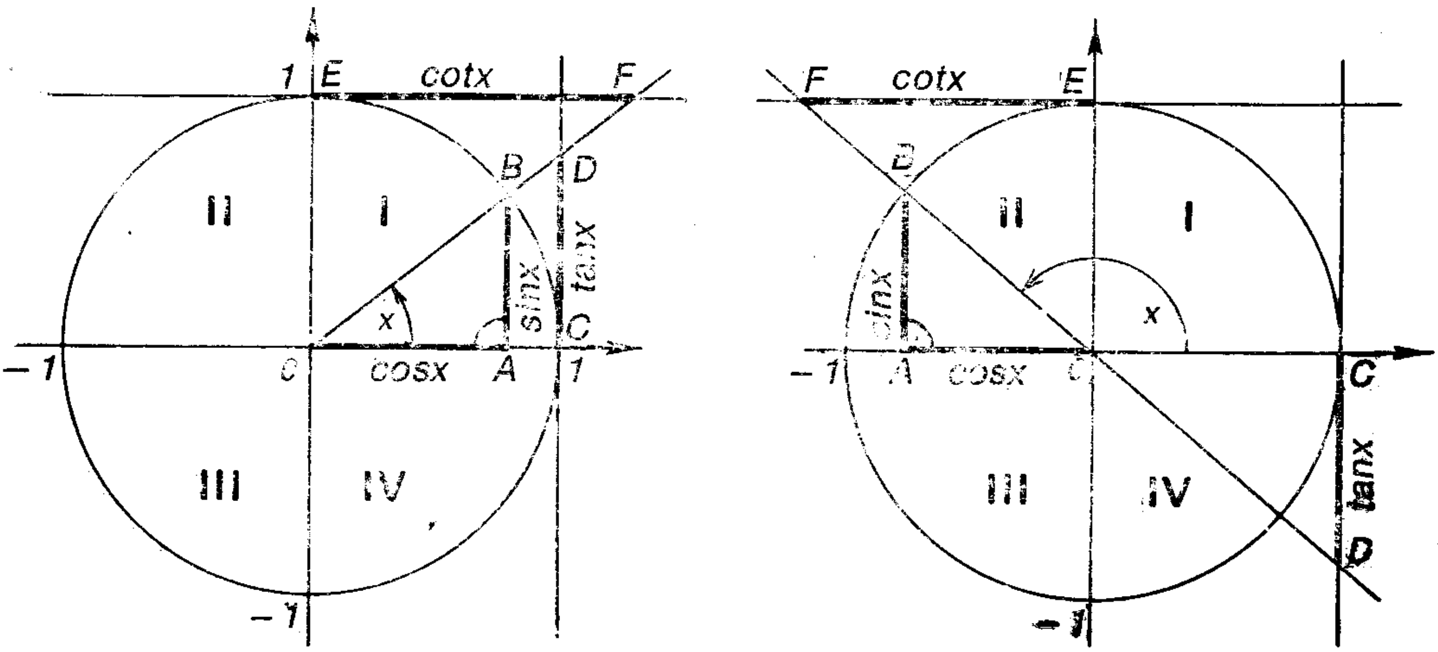
Joon. 1.12

Graafik astendaja a mõne väärtuse korral on antud joonisel 1.12.

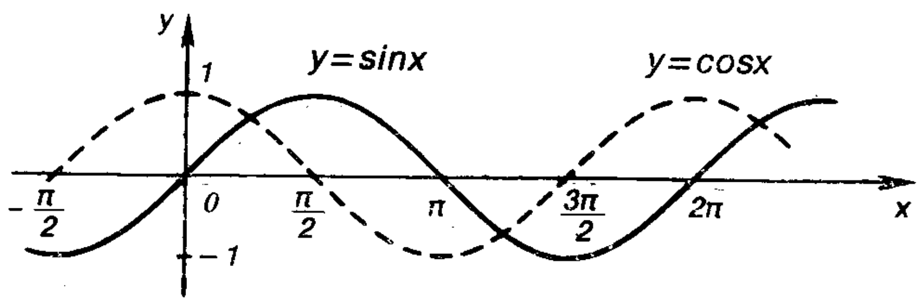
5. **Trigonomeetrilised funktsioonid:** $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$. Nad defineeritakse järgmisel viisil

a. S i i n u s f u n k t s i o o n $y=\sin x$ defineeritakse ühikringis iga $x \in X=(-\infty, \infty)$ korral kui lõigu AB pikkus, mille määrab nurk radiaanmõõduga x (joon. 1.13). Ühikringi I ja II veerandis võetakse $y \geqslant 0$, III ja IV veerandis $y \leqslant 0$. Muutumispiirkond on $Y=[-1\ 1]$. Siinusfunktsiooni graafik nn. s i n u s o i d on antud joonisel 1.14. Siinusfunktsiooni korral alati on $|\sin x| \leqslant |x|$.

b. K o o s i n u s f u n k t s i o o n $y=\cos x$ defineeritakse ühikringis iga $x \in X=(-\infty, \infty)$ korral kui lõigu OA pikkus (joon. 1.13). Ühikringi I ja IV veerandis võetakse $y \geqslant 0$, II ja III veerandis $y \leqslant 0$. Muutumispiirkond on $Y=[-1, 1]$. Koosinusfunktsiooni graafik on sinusoid, mis on nihutatud x-telje sihis vasakule $\pi/2$ võrra (joon. 1.14).



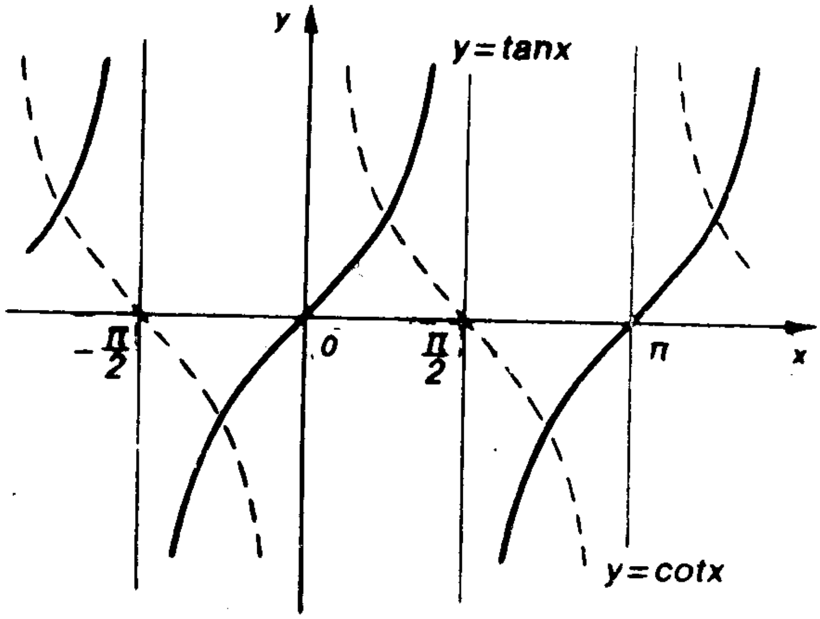
Joon. 1.13



Joon. 1.14

c. T a n g e n s f u n k t s i o o n $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ kujutab ühikringis iga $x\in X=\{x\colon x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbf{Z}\}$ korral puutujalõigu CD pikkust (joon. 1.13). Ühikringi I ja III veerandis on $y\geqslant 0$, II ja IV veerandis $y\leqslant 0$. Muutumispiirkond on $Y=(-\infty,\infty)$.Tangensfunktsiooni graafik nn. t a n g e n s o i d on antud joonisel 1.15.

d. K o o t a n g e n s f u n k t s i o o n $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ kujutab ühikringis iga $x\in X=\{x\colon x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ korral puutujalõigu EF pikkust (joon. 1.13). Ühikringi I ja III veerandis on $y\geqslant 0$, II ja IV veerandis $y\leqslant 0$. Muutumispiirkond on $Y=(-\infty,\infty)$. Kootangensfunktsiooni graafik on antud joonisel 1.15.



Joon. 1.15

6. **Arkusfunktsioonid:** $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arccot} x$, on trigonomeetriliste funktsioonide teatavate ahendite pöördfunktsioonid ja nad defineeritakse järgmisel viisil:

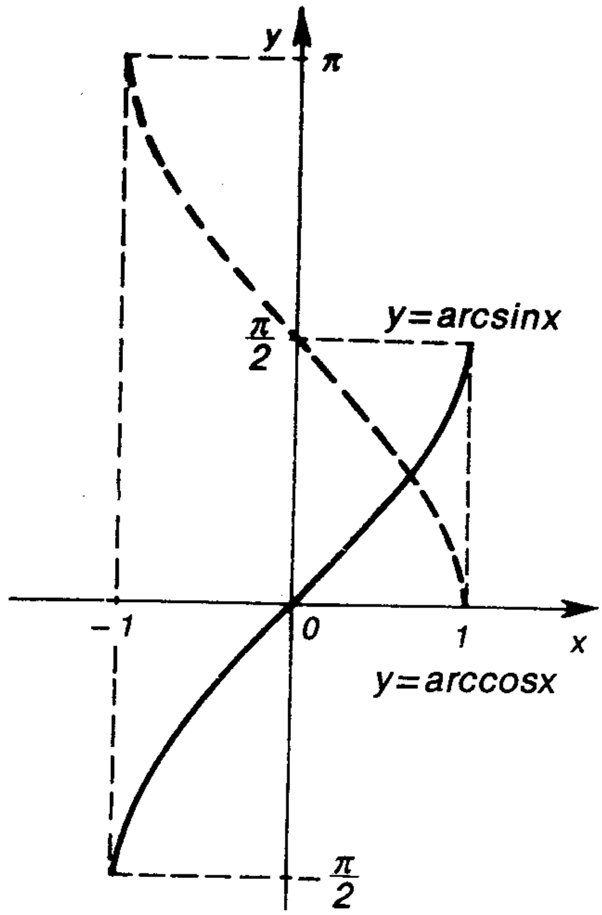
a. A r k u s s i i n u s f u n k t s i o o n $y=\arcsin x$ on siinusfunktsiooni ahendi

$$x=\sin y,\qquad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

pöördfunktsioon. Määramispiirkond on $X=[-1,1]$ ja muutumispiirkond on $Y=(-\pi/2,\ \pi/2)$. Graafik on antud joonisel 1.16.

b. A r k u s k o o s i n u s f u n k t s i o o n $y=\arccos x$ on koosinusfunktsiooni ahendi

$$x=\cos y,\qquad y\in[0,\pi]$$



Joon. 1.16

pöördfunktsioon. Määramispiirkond on $X=[-1, 1]$ ja muutumispiirkond on $Y=[0,\pi]$. Graafik on antud joonisel 1.16.

c. Arkustangensfunktsioon $y=\arctan x$ on tangensfunktsiooni ahendi

$$x=\tan y, \qquad y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

pöördfunktsioon. Määramispiirkond on $X=(-\infty, \infty)$ ja muutumispiirkond on $Y=(-\pi/2, \pi/2)$. Graafik on antud joonisel 1.17.

d. Arkuskootangensfunktsioon $y=\operatorname{arccot} x$ on kootangensfunktsiooni ahendi

$$x=\cot y, \qquad y\in(0,\pi)$$

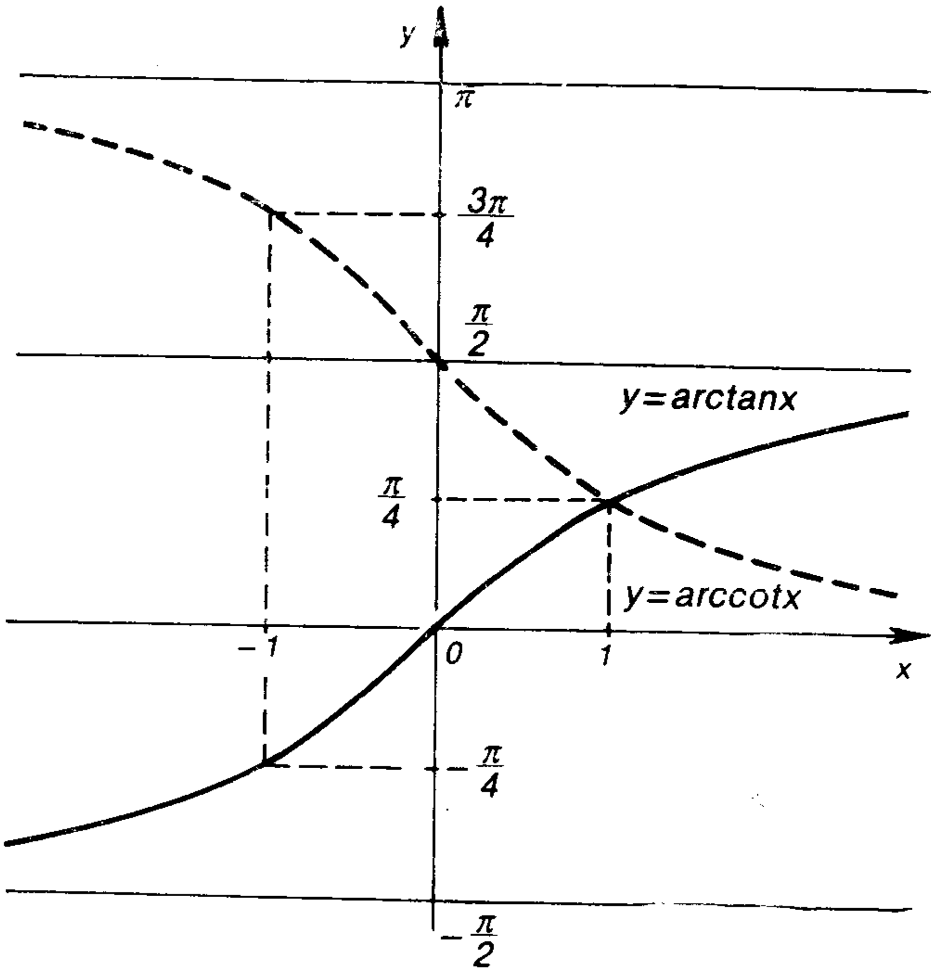
pöördfunktsioon. Määramispiirkond on $X=(-\infty, \infty)$ ja muutumispiirkond on $Y=(0,\pi)$. Graafik on antud joonisel 1.17

Seosed arkusfunktsioonide vahel on antud valemite tabelites.

7. **Hüperboolsed funktsioonid:** defineeritakse järgmiste valemitega:

a. Hüperboolne siinus:

$$y=\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad X=Y=(-\infty, \infty).$$



Joon. 1.17

b. Hüperboolne koosinus:

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad X = (-\infty, \infty), \quad Y = [1, \infty).$$

c. Hüperboolne tangens:

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad X = (-\infty, \infty), \quad Y = (-1, 1).$$

d. Hüperboolne kootangens:

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty),$$

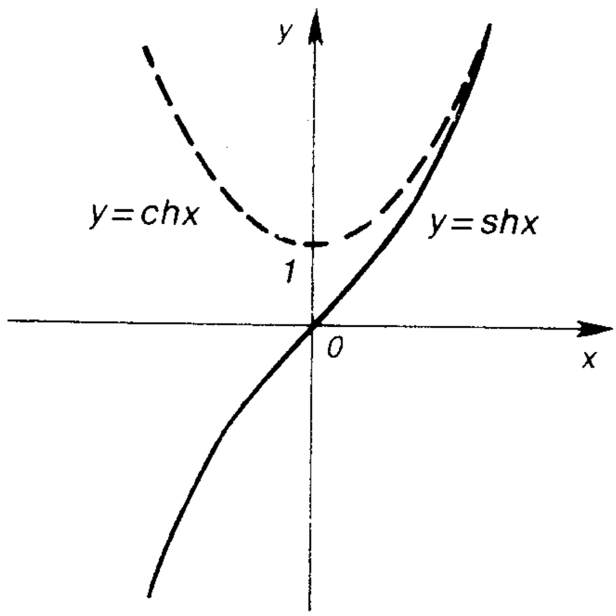
$$Y = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Hüperboolsete funktsioonide graafikud on antud joonistel 1.18 ja 1.19. Seosed hüperboolsete funktsioonide vahel on antud valemite tabelites.

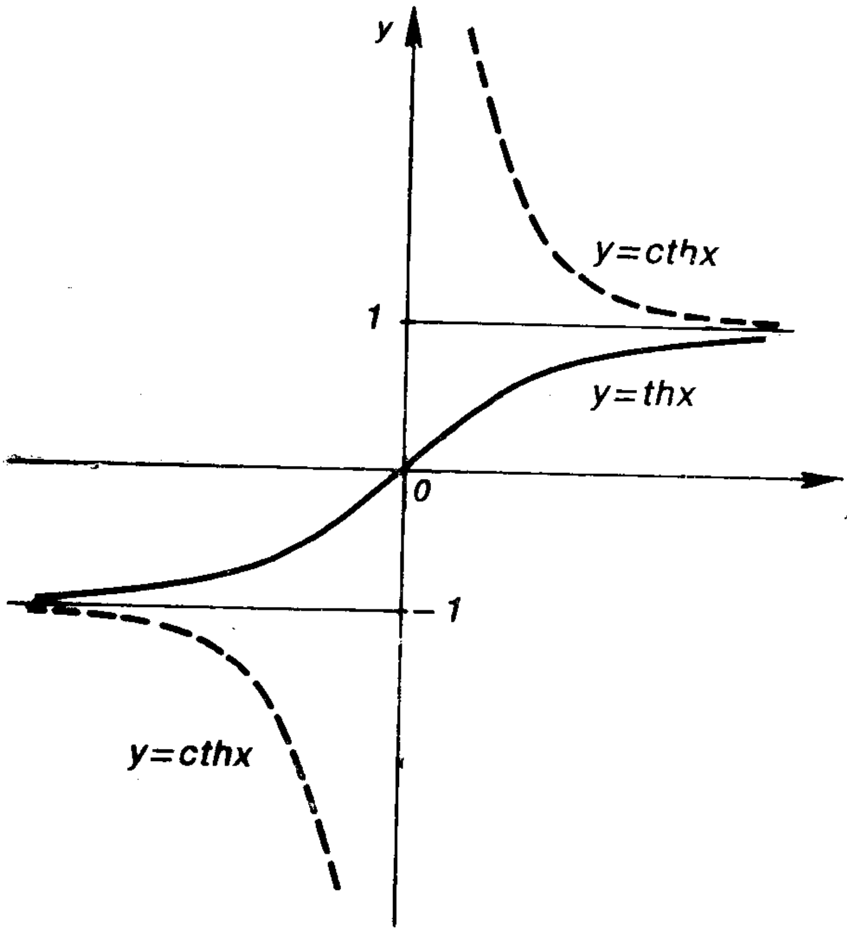
8. **Areafunktsioonid:** on hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid ja nad avalduvad järgmiste valemite kaudu:

a. Areasiinus:

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad X = Y = (-\infty, \infty).$$



Joon. 1.18



Joon. 1.19

b. A r e a k o o s i n u s:

$y = \operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) = \pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, on kahene funktsioon, $X=[1, \infty)$, $Y=(-\infty, \infty)$.

c. A r e a t a n g e n s:

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad X=(-1, 1), \quad Y=(-\infty, \infty).$$

d. A r e a k o o t a n g e n s:

$$y = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad X=(-\infty, -1) \cup (1, \infty),$$

$$Y=(-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Näited

N 1.8.1. Leida funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{x^2-x}\ln(x+2)$$

määramispiirkond X.

L a h e n d u s. Funktsiooni avaldisest näeme, et esimene tegur on määratud vaid juhul, kui $x^2-x \geqslant 0$, sest negatiivsetel arvudel ruutjuuri ei ole. Viimase võrratuse lahenditeks on $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Funktsiooni avaldises teine tegur on määratud vaid juhul, kui $x+2>0$, sest logaritm on olemas vaid positiivsetel arvudel. Seega teine tegur on määratud, kui $x \in (-2, \infty)$. Funktsioon osutub aga määratuks seal, kus mõlemad tegurid on määratud. Seega vaadeldava funktsiooni määramispiirkonnaks on leitud hulkade ühisosa, s. o. hulk

$$X=(-2, 0) \cup (1, \infty).$$

N 1.8.2. Leida funktsiooni

$$y = \arcsin\frac{2x-3}{5} - \frac{1}{x^2-1}$$

määramispiirkond X.

L a h e n d u s. Funktsiooni avaldisest näeme, et täpne tingimus esimese liidetava olemasoluks on

$$\left|\frac{2x-3}{5}\right| \leqslant 1,$$

sest arkussiinusfunktsiooni määramispiirkond on lõik $[-1, 1]$. Teine liidetav funktsiooni avaldises on määratud, kui $x^2-1 \neq 0$, s. t. kui nimetaja ei ole null. Et aga funktsioon osutub määratuks vaid seal, kus mõlemad liidetavad on määratud, siis tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} \left|\dfrac{2x-3}{5}\right| \leqslant 1 \\ x^2-1 \neq 0. \end{cases}$$

Süsteemi lahenditeks on

$$x \in X=(-1, 1) \cup (1, 4].$$

Viimane hulk X ongi antud funktsiooni määramispiirkond.

N 1.8.3. Leida funktsiooni

$$y=2+\operatorname{arccot}(x-1)$$

pöördfunktsioon.

L a h e n d u s. Lahendame võrrandi muutuja x suhtes. Saame:

$$y-2=\operatorname{arccot}(x-1),$$

kust

$$x-1=\cot(y-2),$$
$$x=1+\cot(y-2).$$

Et $y=\operatorname{arccot} x$ muutumispiirkond on hulk $Y=(0,\pi)$, siis käesoleval juhul peab olema $0<y-2<\pi$, millest $2<y<2+\pi$ ehk $y\in(2, 2+\pi)$.

Seega vaadeldava funktsiooni pöördfunktsioon on

$$x=1+\cot(y-2), \quad y\in(2, 2+\pi).$$

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad (vt. näited N 1.8.1 ja N 1.8.2).

101. $y=\sqrt{x+4}$

102. $y=\sqrt{x^2-4}$

103. $y=\sqrt[3]{x+1}+\frac{1}{x}$

104. $y=\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{2^x}$

105. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$

106. $y=\sqrt[3]{x^2-8}$

107. $y=\log(x-6)$

108. $y=\frac{1}{\log(1-x)}+\sqrt{x+2}$

109. $y=\frac{1}{\ln(2-\sqrt{x})}$

110. $y=\frac{\sqrt{1-|x|}}{\ln|x|}$

111. $y=\arcsin(2x-1)$

112. $y=\arccos\frac{2}{1+x}$

113. $y=\arcsin\left(\log\frac{x}{10}\right)$

114. $y=\sqrt{D(x)-1}$

115. $y=\sqrt{1-\arctan x}$

116. $y=\sqrt{\log\sin x}$

117. $y=\sqrt{\ln\cos 2\pi x}$

118. $y=\log_x(2-x)$

119. $y=\sqrt{\operatorname{sh} x}$

120. $y=\ln(\sqrt{2}+x-e^{\operatorname{arsh} x})$

Määrata, missugustes järgmistes paarides on funktsioonid samad ja missugustes on nad erinevad.

121. $f(x)=|x|,\quad g(x)=x\operatorname{sgn} x$

122. $f(x)=x,\quad g(x)=\sqrt{x^2}$

123. $f(x)=\log x^2,\quad g(x)=2\log x$

124. $f(x)=\log x^2,\quad g(x)=2\log|x|$

125. $f(x)=1,\quad g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

126. $f(x)=\arctan(\tan x)$, $g(x)=\tan(\arctan x)$
127. $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$; $g(x)=\sin(-x)$, $x\in[-\pi,0]$

Leida järgmiste funktsioonide f nullkohad ja määramispiirkonna osad, kus $f(x)>0$ ja kus $f(x)<0$.

128. $f(x)=\log|2x-1|$ 129. $f(x)=\cos^2 x-1$

130. $f(x)=\dfrac{\log x}{x^3-3x^2+2x}$

Leida järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid (vt. näide N 1.8.3).

131. $y=x^2$, $x\in[0,\infty)$
132. $y=x^2$, $x\in(-\infty,0)$
133. $y=x^2$
134. $y=10^x+1$
135. $y=x^2-2x-3$, $x\in(-\infty,1)$
136. $y=1+\log|x-2|$, $x\in(-\infty,2)$
137. $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3}$, $x\in[-3,0]$
138. $y=1+\arccos(1-x)$
139. $y=\operatorname{sh}x$
140. $y=\operatorname{ch}x$

§ 1.9. FUNKTSIOONIDE LIIGID JA ESITUSVIISID

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$, $x\in X$. Tähtsamad funktsioonide liigid on järgmised.

a. Paaris- ja paaritud funktsioonid.

D 1.9.1. *Kui iga $x\in X$ korral on*

$$f(-x)=f(x), \tag{9}$$

siis nimetatakse funktsiooni f paarisfunktsiooniks, ja kui on

$$f(-x)=-f(x), \tag{10}$$

siis — paarituks funktsiooniks *piirkonnas X.*

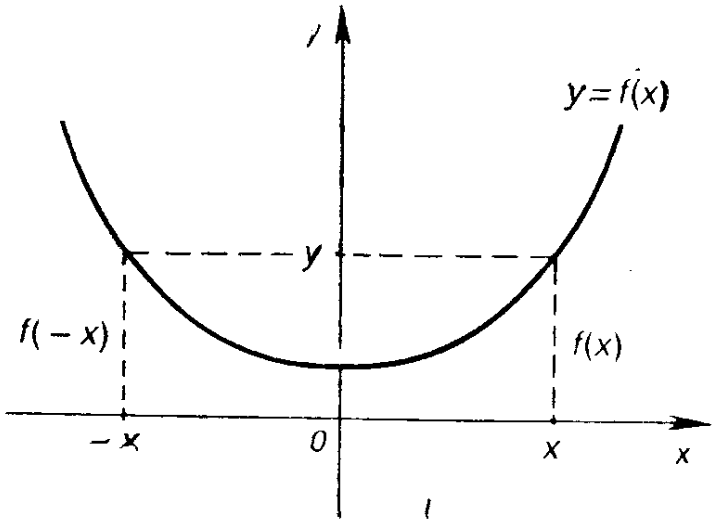
Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes (joon. 1.20). Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti O suhtes (joon. 1.21). Määramispiirkond X on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti O suhtes (joonised 1.20 ja 1.21).

Trigonomeetrilistest funktsioonidest $y=\sin x$, $y=\tan x$ ja $y=\cot x$ on paaritud funktsioonid ning $y=\cos x$ on paarisfunktsioon; arkusfunktsioonid $y=\arcsin x$ ja $y=\arctan x$ on paaritud funktsioonid.

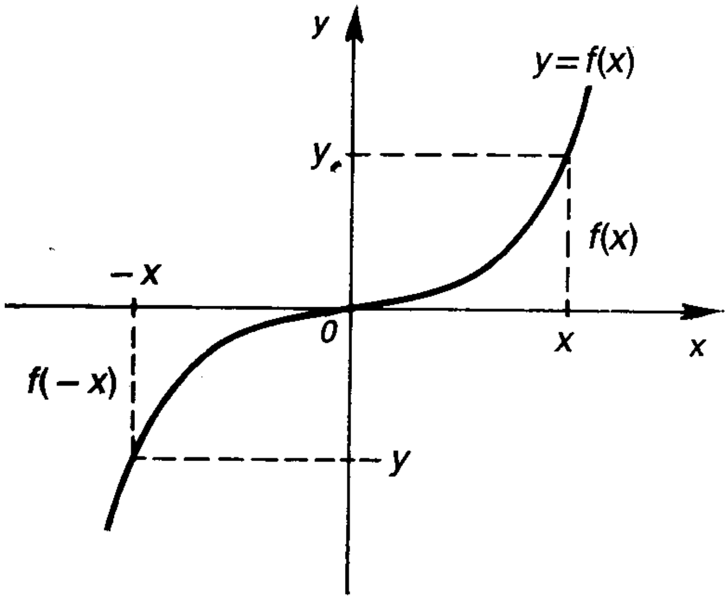
b. Perioodilised funktsioonid.

D 1.9.2. *Funktsiooni f nimetatakse* perioodiliseks *piirkonnas X ja arvu $\omega\neq0$ tema* perioodiks, *kui*

$$f(x+\omega)=f(x) \quad \textit{iga} \quad x\in X \quad \textit{korral.} \tag{11}$$



Joon. 1.20



Joon. 1.21

See definitsioon D 1.9.2 eeldab, et koos punktiga x kuulub piirkonda X ka punkt $x+\omega$. Üldiselt, kui $x+k\omega \in X$ iga $k \in \mathbf{Z}$ korral, siis koos arvuga ω on funktsiooni f perioodiks ka arvud $k\omega \neq 0$.

Kui funktsioon f on perioodiliste funktsioonide summa, siis tema perioodideks on liidetavate funktsioonide perioodide ühiskordsed.

Trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised ja neil on järgmised perioodid ($k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$).

$y=f(x)$	ω	vähim positiivne ω
$y=\sin x$, $y=\cos x$	$2k\pi$	2π
$y=\tan x$, $y=\cot x$	$k\pi$	π

Funktsiooni f perioodi ω leidmiseks tuleb tingimusest (11) määrata arv ω, vaadeldes tingimust (11) kui võrrandit ω suhtes. Kui sel võrrandil on olemas konstantne lahend $\omega \neq 0$, s. o. muutujast x sõltumatu lahend $\omega \neq 0$, siis f on perioodiline funktsioon perioodiga ω. Kui aga võrrandil (11) pole konstantseid lahendeid, siis f ei ole perioodiline funktsioon. Piisab leida vähim positiivne periood ω (kui see on olemas, vt. ülesanne 156), sest sellest saame täisarvuga $k \neq 0$ korrutamisel ka ülejäänud perioodid $k\omega$.

c. Monotoonsed funktsioonid.

D 1.9.3. *Funktsiooni f nimetatakse* kasvavaks *ehk* rangelt kasvavaks *piirkonnas X, kui selles piirkonnas suuremale argumendi väärtusele vastab suurem funktsiooni väärtus. Kui aga suuremale argumendi väärtusele vastab väiksem funktsiooni väärtus, siis funktsiooni f nimetatakse* kahanevaks *ehk* rangelt kahanevaks.

Olgu $x_1, x_2 \in X$ suvalised punktid. Funktsiooni range kasvamine on iseloomustatav seega tingimusega

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{12}$$

ja range kahanemine tingimusega

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \tag{13}$$

D 1.9.4. *Kui tingimustes* (12) *ja* (13) *esinevad ka võrduse juhtumid $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ja $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, siis funktsiooni f nimetatakse vastavalt* monotoonselt kasvavaks *ja* monotoonselt kahanevaks.

Monotoonselt kasvavaid ja monotoonselt kahanevaid funktsioone kokku nimetatakse monotoonseteks. Tingimused funktsiooni monotoonsuse määramiseks on antud paragrahvis 4.1.

Matemaatilises analüüsis esitatakse kõige sagedamini funktsioone valemite abil, kuid esineb ka teisi esitusi. Vaatleme funktsioonide tähtsamaid esitusviise.

1. Esitus ilmutatud kujul. Esitatakse valemiga $y = f(x)$, mis näitab, millised tehted tuleb teostada argumendiga, et saada funktsiooni väärtus. Valemite abil olid antud näiteks funktsioonid eelmise paragrahvi 1.8 ülesannetes. Sisuliselt kujutab valem funktsiooni graafiku võrrandit.

2. Esitus tabeli abil. Esitatakse tabel, kus on näidatud argumendi väärtused $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja neile vastavad funktsiooni väärtused $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Sellist esitusviisi kasutatakse sageli eksperimentaalsete tulemuste märkimiseks.

3. G e o m e e t r i l i n e e s i t u s g r a a f i k u a b i l. Esitatakse funktsiooni graafik, kust saab määrata argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused. Tüüpiline on selline esitusviis isekirjutavate mõõteseadmete korral.

4. P a r a m e e t r i l i n e e s i t u s. Muutujate x ja y väärtused määratakse teatavate abimuutuja t funktsioonide

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in T \tag{14}$$

väärtustena. Abimuutujat t nimetatakse p a r a m e e t r i k s ja avaldisi (14) vaadeldava funktsiooni p a r a m e e t r i l i s t e k s v õ r r a n d i t e k s. Esituse (14) korral öeldakse, et funktsioon on antud parameetriliselt võrranditega (14) ehk on antud parameetrilisel kujul (14).

Avaldisi (14) kirjutatakse sageli ka kujul

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t\in T.$$

Parameetrilisest esitusest ei selgu, kumb muutujatest x ja y on argument ja kumb on funktsioon. Vajaduse korral märgitakse seda eraldi.

Funktsiooni $y=f(x)$, $x\in X$, võib alati esitada parameetrilisel kujul (14), näiteks järgmisel viisil:

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases} \quad t\in T=X.$$

Vastupidine esitus, s. o. üleminek parameetriliselt kujult (14) kujule $y=f(x)$ või kujule $x=g(y)$ ei ole alati teostatav. Tingimused sellisteks üleminekuteks on antud paragrahvis 3.5.

5. E s i t u s i l m u t a m a t a k u j u l, s. o. võrrandi

$$F(x, y)=0 \tag{15}$$

abil.

D 1.9.5. *Kui võrrand* (15) *määrab iga* $x\in X$ *korral arvu* y, *siis öeldakse, et võrrand* (15) *määrab funktsiooni* $y=f(x)$, $x\in X$ *ilmutamata kujul.*

Näiteks võrrand $x^2+y^2-1=0$ määrab ilmutamata kujul kahese funktsiooni

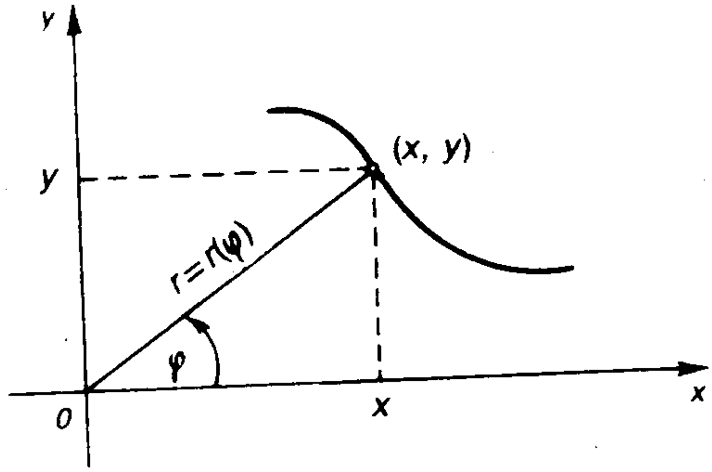
$$y=\pm\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[-1, 1].$$

Samal ajal võrrand $x^2+y^2+1=0$ ei määra funktsiooni $y=f(x)$ ilmutamata kujul.

6. E s i t u s p o l a a r k o o r d i n a a t i d e s valemiga

$$r=r(\varphi), \quad \varphi\in T,$$

mis annab funktsiooni graafiku punktid (x, y) polaarkoordinaatides (r, φ) (vt. joon. 1.22).



Joon. 1.22

Üleminek esituselt polaarkoordinaatides parameetrilisele esitusele on teostatav valemitega

$$\begin{cases} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi\in T.$$

Näited

N 1.9.1. Selgitada, kas funktsioon

$$f(x)=\frac{\sin x^2}{x^2-1}, \quad x\in(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, \infty)$$

on paaris- või paaritu funktsioon.

L a h e n d u s. Määramispiirkond on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. Iga $x\in X$ korral on

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{\sin x^2}{x^2-1}=f(x).$$

Seega kehtib tingimus (9), s. t. f on paarisfunktsioon.

N 1.9.2. Näidata, et funktsioon

$$f(x)=\log(|x|+1)+\frac{x^2}{x-1}, \quad x\in(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$$

ei ole ei paaris- ega paaritu funktsioon.

L a h e n d u s. Määramispiirkond on küll sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, kuid iga $x\in X$ korral on

$$f(-x)=\log(|-x|+1)+\frac{(-x)^2}{-x-1}=\log(|x|+1)+\frac{x^2}{-x-1},$$

kust on näha, et ei kehti ei tingimus (9) ega (10).

N 1.9.3. Leida funktsiooni

$$y=\sin 3x$$

periood ω.

L a h e n d u s. Vaadeldava funktsiooni määramispiirkond on $X=(-\infty, \infty)$.

Vastavalt definitsioonile D 1.9.2 koostame võrrandi (11), saame:

$$\sin 3(x+\omega)=\sin 3x$$

ehk, võttes $t=3x$,

$$\sin(t+3\omega)=\sin t.$$

Et viimane tingimus peab kehtima iga $t\in X$ korral, siis 3ω peab olema funktsiooni $y=\sin t$ periood. Seega $3\omega=2k\pi$, kust $\omega=2k\pi/3$. Vähim positiivne periood on $\omega=2\pi/3$.

Leiame perioodi ω veel teisiti. Lahendame saadud võrrandi

$$\sin(t+3\omega)=\sin t$$

ω suhtes, saame:

$$\sin(t+3\omega)-\sin t=0,$$

ehk

$$2\cos\frac{2t+3\omega}{2}\sin\frac{3\omega}{2}=0.$$

Seega peab kehtima kas

$$\cos\frac{2t+3\omega}{2}=0\Leftrightarrow\frac{2t+3\omega}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

või

$$\sin\frac{3\omega}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3\omega}{2}=k\pi.$$

Esimesest tingimusest pole võimalik konstantset lahendit ω leida. Teisest tingimusest saame $\omega=2k\pi/3$, mis ongi otsitav periood.

N 1.9.4. Kirjutada ilmutatud kujul $y=f(x)$ järgmine parameetrilisel kujul antud funktsioon

$$x=t+5,\quad y=t+\ln t.$$

L a h e n d u s. Esimesest võrrandist avaldame t, saame $t=x-5$. Järelikult

$$y=x-5+\ln(x-5).$$

N 1.9.5. Leida funktsioon $y=f(x)$, mis on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$\ln(y-\sin x)=x.$$

L a h e n d u s. Avaldame antud võrrandist suuruse y, saame:

$$y-\sin x=e^x,$$

kust

$$y=e^x+\sin x.$$

Ülesanded

Selgitada, millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised on paaritud funktsioonid (vt. näited N 1.9.1 ja N 1.9.2).

141. $f(x)=\frac{3}{x}-x^3$

142. $f(x)=x(5^{2x}-5^{-2x})$

143. $f(x)=\frac{\arcsin x}{\arctan x}$

144. $f(x)=\sin x-x\cos x$

145. $f(x)=\sin x-\cos x$

146. $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$

Selgitada, millised järgmistest funktsioonidest on perioodilised, leida periood ω ja vähim positiivne periood (vt. näide N 1.9.3).

147. $y=\sin 2x$ **150.** $y=|\tan x|$

148. $y=\cos \lambda x$ **151.** $y=\sin^2 x$

149. $y=|\sin x|$ **152.** $y=\sin\frac{1}{x}$

153. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$

154. $y=2\tan 2x-3\tan 3x+\cot\frac{x}{4}$

155. $y=x-[x]$ **156.** $y=D(x)$

Järgmised parameetrilisel kujul antud funktsioonid kirjutada ilmutatud kujul $y=f(x)$ või $x=g(y)$ (vt. näide N 1.9.4).

157. $x=\sin t,\quad y=\ln|t|+2t$ **158.** $x=t^5+t,\quad y=e^t$

Leida järgmised ilmutamata kujul antud funktsioonid $y=f(x)$ (vt. näide N 1.9.5).

159. $y^2-2xy+x^2-4=0$ **160.** $e^y+x^2e^{-y}=2x$

§ 1.10. ELEMENTAARFUNKTSIOONID

Olgu antud funktsioon $y=f(u)$, mille argumendi u väärtused määratakse teise funktsiooni $u=g(x)$ väärtuste abil.

D 1.10.1. *Kui $y=f(u)$, kus $u=g(x)$, siis öeldakse, et y on muutuja x suhtes liitfunktsioon, ja kirjutatakse:*

$$y=f[g(x)]. \tag{13}$$

Muutujat u nimetatakse vahepealseks muutujaks. *Funktsioone f ja g nimetatakse* liitfunktsiooni (13) koostisosadeks.

Liitfunktsiooni (13) nimetatakse ka funktsioonide f ja g kompositsiooniks ehk superpositsiooniks.

Kui liitfunktsiooni määramispiirkond pole antud, siis selle all mõeldakse argumendi x väärtuste niisugust hulka, mille korral liitfunktsiooni väärtused y eksisteerivad.

Kui liitfunktsioon on antud kujul (13), siis võime, võttes kasutusele vahepealse muutuja u, esitada ta nn. ahela kujul

$$y=f(u),\quad u=g(x). \tag{14}$$

Liitfunktsioonil võib koostisosi olla ka rohkem kui kaks. Näiteks, kui liitfunktsioon on antud ahela kujul

$$y=f(u),\quad u=g(v),\quad v=h(x),$$

siis võime kirjutada:

$$y=f\{g[h(x)]\}.$$

Koostisosi sellel liitfunktsioonil on 3.

Põhilisteks elementaarfunktsioonideks nimetatakse järgmisi funktsioone:

1) konstantne funktsioon: $y=c$ ($c=\text{const}$),

2) eksponentfunktsioon: $y=a^x$,

3) logaritmfunktsioon: $y=\log_a x$,

4) astmefunktsioon: $y=x^\alpha$,

5) trigonomeetrilised funktsioonid: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$,

6) arkusfunktsioonid: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

D 1.10.2. *Funktsioone, mis saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, nimetatakse* **elementaarfunktsioonideks.**

Elementaarfunktsiooniks on näiteks **polünoom**

$$y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

samuti **ratsionaalne funktsioon**

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kus $P_n(x)$ ja $Q_m(x)$ on polünoomid.

Ka funktsioon, mis on koostatud oma määramispiirkonna eri osades erisugustest elementaarfunktsioonidest, võib osutuda elementaarfunktsiooniks. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

T 1.10.1. *Funktsioon*

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \textit{kui } x<a,\\ A, & \textit{kui } x=a,\\ \psi(x), & \textit{kui } x>a,\end{cases}$$

kus φ ja ψ on elementaarfunktsioonid, mille määramispiirkonnad sisaldavad punkti $x=a$, on elementaarfunktsioon siis ja ainult siis, kui

$$\varphi(a)=\psi(a)=A.$$

Paljude elementaarfunktsioonide graafikud saab joonestada, lähtudes põhiliste elementaarfunktsioonide graafikutest, kui silmas pidada järgmist.

1. Funktsiooni $y=-f(x)$ graafik on peegelpildiks $y=f(x)$ graafikule x-telje suhtes.

2. Funktsiooni $y=f(-x)$ graafik on peegelpildiks $y=f(x)$ graafikule y-telje suhtes.

3. Funktsiooni $y=f(x-a)$ graafik on $y=f(x)$ graafiku paralleellüke x-telje sihis kaugusele a.

4. Funktsiooni $y=f(x)+b$ graafik on $y=f(x)$ graafiku paralleellüke y-telje sihis kaugusele b.

5. Funktsiooni $y=Af(x)$ graafik on $y=f(x)$ graafik, mille mõõtkava on y-telje sihis muudetud A korda.

Funktsiooni $y=f(x)$ graafiku joonestamiseks võetakse funktsiooni määramispiirkonnas X küllalt tihedalt argumendi väärtusi x_i ja arvutatakse funktsiooni väärtused $y_i=f(x_i)$. Seejärel kantakse graafiku punktid (x_i, y_i) xy-tasandile ja ühendatakse nad sujuva joonega. Graafiku kuju täpsustamiseks leitakse vajaduse korral veel funktsiooni nullkohad, piirkonnad, kus ta on positiivne ja kus on negatiivne, uuritakse, kas ta on paaris, paaritu või perioodiline funktsioon, jne.

Näited

N 1.10.1. Leida funktsioonid $f[g(x)]$ ja $g[2+f(x)]$, kui $f(x)=10^x$, $g(x)=\log(x^2-4)$

Lahendus. Koostame nõutavad liitfunktsioonid

$$f[g(x)]=10^{\log(x^2-4)}=x^2-4, \quad x\in\{x: |x|>2\}$$

$$g[2+f(x)]=\log[(2+10^x)^2-4]=\log(4\cdot 10^x+10^{2x})=$$
$$=\log 10^x(4+10^x)=x+\log(4+10^x), \quad x\in(-\infty, \infty).$$

N 1.10.2. Leida funktsioon $f(x)$, kui

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2-x}{1-x}.$$

Lahendus. Tähistame $1/(1-x)=t$, siis $x=1-1/t$ ja

$$f(t)=\frac{2-(1-1/t)}{1-(1-1/t)}=t+1.$$

Tähistades tagasi $t=x$, saame vastuseks:

$$f(x)=x+1.$$

Seda ülesannet võib lahendada ka järgmisel viisil, mis mõnikord viib kiiremini sihile. Teisendame funktsiooni f avaldist nii, et $1/(1-x)$ oleks tema argumendiks, saame:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1+(1-x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}+1.$$

Tähistades $t=1/(1-x)$, saame jälle $f(t)=t+1$ ehk $f(x)=x+1$.

Ülesanded

161. Arvutada $f(-3)$, $f(0)$, $f(0{,}1)$, $f(1)$ ja $f(10)$, kui

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{kui } x\in[-10, -1)\\ 2^x, & \text{kui } x\in[-1, 1/10)\\ \arccos(\log x), & \text{kui } x\in[1/10, 10]\end{cases}$$

162. Leida $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $f[f(x)]$ ja $g[g(x)]$, kui

$$f(x)=\log x, \quad g(x)=x^2.$$

163. Leida $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(1/x)$, kui

$$f(x)=2^x.$$

Leida funktsioon $f(x)$, kui

164. $f(x+1)=x^2+3x+3$

165. $f(1-3x)=3(1-4x+6x^2)$

166. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

Kirjutada järgmised liitfunktsioonid ahela kujul

167. $y=(2x+3)^2$

168. $y=\sqrt{\log \arctan x}$

169. $y=f(x+1)$

170. $y=f[\log(x+1)]$

171. $y=\sin g(x)$

Millised järgmistest funktsioonidest on elementaarfunktsioonid ja millised mitte.

172. $y=x+\sin x$

173. $y=\log(x+\sqrt{1-x^2})$

174. $y=\operatorname{sgn} x$

175. $y=[x]$

176. $y=D(x)$

177. $y=10^{\tan x}$

178. $y=10^{\arctan x}$

179. $y=\begin{cases} x, & \text{kui } x<0 \\ x^2, & \text{kui } x\geqslant 0 \end{cases}$

180. $y=|x|$

181. $y=\begin{cases} \log x, & \text{kui } x<1 \\ 0, & \text{kui } x=1 \\ x^2, & \text{kui } x>1 \end{cases}$

182. $y=\begin{cases} 3-2x, & \text{kui } x\leqslant 0 \\ 3, & \text{kui } 0<x\leqslant 3 \\ 2x-3, & \text{kui } x>3. \end{cases}$

Joonestada järgmiste funktsioonide graafikud.

183. $y=\frac{1}{1+x^2}$

184. $r=\frac{2}{\pi}\varphi$ (Archimedese spiraal)

185. $r=\frac{\pi}{\varphi}$ (hüperboolne spiraal)

186. $r=2(1+\cos\varphi)$ (kardioid)

Joonestada järgmiste funktsioonide graafikud, lähtudes põhiliste elementaarfunktsioonide graafikutest.

187. $y=-x^2$

188. $y=\log(-x)$

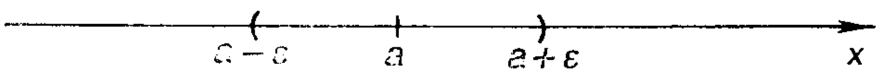
189. $y=\sin(x-\pi)$

190. $y=\arcsin x+\frac{\pi}{2}$

II. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

§ 2.1. JADA PIIRVÄÄRTUS

Punkti (koha, arvu) a ümbruseks ehk ε-ümbruseks nimetatakse iga vahemikku $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, kus $\varepsilon>0$ on mingi arv (joon. 2.1). Mida väiksem on ε, seda lühem on vahemik $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, s.t. seda väiksem on punkti a ümbrus.



Joon. 2.1

Olgu antud arvjada

$$(x_n)=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots).$$

Jada (x_n) võib vaadelda kui funktsiooni f, mis on antud valemiga $f(n)=x_n$, kus $n\in\mathbf{N}$, s.o. kui funktsiooni f, mille määramispiirkond $X=\mathbf{N}$.

D 2.1.1. *Arvu a nimetatakse jada (x_n) piirväärtuseks, kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub selline arv $N=N(\varepsilon)$, et kehtib võrratus*

$$|x_n-a|<\varepsilon, \text{ alati kui } n>N, \tag{1}$$

ja kirjutatakse:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

ehk

$$\lim x_n=a \quad \text{või} \quad x_n\to a.$$

Definitsiooni D 2.1.1 lahtimõtestamiseks sõnastame ta teisiti. Ülesande 34 põhjal on tingimus (1) samaväärne tingimusega

$$x_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon), \text{ kui } n>N.$$

Viimase tingimuse põhjal võime öelda, et arv a on jada (x_n) piirväärtus, kui $n\to\infty$ korral jada liikmed x_n lähenevad arvule a, sisenedes tema igasse ümbrusse.

Järgmine definitsioon annab jada lõpmatu piirväärtuse mõiste.

D 2.1.2. *Öeldakse, et jada* (x_n) *piirväärtus on* $+\infty$ $(-\infty)$, *kui iga arvu* $M>0$ *korral leidub arv* N, *et kehtib võrratus* $x_n>M$ $(x_n<-M)$, *alati kui* $n>N$, *ja kirjutatakse*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \quad (\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty)$$

ehk

$$x_n\to\infty \quad (x_n\to-\infty).$$

Viimastes avaldistes sümboli ∞ asemel sageli kirjutatakse ka $+\infty$.

Selleks, et rohkem eristada jada piirväärtust lõpmatutest piirväärtustest, öeldakse, et definitsioon D 2.1.1 annab jada lõpliku piirväärtuse mõiste.

Jada piirväärtusel on järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused: kui on olemas lõplikud piirväärtused $\lim x_n$ ja $\lim y_n$, siis

1) $\lim(x_n\pm y_n)=\lim x_n\pm\lim y_n$,
2) $\lim(cx_n)=c\lim x_n \quad (c=\mathrm{const})$,
3) $\lim(x_ny_n)=\lim x_n \lim y_n$,
4) $\lim\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim x_n}{\lim y_n} \quad (\lim y_n\neq 0)$.

Omadusest 3) järeldub võrdus

$$\lim x_n^m=(\lim x_n)^m \tag{2}$$

iga $m\in\mathbf{N}$ korral.

D 2.1.3. *Öeldakse, et jada* (x_n) *on* tõkestatud, *kui leidub arv* M, *et* $|x_n|\leqslant M$ *iga* $n=1, 2, \ldots$ *korral, ja kirjutatakse*:

$$x_n=O(1).$$

D 2.1.4. *Kui* $\lim|x_n|=\infty$, *siis suurust* x_n *nimetatakse* lõpmata suureks (suuruseks). *Kui aga* $\lim x_n=0$, *siis suurust* x_n *nimetatakse* lõpmata väikeseks (suuruseks) *ja kirjutatakse*

$$x_n=o(1), \text{ kui } n\to\infty.$$

Lõpmata väikestel ja lõpmata suurtel suurustel on järgmised omadused:

a) $x_n\to\pm\infty \wedge y_n=O(1) \Rightarrow x_n+y_n\to\pm\infty$,
b) $x_n\to\pm\infty \wedge y_n\to\pm\infty \Rightarrow x_n+y_n\to\pm\infty$,
c) $x_n=o(1) \wedge y_n=O(1) \Rightarrow x_ny_n=o(1)$,
d) $|x_n|\to\infty \wedge \lim y_n\neq 0 \Rightarrow |x_ny_n|\to\infty$,
e) $x_n=o(1) \Rightarrow 1/|x_n|\to\infty$,
f) $|x_n|\to\infty \Rightarrow 1/x_n=o(1)$.

Järgnevate ülesannete lahendamisel on vaja teada järgmisi piirväärtusi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}|q^n|=\begin{cases}\infty, & \text{kui } |q|>1,\\ 0, & \text{kui } |q|<1\end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$$

Piirväärtuste leidmisel jagatisest x_n/y_n, korrutisest x_ny_n, summast x_n+y_n ja astmest $x_n^{y_n}$ võivad tekkida nn. määramatused tüüpi

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Öeldakse, et jagatises x_n/y_n esineb määramatus 0/0, kui $x_n\to 0$ ja $y_n\to 0$. Analoogiliselt defineeritakse ka ülejäänud määramatused. Nende määramatuste korral omaduste 1)—4) ja a)—f) põhjal jada piirväärtust leida ei saa, sest siis jada piirväärtus oleneb jada kogu üldliikme muutumiskäigust. Sel korral tuleb jada liikmeid sobivalt teisendada või uurida jada kogu üldliikme muutumiskäiku piirprotsessis.

Kõigil ülejäänud juhtudel on jada piirväärtus leitav omaduste 1)—4) ja a)—f) põhjal. Näiteks kui jada üldliige on x_ny_n ja $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$, siis piiril tekib olukord $\infty\cdot\infty$, mis ei ole määramatus, sest siis omaduse d) põhjal $x_ny_n\to\infty$.

D 2.1.5. *Öeldakse, et jada* (x_n) *koondub arvuks a, kui tal on olemas lõplik piirväärtus* $\lim x_n=a$. *Kui aga jadal* (x_n) *lõplikku piirväärtust ei ole, siis öeldakse, et jada* (x_n) *hajub.*

Jada (x_n) koonduvuse uurimisel kasutatakse järgmisi tunnuseid.

KT 2.1.1 (Weierstrassi tunnus). *Iga monotoonne tõkestatud jada on koonduv.*

KT 2.1.2 (Cauchy kriteerium). *Jada* (x_n) *on koonduv siis ja ainult siis, kui iga arvu* $\varepsilon>0$ *korral leidub arv* $N=N(\varepsilon)$, *et kehtib võrratus*

$$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon, \quad \textit{kui} \quad n>N$$

iga $p=1, 2, \ldots$ *korral.*

Eraldame jadast (x_n) lõpmatu hulga liikmeid ja moodustame neist uue jada, paigutades eraldatud liikmed uude jadasse samas järjekorras nagu nad olid jadas (x_n). Uue jada liikmeid märgime kahe indeksi abil nii:

$$(x_{k_n})=(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots). \tag{3}$$

Jada (3) nimetatakse jada (x_n) osajadaks. Jada (x_n) osajadasid võib moodustada lõpmata paljudel viisidel.

D 2.1.6. *Kui eksisteerib piirväärtus*

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a,$$

siis öeldakse, et a on jada (x_n) osapiirväärtus.

D 2.1.7. *Jada* (x_n) *suurimat osapiirväärtust nimetatakse jada* ülemiseks piirväärtuseks *ja märgitakse sümboliga*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \quad ehk \quad \overline{\lim}\, x_n.$$

Jada (x_n) *vähimat osapiirväärtust nimetatakse jada* alumiseks piirväärtuseks *ja märgitakse sümboliga*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \quad ehk \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

T 2.1.1. *Koonduva jada iga osajada koondub samaks arvuks, mis jadagi.*

T 2.1.2. *Jada* (x_n) *koondub arvuks a siis ja ainult siis, kui selle jada alumine ja ülemine piirväärtus on a.*

Näited

N 2.1.1. Tõestada definitsiooni D 2.1.1 põhjal, et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2+n}=2.$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon>0$ suvaline arv. Tuleb näidata, et leidub selline arv $N=N(\varepsilon)$, et kehtib tingimus (1), s.o. tingimus

$$\left|\frac{2n}{2+n}-2\right|<\varepsilon, \quad \text{kui} \quad n>N.$$

Lahendame selle võrratuse n suhtes. Saame:

$$\left|\frac{2n-4-2n}{2+n}\right|=\frac{4}{2+n}<\varepsilon,$$

kust

$$n>\frac{4}{\varepsilon}-2.$$

Seega võime võtta

$$N=\frac{4}{\varepsilon}-2.$$

Mott.

N 2.1.2. Leida piirväärtus

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+1}{(2n+1)^3}.$$

Lahendus. Omaduste f), d) ja l) põhjal saame murru lugeja ja nimetaja kohta vastavalt, et

$$\lim(n^3-2n+1)=\lim n^3\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=$$
$$=\lim n^3[1+o(1)+o(1)]=\infty$$

ja

$$\lim(2n+1)^3=\lim n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)^3=\lim n^3[2+o(1)]^3=\infty.$$

Seega antud jada korral esineb määramatus ∞/∞. Määramatuse kõrvaldamiseks jagame lugejat ja nimetajat suurusega n^3. Omaduste 4), 1), 3) ja võrduse (2) põhjal saame siis

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{\lim 1-\lim\frac{2}{n^2}+\lim\frac{1}{n^3}}{\left(\lim 2+\lim\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{1-0+0}{(2+0)^3}=\frac{1}{8}.$$

Ülesanded

Tõestada piirväärtuse definitsioonide D 2.1.1 ja D 2.1.2 põhjal järgmised võrdused (vt. näide N 2.1.1).

191. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}=2$

192. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{4+\sqrt{n}}=0$

193. $\lim\limits_{n\to\infty}[n^2-(-1)^n]=\infty$

194. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2n^2)=-\infty$

Leida järgmiste jadade piirväärtused (vt. näide N 2.1.2).

195. $x_n=\frac{2n}{5n-1}$

196. $x_n=\frac{1}{n}+3$

197. $x_n=\frac{1}{2n}\sin n+\sqrt[n]{3}$

198. $x_n=\frac{n}{n^2-1}\cos n^3+\frac{4n}{6n+5}\frac{n}{1-n}$

199. $x_n=\frac{n^2+2n-6}{(3n-1)^2}$

200. $x_n=\frac{n}{n+1}+n^2\sin n\pi$

201. $x_n=\frac{1+2+\ldots+n}{(2-3n)^2}$

202. $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}+\sqrt[n]{3n}$

203. $x_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\sin 9}$

204. $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{(-2)^n}$

205. Weierstrassi tunnuse KT 2.1.1 põhjal näidata, et jada

$$x_n=\frac{n}{n^2+1}$$

koondub.

206. Cauchy kriteeriumi KT 2.1.2 põhjal näidata, et jada

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

hajub.

Leida järgmiste jadade (x_n) osapiirväärtused $\liminf x_n$ ja $\limsup x_n$. Missugused neist jadadest koonduvad ja missugused hajuvad?

207. $x_n=1-\frac{1}{n}$

208. $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$

209. $x_n=\cos n\pi$

210. $x_n=n^{(-1)^n}$

211. $x_n=(-1)^n n$

212. $x_n=\begin{cases}1, & \text{kui } n=2k-1\\ \frac{1}{n}, & \text{kui } n=2k\end{cases}$

213. $x_n=(-1)^n n^{1/n}$

214. $x_n=10^n$

§ 2.2. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$, $x\in X$. Olgu punkt a piirkonna X kuhjumispunkt, s.o. punkt, mille igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev hulga X punkt.

D 2.2.1. *Arvu A nimetatakse* funktsiooni f piirväärtuseks *punktis a, kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub niisugune arv $\delta>0$, et kehtib võrratus*

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \textit{alati kui} \quad 0<|x-a|<\delta, \tag{4}$$

ja kirjutatakse:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \tag{5}$$

Tähistuse (5) asemel kasutatakse ka tähistusi

$$f(x)\to A, \quad \text{kui} \quad x\to a,$$

ja

$$\lim f(x)=A, \quad \text{kui} \quad x\to a.$$

Definitsiooni D 2.2.1 lahtimõtestamiseks sõnastame ta ümber. Ülesande 34 põhjal on tingimus (4) samaväärne tingimusega

$$f(x)\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon), \quad \text{kui} \quad x\in(a-\delta,\ a+\delta) \quad (x\neq a). \tag{6}$$

Kirjutis $x\to a$ tähendab, et muutuja x väärtused lähenevad punktile a, sisenedes tema igasse ümbrusse, kusjuures $x \neq a$. Tingimuse (6) põhjal kirjutis (5) tähendab seda, et $x \to a$ korral funktsiooni f väärtused $f(x)$ sisenevad arvu A igasse ümbrusse.

Definitsiooniga D 2.2.1 antud piirväärtust nimetatakse ka l õ p l i k u k s piirväärtuseks, et eristada seda l õ p m a t u s t piirväärtusest, mille definitsiooni kohe esitame.

D 2.2.2. *Öeldakse, et funktsioonil f on lõpmatu piirväärtus punktis a, kui iga arvu $N>0$ korral leidub selline arv $\delta>0$, et kehtib võrratus*

$$f(x)>N\ (<-N), \quad \textit{alati kui} \quad 0<|x-a|<\delta,$$

ja kirjutatakse:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty\ (-\infty)$$

ehk

$$f(x)\to\infty\ (-\infty), \quad \textit{kui} \quad x\to a.$$

T 2.2.1 (Heine teoreem). *Arv A on funktsiooni f piirväärtus punktis a siis ja ainult siis, kui $f(x_n)\to A$ iga jada (x_n) korral, mis rahuldab tingimust $x_n\to a$ $(x_n\neq a)$.*

Teoreemi T 2.2.1 saab kasutada ka siis, kui on vaja näidata, et funktsioonil f pole piirväärtust punktis a. Selleks on piisav valida kaks jada $x_n\to a$ ja $x'_n\to a$, mille korral piirväärtused $\lim f(x_n)$ ja $\lim f(x'_n)$ on erinevad (vt. näide N 2.2.8).

Funktsiooni piirväärtusel on järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused: kui $x\to a$ korral funktsioonidel u ja v on olemas lõplikud piirväärtused $\lim u(x)$ ja $\lim v(x)$, siis $x\to a$ korral

1) $\lim [u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)$,
2) $\lim cu(x)=c\lim u(x)$ $\quad (c=\text{const})$,
3) $\lim u(x)v(x)=\lim u(x)\lim v(x)$,
4) $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}$ $\quad (\lim v(x)\neq 0)$.

Nendes omadustes lõplike piirväärtuste olemasolust võrduse paremal poolel järeldub lõpliku piirväärtuse olemasolu võrduse vasakul poolel, kuid mitte vastupidi.

Omadusest 3) järeldub võrdus

$$\lim u(x)^n=[\lim u(x)]^n \tag{7}$$

iga $n\in\mathbf{N}$ korral.

D 2.2.3. *Öeldakse, et funktsioon f on tõkestatud $x\to a$ k o r r a l (ehk* p i i r p r o t s e s s i s *$x\to a$), kui leidub arv $M>0$ ja punkti a δ-ümbrus, et selles ümbruses*

$$|f(x)|\leqslant M,$$

ja kirjutatakse:

$$f(x)=O(1), \quad \textit{kui} \quad x\to a.$$

D 2.2.4. *Kui*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty,$$

siis funktsiooni f nimetatakse lõpmata suureks (suuruseks) *piirprotsessis $x\to a$. Kui aga*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

siis funktsiooni f nimetatakse lõpmata väikeseks (suuruseks) *piirprotsessis $x\to a$ ja kirjutatakse:*

$$f(x) = o(1), \quad \text{kui} \quad x\to a.$$

Lõpmata väikestel ja lõpmata suurtel suurustel on järgmised omadused, kui $x\to a$:

a) $u(x)\to\pm\infty \wedge v(x)=O(1) \Rightarrow u(x)+v(x)\to\pm\infty$,
b) $u(x)\to\pm\infty \wedge v(x)\to\pm\infty \Rightarrow u(x)+v(x)\to\pm\infty$,
c) $u(x)=o(1) \wedge v(x)=O(1) \Rightarrow u(x)v(x)=o(1)$,
d) $|u(x)|\to\infty \wedge \lim v(x)\neq 0 \Rightarrow |u(x)v(x)|\to\infty$,
e) $u(x)=o(1) \Rightarrow 1/|u(x)|\to\infty$,
f) $|u(x)|\to\infty \Rightarrow 1/u(x)=o(1)$.

Piirväärtuse (5) leidmisel võib esineda kaks juhtumit.

a. $a\in X$, s.t. punkt a on funktsiooni f määramispiirkonna X punkt. Sel korral, kui f on elementaarfunktsioon, kehtib võrdus

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \tag{8}$$

s.t. elementaarfunktsiooni piirväärtus määramispiirkonna punktis on võrdne tema väärtusega selles punktis.

b. $a\notin X$, s.t. punkt a ei ole funktsiooni f määramispiirkonna X punkt. Sel korral kasutatakse funktsiooni piirväärtuse leidmiseks omadusi 1)—4) ja a)—f). Piirväärtuste leidmisel jagatisest $u(x)/v(x)$, korrutisest $u(x)v(x)$, summast $u(x)+v(x)$ ja astmest $u(x)^{v(x)}$ võivad tekkida määramatused tüüpi

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,$$

mis defineeritakse samal viisil nagu jadade korralgi (§ 2.1). Nende määramatuse korral omaduste 1)—4) ja a)—f) põhjal ei saa funktsiooni piirväärtust leida, sest see oleneb funktsiooni kogu avaldise muutumiskäigust. Sel korral piirväärtuse leidmiseks tuleb funktsiooni avaldist sobivalt teisendada või uurida kogu avaldise muutumiskäiku. Kasulik on teada järgmisi piirväärtusi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} 1, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \ln a, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{m/x} \underset{1^{\infty}}{=} e^{km}, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \log_a e, \tag{12}$$

kus võrdusmärgi all on ära märgitud määramatuse tüüp, mis antud piirprotsessis tekib.

Funktsiooni piirväärtuse leidmisel tuleb kõigepealt kindlaks teha, kumb juhtumitest, kas a või b, esineb. Juhtumi a korral kasutame võrdust (8), kui tegemist on elementaarfunktsiooniga (vt. näide N 2.2.2). Juhtumi b korral kasutame määramatuse kõrvaldamiseks järgmisi võtteid: teguriteks lahutamist (vt. näide 2.2.3), muutuja vahetust (vt. näide N 2.2.4), irratsionaalsuse üleviimist lugejast nimetajasse ja vastupidi (vt. näide N 2.2.5), tuntud piirväärtuste (9), (10), (11) ja (12) ärakasutamist (vt. näited N 2.2.6 ja N 2.2.7).

Näited

N 2.2.1. Tõestada definitsiooni D 2.2.1 põhjal, et

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon>0$ küllalt väike suvaline arv. Tuleb näidata, et leidub selline arv $\delta>0$, mille korral kehtib võrratus

$$|x^2-4|<\varepsilon, \quad \text{kui} \quad 0<|x-2|<\delta.$$

Lahendame esimese võrratuse x suhtes. Saame:

$$\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon},$$

kust

$$-(2-\sqrt{4-\varepsilon}) < x-2 < \sqrt{4+\varepsilon}-2.$$

Viimane võrratus kehtib, kui

$$0 < |x-2| < \min(2-\sqrt{4-\varepsilon},\ \sqrt{4+\varepsilon}-2).$$

Järelikult võime võtta

$$\delta=\min(2-\sqrt{4-\varepsilon},\ \sqrt{4+\varepsilon}-2).$$

Mott.

N 2.2.2. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt{1-x}}{x^2-x+1}.$$

Lahendus. Vaadeldav funktsioon on elementaarfunktsioon ja punkt $a=1$ kuulub tema määramispiirkonda. Seega esineb juhtum a ja kehtib võrdus (8), mille põhjal

$$A=\frac{1+\sqrt{1-1}}{1^2-1+1}=1.$$

N 2.2.3. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}.$$

L a h e n d u s. Punktis $a=2$ on määramatus $0/0$, s.t. punkt $a=2$ ei kuulu vaadeldava funktsiooni määramispiirkonda. Seega esineb juhtum b. Määramatuse kõrvaldamiseks lahutame lugeja ja nimetaja teguriteks. Saame:

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}.$$

Taandame teguri $x-2$, mida võib teha, sest $x\to 2$ korral on $x-2\neq 0$. Pärast taandamist tekib juhtum a ja võrduse (8) põhjal

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{5}.$$

N 2.2.4. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+2x}}{1-\sqrt{1+2x}}$$

L a h e n d u s. Teeme muutuja vahetuse $1+2x=u^6$. Kui $x\to 0$, siis $u\to 1$ ja seega

$$A=\lim_{u\to 1}\frac{1-u^2}{1-u^3}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{u\to 1}\frac{(1-u)(1+u)}{(1-u)(1+u+u^2)}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{u\to 1}\frac{1+u}{1+u+u^2}=\frac{2}{3}.$$

N 2.2.5. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

L a h e n d u s. Esineb määramatus $0/0$. Määramatuse kõrvaldamiseks viime irratsionaalsuse lugejast nimetajasse. Korrutades lugejat ja nimetajat suurusega $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, saame valemi $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ põhjal:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

N 2.2.6. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x\sin(x+3)}.$$

L a h e n d u s. Esineb määramatus $0/0$. Teeme muutuja vahetuse $x+3=u$ ja kasutame valemit (9). Arvestades, et $x^2-9=(x+3)(x-3)$, saame:

$$A=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}\lim_{u\to 0}\frac{u-6}{u-3}=1\cdot 2=2.$$

N 2.2.7. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}(1-3\tan^2 x)^{\cot^2 x}.$$

Lahendus. Esineb määramatus 1^∞. Teeme muutuja vahetuse $\tan^2 x= =u$ ja kasutame valemit (11), saame:

$$A=\lim_{u\to 0}(1-3u)^{1/u}=e^{-3}.$$

N 2.2.8. Näidata, et funktsioonil

$$f(x)=\cos\frac{1}{x}$$

puudub piirväärtus punktis $a=0$.

Lahendus. Valime jadad

$$x_n=\frac{1}{2n\pi},\quad x'_n=\frac{1}{(2n-1)\pi},$$

mis koonduvad arvuks 0. Nende jadade korral on

$$f(x_n)=1,\quad f(x'_n)=-1.$$

Seega, kui $n\to\infty$, s. t. kui $x_n\to 0$ ja $x'_n\to 0$, saame:

$$f(x_n)\to 1,\quad f(x'_n)\to -1.$$

Piirväärtused tulid erinevad. Teoreem T 2.2.1 põhjal vaadeldaval funktsioonil punktis $a=0$ piirväärtust ei ole.

Ülesanded

Definitsiooni D 2.2.1 põhjal tõestada järgmised võrdused (vt. näide N 2.2.1).

215. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=3$ **217.** $\lim\limits_{x\to -2}x^2=4$

216. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{x}=1$

Definitsiooni D 2.2.2 põhjal tõestada järgmised võrdused.

218. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$ **219.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{(x+1)^2}=-\infty$

Sõnastada definitsioon D 2.2.1 või D 2.2.2 järgmiste piirväärtuste jaoks.

220. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=6$ **222.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

221. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näited N 2.2.2, N 2.2.3 ja N 2.2.4).

223. $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-5x^2+5)$ **225.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

224. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$ **226.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

227. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$

228. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

229. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 2.2.5).

230. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2+x-2}$

231. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

232. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{1-\sqrt{x+3}}$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näited N 2.2.2, N 2.2.6 ja N 2.2.7).

233. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arccos\log x}{\sin\frac{\pi x}{6}}$

234. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

235. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$

236. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

237. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}$

238. $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1+x}{x}\right|$

239. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x-1}$

240. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{|\sin x|}-\frac{1}{|\tan x|}\right)$

241. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\sin x}$

242. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/\sin^2 x}$

243. Näidata teoreemi T 2.2.1 abil, et funktsioonil

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

puudub piirväärtus punktis $x=0$ (vt. näide N 2.2.8).

§ 2.3. ÜHEPOOLSED PIIRVÄÄRTUSED

Punkti a vasakpoolseks δ-ümbruseks nimetatakse vahemikku $(a-\delta, a)$ ja parempoolseks δ-ümbruseks vahemikku $(a, a+\delta)$.

Kui $x\to a$ ja $x<a$, siis öeldakse, et muutuja x läheneb vasakult punktile a, ja kirjutatakse:

$$x\to a-.$$

Kui aga $x\to a$ ja $x>a$, siis öeldakse, et muutuja x läheneb paremalt punktile a, ja kirjutatakse:

$$x\to a+.$$

Seega $x \to a-$ märgib, et x läheneb vasakult punktile a, sisenedes tema igasse vasakpoolsesse ümbrusse, ja $x \to a+$ märgib, et x läheneb paremalt punktile a, sisenedes tema igasse parempoolsesse ümbrusse.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, $x \in X$ ja olgu punkt a piirkonna X kuhjumispunkt.

D 2.3.1. *Arvu A nimetatakse funktsiooni f* vasakpoolseks piirväärtuseks *punktis a, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ alati kui } 0 < a - x < \delta, \tag{13}$$

ja kirjutatakse:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \quad \text{ehk} \quad f(a-) = A.$$

D 2.3.2. *Arvu A nimetatakse funktsiooni f* parempoolseks piirväärtuseks *punktis a, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ alati kui } 0 < x - a < \delta, \tag{14}$$

ja kirjutatakse:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \quad \text{ehk} \quad f(a+) = A.$$

Võrratused $0 < a - x < \delta$ ja $0 < x - a < \delta$ on samaväärsed vastavalt tingimustega $x \in (a - \delta, a)$ ja $x \in (a, a + \delta)$. Seega tingimuses (13) võib muutuja x asetseda ainult punki a vasakpoolses δ-ümbruses ja tingimuses (14) ainult tema parempoolses δ-ümbruses.

T 2.3.1. *Arv A on funktsiooni f vasakpoolne piirväärtus punktis a siis ja ainult siis, kui*

$$f(x_n) \to A \text{ iga } x_n \to a- \text{ korral.}$$

T 2.3.2. *Arv A on funktsiooni f parempoolne piirväärtus punktis a siis ja ainult siis, kui*

$$f(x_n) \to A \text{ iga } x_n \to a+ \text{ korral.}$$

Ühepoolseteks piirväärtusteks loetakse ka piirväärtused nn. lõpmata kaugetes punktides ∞ ja $-\infty$, s. o. piirprotsessid $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$.

Punkti ∞ ümbruseks nimetatakse iga vahemikku (N, ∞) ja punkti $-\infty$ ümbruseks iga vahemikku $(-\infty, -N)$, kus $N > 0$ on mis tahes arv. Need on nende punktide ühepoolsed ümbrused.

Tähistus $x \to \infty$ tähendab lähenemist punktile ∞ vasakult nii, et x saab suuremaks igast arvust N, s. t. siseneb punkti ∞ igasse ümbrusse. Analoogiliselt tähendab $x \to -\infty$ lähenemist punktile $-\infty$ paremalt nii, et x saab väiksemaks igast arvust $-N$, s. t. siseneb punkti $-\infty$ igasse ümbrusse. Samal viisil defineeritakse ka piirprotsesss $|x| \to \infty$, mis tähendab, et $x \to \infty$, või $x \to -\infty$ või mõlemad korraga.

D 2.3.3. *Arvu A nimetatakse funktsiooni f* piirväärtuseks piirprotsessis $x\to\infty$ $(x\to-\infty)$, *kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub arv $N>0$, et*

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ alati kui } x>N \quad (x<-N),$$

ja kirjutatakse:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x)=A).$$

Analoogiliselt definitsiooniga D 2.2.2 defineeritakse ka ühepoolsete piirväärtuste korral lõpmatud piirväärtused $A=\infty$ ja $A=-\infty$.

Ühepoolsete piirväärtuste korral kehtivad ka aritmeetiliste tehetega seotud omadused 1)—4) ja omadused a)—f) paragrahvist 2.2 ning võrdus (7).

Ühepoolsete piirväärtuste leidmisel kasutatakse paragrahvis 2.2 antud võtteid ja järgmisi tähtsamaid ühepoolseid piirväärtusi (mille kehtivus on näitlikult hästi näha nende funktsioonide graafikutest paragrahvis 1.8):

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{kui } 0<a<1, \\ \infty, & \text{kui } a>1 \end{cases} \tag{15}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{kui } 0<a<1, \\ 0, & \text{kui } a>1 \end{cases} \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{kui } 0<a<1, \\ \infty, & \text{kui } a>1 \end{cases} \tag{17}$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = \begin{cases} \infty, & \text{kui } 0<a<1, \\ -\infty, & \text{kui } a>1 \end{cases} \tag{18}$$

$$\lim_{x\to-1+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \tag{19}$$

$$\lim_{x\to-1+} \arccos x = \pi, \qquad \lim_{x\to 1-} \arccos x = 0, \tag{20}$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi, \tag{22}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}. \tag{23}$$

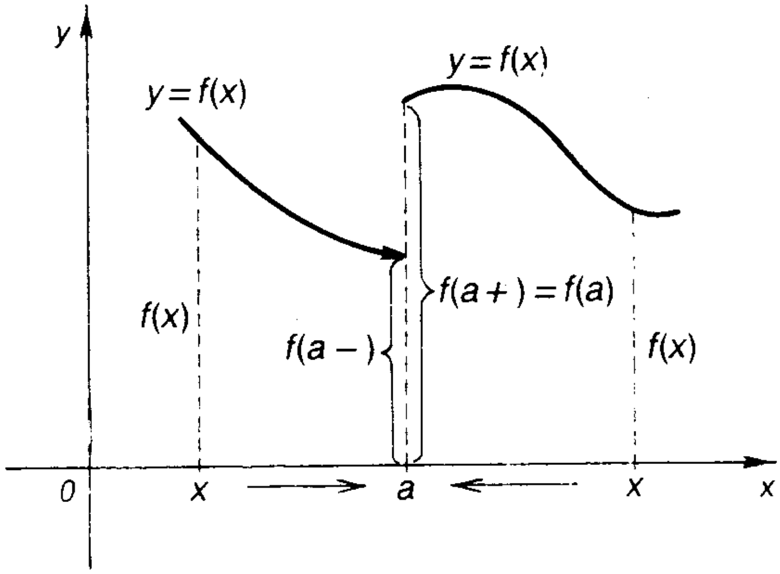
Piirväärtust

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

nimetatakse sageli ka kahepoolseks piirväärtuseks, sest siin muutuja x lähenemine punktile a võib toimuda mõlemalt poolt.

T 2.3.3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow f(a-)=f(a+)=A.$

Viimase teoreemi T 2.3.3 illustreerimiseks vaatame joonisel 2.2 kujutatud juhtu, kus funktsioonil $y=f(x)$ on punktis a olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a-)\neq f(a)$ ja $f(a+)=f(a)$. Seega punktis a on $f(a-)\neq$ $\neq f(a+)$. Teoreemi T 2.3.3 põhjal funktsioonil f punktis a (kahepoolset) piirväärtust ei ole.



Joon. 2.2

Teoreemi 2.3.3 põhjal võime ühepoolsete piirväärtuste leidmisel kasutada ka kahepoolseid piirväärtusi (9), (10), (11) ja (12). Näiteks piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

korral saame teoreemi T 2.3.3 põhjal, et siis kehtivad ka võrdused

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Näited

N 2.3.1. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{(x-1)^3}.$$

L a h e n d u s. Piiril tekib määramatus ∞/∞. Jagame lugeja ja nimetaja muutuja x kõrgeima esineva astmega x^3, saame:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(1)-o(1)}{[1-o(1)]^3}=0.$$

N 2.3.2. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^5+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sin x}.$$

L a h e n d u s. Toome lugejas sulgude ette suurima astme x^5 ja nimetajas suurima astme x^2, saame:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{5/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^5}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{5/3}(1-\mathrm{o}(1))}{-x(1+\mathrm{o}(1))}=-\lim_{x\to-\infty}x^{2/3}=-\infty.$$

N 2.3.3. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to2-}\frac{|x^2-4|}{x-2}.$$

L a h e n d u s. Punkti 2 küllalt väikeses vasakpoolses ümbruses on $x^2-4<0$, seepärast $|x^2-4|=-(x^2-4)$ ja me saame:

$$A=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2}=-\lim_{x\to2-}(x+2)=-4.$$

N 2.3.4. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{5x+4}.$$

L a h e n d u s. Esineb määramatus 1^∞. Teeme muutuja vahetuse $x-1=$ $=u$, siis $x=u+1$. Valemi (23) ja võrduse (7) põhjal saame:

$$A=\lim_{|u|\to\infty}\left(\frac{u+2}{u}\right)^{5u+9}=$$

$$=\lim_{|u|\to\infty}\left(1+\frac{2}{u}\right)^{5u}\cdot\lim_{|u|\to\infty}\left(1+\frac{2}{u}\right)^{9}=e^{2\cdot5}\cdot1^9=e^{10}.$$

Ülesanded

Defineerida võrratuste abil piirväärtused

244. $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$

245. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

Joonestada järgmiste funktsioonide graafikud ja leida nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b.

246. $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & \text{kui } 1<x\leqslant 3\end{cases}$ $\quad a=1,\quad b=2$

247. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & \text{kui } 1<x\leqslant 2\end{cases}$ $\quad a=0,\quad b=1$

Leida järgmised ühepoolsed piirväärtused (vt. näide N 2.3.1).

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{(x+1)^2}$

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+1}{(x-1)^3}$

250. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{x-\cos x}{2x+10}$

251. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x-\ln 2}{x^3+\sin 2}$

252. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+2}{x+\sqrt[3]{x}}+2^x\right)$

253. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2}-x\right)$

254. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 2.3.2).

255. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sin x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

256. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2-1}+2}$

257. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4}+\sin x}$

258. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4+1}+\sqrt[3]{x^3+1}}$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 2.3.3).

259. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|\sin x|}{x}$

260. $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{|\sin x|}{x}$

261. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x-2}$

262. $\lim\limits_{x\to 2-}\frac{|x-2|}{x-2}$

263. $\lim\limits_{x\to 3+}\frac{x}{x-3}$

264. $\lim\limits_{x\to 3-}\frac{x}{x-3}$

265. $\lim\limits_{x\to -3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}$

266. $\lim\limits_{x\to -3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}$

267. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}}$

268. $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}}$

269. $\lim\limits_{x\to 0-}\left(2^{1/x}+\frac{\sin x}{x}\right)$

270. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(2^{1/x}+\frac{\sin x}{x}\right)$

271. $\lim\limits_{x\to 0+} x\left[\frac{1}{x}\right]$

272. $\lim\limits_{x\to 0-} x\left[\frac{1}{x}\right]$

273. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}[x]$

274. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 2.3.4).

275. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$ **277.** $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$

276. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$ **278.** $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

Määrata arvud m ja n järgmistest võrdustest.

279. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+1}-mx-n\right)=0$

280. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-mx-n\right)=0$

§ 2.4. EKVIVALENTSED SUURUSED

Et haarata järgnevate definitsioonidega kõik seni vaadeldud piirprotsessid $x\to a$, $x\to a-$, $x\to a+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ ja $|x|\to\infty$, kirjutame

$$\lim f(x),$$

mõeldes selle all ükskõik millist märgitud piirprotsessi.

Olgu funktsioonid $\alpha=\alpha(x)\neq 0$ ja $\beta=\beta(x)\neq 0$ lõpmata väikesed vaadeldavas piirprotsessis, s.t. olgu

$$\lim\alpha(x)=0,\quad \lim\beta(x)=0.$$

D 2.4.1. *Kui vaadeldavas piirprotsessis*

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0,$$

siis öeldakse, et α *on* β *suhtes* kõrgemat järku lõpmata väike *ja kirjutatakse*

$$\alpha=o(\beta).$$

Sel korral funktsiooni β nimetatakse α suhtes madalamat järku lõpmata väikeseks.

Kui

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=A,\quad \text{kus}\quad 0<|A|<\infty,$$

siis öeldakse, et α *ja* β *on* sama järku lõpmata väikesed.

Kui

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1,$$

siis öeldakse, et α *ja* β *on* ekvivalentsed *ehk* asümptootiliselt võrdsed lõpmata väikesed, *ja kirjutatakse:*

$$\alpha \sim \beta.$$

Kui mingi $k>0$ *korral on*

$$\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = A, \quad kus \quad 0<|A|<\infty,$$

siis öeldakse, et α *on* β *suhtes* k*-järku lõpmata väike, ja kirjutatakse:*

$$\alpha \sim A\beta^k.$$

Seejuures suurust $A\beta^k$ *nimetatakse* α *peaosaks.*

T 2.4.1. *Kui vaadeldavas piirprotsessis on*

$$\alpha \sim \alpha_1, \quad \beta \sim \beta_1,$$

siis selles piirprotsessis

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tag{24}$$

eeldusel, et piirväärtused suhtest α_1/β, α/β_1 *ja* α_1/β_1 *on olemas.*

T 2.4.2. *Vaadeldavas piirprotsessis*

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\beta) \vee \alpha - \beta = o(\alpha).$$

Samasugused mõisted, nagu on antud definitsioonis D 2.4.1, defineeritakse ka lõpmata suurte suuruste kohta. Teoreemid T 2.4.1 ja T 2.4.2 kehtivad ka lõpmata suurte suuruste korral.

Teoreemi T 2.4.1 kasutatakse piirväärtuste leidmisel, sest ta võimaldab korrutises ja jagatises asendada lõpmata väikesi suurusi ekvivalentsetega, mis võib lihtsustada arvutusi.

Kui $x \to 0$, siis

$$\sin x \sim x, \tag{25}$$

$$\tan x \sim x, \tag{26}$$

$$\ln(1+x) \sim x, \tag{27}$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \tag{28}$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \tag{29}$$

$$\arcsin x \sim x, \tag{30}$$

$$\arctan x \sim x, \tag{31}$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}. \tag{32}$$

Nendest valemitest teoreemi T 2.4.2 põhjal saame, et $x \to 0$ korral kehtivad järgmised võrdused:

$$\sin x - x = o(x), \tag{33}$$

$$\tan x - x = o(x), \tag{34}$$

$$\ln(1+x) - x = o(x), \tag{35}$$

$$\arcsin x - x = o(x), \tag{36}$$

$$\arctan x - x = o(x), \tag{37}$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 - \frac{x}{n} = o(x), \tag{38}$$

Järgnevates näidetes ja ülesannetes on oluline teada, et

$$\frac{o(\beta)}{\beta}=o(1). \tag{39}$$

Näited

N 2.4.1. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}.$$

Lahendus. Piirprotsessis $x\to 0$ on funktsioonid $\alpha=\sin 2x$ ja $\alpha_1=2x$ lõpmata väikesed. Valemi (25) põhjal on $\sin 2x\sim 2x$. Võrduse (24) põhjal

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to 0}2=2.$$

N 2.4.2. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}.$$

Lahendus. Piiril esineb määramatus 0/0. Valemi (32) ja teoreemi T 2.4.1 põhjal

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}-1\right)}{\frac{x^2}{2}}=8\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{32}}{x^2}=\frac{1}{4}.$$

N 2.4.3. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-2x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x+x^2}$$

Lahendus. Esineb määramatus 0/0. Paneme tähele, et kui $x\to 0$, siis $x+x^2\sim x$. Valemi (38) põhjal

$$\sqrt[4]{1-2x}=1-\frac{2x}{4}+o(x),$$

$$\sqrt[3]{1+x^2}=1+\frac{x^2}{3}+o(x^2).$$

Seega

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{2x}{4}+o(x)-1-\frac{x^2}{3}-o(x^2)}{x}.$$

Et $o(x)-o(x^2)=o(x)$, siis

$$A=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{o(x)}{x}\right]$$

ja võrduse (39) põhjal

$$A=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+o(1)\right]=-\frac{1}{2}.$$

N 2.4.4. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{x}.$$

Lahendus. Valemite (38), (25) ja (39) põhjal

$$A\overset{(38)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{2}+o(\sin x)-\left[1-\frac{\sin x}{3}+o(\sin x)\right]}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{5}{6}\frac{\sin x}{x}+\frac{o(\sin x)}{x}\right]\overset{(25)}{=}\frac{5}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{o(\sin x)}{\sin x}=$$

$$\overset{(39)}{=}\frac{5}{6}+\lim_{x\to 0}o(1)=\frac{5}{6}.$$

N 2.4.5. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\arcsin x}{x+x^3}.$$

Lahendus. Et antud piirprotsessis on $x+x^3\sim x$, siis valemite (36) ja (39) põhjal

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3x+x+o(x)}{x}=4+\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=4.$$

N 2.4.6. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x).$$

Lahendus. Teeme järgmise teisenduse valemi (32) rakendamiseks:

$$A=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}-1\right).$$

Et $-6/x$ on lõpmata väike, siis saame valemi (32) põhjal, kui $n=3$;

$$A=\lim_{x\to\infty}x\left(-\frac{6}{3x}\right)=-2.$$

Ülesanded

Määrata lõpmata väikeste suuruste järk teineteise suhtes järgmistes paarides.

281. $\alpha_n=\frac{1}{n},\quad \beta_n=\frac{1}{n!}$

282. $\alpha_n=\frac{n^2-2}{n^3},\quad \beta_n=\frac{n^2+4}{2n^3}$

283. $\alpha(x)=\frac{1-x}{1+x},\quad \beta(x)=1-\sqrt[3]{x},$ kui $x\to 1$

284. $\alpha(x)=\frac{x+1}{x^3+1}$, $\beta(x)=\frac{1}{x}$, kui $|x|\to\infty$.

Näidata, et

285. $x^2+5x^4\sim x^2$, kui $x\to 0$

286. $\sin x+\tan 2x\sim 3x$, kui $x\to 0$

287. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}$, kui $x\to\infty$

288. $x^3-3x+2\sim 3(x-1)^2$, kui $x\to 1$

289. $\frac{n+2}{\sqrt{n^3-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, kui $n\to\infty$

Määrata piirprotsess, milles α ja β on lõpmata väikesed ning leida α peaosa $A\beta^k$ ja määrata järk β suhtes selles piirprotsessis.

290. $\alpha=4x^3+x^5$, $\beta=x$

291. $\alpha=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$, $\beta=x$

292. $\alpha=(x-1)^2(x^2-5)$, $\beta=x^2+2x-3$

293. $\alpha_n=\frac{n^3+1}{\sqrt{n^5+2}}$, $\beta_n=\frac{1}{n}$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 2.4.1).

294. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{2x}$

295. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^2}$

296. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\arctan 4x}$

297. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x\arcsin 3x}{\sin 3x\arctan 2x}$

298. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\tan 2x}{(x-x^3)^2}$

299. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

300. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{1-x}}{\ln(1-x)}$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näited N 2.4.2 — N 2.4.6)

301. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{2x}$

302. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{\sin 3x}$

303. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^5}$

304. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sin x}$

305. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\sin x}-\sqrt[4]{1+\sin x}}{x}$

306. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x+x^3}$

307. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x+x^2}$

308. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\arcsin x}{3x-\arcsin x}$

309. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+3\arcsin x}{2x-\arctan x}$

310. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2\tan x^2}{2x^2-\ln(1+x^2)}$

311. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[4]{x^4-4x^3}-x)$

§ 2.5. PIDEVAD FUNKTSIOONID

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$, $x\in X$ ja olgu $a\in X$.

D 2.5.1. *Funktsiooni f nimetatakse* pidevaks punktiks a, *kui*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \tag{40}$$

Kui funktsioon f on pidev piirkonna X igas punktis, siis öeldakse, et funktsioon f on pidev piirkonnas X.

Võrdusest (40) on näha, et funktsiooni pidevus punktis a on iseloomustatud järgmise kolme tingimusega:

1) peab eksisteerima $f(a)$; s.t. punkt a peab olema funktsiooni määramispiirkonnast;

2) peab eksisteerima lõplik piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) peab kehtima võrdus (40).

Kui vähemalt üks nendest tingimustest ei ole täidetud, siis öeldakse, et funktsioon f ei ole pidev punktis a.

Tähistame

$$\Delta x=x-a, \quad \Delta y=f(x)-f(a).$$

Siis

$$x=a+\Delta x, \quad \Delta y=f(a+\Delta x)-f(a).$$

Suurust Δx nimetatakse argumendi x muuduks (ehk kasvuks). Suurust Δy nimetatakse funktsiooni muuduks (ehk kasvuks) punktide a ja $a+\Delta x$ vahel ehk üleminekul punktist a punkti $a+\Delta x$.

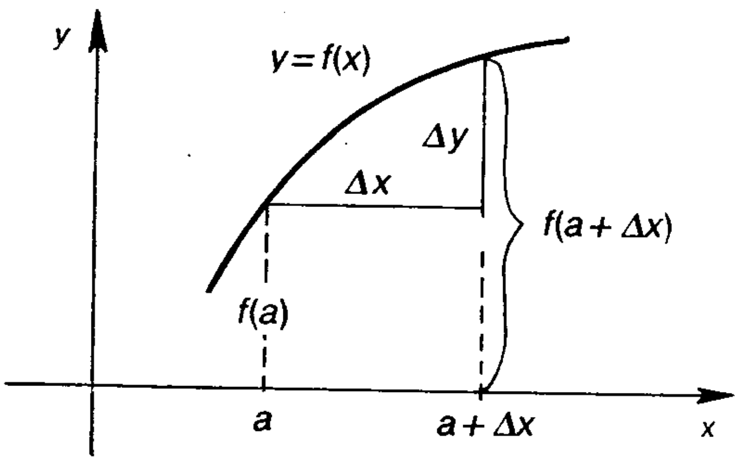
Joonisel 2.3 kujutatud juhul on näha, et kui muudame funktsiooni argumenti a suuruse Δx võrra, siis funktsiooni f väärtus muutub Δy võrra.

Tavaliselt eeldatakse, et muut $\Delta x\neq 0$. Muut Δx võib olla nii positiivne kui ka negatiivne.

Pidevuse tingimuse (40) võime nüüd kirjutada järgmisel samaväärsel kujul

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \tag{41}$$

Seega kehtib teoreem



Joon. 2.3

T 2.5.1. *Funktsioon f on pidev punktis a siis ja ainult siis, kui*

$$\Delta x = o(1) \Rightarrow \Delta y = o(1),$$

s. t. kui punktis a argumendi muudu lähenemisel nullile ka funktsiooni muut läheneb nullile.

Olgu antud liitfunktsioon

$$y = f[\varphi(x)]$$

ehk ahela kujul

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x).$$

T 2.5.2. *Kui funktsioon $u = \varphi(x)$ on pidev punktis a ja funktsioon $y = f(u)$ on pidev punktis $b = \varphi(a)$, siis liitfunktsioon $y = f[\varphi(x)]$ on pidev punktis a.*

Lühidalt, liitfunktsioon on pidev, kui tema koostisosad on pidevad funktsioonid.

T 2.5.3. *Lõigus $[a, b]$ pideva kasvava või kahaneva funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsioon $x = \varphi(y)$ on pidev lõigus otspunktidega $f(a)$ ja $f(b)$.*

Aritmeetilised tehted säilitavad pidevuse, s. t. kehtib teoreem

T 2.5.4. *Kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on pidevad funktsioonid punktis a, siis ka nende summa $u(x) + v(x)$, vahe $u(x) - v(x)$, korrutis $u(x)v(x)$ ja jagatis $u(x)/v(x)$ $(v(a) \neq 0)$ on pidevad funktsioonid punktis a.*

Kõik põhilised elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas. Teoreemide T 2.5.2 ja T 2.5.4 tõttu kehtib siis ka järgmine teoreem.

T 2.5.5. *Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.*

D 2.5.2. *Funktsiooni f nimetatakse punktis a* vasakult pidevaks, *kui*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a), \quad \text{s. t.} \quad f(a-) = f(a), \tag{42}$$

ja p a r e m a l t p i d e v a k s, *kui*

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a), \quad \text{s.t.} \quad f(a+)=f(a) \tag{43}$$

Teoreemist T 2.3.3 järeldub vahetult järgmine teoreem.

T 2.5.6. *Funktsioon f on pidev punktis a siis ja ainult siis, kui*

$$f(a-)=f(a)=f(a+), \tag{44}$$

s. o. kui ta on punktis a vasakult ja paremalt pidev.

Lause «funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$» tähendab, et ta on pidev vahemikus (a, b), punktis a paremalt pidev ja punktis b vasakult pidev. Analoogiliselt tuleb mõista funktsiooni f pidevust ka muudes piirkondades X, näit. kui $X=(a, b]$, $X=(a, b]\cup(c, d]$ jne.

Kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulka märgime sümboliga $C[a, b]$.

D 2.5.3. *Öeldakse, et funktsioon f on piirkonnas X* t õ k e s t a t u d, *kui leidub selline arv $M>0$, et $|f(x)|\leqslant M$ iga $x\in X$ korral.*

D 2.5.4. *Kui leidub selline punkt $\alpha\in X$, et kehtib*

$$f(\alpha)=\sup_{x\in X} f(x) \qquad \left(f(\alpha)=\inf_{x\in X} f(x)\right),$$

siis väärtust $f(\alpha)$ nimetatakse f u n k t s i o o n i *f* s u u r i m a k s (v ä h i m a k s) v ä ä r t u s e k s *piirkonnas X.*

Funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust nimetatakse tema e k s t r e m a a l s e t e k s v ä ä r t u s t e k s.

Lõigus pidevatel funktsioonidel on järgmised omadused.

T 2.5.7. (Weierstrassi teoreem funktsiooni tõkestatusest). *Lõigus pidev funktsioon on tõkestatud selles lõigus.*

T 2.5.8. (Weierstrassi teoreem ekstremaalsetest väärtustest). *Lõigus pideval funktsioonil on olemas ekstremaalsed väärtused selles lõigus.*

T 2.5.9. (Bolzano—Cauchy teoreem vahepealsetest väärtustest). *Lõigus pidev funktsioon omab iga väärtust ekstremaalsete väärtuste vahel.*

D 2.5.5. *Funktsiooni f nimetatakse* ü h t l a s e l t p i d e v a k s *piirkonnas X, kui iga $\varepsilon>0$ korral leidub $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, et sõltumata punktide x ja x′ valikust piirkonnas X kehtib võrratus*

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon, \quad \text{kui} \quad |x-x'|<\delta. \tag{45}$$

T 2.5.10. *Kui funktsioon f on piirkonnas X ühtlaselt pidev, siis on ta ka pidev selles piirkonnas X.*

Kui piirkond X on lõik, siis osutub õigeks ka teoreemi T 2.5.10 pöördteoreem. Nimelt kehtib

T 2.5.11. (Cantori teoreem). *Lõigus pidev funktsioon on ühtlaselt pidev selles lõigus.*

D 2.5.6. *Kui funktsioon f ei ole pidev punktis a, siis öeldakse, et ta on* k a t k e v *punktis a, ja punkti a nimetatakse* f u n k t s i o o n i *f* k a t k e v u s p u n k t i k s.

Definitsiooni D 2.5.6 põhjal võib öelda, et funktsioon f on katkev punktis a, kui vähemalt üks pidevust iseloomustavatest tingimustest 1)—3) ei ole täidetud, s.t. kui

1) f ei ole määratud punktis a, s.t. väärtus $f(a)$ ei eksisteeri;
2) ei ole olemas lõplikku piirväärtust $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3) on olemas lõplik $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ja $f(a)$, kuid $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

D 2.5.7. *Kui funktsiooni f katkevuspunktis a on olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a-)$ ja $f(a+)$, siis punkti a nimetatakse* esimest liiki katkevuspunktiks. *Kõiki ülejäänud funktsiooni f katkevuspunkte nimetatakse* teist liiki katkevuspunktideks.

D 2.5.8. *Kui funktsiooni esimest liiki katkevuspunktis a on*

$$f(a-)=f(a+),$$

siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav katkevus.

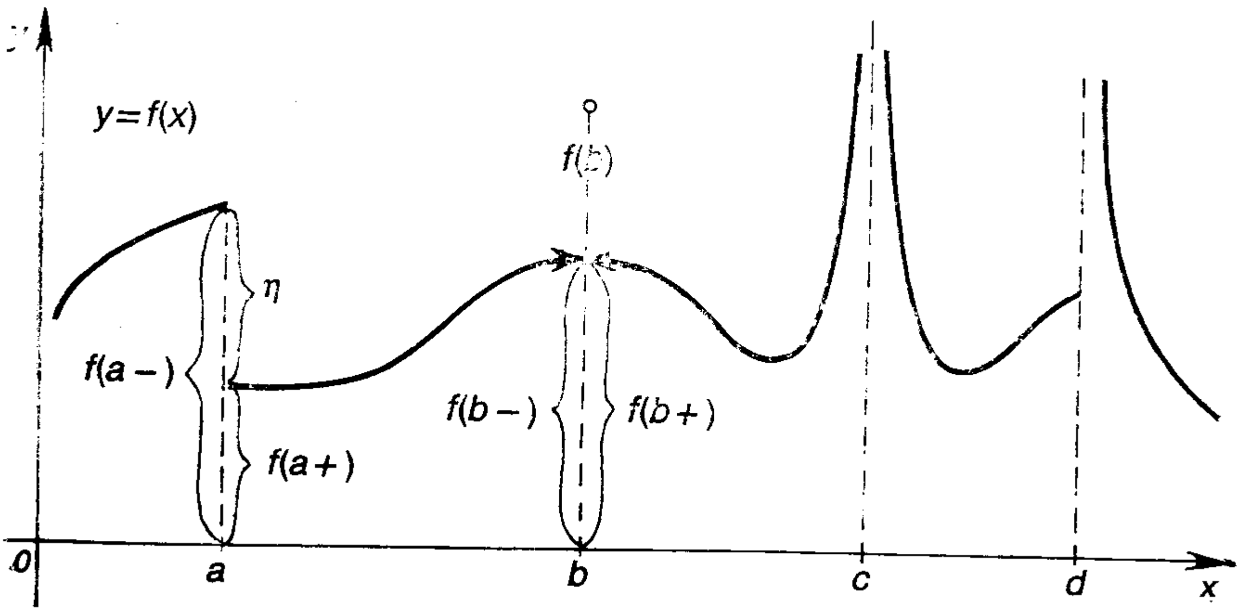
Funktsiooni f esimest liiki katkevuspunktis a suurust

$$\eta=f(a+)-f(a-)$$

nimetatakse funktsiooni hüppeks punktis a.

Kui punktis a on funktsioonil f kõrvaldatav katkevus, siis hüpe $\eta=0$. Nimetus «kõrvaldatav katkevus» tuleneb sellest, et sel korral me saame defineerida funktsioonile f väärtuse $f(a)$ nii, et kehtib võrdus (44), millega funktsioon f muutub pidevaks punktis a teoreemi T 2.5.6 põhjal.

Joonisel 2.4 kujutatud juhul on graafiku järgi näha, et funktsioonil f on punktis a esimest liiki katkevus hüppega $\eta<0$. Punktis b on kõrvaldatav katkevus, sest $f(b-)=f(b+)$ ja me võime võtta väärtuse $f(b)$ nii, et oleks $f(b-)=f(b)=f(b+)$. Punktides c ja d on funktsioonil f teist liiki katkevused.



Joon. 2.4

Näited

N 2.5.1. Näidata, et funktsioon

$$y=|x|$$

on pidev oma määramispiirkonnas $X=(-\infty, \infty)$.

Lahendus. Valemi põhjal ülesandest 30 saame:

$$|\Delta y|=||x+\Delta x|-|x||\leqslant|x+\Delta x-x|=|\Delta x|.$$

Kui $\Delta x\to 0$, siis ka $\Delta y\to 0$ iga $x\in X$ korral. Funktsioon $y=|x|$ on pidev piirkonnas X teoreemi T 2.5.1 põhjal.

N 2.5.2. Näidata, et funktsioon

$$y=\sin x$$

on pidev oma määramispiirkonnas $X=(-\infty, \infty)$.

Lahendus. Iga $x\in X$ korral kehtib võrdus

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Et alati $|\cos x|\leqslant 1$, siis

$$|\Delta y|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|=\left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right|\cdot|\Delta x|.$$

Piirväärtuse (9) põhjal saame, et $\Delta x\to 0$ korral ka $\Delta y\to 0$. Funktsioon $y=\sin x$ on pidev teoreemi T 2.5.1 põhjal.

N 2.5.3. Kõrvaldada funktsioonil

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi x}{4}, & \text{kui } x<1,\\ \arctan x, & \text{kui } x>1\end{cases}$$

katkevus punktis $a=1$.

Lahendus. Teoreemi T 2.5.6. põhjal peab punktis $a=1$ kehtima võrdus

$$f(1-)=f(1)=f(1+).$$

Et $f(1-)=\pi/4$ ja ka $f(1+)=\arctan 1=\pi/4$, siis tuleb võtta

$$f(1)=\frac{\pi}{4},$$

millega antud funktsioon muutub punktis $a=1$ pidevaks teoreemi T 2.5.6 põhjal

N 2.5.4. Näidata, et funktsioon

$$f(x)=\frac{|x|\sin x}{|x|+\sin x}$$

on pidev oma määramispiirkonnas $X=\{x\colon |x|+\sin x\neq 0\}$.

Lahendus. Näidete N 2.5.1 ja N 2.5.2 põhjal on funktsioonid $y=|x|$ ja $y=\sin x$ pidevad oma määramispiirkonnas. Teoreemi T 2.5.4 põhjal on siis pidev oma määramispiirkonnas ka nendest funktsioonidest aritmeetiliste tehetega saadud funktsioon.

N 2.5.5. Näidata, et funktsioon

$$f(x)=\frac{1}{x}+\cos x,$$

on ühtlaselt pidev vahemikus $X=(-2, -1/2)$.

Lahendus. Olgu $\varepsilon>0$ suvaline arv ja olgu $x, x' \in X$. Hindame vahet

$$|f(x)-f(x')| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}+\cos x - \cos x'\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x'-x|}{|xx'|}+2\left|\sin\frac{x+x'}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x'}{2}\right|.$$

Et $-2<x<-1/2$, siis $1/2<1/|x|<2$. Sama tingimust peab täitma ka punkt x', seega $1/|xx'|<4$. Et alati $|\sin x|<1$ ja $|\sin x|\leqslant|x|$ (§ 1.8), siis saame:

$$|f(x)-f(x')|<4|x'-x|+|x-x'|\leqslant 5|x-x'|.$$

Seega võrratus $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ hakkab kehtima, sõltumata punktide $x, x' \in X$ valikust, kui

$$|x-x'|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Järelikult võime võtta $\delta=\varepsilon/5$. Vaadeldav funktsioon on ühtlaselt pidev definitsiooni D 2.5.5 põhjal.

Ülesanded

Tõestada teoreemi T 2.5.1 põhjal, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas (vt. näited N 2.5.1 ja N 2.5.2).

312. $y=x$

313. $y=\cos x$

314. $y=\log_a x$

Näidata teoreemi T 2.5.4 põhjal, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas (vt. näide N 2.5.4).

315. $y=x^3$

316. $y=x^5+\frac{3}{x}+2x\cos x$

317. $y=\tan x$

318. $y=\cot x$

Näidata teoreemi T 2.5.3 põhjal, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

319. $y=\arcsin x$

320. $y=\arccos x$

321. $y=\arctan x$

322. $y=\operatorname{arccot} x$

323. $y=a^x$

Näidata teoreemi T 2.5.2 põhjal, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

324. $y=\sin 2x$

325. $y=\cos \ln x$

326. $y=x^\alpha$

Milline ühepoolne pidevus on punktis a järgmistel funktsioonidel?

327. $y=\begin{cases} x^2, & \text{kui } x\leqslant 1, \\ 2x+1, & \text{kui } x>1, \end{cases} \quad a=1$

328. $y=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{4}, & \text{kui } x\leqslant 2, \\ 5, & \text{kui } x>2, \end{cases} \quad a=2$

329. $y=\sqrt{x}$, $a=0$

330. $y=[x]$, $a=4$

Millistena valida arvud a ja b, et järgmised funktsioonid oleksid pidevad oma määramispiirkonnas?

331. $f(x)=\begin{cases} 3+ax^2, & \text{kui } x\leqslant 1, \\ x+1, & \text{kui } x>1 \end{cases}$

332. $f(x)=\begin{cases} x-a, & \text{kui } x<1, \\ \cos \pi x, & \text{kui } x\geqslant 1 \end{cases}$

333. $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & \text{kui } x\leqslant -\pi/2, \\ a\sin x+b, & \text{kui } -\pi/2<x\leqslant \pi/2, \\ \cos x, & \text{kui } x>\pi/2 \end{cases}$

Näidata, et järgmised funktsioonid on ühtlaselt pidevad oma määramispiirkonnas (vt. näide N 2.5.5).

334. $f(x)=ax+b$

335. $f(x)=3\sin x-4\cos x$

336. $f(x)=\sqrt{x}+2\sin 3x$, $x\in[0, 10]$

337. $f(x)=\dfrac{2}{x}+5\cos x$, $x\in(-3;\ -1{,}5)$

Millised katkevused on järgmistel funktsioonidel?

338. $y=\sin\dfrac{\pi}{2x}$

339. $y=\arctan\dfrac{1}{x}$

340. $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$

341. $y=\dfrac{\sin^2 x}{x}$

342. $y=\dfrac{1}{\log|x|}$

343. $y=2^{1/(3-x)}$

344. $y=2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$

Kõrvaldada katkevus järgmistel funktsioonidel (vt. näide N 2.5.3).

345. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

346. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

347. $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

348. $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$

349. Millised katkevused on Dirichlet' funktsioonil $y=D(x)$?

350. Näidata, et funktsioon

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{kui } x\in Q \\ 0, & \text{kui } x\notin Q \end{cases}$$

on pidev punktis $a=0$ ja katkev igas ülejäänud punktis.

III. FUNKTSIOONI TULETIS JA DIFERENTSIAAL

§ 3.1. FUNKTSIOONI TULETIS

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$, $x\in X$. Olgu Δx argumendi muut punktis $x\in X$. Siis selles punktis funktsiooni muut on $\Delta y= =f(x+\Delta x)-f(x)$. Moodustame muutude suhte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

D 3.1.1. *Kui on olemas piirväärtus*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f tuletiseks *punktis x ja märgitakse sümbolitega*

$$\underbrace{y'=f'(x)}_{\substack{\text{Lagrange'i}\\ \text{tähistus}}}=\underbrace{\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}}_{\substack{\text{Leibnizi}\\ \text{tähistus}}}=\underbrace{y'_x=f'_x}_{\substack{\text{Liitfunkt-}\\ \text{siooni ja}\\ \text{pöördfunkt-}\\ \text{siooni kor-}\\ \text{ral}}}=\underbrace{\dot{y}=\dot{f}(x)}_{\substack{\text{Newtoni}\\ \text{tähistus}}}$$

Kui piirväärtus (1) on lõplik, siis kõneldakse lõplikust tuletisest. Kui aga piirväärtus (1) on lõpmatu, siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis x lõpmatu tuletis.

Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni diferentseerimiseks.

Ühepoolseid piirväärtusi (lõplikke ja lõpmatuid)

$$f'(x-)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x},\qquad f'(x+)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

nimetatakse vastavalt funktsiooni f vasakpoolseks ja parempoolseks tuletiseks punktis x.

Tuletisi (2) nimetatakse ühiselt ühepoolseteks tuletisteks. Punkti, kus funktsioonil on märgi poolest erinevad lõpmatud ühepoolsed tuletised, nimetatakse tema tagasipöördepunktiks.

Et rohkem eristada tuletist (1) ühepoolsetest tuletistest (2), öeldakse ka, et definitsioon D 3.1.1 annab **kahepoolse tuletise mõiste**.

Et tuletis on teatav piirväärtus, siis teoreemist T 2.3.3 järeldub vahetult järgmine teoreem.

T 3.1.1. *Funktsioonil f on olemas punktis x tuletis $f'(x)$ siis ja ainult siis, kui selles punktis x on tal olemas võrdsed ühepoolsed tuletised, s. o. kui $f'(x-)=f'(x+)$. Seejuures*

$$f'(x)=f'(x-)=f'(x+).$$

Tuleb silmas pidada, et sümbolid $f'(x-)$ ja $f'(x+)$ avaldistes (2) ei märgi tuletise $f'(x)$ ühepoolseid piirväärtusi punktis x nagu see oli funktsiooni $f(x)$ korral (vt. definitsioonid D 2.3.1 ja D 2.3.2 ning ülesanne 451). Kuid teatavatel tingimustel langevad need siiski kokku, nimelt kehtib

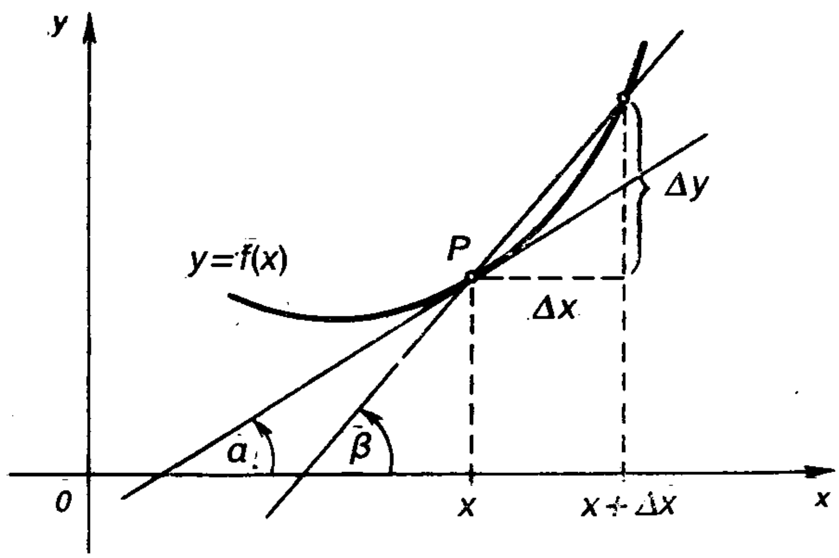
T 3.1.2. (teoreem tuletise piirväärtusest). *Kui funktsioon f on punktis a vasakult (paremalt) pidev ja on olemas piirväärtus* $\lim f'(x)$, *kui $x\to a-$ $(x\to a+)$, siis kehtib võrdus*

$$f'(a-)=\lim_{x\to a-} f'(x) \quad [f'(a+)=\lim_{x\to a+} f'(x)]. \tag{3}$$

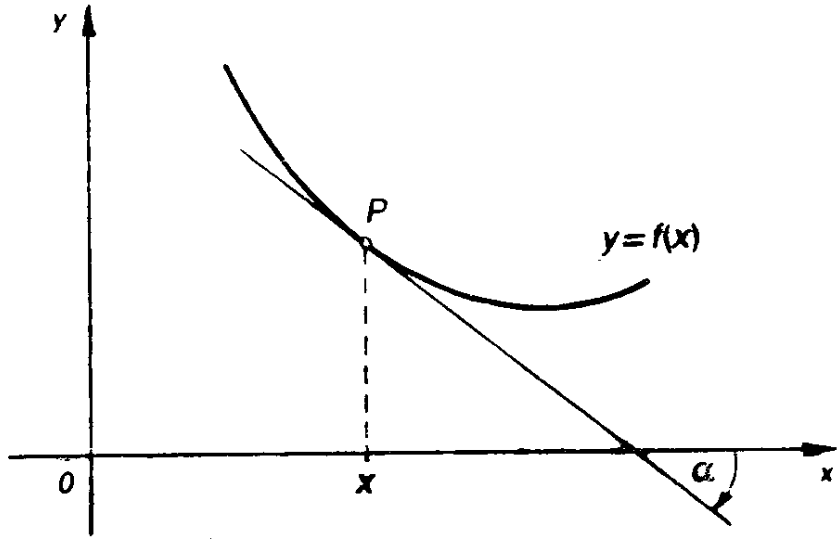
Geomeetriliselt kujutab suhe $\Delta y/\Delta x$ nurga β tangensit (joon. 3.1). Järelikult tuletis (1) kujutab geomeetriliselt funktsiooni f graafiku puutuja tõusu punktis x, s. t.

$$f'(x)=\tan\alpha. \tag{4}$$

Ehk, teisiti öeldes, funktsiooni f tuletis punktis x on võrdne punktis x (ehk graafiku punktis P) võetud puutuja tõusunurga α tangensiga (joonised 3.1 ja 3.2).



Joon. 3.1



Joon. 3.2

Mehaanika seisukohalt on tuletise tähendus järgmine. Kui punkti sirgjoonelisel liikumisel läbitud tee pikkus s on antud aja t funktsioonina $s=s(t)$, siis tuletis $s'(t)$ tähendab punkti liikumise kiirust $v=v(t)$ ajamomendil t, s. o.

$$v=s'(t).$$

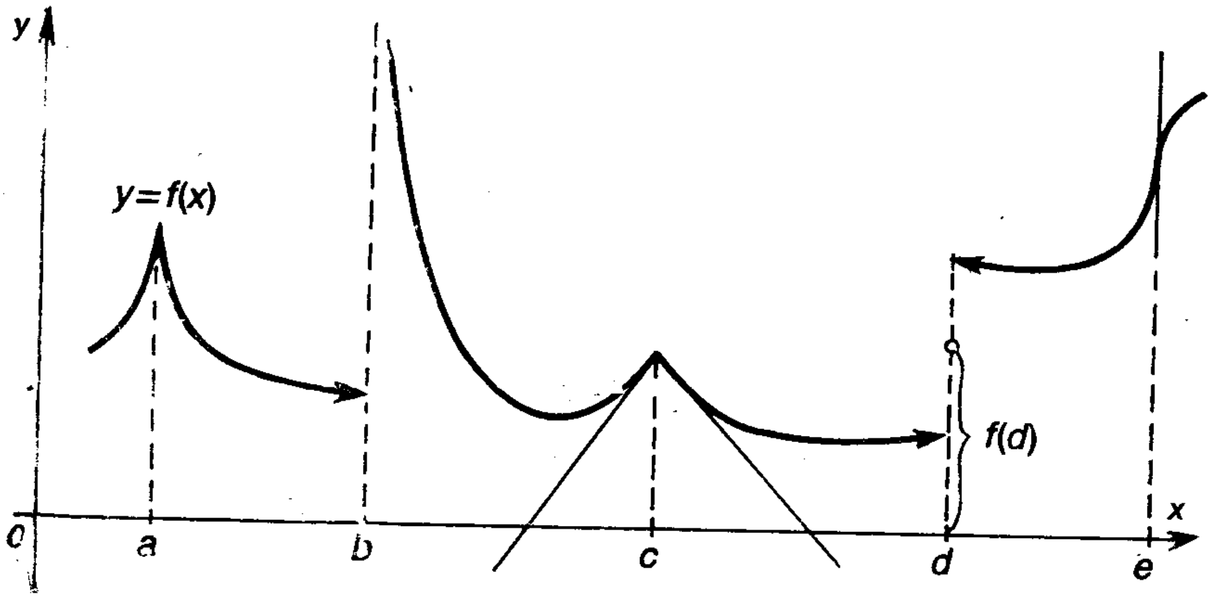
T 3.1.3. *Kui funktsioonil on olemas lõplik (vasakpoolne, parempoolne) tuletis mingis punktis, siis funktsioon on (vasakult, paremalt) pidev selles punktis.*

Kui funktsioonil on lõpmatu tuletis või lõpmatu ühepoolne tuletis mingis punktis, siis funktsioon võib olla ka katkev selles punktis. Teoreemi T 3.1.3 pöördteoreem ei kehti, s. t. funktsiooni pidevusest mingis punktis ei järeldu tuletise olemasolu selles punktis.

Selgituseks vaatleme joonisel 3.3 kujutatud funktsiooni. Punkt a on tema tagasipöördepunkt. Punktis b tuletist ei ole, sest see punkt ei ole funktsiooni määramispiirkonna punkt (piirväärtust (1) ei saa leida, sest väärtust $f(b)$ ei ole olemas). Punktis c on funktsioon pidev ja ühepoolsed tuletised ei ole võrdsed, seepärast selles punktis funktsioonil tuletist ei ole (teoreemi T 3.1.1 põhjal, vt. näide N 3.1.6). Punktis d on funktsioon katkev, kuid tal on selles punktis olemas lõpmatu tuletis (mis on hõlpsasti leitav definitsioonavaldise (1) põhjal). Punktis e on funktsioonil lõpmatu tuletis (puutuja on risti x-teljega).

Kui funktsioon f on antud lõigus $X=[a,b]$, siis tal võib tuletis (kahepoolne) eksisteerida vaid lõigu sisepunktides, s. o. vahemikus (a,b), sest tuletise definitsioonis D 3.1.1 esineb kahepoolne piirväärtus. Lõigu X otspunktides, millele saab läheneda ainult ühelt poolt, võivad esineda vaid ühepoolsed tuletised $f'(a+)$ ja $f'(b-)$, mille leidmiseks kasutatakse teoreemi T 3.1.2.

Funktsiooni tuletisel on järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused. Kui funktsioonidel $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on olemas tuletised punktis x, siis



Joon. 3.3

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(uv)' = u'v + uv'$.
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $\quad (v(x) \neq 0)$.

Nendest valemitest erijuhul saame valemid

4) $(cu)' = cu'$, $\quad (c = \text{const})$,
5) $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Diferentseerimise põhivalemid

1. $c' = 0 \quad (c = \text{const})$
2. $x' = 1$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(x^a)' = ax^{a-1}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$
9. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$
12. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

17. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

18. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

19. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

20. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

21. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

22. $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

23. $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

24. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

25. $(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

Tuletise leidmist aritmeetiliste tehete 1) — 4) ja põhivalemite 1 — 25 abil nimetatakse funktsiooni vahetuks diferentseerimiseks.

Liitfunktsiooni $y=f[\varphi(x)]$ tuletise y'_x leidmisel kasutatakse järgmist võtet.

M 3.1.1. (Liitfunktsiooni diferentseerimise reegel). Kui liitfunktsioon (4) esitub ahela kujul

$$y=f(u), \quad u=\varphi(x)$$

ning on olemas lõplikud tuletised y'_u punktis u ja u'_x punktis x, siis on olemas tuletis y'_x, mis avaldub kujul

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{5}$$

Vahepealne muutuja u valitakse nii, et oleks võimalik leida tuletis y'_u põhivalemite 1 — 25 abil. Siis jääb leida veel vaid tuletis u'_x, milleks võime vajaduse korral jälle kasutada valemit (5). Tegelikul arvutamisel vahepealne muutuja u eraldatakse mõttes.

Valemil (5) Leibnizi tähistustes on järgmine kuju:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

Paljude funktsioonide tuletiste leidmisel on otstarbekas kasutada järgmist võtet.

M 3.1.2 (Logaritmilise diferentseerimise võte). Logaritmime funktsiooni avaldise $y=f(x)$ absoluutväärtuse:

$$\ln|y| = \ln|f(x)|.$$

Võtame tuletise mõlemalt poolt:

$$\frac{1}{y} y' = (\ln |f(x)|)',$$

kust

$$y' = f(x) (\ln |f(x)|)'.$$

Selline võte sobib siis, kui funktsioon $f(x)$ kujutab hõlpsasti logaritmitavat avaldist. Võtte kasutamine on aga vältimatu nn. astme-eksponentfunktsiooni

$$y = u^v$$

korral, kus $u = u(x) > 0$ ja $v = v(x)$. Sel korral logaritmimine annab võrduse

$$\ln y = v \ln u,$$

millest mõlemalt poolt tuletise võtmisel saame:

$$\frac{1}{y} y' = (v \ln u)',$$

kust

$$y' = u^v (v \ln u)'.$$

Järgmine teoreem võimaldab leida funktsiooni pöördfunktsiooni tuletise ilma pöördfunktsiooni teadmata.

T 3.1.4. *Kui piirkonnas X kasvaval või kahaneval funktsioonil $y = f(x)$ on punktis x olemas tuletis $f'(x) \neq 0$, siis pöördfunktsioonil $x = \varphi(y)$ on punktis $y = f(x)$ olemas tuletis x'_y, mis avaldub kujul*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Iga elementaarfunktsiooni tuletis on elementaarfunktsioon.

Näited

N 3.1.1. Tuletise definitsiooni D 3.1.1 abil leida funktsiooni $y = \ln(1+x)$ tuletis punktis $x = 3$.

Lahendus. Arvutame tuletise (1) leidmiseks vajalikud suurused punktis $x = 3$:

$$\Delta y = \ln(1+3+\Delta x) - \ln(1+3) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{4}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{4}\right)}{\Delta x}.$$

Valemi (12) põhjal paragrahvist 2.2 saame nüüd:

$$y'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x/4)}{4\Delta x/4} = \frac{1}{4}.$$

N 3.1.2. Leida funktsiooni

$$y=\sqrt{2x}+\ln x^2+\frac{3}{x^2}, \qquad x\in(0,\infty)$$

tuletis.

L a h e n d u s. Omaduse 1) põhjal

$$y'=(\sqrt{2x})'+(\ln x^2)'+(3x^{-2})'$$

Omaduse 4) põhjal (arvestades, et $\ln x^2=2\ln|x|$)

$$y'=\sqrt{2}\,(\sqrt{x})'+2(\ln x)'+3(x^{-2})'.$$

Kasutades nüüd diferentseerimise põhivalemeid 4, 9 ja 5, saame vastuseks:

$$y'=\sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\frac{1}{x}+3(-2)x^{-3}=\frac{1}{\sqrt{2x}}+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^3}.$$

N 3.1.3. Leida funktsiooni

$$y=\ln(x+\cos x)$$

tuletis.

L a h e n d u s. Tegemist on liitfunktsiooniga, seepärast kasutame liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit M 3.1.2. Võtame vahepealseks muutujaks $u=x+\cos x$, siis diferentseerimise põhivalemi 9 ja reegli (5) põhjal

$$y'_x=\frac{1}{x+\cos x}(x+\cos x)'_x.$$

Viimase tuletise leiame põhivalemite 2 ja 11 abil. Seega

$$y'_x=\frac{1}{x+\cos x}(1-\sin x).$$

N 3.1.4. Leida funktsiooni

$$y=\sin\sqrt{1+x^2}$$

tuletis.

L a h e n d u s. Võtame vahepealseks muutujaks

$$u=\sqrt{1+x^2},$$

siis põhivalemi 10 ja reegli (5) põhjal saame:

$$y'_x=\cos\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2})'_x.$$

Viimase tuletise leidmiseks kasutame jälle reeglit (5). Kui võtame nüüd vahepealseks muutujaks $u=1+x^2$, siis

$$y'_x=\cos\sqrt{1+x^2}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'.$$

Viimase tuletise saame nüüd põhivalemite 1 ja 5 abil. Seega

$$y'_x=\cos\sqrt{1+x^2}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x=\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

N 3.1.5. Leida funktsiooni

$$y=\begin{cases} x^2+1, & \text{kui } x\leqslant 0,\\ \cos x, & \text{kui } 0<x\leqslant\pi/2,\\ 3, & \text{kui } x>\pi/2\end{cases}$$

tuletis.

L a h e n d u s. Leiame algul tuletise neis punktides, kus ei toimu üleminekut ühelt funktsiooni definitsioonavaldiselt teisele. Kui $x<0$, siis $y=x^2+1$ ja me saame $y'=2x$. Kui $0<x<\pi/2$, siis $y=\cos x$ ja $y'=-\sin x$. Kui $x>\pi/2$, siis $y=3$ ja $y'=0$.

Uurime nüüd tuletise olemasolu ülejäänud punktides $x=0$ ja $x=\pi/2$, kus toimub üleminek funktsiooni ühelt definitsioonavaldiselt teisele.

Punktis $x=0$ on funktsioon pidev ja ühepoolsed tuletised on teoreemi T 3.1.2 põhjal

$$y'(0-)=\lim_{x\to 0-} 2x=0,$$

$$y'(0+)=\lim_{x\to 0+} (-\sin x)=0.$$

Seega kehtib võrdus $y'(0-)=y'(0+)$. Teoreemi T 3.1.1 põhjal on siis $y'(0)=0$.

Punktis $x=\pi/2$ ei ole funktsioon pidev ja seepärast teoreemi T 3.1.3 põhjal selles punktis tal lõplikku tuletist ei ole. Teoreemi T 3.1.1 põhjal võib veenduda, et funktsioonil selles punktis ka lõpmatut tuletist ei ole.

Seega oleme saanud vastuseks

$$y'=\begin{cases} 2x, & \text{kui } x\leqslant 0, \\ -\sin x, & \text{kui } 0<x<\pi/2, \\ \text{ei eksisteeri}, & \text{kui } x=\pi/2, \\ 0, & \text{kui } x>\pi/2. \end{cases}$$

N 3.1.6. Leida funktsiooni

$$y=|x^2-4|$$

tuletis.

L a h e n d u s. Kõrvaldame kõigepealt absoluutväärtuse (vt. definitsioon D 1.2.1), saame:

$$y=\begin{cases} x^2-4, & \text{kui } |x|\geqslant 2 \\ 4-x^2, & \text{kui } |x|\leqslant 2. \end{cases}$$

Edasi leiame tuletised analoogiliselt eelmisele näitele N 3.1.5. Saame:

$$y'=\begin{cases} 2x, & \text{kui } |x|>2 \\ -2x, & \text{kui } |x|<2. \end{cases}$$

Uurime tuletise olemasolu ülejäänud punktides $|x|=2$, kus toimub üleminek funktsiooni ühelt definitsioonavaldiselt teisele. Punktis $x=2$ on funktsioon küll pidev, kuid (kasutades teoreemi T 3.1.2 tuletise piirväärtuse kohta)

$$y'(2-)=\lim_{x\to 2-} (-2x)=-4,$$

$$y'(2+)=\lim_{x\to 2+} 2x=4$$

ja seega $y'(2-)\neq y'(2+)$. Teoreemi T 3.1.1 põhjal $y'(2)$ ei eksisteeri. Samal viisil võib veenduda, et ka punktis $x=-2$ tuletist ei ole. Seega saame vastuseks:

$$y'=\begin{cases} 2x, & \text{kui } |x|>2 \\ -2x, & \text{kui } |x|<2 \\ \text{ei eksisteeri}, & \text{kui } |x|=2. \end{cases}$$

Antud funktsiooni tuletise võib leida veel teisiti. kasutades funktsiooni $\operatorname{sgn} x$. Siis

$$y=|x^2-4|=(x^2-4)\operatorname{sgn}(x^2-4),$$

kus

$$\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}-1, & \text{kui } |x|<2\\ 0, & \text{kui } |x|=2\\ 1, & \text{kui } |x|>2.\end{cases}$$

Seega piirkondades $|x|<2$ ja $|x|>2$ on $\operatorname{sgn}(x^2-4)$ konstantne. Omaduse 4) põhjal saame, et neis piirkondades

$$y'=2x\operatorname{sgn}(x^2-4).$$

Punktides $|x|=2$ muudab kordaja $\operatorname{sgn}(x^2-4)$ väärtust, mistõttu teoreemi T 3.1.2 abil leitud ühepoolsed tuletised, mis on nullist erinevad, ei saa olla võrdsed ja teoreemi T 3.1.1 põhjal neis punktides funktsioonil tuletist ei ole.

N 3.1.7. Leida funktsiooni

$$y=(\sin x)^x$$

tuletis.

L a h e n d u s. Kasutame logaritmilise diferentseerimise võtet M 3.1.2. Et siin on $\sin x>0$ ja seega ka $y>0$, siis

$$\ln y=x\ln\sin x.$$

Võtame mõlemalt poolt tuletise muutuja x järgi, arvestades, et y on muutuja x funktsioon. Saame:

$$\frac{1}{y}y'=\ln\sin x+x\frac{1}{\sin x}\cos x,$$

kust

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x).$$

N 3.1.8. Leida funktsiooni

$$y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$$

tuletis.

L a h e n d u s. Funktsiooni avaldis on hõlpsasti logaritmitav, seepärast kasutame logaritmilise diferentseerimise võtet M 3.1.2. Logaritmime funktsiooni absoluutväärtuse:

$$\ln|y|=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}[\ln|3-x|-2\ln|3+x|].$$

Võtame võrduse mõlemast poolest tuletise, arvestades, et y on muutuja x funktsioon:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x}-\frac{1}{1-x}(-1)+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3-x}-2\frac{1}{3+x}\right]=$$

$$=\frac{2-x}{x(1-x)}-\frac{9-x}{3(9-x^2)}.$$

Seega

$$y'=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\left[\frac{2-x}{x(1-x)}-\frac{9-x}{3(9-x^2)}\right].$$

N 3.1.9. Leida tuletis y', kui funktsioon $y=y(x)$ on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$y^2+2x=x^2+2xy.$$

L a h e n d u s. Võtame tuletise x järgi võrrandi mõlemast poolest, arvestades et y on muutuja x funktsioon:

$$2yy'+2=2x+2y+2xy',$$

kust

$$y'=\frac{1-x-y}{x-y}.$$

N 3.1.10. Leida funktsiooni

$$y=\sqrt{u(x)}+u(\sin x)$$

tuletis y', kui funktsioonil $u(x)$ on tuletis olemas.

Lahendus. Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit (5), saame (võttes esimeses liidetavas vahepealseks muutujaks suuruse $u(x)$ ja teises liidetavas suuruse $\sin x$):

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}u'(x)+u'(\sin x)(\sin x)'=$$

$$=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}+u'(\sin x)\cos x.$$

N 3.1.11. Leida funktsiooni

$$y=x+\ln x$$

pöördfunktsiooni $x=x(y)$ tuletis x'_y.

Lahendus. Teoreemi T 3.1.4 põhjal

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+1/x}=\frac{x}{x+1}.$$

Ülesanded

Lähtudes tuletise definitsioonist D 3.1.1, leida järgmiste funktsioonide tuletised (vt. näide N 3.1.1).

351. $y=x^2$

352. $y=x^3$

353. $y=\cos x$

354. $y=\ln|x|$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised (kus x, t ja u on argumendid, ning a, b, c ja α on konstandid), kasutades omadusi 1)—5) ja põhivalemeid 1—25. (vt. näide N 3.1.2).

355. $y=x^4$

356. $y=x+6x^{1/3}$

357. $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}+2$

358. $y=2^x-e^x$

359. $y=\log_2|x|+\sin x$

360. $y=\cos x\cdot\tan\alpha$

361. $y=x^a a^x$

362. $y=x^5e^x+e^\alpha$

363. $y=\frac{e^x}{x}+\sqrt{2x}$

364. $y=x\ln x+10^x$

365. $y=\frac{x^2}{\ln x}-\ln\frac{1}{x}$

366. $y=e^{3x}+\log(3|x|)$

367. $y=2t\sin t-(t^2-2)\cos t$

368. $y=\frac{e^x a^x}{1+\ln a}$

369. $y=\tan x-\cot x+3$

370. $y=\frac{\sin u}{u}-\ln u\cos u$

371. $y=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$

372. $y=x\arcsin x+b^2c$

373. $y=\arctan x+\operatorname{arccot} x$

374. $y=\arcsin x+\arccos x$

375. $y=x\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$

376. $y=\operatorname{th} x+\frac{1}{\operatorname{ch} x}$

377. $y=\arctan x+\operatorname{arth} x$

378. $y=\ln a+\arccos a$

379. $y=\arcsin a\operatorname{arsh} x$

380. $y=\frac{\operatorname{arcth} x}{1-x^2}$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised, kui a, b ja c on konstandid (vt. näited N 3.1.3. ja N 3.1.4).

381. $y=(3x-5)^4$

382. $y=(3-5x)^4$

383. $y=\sqrt{2x+1}$

384. $y=2\sqrt{1-x}$

385. $y=3(1-x^2)^{1/3}$

386. $y=(1-2x)^{-2}$

387. $y=e^{2x+\cos 2x}$

388. $y=\sin 2x+2\ln\sqrt{x}$

389. $y=\cos^2 3x+\cos b$

390. $y=\ln\sin(2x+1)$

391. $y=\frac{\ln\cos 2x}{\cos 2x}$

392. $y=\frac{e^{3x}a^{3x+5}}{1+\ln a}$

393. $y=\ln\tan x$

394. $y=\ln\tan x+\ln\cot x$

395. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$

396. $y=\sqrt{\cot x}\sin^2 x$

397. $y=\arctan 2x+\ln(1+4x^2)$

398. $y=\operatorname{arccot} x\ln\operatorname{arccot} x$

399. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

400. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$

401. $y=\arctan(x-\sqrt{1+x^2})$

402. $y=x\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$

403. $y=\operatorname{th}\ln x$

404. $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$

405. $y=\ln\operatorname{ch} x+\frac{1}{2}\operatorname{ch}^{-2} x$

406. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

407. $y=\operatorname{arch}\ln\cos x$

408. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$

409. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arccot} x^6$

410. $y=x^2\operatorname{arsh}\frac{x^2}{a^2}-\sqrt{a^4+x^4}$

411. $y=\operatorname{arth}\ln\sin 2x$

412. $y=\operatorname{arcth}\operatorname{cth} x$

413. $y=\log_x a$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised (vt. näide N 3.1.5).

414. $y=\begin{cases} x^3-x+2, & \text{kui } x<1 \\ x^2+1, & \text{kui } x\geqslant 1 \end{cases}$

415. $y=\begin{cases} x^2, & \text{kui } x<2 \\ x^3-4, & \text{kui } x\geqslant 2 \end{cases}$

416. $y=\begin{cases} x-1, & \text{kui } x\leqslant 1 \\ \ln x, & \text{kui } x>1 \end{cases}$

417. $y=\begin{cases} \sin x, & \text{kui } |x|\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{kui } |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

418. $y=\begin{cases} \arctan x, & \text{kui } |x|\leqslant 1 \\ \frac{\pi}{4}x\operatorname{sgn} x, & \text{kui } |x|>1 \end{cases}$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised (vt. näide N 3.1.6).

419. $y=|x|$

420. $y=x|x|$

421. $y=|\ln x|$

422. $y=|x^2-3x+2|$

423. $y=|x^2-x|+x$

424. $y=\sin|x|,\ x\in(-\pi,\pi)$

425. $y=\arcsin\frac{1}{|x|},\ x\in(x\colon |x|>1)$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised (vt. näited N 3.1.7 ja N 3.1.8).

426. $y=x^x$

427. $y=x^{\sin x}$

428. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

429. $y=(\ln x)^x$

430. $y=x^3 e^{x^2}\sin 2x$

431. $y=\frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$

432. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

Leida järgmiste ilmutamata kujul antud funktsioonide $y=y(x)$ tuletised y' (vt. näide N 3.1.9).

433. $y^2=xy+1$

434. $x^2+y^2=1$

435. $y=1+xe^y$

436. $y=x+\arctan y$

437. $x^y=y^x$

438. $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

Leida tuletised y', kui funktsioonidel $u=u(x)$, $v=v(x)$ ja $y=f(x)$ on tuletised olemas (vt. näide N 3.1.10).

439. $y=u^2(x)$

440. $y=\sin v(x)$

441. $y=x^3u(x)$

442. $y=u^3(x)\cos x$

443. $y=u(x)\ln v(x)$

444. $y=\arctan\frac{u(x)}{v(x)}$

445. $y=f(x^2)$

446. $y=f(x+\cos x)$

447. $y=xf(\ln x)$

Leida järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonide $x=x(y)$ tuletised x'_y (vt. näide N 3.1.11).

448. $y=x-\sin x$

449. $y=e^{\arcsin x}$

450. $y=xe^{-x}$

451. Näidata, et funktsiooni $f(x)=x-[x]$, $x\in[0,1]$ korral ei kehti võrdus

$$\lim_{x\to 1-} f'(x)=f'(1-).$$

452. Näidata, et funktsioonil

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{kui } x\neq 0 \\ 0, & \text{kui } x=0. \end{cases}$$

on igas punktis olemas lõplik tuletis, millel on punktis $x=0$ teist liiki katkevus.

§ 3.2. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL

Vaatleme funktsiooni

$$y=f(x), \quad x\in X. \tag{6}$$

Olgu Δx argumendi muut punktis x. Siis funktsiooni (6) muut punktis x on

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{7}$$

D 3.2.1. *Kui punktis x funktsiooni f muut* (7) *avaldub kujul*

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha, \tag{8}$$

kus

$$\alpha=o(\Delta x), \text{ kui } \Delta x\to 0,$$

siis öeldakse, et funktsioon f on diferentseeruv punktis x.

Kui funktsioon (6) on diferentseeruv piirkonna X igas punktis, siis öeldakse, et funktsioon (6) on diferentseeruv piirkonnas X.

Valemis (8) suurust

$$dy=f'(x)\Delta x \tag{9}$$

nimetatakse funktsiooni f diferentsiaaliks punktis x.

Valemis (9) tähistatakse $\Delta x=dx$, sest juhul $y=x$ on valemi (9) järgi $dx=dy=x'_x\Delta x=\Delta x$. Seega

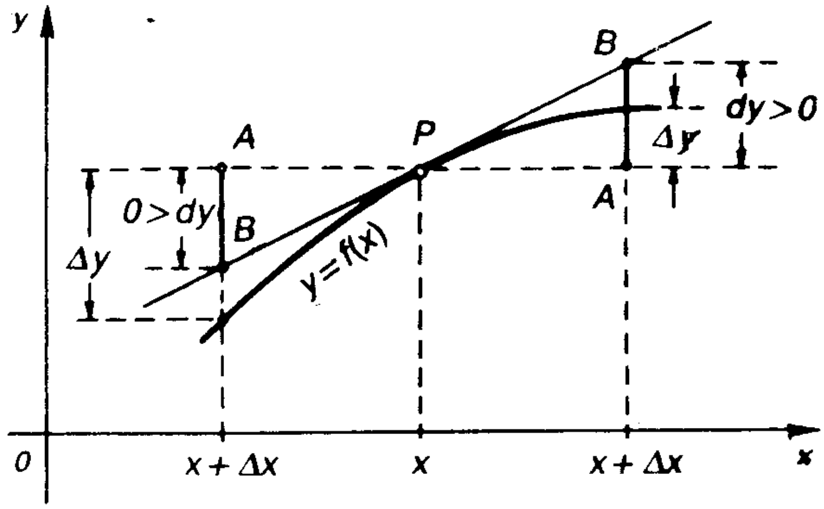
$$dy=f'(x)\,dx. \tag{10}$$

Suurust $dx=\Delta x$ nimetatakse argumendi x diferentsiaaliks.

Geomeetriliselt funktsiooni diferentsiaal (10) tähendab punktis x võetud puutuja muutu, s.o. lõigu AB pikkust (joon. 3.4).

Valemist (10) järeldub, et

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}. \tag{11}$$



Joon. 3.4

s. t., et igas punktis on funktsiooni tuletis võrdne funktsiooni ja tema argumendi diferentsiaalide suhtega. Valem (11) annab sisulise tähenduse tuletise Leibnizi tähistusele (§ 3.1) ja võimaldab seda vaadata kui harilikku murdu.

T 3.2.1. *Funktsioon f on diferentseeruv punktis x siis ja ainult siis, kui tal on olemas lõplik tuletis $f'(x)$ selles punktis x.*

Lause «funktsioon on diferentseeruv lõigus $[a, b]$» tähendab et ta on diferentseeruv vahemikus (a, b) ja et punktis a on tal olemas lõplik parempoolne tuletis ja punktis b lõplik vasakpoolne tuletis.

Teoreemide T 3.2.1 ja T 3.1.3 põhjal osutuvad õigeks ka järgmised väited.

T 3.2.2. *Mingis punktis diferentseeruv funktsioon on pidev selles punktis.*

T 3.2.3. *Lõigus diferentseeruv funktsioon on pidev selles lõigus.*

Funktsiooni diferentsiaalil on järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused. Kui funktsioonid $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on diferentseeruvad, siis

1) $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$,
2) $\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$,
3) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$.

Nendest valemitest erijuhul saame valemid

4) $d(cu) = c\,\mathrm{d}u \quad (c = \mathrm{const})$,
5) $\mathrm{d}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$.

Kui funktsiooni (6) argument x on mingi muutuja t funktsioon (s. t. $x = x(t)$, $t \in T$), siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (5) abil saame funktsiooni (6) diferentsiaalile anda kuju

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,x'_t\,\mathrm{d}t$$

ehk

$$dy=f'(x)\,dx, \tag{12}$$

dus dx on funktsiooni $x=x(t)$ diferentsiaal.

Võrreldes valemeid (10) ja (12), näeme, et kehtib järgmine teoreem.

T 3.2.4 (Diferentsiaali kuju invariantsuse lause). *Funktsiooni diferentsiaali kuju säilib, kui funktsiooni argument osutub mingi muutuja funktsiooniks, s.t. valemis* (10) *võib* dx *olla nii argumendi diferentsiaal kui ka funktsiooni diferentsiaal.*

Näited

N 3.2.1. Leida funktsiooni

$$y=\arctan\frac{1}{x}$$

diferentsiaal.

Lahendus. Valemi (10) järgi saame:

$$dy=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x_2}\right)dx=-\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

N 3.2.2. Leida diferentsiaal

$$d(x\cos x).$$

Lahendus. Tuleb leida diferentsiaal dy funktsioonist $y=x\cos x$. Valemi (10) järgi

$$d(x\cos x)=(\cos x-x\sin x)\,dx.$$

N 3.2.3. Leida funktsiooni

$$f(x)=3^x$$

diferentsiaal punktis $x=2$.

Lahendus. Tuleb leida suurus $df(2)$. Valemi (10) põhjal saame:

$$df(x)=3^x\ln 3\,dx,$$

kust

$$df(2)=3^2\ln 3dx=9\ln 3dx,$$

N 3.2.4. Leida funktsiooni

$$y=e^x\sin x$$

diferentsiaal punktis $x=\pi$, kui $\Delta x=0{,}1$.

Lahendus. Antud funktsiooni diferentsiaal on

$$dy=e^x(\sin x+\cos x)\,dx.$$

Kui $x=\pi$ ja $dx=\Delta x=0{,}1$, siis

$$dy=e^\pi(\sin\pi+\cos\pi)\,0{,}1=-0{,}1e^\pi.$$

N 3.2.5. Leida funktsiooni

$$y=\cos u^2$$

diferentsiaal, kui $u=u(x)$ on diferentseeruv funktsioon.

Lahendus. Võttes vahepealseks muutujaks $u=u(x)$, saame liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (5) abil

$$dy=\sin u^2 2u\,du$$

ehk (täielikumas kirjutusviisis)

$$dy = 2u(x)\sin u^2(x)\,du(x).$$

Diferentsiaali kuju invariantsuse lause T 3.2.4 põhjal võib vaadeldava funktsiooni diferentsiaali jättagi sellisele kujule, kuigi siin du on funktsiooni diferentsiaal, kuid võib kirjutada ka kujul

$$dy = 2u(x)\sin u^2(x)\,u'(x)\,dx.$$

Et funktsioon $u = u(x)$ ei ole antud, siis tuleb eelistada eelmist kirjutusviisi.

N 3.2.6. Leida tuletis

$$\frac{d\cos x}{d(x^2)}.$$

Lahendus. Tuleb leida tuletis funktsioonist $\cos x$ muutuja x^2 järgi. Selleks leiame lugeja ja nimetaja diferentsiaalid valemi (10) järgi, saame:

$$\frac{d\cos x}{d(x^2)} = \frac{-\sin x\,dx}{2x\,dx} = -\frac{\sin x}{2x}.$$

Lugejas ja nimetajas taandasime ära muutuja x diferentsiaalid dx, mis ülesande sisu põhjal tuleb lugeda võrdseiks.

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide diferentsiaalid, kui $a = \text{const}$ (vt. näide N 3.2.1).

453. $y = x^2$

454. $y = 2^x + 3x$

455. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$

456. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$

457. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$

458. $y = \arctan\dfrac{1}{x} + \arctan x$

Leida järgmised diferentsiaalid (vt. näide N 3.2.2).

459. $d(xe^x)$

460. $d\sqrt{1 + x^2}$

461. $d\ln(1 - x^2)$

462. $d\arccos\dfrac{1}{|x|}$

Leida järgmiste funktsioonide diferentsiaalid antud punktis (vt. näide N 3.2.3).

463. $f(x) = x^5,\ x = 2$

464. $f(x) = \cos x,\ x = \pi$

465. $f(x) = \sqrt{x},\ x = \dfrac{1}{4}$

Leida järgmiste funktsioonide diferentsiaalid antud punktis x antud argumendi muudu Δx korral (vt. näide N 3.2.4).

466. $y = \ln x,\ x = 4,\ \Delta x = 0{,}4$

467. $y = x^2 - 2x + 1,\ x = 1,\ \Delta x = 0{,}01$

468. $y = \tan x,\ x = \dfrac{\pi}{3},\ \Delta x = \dfrac{\pi}{180}$

Leida järgmiste funktsioonide diferentsiaalid, kui $f(x)$, $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid (vt. näide N 3.2.5).

469. $y=2\sqrt{u}$
470. $y=\sin u$
471. $y=\frac{u}{v^2}$
472. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$
473. $y=xf(\ln x)$
474. $y=x^2\arctan\frac{u}{v}$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised antud muutuja järgi (vt. näide N 3.2.6).

475. $\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}(x^2)}$
476. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\frac{\sin x}{x}$
477. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cot x}\tan x$
478. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos x}\sin x$
479. $\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}\arccos x}$

§ 3.3. KÕRGEMAT JÄRKU TULETISED JA DIFERENTSIAALID

Olgu funktsioon

$$y=f(x),\quad x\in X \tag{13}$$

diferentseeruv punktis x. Siis teoreemi T 3.2.1 põhjal on tal olemas selles punktis x lõplik tuletis

$$y'=f'(x). \tag{14}$$

D 3.3.1. *Funktsiooni* (13) teist järku ehk teiseks tuletiseks *punktis x nimetatakse tuletist tema tuletisest* (14) *punktis x ja märgitakse sümbolitega*

$$\underbrace{y''=f''(x)}_{\text{Lagrange'i tähistus}}=\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}}_{\text{Leibnizi tähistus}}=\underbrace{y''_{xx}=f''_{xx}}_{\text{Tähistus liitfunktsiooni jne. korral}}=\underbrace{\ddot{y}=\ddot{f}(x)}_{\text{Newtoni tähistus}}$$

Seega võime kirjutada Lagrange'i järgi

$$y''=(y')'$$

ja Leibnizi järgi

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Analoogiliselt defineeritakse ka kõrgemat kui teist järku tuletised. Üldiselt, funktsiooni (13) n-järku ehk n-endaks tuletiseks nimetatakse tuletist funktsiooni $(n-1)$-järku tuletisest ja märgitakse sümbolitega (vastavalt Lagrange'i ja Leibnizi järgi)

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Seega võime kirjutada Lagrange'i järgi

$$\begin{aligned} y''' &= (y'')' \\ y^{\mathrm{IV}} &= y^{(4)} = (y''')' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= (y^{(n-1)})', \end{aligned}$$

ja Leibnizi järgi

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Kui funktsioonil on olemas lõplik n-järku tuletis mingis punktis (piirkonnas), siis öeldakse, et ta on n korda diferentseeruv selles punktis (piirkonnas).

Funktsiooni (13) null-järku tuletise all mõeldakse funktsiooni ennast, s. o. $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Kõrgemat järku tuletistel on järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused. Kui funktsioonidel $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on olemas lõplikud n-järku tuletised, siis

$$(u \pm v)^{(n)}=u^{(n)} \pm v^{(n)} \tag{15}$$

$$(cv)^{(n)}=cv^{(n)} \quad (c=\mathrm{const}) \tag{16}$$

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}, \tag{17}$$

kus

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

s. o. tähendab kombinatsioonide arvu n elemendist k kaupa.

Valemit (17) nimetatakse Leibnizi valemiks.

Oletame, et funktsioonil (13) on olemas lõplik tuletis punktis x, siis (teoreemi T 3.2.1 põhjal) on tal olemas punktis x diferentsiaal

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Fikseerime argumendi muudu $\mathrm{d}x=\Delta x$, siis diferentsiaal (18) on argumendi x funktsioon ja me võime leida tema diferentsiaali.

D 3.3.2. *Funktsiooni* (13) teist järku *ehk* teiseks diferentsiaaliks d^2y *punktis* x *nimetatakse diferentsiaali tema esimesest diferentsiaalist punktis* x, *s. o.*

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y). \tag{19}$$

Üldiselt funktsiooni (13) n-järku *ehk* n-endaks diferentsiaaliks $\mathrm{d}^n y$ punktis x nimetatakse diferentsiaali tema

$(n-1)$-järku diferentsiaalist $d^{n-1}y$, s. o.

$$d^n y = d(d^{n-1}y). \tag{20}$$

Kui funktsioonil (13) on olemas punktis x lõplik n-järku tuletis $f^{(n)}(x)$, siis on tal punktis x olemas n-es diferentsiaal $d^n y$, mis avaldub kujul

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n, \tag{21}$$

kus dx^n on diferentsiaali dx n-es aste.

Valem (21) juhul $n=2$ ja $n=3$ on järgmine

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2 \tag{22}$$
$$d^3 y = f'''(x)\, dx^3. \tag{23}$$

Valemist (21) saame, et

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

mis annab sisulise tähenduse n-järku tuletise Leibnizi tähistusele ja võimaldab seda sümbolit vaadelda kui harilikku murdu.

Funktsiooni **null-järku diferentsiaali** all mõeldakse funktsiooni ennast, s. o. $d^0 y = f(x)$.

Kõrgemat järku diferentsiaalidel on järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused. Kui funktsioonidel $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on olemas lõplikud n-järku tuletised, siis

$$d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v,$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{u}{k} d^{n-k}u\, d^k v,$$

$$d^n(cv) = c\, d^n v \quad (c = \text{const}).$$

Kui argument x osutub mingi muutuja t funktsiooniks, s. o. $x=x(t)$, $t \in T$, siis valemis (18) on dx funktsiooni diferentsiaal ja valemist (19) saame:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)\, dx) = \\ = f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x \tag{24}$$

ja valemist (20), kui $n=3$, et

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x) = \\ = f'''(x)\, dx^3 + 3f''(x)\, dx\, d^2 x + f'(x)\, d^3 x. \tag{25}$$

Võrreldes valemeid (22) ja (23) kahe viimase valemiga (24) ja (25), näeme, et kõrgemat järku diferentsiaalide korral diferentsiaali kuju invariantsuse lause T 3.2.4 enam ei kehti. Võtame tulemuse kokku teoreemina.

T 3.3.1. *Valemeis* (22) *ja* (23) *võib* dx *olla vaid argumendi diferentsiaal. Kui aga* dx *on funktsiooni diferentsiaal, siis õigeks osutuvad valemid* (24) *ja* (25).

Samasugune on olukord ka veel kõrgemat järku diferentsiaalide korral.

Näited

N 3.3.1. Leida funktsiooni

$$y=\cot x$$

teine ja kolmas tuletis.

L a h e n d u s. Leiame esimese tuletise:

$$y'=-\sin^{-2} x.$$

Seega teine tuletis on

$$y''=(y')'=(-\sin^{-2} x)'=2\sin^{-3} x\cos x.$$

Analoogiliselt leiame ka kolmanda tuletise $y'''=(y'')'$. Kuid antud funktsiooni korral võime y''' leida veel teisiti. Nimelt võime teise tuletise kirjutada kujul

$$y''=-2yy',$$

kust saame:

$$y'''=(y'')'=(-2yy')'=-2y'y'-2yy''.$$

Asendades siin y, y' ja y'' teadaolevate avaldistega, saame:

$$y'''=-2(1+2\cos^2 x)\sin^{-4} x.$$

N 3.3.2. Leida funktsiooni

$$y=u^3(x)+xu(\ln x)$$

teine tuletis, kui $u(x)$ on kaks korda diferentseeruv funktsioon.

L a h e n d u s. Leiame esimese tuletise liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (5) abil, võttes esimeses liidetavas vahepealseks muutujaks $u=u(x)$ ja teises $\ln x$:

$$y'=3u^2(x)u'(x)+u(\ln x)+xu'(\ln x)x^{-1}=3u^2u'+u(\ln x)+u'(\ln x).$$

Analoogiliselt leiame teise tuletise

$$y''=3\cdot 2uu'u'+3u^2u''+u'(\ln x)x^{-1}+u''(\ln x)x^{-1}.$$

N 3.3.3. Leida funktsiooni

$$y=xe^x+1$$

teine ja kolmas diferentsiaal.

L a h e n d u s. Leiame teise diferentsiaali valemi (22) põhjal. Selleks leiame kõigepealt teise tuletise:

$$y'=e^x+xe^x=e^x(1+x),$$
$$y''=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x).$$

Valemi (22) järgi

$$d^2y=e^x(2+x)\,dx^2.$$

Analoogiliselt leiame kolmanda diferentsiaali valemi (23) põhjal:

$$y'''=e^x(2+x)+e^x=e^x(3+x),$$
$$d^3y=e^x(3+x)\,dx^3.$$

N 3.3.4. Leida funktsiooni

$$y=\tan u$$

teine diferentsiaal, kui $u=u(x)$ on kaks korda diferentseeruv funktsioon.

L a h e n d u s. Leiame kõigepealt esimese diferentsiaali valemi (18) põhjal

$$dy=\cos^{-2} u\,du.$$

Et du on funktsiooni diferentsiaal, siis teoreemi T 3.3.1 põhjal teise diferentsiaali leidmiseks tuleb kasutada valemit (24), mille järgi

$$\begin{aligned} d^2y&=d(dy)=d(\cos^{-2} u\,du)=\\ &=d\cos^{-2} u\,du+\cos^{-2} u\,d^2u=\\ &=-2\cos^{-3} u\,du^2+\cos^{-2} u\,d^2u. \end{aligned}$$

Et funktsioon $u=u(x)$ ei ole antud, siis vastusesse jätamegi tema diferentsiaalid kujul du ja d^2u.

N 3.3.5. Leida tuletis y'', kui funktsioon $y=y(x)$ on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$y^2+2y=x^2.$$

L a h e n d u s. Diferentseerime antud võrduse mõlemat poolt x järgi, lugedes, et y on muutuja x funktsioon (vt. näide N 3.1.9):

$$2yy'+2y'=2x$$

ehk

$$yy'+y'=x.$$

Diferentseerime saadud võrduse mõlemat poolt veel kord muutuja x järgi, lugedes, et y ja y' on muutuja x funktsioonid:

$$y'y'+yy''+y''=1,$$

kust

$$y''=\frac{1-y'^2}{y+1}.$$

Asendame esimese tuletise $y'=x/(y+1)$, siis

$$y''=\frac{(y+1)^2-x^2}{(y+1)^3}.$$

Et lähtevõrrandi tõttu $y^2+2y-x^2=0$, siis võime vastust veel lihtsustada:

$$y''=\frac{1}{(y+1)^3}.$$

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide teine tuletis y'' (vt. näide 3.3.1).

480. $y=e^{-x^2}$

481. $y=\tan x$

482. $y=x\sqrt{1+x^2}$

483. $y=x^x$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud tuletised (vt. näide N 3.3.1).

484. $y=\frac{1}{1-x}$, $y^{(4)}=?$

485. $y=x^2\ln x$, $y^{(5)}=?$

486. $y=e^x\cos x$, $y^{(6)}=?$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud tuletised, kui f, $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on vajalik arv korda diferentseeruvad funktsioonid (vt. näide N 3.3.2).

487. $y=f(x^2)$, $y''=?$

488. $y=f(e^x)$, $y'''=?$

489. $y=u^2$, $y'''=?$

490. $y=u+\ln v$, $y''=?$

491. $y=x^{-1}f(x^2)$, $y''=?$

Leida järgmiste funktsioonide teist järku diferentsiaalid (vt. näide N 3.3.3).

492. $y=x^5$

493. $y=\frac{\ln x}{x}$

494. $y=\sqrt{1+x^2}$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud diferentsiaalid (vt. näide N 3.3.3).

495. $y=x^4$, $d^5y=?$

496. $y=\frac{8}{\sqrt{x}}$, $d^3y=?$

497. $y=x\ln x$, $d^4y=?$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud diferentsiaalid, kui f, $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on vajalik arv korda diferentseeruvad funktsioonid (vt. näide N 3.3.4).

498. $y=e^u$, $d^2y=?$

499. $y=u^2$, $d^3y=?$

500. $y=f(\sin x)$ $d^2y=?$

501. $y=e^{-x}f(e^x)$, $d^2y=?$

502. $y=uv$, $d^4y=?$

Leida järgmiste ilmutamata kujul antud funktsioonide $y=y(x)$ tuletised y''_{xx} (vt. näide N 3.3.5).

503. $x^2+y^2=1$

504. $y\ln y=x$

§ 3.4. L'HÔSPITALI REEGEL

Piirväärtuse leidmisel funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ jagatisest kehtib järgmine reegel.

T 3.4.1 (L'Hospitali reegel). *Kui jagatis*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{26}$$

kujutab punktis a määramatust $\frac{0}{0}$ *või* $\frac{\infty}{\infty}$ *siis kehtib võrdus*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{27}$$

eeldusel, et eksisteerib (*lõplik või lõpmatu*) *piirväärtus võrduse* (27) *paremal poolel.*

Reegel on kehtiv ka ühepoolsete piirväärtuste korral, sealhulgas ka juhtudel $a=\infty$ ja $a=-\infty$.

Kui funktsioonide korrutise, summa või vahe piirväärtuste leidmisel esinevad määramatused $0\cdot\infty$ või $\infty-\infty$, siis l'Hospitali reegli kasutamiseks teisendatakse need määramatused eelnevalt kujule $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$ (vt. näited N 3.4.2 ja N 3.4.3).

Kui astme-eksponentfunktsiooni u^v korral esinevad määramatused 0^0, 1^∞ või ∞^0, siis l'Hospitali reegli kasutamiseks tuleb reegli abil leida funktsiooni logaritm $\ln u^v=v\ln u$ piirväärtus ja kasutada võrdust

$$\lim_{x\to a}u^v=e^{\lim\limits_{x\to a}v\ln u} \tag{28}$$

(vt. näide N 3.4.4).

Piirväärtuste leidmisel on otstarbekohane koos l'Hospitali reegliga kasutada ka peatükis II antud piirväärtuse leidmise võtteid, millega saab arvutusi märgatavalt lihtsustada (vt. näited N 3.4.1 ja N 3.4.2).

Näited

N 3.4.1. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x}.$$

Lahendus. Punktis $x=0$ esineb määramatus ∞/∞. Rakendame l'Hospitali reeglit:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\cot x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Tekkis määramatus 0/0 ja l'Hospitali reeglit võib veel kord rakendada, kuid seda ei ole otstarbekohane teha, sest piirprotsessis $x\to 0$ on $\sin x\sim x$ ja seega (teoreemi T 2.4.1 põhjal)

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.$$

N 3.4.2. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Lahendus. Punktis $x=0$ tekib määramatus $\infty-\infty$. Võtame murrud ühisele nimetajale:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}.$$

Nüüd punktis $x=0$ on määramatus 0/0 ja l'Hospitali reeglit võib rakendada. Kuid enne asendame arvutuste lihtsustamiseks nimetajas tegurid $\sin x$ antud piirprotsessis ekvivalentsete suurustega x, siis

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}.$$

Rakendades nüüd 2 korda l'Hospitali reeglit, saame:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}.$$

Võime veel 2 korda rakendada l'Hospitali reeglit, kuid valemi $1-\cos 2x=$ $=2\sin^2 x$ abil saame kohe:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{12x^2}=\frac{1}{3},$$

sest $\sin^2 x\sim x^2$ antud piirprotsessis.

N 3.4.3. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x.$$

L a h e n d u s. Punktis $x=0$ tekib määramatus $0\cdot\infty$. Sobiva määramatuse saamiseks viime $\cot x$ nimetajasse:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x}.$$

Tekkis määramatus 0/0. Antud piirprotsessis on aga $\tan x \sim x$, seepärast

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

L'Hospitali reegli abil

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0.$$

N 3.4.4. Leida piirväärtus

$$A=\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{2/\sin^2 x}.$$

L a h e n d u s. Esineb määramatus 1^∞. Sellepärast leiame algul l'Hospitali reegliga avaldise logaritmi piirväärtuse (arvestades, et $\sin x \sim x$ ja $\tan x \sim x$ antud piirprotsessis):

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{2}{\sin^2 x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin^2 x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}=$$

$$=-4\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}=-4.$$

Valemi (28) järgi on siis $A=e^{-4}$.

Ülesanded

Leida järgmised piirväärtused, kasutades l'Hospitali reeglit *M* 3.4.1 (vt. näited N 3.4.1, N 3.4.2 ja N 3.4.3).

505. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

506. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{1-x}$

507. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

508. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

509. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

510. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{4x}}$

511. $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin 6x}{\ln\sin x}$

512. $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$

513. $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$

514. $\lim_{x\to 1-}\ln x\ln(1-x)$

515. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

516. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 3.4.4).

517. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

518. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

519. $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x}$

520. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

Leida järgmised piirväärtused, veendudes eelnevalt, et neid l'Hospitali reegliga M 3.4.1 leida ei saa, kuigi esineb sobiv määramatus ∞/∞.

521. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

522. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

§ 3.5. PARAMEETRILISEL KUJUL ANTUD FUNKTSIOONIDE DIFERENTSEERIMINE

Vaatleme funktsiooni, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in T, \tag{29}$$

kus T on vahemik. Olgu x ja y muutumispiirkondadeks vastavalt vahemikud X ja Y.

T 3.5.1. *Olgu funktsioonid* (29) *pidevad ja olgu neil olemas pidevad tuletised x'_t ja y'_t vahemikus T.*

1. *Kui $x'_t\neq 0$ vahemikus T, siis võrrandid* (29) *määravad pideva funktsiooni $y=f(x)$ vahemikus X, millel on olemas pidev tuletis*

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad t\in T. \tag{30}$$

2. *Kui $y'_t\neq 0$ vahemikus T, siis võrrandid* (29) *määravad pideva funktsiooni $x=g(y)$ vahemikus Y, millel on olemas pidev tuletis*

$$x'_y=\frac{x'_t}{y'_t}, \quad t\in T. \tag{31}$$

Parameetriliselt antud funktsiooni (29) tuletiste y'_x ja x'_y leidmiseks kasutatakse valemeid (30) ja (31).

Teist ja veel kõrgemat järku tuletiste leidmiseks kasutatakse neid samu valemeid (30) ja (31). Näiteks, tuletist (30) võime vaadelda kui parameetriliselt antud funktsiooni

$$x=x(t), \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Kui funktsioonidel (29) on olemas teised tuletised, siis valemi (30) põhjal

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x \overset{(30)}{=} \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{32}$$

Analoogiliselt kolmanda tuletise jaoks saame valemi (30) põhjal

$$y'''_{xxx}=(y''_{xx})'_x \overset{(30)}{=} \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}. \tag{33}$$

Jne.

N 3.5.1. Leida funktsiooni

$$x=e^{-t}, \quad y=t^3$$

tuletised y'_x ja y''_{xx}.

Lahendus. Valemi (30) põhjal

$$y'_x=\frac{3t^2}{-e^{-t}}=-3t^2e^t.$$

Teise tuletise y''_{xx} saame eeskirja (32) põhjal ehk vahetult valemi (30) põhjal

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x \overset{(30)}{=} \frac{(-3t^2e^t)'_t}{(e^{-t})'_t}=$$
$$=\frac{-3(2te^t+t^2e^t)}{-e^{-t}}=3e^{2t}(2t+t^2).$$

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide tuletised y'_x (vt. näide N 3.5.1).

523. $x=\cos t, \quad y=\sin t$

524. $x=\frac{t+1}{t}, \quad y=\frac{t-1}{t}$

525. $x=\ln(1+t^2), \quad y=t-\arctan t$

526. $x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t)$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised y'_x ja y''_{xx} (vt. näide N 3.5.1).

527. $x=2t^3+1, \quad y=9t^2$

528. $x=\ln(1+t), \quad y=(1+t)^2$

529. $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t$

530. $x=a\cos t, \quad y=a\sin t$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud tuletised.

531. $x=\sin t, \quad y=\ln|\sin t|, \quad y'''_{xxx}=\ ?$

532. $x=\ln t, \quad y=\frac{1}{t}, \quad y^{(4)}_{xxxx}=?$

533. $x=a(t-\sin t), \quad y=a\cos t, \quad y'''_{xxx}=?$

IV. FUNKTSIOONI UURIMINE

§ 4.1. FUNKTSIOONI MONOTOONSUS JA EKSTREEMUMID

Olgu funktsioon

$$y=f(x)$$

antud piirkonnas X. Funktsiooni f monotoonsust uuritakse järgmiste teoreemide T 4.1.1. ja T 4.1.2 ning piisava tunnuse PT 4.1.1 abil.

T 4.1.1. *Vahemikus X diferentseeruv funktsioon f on monotoonselt kasvav (kahanev, on konstantne) selles vahemikus siis ja ainult siis, kui $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$, $f'(x)=0$) iga $x\in X$ korral.*

T 4.1.2. *Vahemikus X diferentseeruv funktsioon f on kasvav (kahanev) selles vahemikus siis ja ainult siis, kui*

1° *$f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$) iga $x\in X$ korral,*

2° *punktid $x\in X$, kus $f'(x)=0$, ei moodusta vahemikke.*

Teoreemist T 4.1.2 järeldub järgmine piisav tunnus.

PT 4.1.1. *Kui vahemikus X on $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), siis funktsioon f kasvab (kahaneb) selles vahemikus X.*

D 4.1.1. *Punktide $x\in X$, kus $f'(x)=0$, nimetatakse funktsiooni f* s t a t s i o n a a r s e t e k s p u n k t i d e k s. *Funktsiooni statsionaarseid punkte ja neid punkte, kus funktsiooni tuletis on lõpmatu või ei eksisteeri, nimetatakse funktsiooni f* k r i i t i l i s t e k s p u n k t i d e k s.

Nagu näeme, on põhiliseks raskuseks monotoonsuse uurimisel võrratuste $f'(x)>0$ ja $f'(x)<0$ lahendamine. Nende võrratuste lahendamist saab vältida järgmise teoreemi abil.

T 4.1.3. *Kui vahemikus $X=(a, b)$ punktid $x_1<x_2<\ldots<x_n$ on funktsiooni ainukesed kriitilised punktid, siis vahemikes*

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_n, b)$$

säilitab funktsiooni tuletis märki.

Selle teoreemi T 4.1.3 järgi võib argumendi x ühe väärtuse abil teada saada tuletise märgi kogu vahemiku ulatuses (vt. näide N 4.1.1).

Funktsiooni monotoonsuse uurimisele saab taandada ka mitmesuguste võrratuste tõestamist (vt. näide N 4.1.2).

Kuulugu punkt a mingi oma ümbrusega piirkonda X.

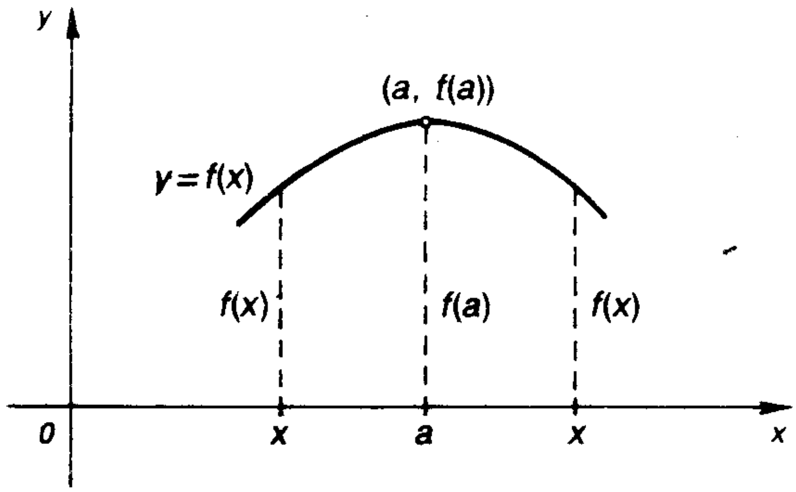
D 4.1.2. *Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a* lokaalne maksimum (miinimum), *kui leidub niisugune punkti a ümbrus, kus*

$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (f(x) \geqslant f(a)). \tag{1}$$

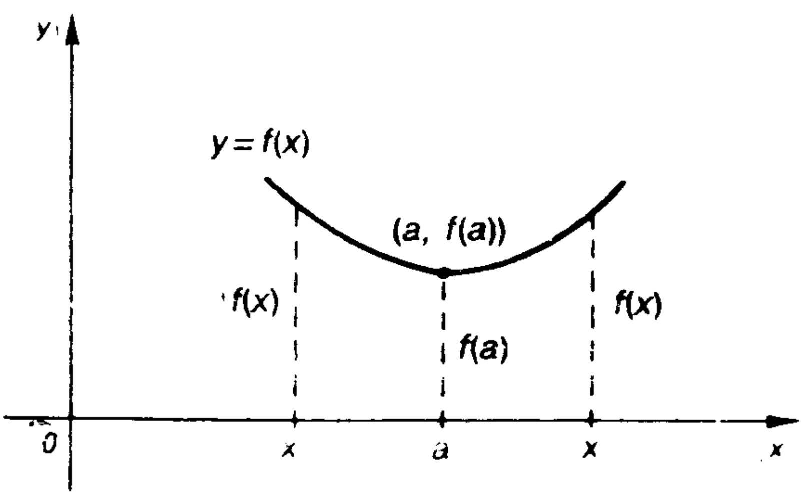
Kui võrratustes (1) esineb võrdusmärk vaid juhul $x=a$, siis lokaalset maksimumi (miinimumi) nimetatakse rangeks. Lokaalse maksimumi ja lokaalse miinimumi ühine nimetus on lokaalne ekstreemum. Punkti a, samuti graafiku punkti $(a, f(a))$, kus funktsioonil f esineb lokaalne ekstreemum, nimetatakse funktsiooni lokaalseks ekstreemumpunktiks (joonised 4.1 ja 4.2).

TT 4.1.1. *Lokaalne ekstreemum võib funktsioonil olla vaid tema kriitilises punktis.*

Selle tarviliku tunnuse TT 4.1.1 põhjal tuleb funktsiooni lokaalsete ekstreemumite leidmiseks kõigepealt leida funktsiooni kriitilised punktid.



Joon. 4.1



Joon. 4.2

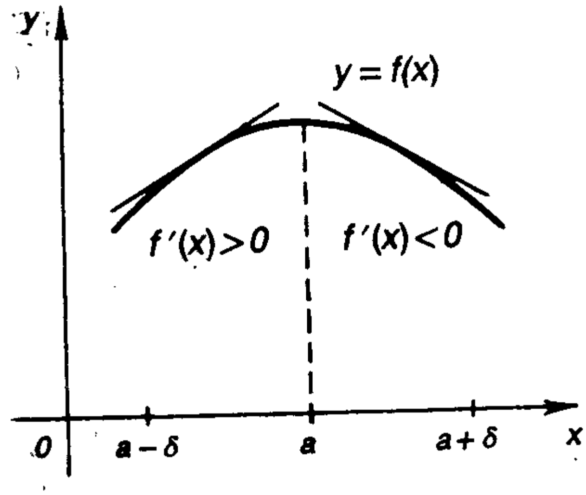
Igas kriitilises punktis funktsioonil ei ole lokaalset ekstreemumit (vt. näide N 4.1.4). Selleks, et selgitada, millistes kriitilistes punktides on ja millistes ei ole lokaalset ekstreemumit, kasutatakse järgmisi piisavaid tunnuseid.

PT 4.1.2. *Olgu funktsioon f pidev kriitilises punktis a.*

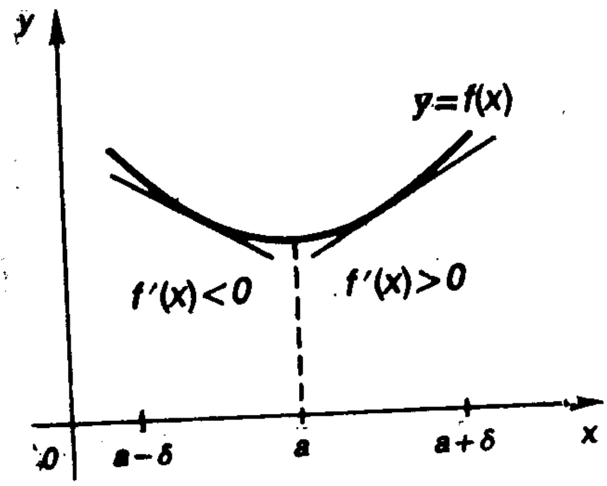
a. *Kui* $f'(x)>0$ (*s. t. f kasvab*) *punkti a vasakpoolses ümbruses ja* $f'(x)<0$ (*s. t. f kahaneb*) *punkti a parempoolses ümbruses, siis funktsioonil f on punktis a range lokaalne maksimum* (joon. 4.3).

b. *Kui* $f'(x)<0$ (*s. t. f kahaneb*) *punkti a vasakpoolses ümbruses ja* $f'(x)>0$ (*s. t. f kasvab*) *punkti a parempoolses ümbruses, siis funktsioonil f on punktis a range lokaalne miinimum* (joon. 4.4).

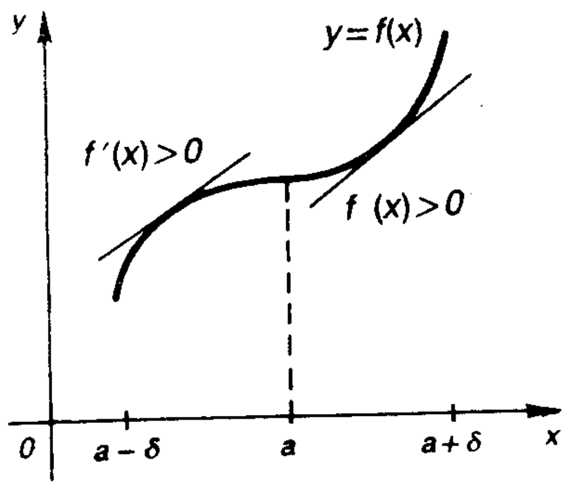
c. *Kui* $f'(x)$ *on punkti a vasakpoolses ja parempoolses ümbruses ühe ja sama märgiga, siis punktis a lokaalset ekstreemumit ei ole* (joon. 4.5).



Joon. 4.3



Joon. 4.4



Joon. 4.5

Tunnuses PT 4.1.2 ei ole oluline, kas funktsioon f on diferentseeruv punktis a või mitte, kuid ta peab olema selles punktis a pidev. Kui f ei ole pidev punktis a, siis tunnus PT 4.1.2 võib anda vale tulemuse (vt. näide N 4.1.5).

PT 4.1.3. *Olgu funktsioon f vähemalt kaks korda diferentseeruv statsionaarses punktis a.*

Kui $f''(a)<0$, siis punktis a on range lokaalne maksimum.
Kui $f''(a)>0$, siis punktis a on range lokaalne miinimum.

Tunnust PT 4.1.3 ei saa kasutada, kui $f''(a)=0$. Sel korral kasutatakse järgmist tunnust.

PT 4.1.4. *Olgu funktsioon f diferentseeruv n korda statsionaarses punktis a ning olgu*

$$f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

Kui n on paarisarv, siis punktis a on $f^{(n)}(a)<0$ korral range lokaalne maksimum ja $f^{(n)}(a)>0$ korral range lokaalne miinimum.

Kui n on paaritu arv, siis punktis a lokaalset ekstreemumit ei ole.

Kui tunnuseid PT 4.1.2—4.1.4 ei saa kasutada (näiteks, funktsioon f ei ole pidev kriitilises punktis), siis tuleb vahetult uurida funktsiooni muutumiskäiku kriitilise punkti ümbruses (vt. näide N 4.1.5).

D 4.1.3. *Funktsiooni f* globaalseks *ehk* absoluutseks maksimumiks (miinimumiks) *piirkonnas X nimetatakse tema suurimat (vähimat) väärtust selles piirkonnas X.*

Globaalse maksimumi ja globaalse miinimumi ühine nimetus on globaalne ekstreemum.

Kui funktsioonil f suurim väärtus M lõigus $X=[a,b]$ on punktis α ja vähim väärtus m on punktis β, siis võime kirjutada

$$M=f(\alpha)=\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x), \quad m=f(\beta)=\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

Funktsioonil võivad globaalsed ekstreemumid ka puududa, kuid teoreemi T 2.5.8 põhjal lõigus pideval funktsioonil on olemas globaalsed ekstreemumid selles lõigus ja neid võib leida järgmise meetodiga.

M 4.1.1. Lõigus X pideva funktsiooni f globaalsete ekstreemumite leidmiseks tuleb:

1) leida funktsiooni f kriitilised punktid lõigu X sisepunktides;

2) arvutada funktsiooni f väärtused kriitilistes punktides ja lõigu otspunktides;

3) saadud väärtustest valida välja suurim ja vähim, mis ongi vastavalt funktsiooni f suurim ja vähim väärtus selles lõigus X.

Mis tahes piirkonna X korral võib globaalse ekstreemumi olemasolu kindlaks teha järgmise tunnuse abil.

PT 4.1.5. *Kui piirkonnas X pideval funktsioonil f on üksainus lokaalne ekstreemum, siis on see ka funktsiooni f globaalne ekstreemum selles piirkonnas X.*

Kui funktsioonil f on piirkonnas X mitu lokaalset ekstreemumit, siis tunnuse PT 4.1.5 rakendamiseks võib piirkonna X sobivalt osadeks jaotada, nii et vaadeldavas osas oleks ainult üks lokaalne ekstreemum.

Näited

N 4.1.1. Leida funktsiooni

$$y = 2x^3 - 3x^2$$

monotoonsuse piirkonnad.

Lahendus. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty, \infty)$. Leiame funktsiooni kriitilised punktid. Selleks leiame funktsiooni tuletise

$$y' = 6x(x-1),$$

kust näeme, et funktsiooni kriitilisteks punktideks on statsionaarsed punktid

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Nende punktide abil jaotame piirkonna X kolmeks vahemikuks

$$X_1 = (-\infty, 0), \quad X_2 = (0, 1), \quad X_3 = 1, \infty).$$

Teoreemi T 4.1.3 põhjal igas ühes neist säilitab tuletis märki. Et punktis $-1 \in X_1$ on $y'(-1) > 0$, siis kogu vahemikus $X_1 = (-\infty, 0)$ on $y' > 0$ ja tunnuse PT 4.1.1 põhjal funktsioon f kasvab selles vahemikus. Punktis $0{,}5 \in X_2$ on $y'(0{,}5) < 0$, seega kogu selles vahemikus $X_2 = (0, 1)$ on $y' < 0$ ja tunnuse PT 4.1.1 põhjal funktsioon f kahaneb selles vahemikus. Analoogiliselt, $y'(10) > 0$ ja seega kogu vahemikus $X_3 = (1, \infty)$ on $y' > 0$ ja tunnuse PT 4.1.1 põhjal funktsioon f kasvab selles vahemikus X_3.

N 4.1.2. Tõestada võrratus

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, \quad \text{kui} \quad x > 1.$$

Tõestus. Moodustame funktsiooni

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

On vaja näidata, et $f(x) > 0$, kui $x > 1$.

Funktsiooni f määramispiirkond on vahemik $X = (0, \infty)$. Et f on elementaarfunktsioon, siis ta on pidev selles vahemikus X teoreemi T 2.5.5 põhjal. Leiame tuletise

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}.$$

Näeme, et vahemikus X on funktsioonil üksainus kriitiline punkt, milleks on statsionaarne punkt $x = 1$. Kui $x > 1$, siis on $f'(x) > 0$. Tunnuse PT 4.1.1 põhjal funktsioon f kasvab vahemikus $(1, \infty)$. Et $f(1) = 0$, siis funktsiooni pidevuse tõttu on $x > 1$ korral $f(x) > 0$. Mott.

N 4.1.3. Leida funktsiooni

$$y = 2x^3 - 3x^2$$

lokaalsed ekstreemumid tunnuse PT 4.1.2 abil.

Lahendus. Vaadeldav funktsioon kui elementaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas $X = (-\infty, \infty)$. Näites 4.1.1 me leidsime selle funktsiooni kriitilised punktid $x = 0$ ja $x = 1$ ning monotoonsuse piirkonnad. Kanname seal saadud tulemused järgmisele skeemile.

$$\begin{array}{ccccc} y'>0 & | & y'<0 & | & y'>0 \\ \text{kasvab} & 0 & \text{kahaneb} & 1 & \text{kasvab} \end{array} \to x$$

Et funktsioon on pidev punktides 0 ja 1, siis sellelt skeemilt tunnuse PT 4.1.2 abil saame, et punktis $x=0$ on funktsioonil range lokaalne maksimum $y(0)=0$ ja punktis $x=1$ range lokaalne miinimum $y(1)=-1$.

N 4.1.4. Leida tunnuse PT 4.1.3 või PT 4.1.4 abil punktid, kus funktsioonil

$$y=x^3e^{-x}$$

on lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Leiame funktsiooni kriitilised punktid. Selleks leiame esimese tuletise

$$y'=x^2e^{-x}(3-x),$$

kust näeme, et funktsiooni kriitilisteks punktideks on kaks statsionaarset punkti $x=0$, $x=3$.

Tunnuse PT 4.1.3 rakendamiseks leiame teise tuletise

$$y''=e^{-x}(x^3-6x^2+6x),$$

kust saame, et $y''(0)=0$ ja $y''(3)<0$. Seega tunnuse PT 4.1.3 põhjal punktis $x=3$ on lokaalne maksimum. Punkti $x=0$ kohta see tunnus vastust ei anna. Rakendame tunnust PT 4.1.4. Selleks leiame kolmanda tuletise

$$y'''=e^{-x}(-x^3+9x^2-18x+6).$$

Saame $y'''(0)\neq 0$. Tunnuse PT 4.1.4 põhjal punktis $x=0$ lokaalset ekstreemumit ei ole.

N 4.1.5. Leida funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases} 1/|x|, & \text{kui } x\neq 0 \\ 0, & \text{kui } x=0 \end{cases}$$

lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Leiame funktsiooni kriitilised punktid. Selleks leiame tuletise

$$f'(x)=\begin{cases} -x^{-2}\operatorname{sgn} x, & \text{kui } x\neq 0 \\ \text{ei eksisteeri}, & \text{kui } x=0. \end{cases}$$

Punkt $x=0$ on seega funktsiooni ainuke kriitiline punkt. Et punktis $x=0$ funktsioon ei ole diferentseeruv ega pidev, siis tunnuseid PT 4.1.2—4.1.4 kasutada ei saa. Et $f(0)=0$ ja ülejäänud punktides on $f(x)>0$, siis vahetult definitsiooni D 4.1.2 põhjal võib öelda, et punktis $x=0$ on funktsioonil lokaalne miinimum $f(0)=0$.

N 4.1.6. Leida funktsiooni

$$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2, \quad x\in X=[0,2]$$

globaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Antud funktsioon on elementaarfunktsioon ja seepärast pidev lõigus X (vt. teoreem T 2.5.5). Seega on tal teoreemi T 2.5.8 põhjal selles lõigus globaalsed ekstreemumid.

Globaalsed ekstreemumid saame meetodil M 4.1.1. Vastavalt meetodile leiame funktsiooni f kriitilised punktid. Selleks leiame funktsiooni tuletise lõigu X sisepunktides, s. o vahemikus $(0, 2)$:

$$f'(x)=12x(x-1)(x+2), \quad x\in(0,2).$$

Näeme, et vahemikus $(0,2)$ on funktsioonil vaid üks kriitiline punkt $x=1$. Arvutame nüüd funktsiooni väärtused kriitilises punktis ja lõigu X otspunktides:

$$f(1)=-5, \quad f(0)=0, \quad f(2)=32.$$

Neist arvudest vähim $f(1)=-5$ on funktsiooni f globaalne miinimum ja suurim $f(2)=32$ on globaalne maksimum lõigus X.

Sellel funktsioonil võib globaalse miinimumi leida ka teisel viisil. Nimelt on tunnuse PT 4.1.3 abil kerge kindlaks teha, et sellel funktsioonil on kriitilises punktis $x=1$ lokaalne miinimum $f(1)=-5$. Et see on funktsiooni ainus lokaalne ekstreemum lõigus X ja funktsioon on pidev selles lõigus, siis tunnuse PT 4.1.5. põhjal on see selle funktsiooni globaalne miinimum lõigus X.

N 4.1.7. Tõestada, et iga $x \neq 0$ korral kehtib võrratus

$$e^x > 1+x.$$

Lahendus. Moodustame funktsiooni

$$f(x)=e^x-1-x,$$

mille määramispiirkond on $X=(-\infty, \infty)$. Tuleb näidata, et iga $x \neq 0$ korral on $f(x)>0$. Et

$$f'(x)=e^x-1,$$

siis funktsiooni f ainuke kriitiline punkt on statsionaarne punkt $x=0$. Et $f''(0)=e^0>0$, siis punktis $x=0$ on funktsioonil f range lokaalne miinimum, mis tunnuse PT 4.1.5 põhjal on ka range globaalne miinimum. Tähendab, iga $x \neq 0$ korral on $f(x)>f(0)=0$. Mott.

N 4.1.8. Püstkoonusesse kõrgusega H ja põhja raadiusega R on kujundatud maksimaalse ruumalaga püstsilinder. Leida silindri põhja raadius r ja kõrgus h.

Lahendus. Kui tähistame otsitava silindri põhja raadiuse tähega x ja kõrguse tähega h, siis silindri ruumala on

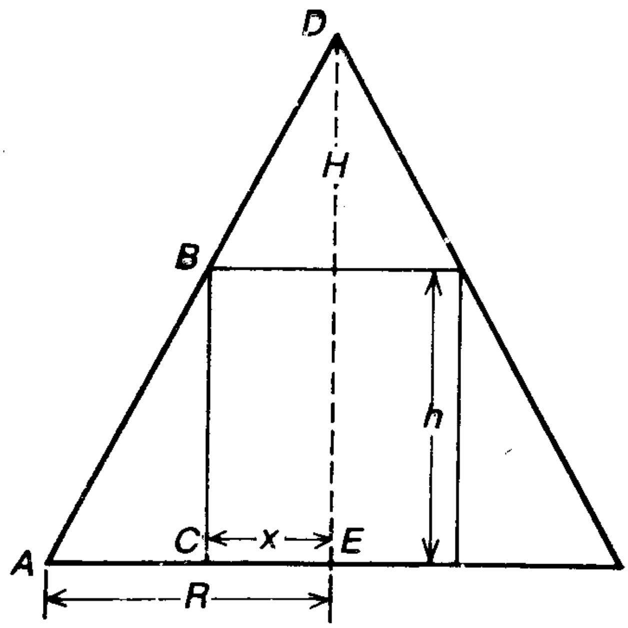
$$V=\pi x^2 h.$$

Suurused x ja h sõltuvad teineteisest. Avaldame h suuruse x kaudu. Selleks joonestame koonuse ja otsitava silindri telglõike (joon. 4.6). Kolmnurkade ABC ja ADE sarnasuse tõttu

$$\frac{R}{H}=\frac{R-x}{h},$$

kust

$$h=\frac{H}{R}(R-x).$$



Joon. 4.6

Seega silindri ruumala V avaldub muutuja x funktsioonina

$$V=\frac{\pi H}{R}x^2(R-x), \qquad x\in X=(0,\ R).$$

Tuleb leida punkt x, kus funktsioonil $V=V(x)$ on globaalne maksimum. Et

$$V'(x)=\frac{\pi H}{R}x(2R-3x),$$

siis funktsiooni V ainukeseks kriitiliseks punktiks piirkonnas X on statsionaarne punkt $x_0=2R/3$. Leides teise tuletise

$$V''(x)=\frac{\pi H}{R}(2R-6x),$$

saame $V''(x_0)<0$. Tunnuse PT 4.1.3 põhjal on punktis x_0 range lokaalne maksimum, mis tunnuse PT 4.1.5 põhjal on ka range globaalne maksimum. Seega

$$r=x_0=\frac{2}{3}R, \qquad h=\frac{1}{3}H.$$

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad (vt. näide 4.1.1).

534. $y=x^3-3x^2$

535. $y=8x^2-x^4$

536. $y=x-\sin x$

537. $y=\dfrac{x}{\ln x}$

538. $y=\arccos(1+x)$

539. $y=xe^{-x}$, $x\in(0,\infty)$

540. $y=\begin{cases}1/x, & \text{kui } x\in(-\infty,-1]\\ -1, & \text{kui } x\in(-1,1]\\ x^2-2x, & \text{kui } x\in(1,\infty)\end{cases}$

541. $y=\begin{cases}\sin x, & \text{kui } |x|\leqslant\pi/2\\ \operatorname{sgn}\sin x, & \text{kui } \pi/2<|x|<\pi\end{cases}$

542. $y=(x-1)\sin[x]$, $x\in(0,\pi/2)$

Tõestada järgmised võrratused (vt. näide N 4.1.2).

543. $\ln(1+x)<x$, kui $x>0$

544. $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$, kui $x>0$

545. $\sin x<x$, kui $x>0$

546. $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$, kui $x>0$

547. $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$, kui $x>0$

548. $x-\dfrac{x^3}{6}<\arctan x<x$, kui $x>0$

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid tunnuse PT 4.1.2 abil (vt. näide N 4.1.3).

549. $y=x^3-3x$

550. $y=8x^2-x^4$

551. $y=x\ln x$

552. $y=x^2e^{-x}$

553. $y=(x^2-1)^2$

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid tunnuse PT 4.1.3 või PT 4.1.4 abil (vt. näide N 4. 1 4).

554. $f(x)=x^2-4x+4$

555. $f(x)=x\ln^3 x$

556. $f(x)=(x-4)^3x$

557. $f(x)=4x^5-5x^4$

558. $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid (vt. näide N 4.1.5).

559. $y=\sqrt{2x^3+3x^2}$

560. $y=\begin{cases} x-\ln|x|, & \text{kui } x\neq 0 \\ 0, & \text{kui } x=0 \end{cases}$

561. $y=x-\arctan x$

562. $f(x)=1-|x|+\ln|x|$

563. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$

564. $f(x)=\ln(x^4+4x^3+30)$

565. $f(x)=\begin{cases} \ln|x|, & \text{kui } x\neq 0 \\ 0, & \text{kui } x=0 \end{cases}$

566. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{kui } -\pi/2<x<0 \\ \cos x, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant \pi/2 \end{cases}$

567. $y=x\arctan x$

Leida järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid (vt. näide N 4.1.6)

568. $f(x)=x^2-2x+3,\ x\in[0,5]$

569. $f(x)=x^3-3x+1,\ x\in[-2,3]$

570. $f(x)=x-\ln x,\ x\in[e^{-1},e]$

571. $f(x)=\sin^2 x,\ x\in[-\pi,\pi]$

572. $f(x)=\arccos x$

573. $f(x)=e^{-x^2}$

574. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

575. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x},\ x\in(0,1)$

Tõestada järgmised võrratused (vt. näide N 4.1.7).

576. $\ln(1+x)\leqslant x$, kui $x>-1$

577. $2\sqrt{x}\geqslant 3-\dfrac{1}{x}$, kui $x>0$

578. $2x\arctan x\geqslant \ln(1+x^2)$

579. $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$

Lahendada järgmised ülesanded (vt. näide N 4.1.8).

580. Leida arvu 36 niisugused kaks tegurit, mille ruutude summa on minimaalne.

581. Tuleb valmistada kaanega kast, mille ruumala on 72 cm^3 ja põhja servade suhe on 1 : 2. Määrata kasti mõõtmed nii, et kasti täispindala oleks minimaalne.

582. Akna kuju on ristkülik korrapärase kolmnurgaga ülemises osas. Akna ümbermõõt on 3 m. Milline peab olema akna alus, et akna pindala oleks maksimaalne?

583. Kanali ristlõige on ristkülik poolringiga alumises osas. Kanali ristlõike ümbermõõt on 4,5 m. Milline peab olema poolringi raadius, et kanali ristlõike pindala oleks maksimaalne?

584. Pöördkoonuse moodustaja pikkus on 20 cm. Missuguse kõrguse korral on koonuse ruumala maksimaalne?

585. Leida kerasse kujundatud maksimaalse ruumalaga ringsilindri mõõtmed, kui kera raadius on R.

586. Paraboolil $y=x^2$ leida punkt, mille kaugus sirgest $y=2x-4$ on minimaalne.

587. Punktist A väljub punkti B suunas auto, liikudes kiirusega 80 km/t. Samal ajal väljub punktist B rong, liikudes punkti C suunas kiirusega 50 km/t. On teada, et $\angle ABC=60°$ ja $AB=200$ km. Missugusel ajamomendil (lugedes aega liikumise algmomendist alates) on sõidukid teineteisele kõige lähemal?

588. Tööline pani tähele, et ringsilindri kujuliste kruuside valmistamisel kulub liiga palju materjali. Ta tegi ettepaneku muuta kruusi kõrgust ja läbimõõtu nii, et kruusi maht jääks endiseks, aga materjali kuluks minimaalne hulk. Tema ettepanek lükati tagasi. Miks?

§ 4.2. FUNKTSIOONI GRAAFIKU KUMERUS JA KÄÄNUPUNKTID

Olgu antud vahemikus X diferentseeruv funktsioon f, mille graafik on joon

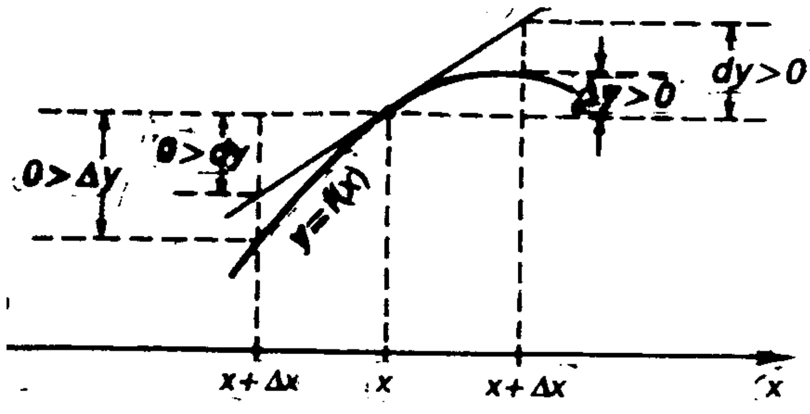
$$y=f(x). \tag{2}$$

Olgu Δy ja dy vastavalt selle funktsiooni muut ja diferentsiaal punktis $x \in X$.

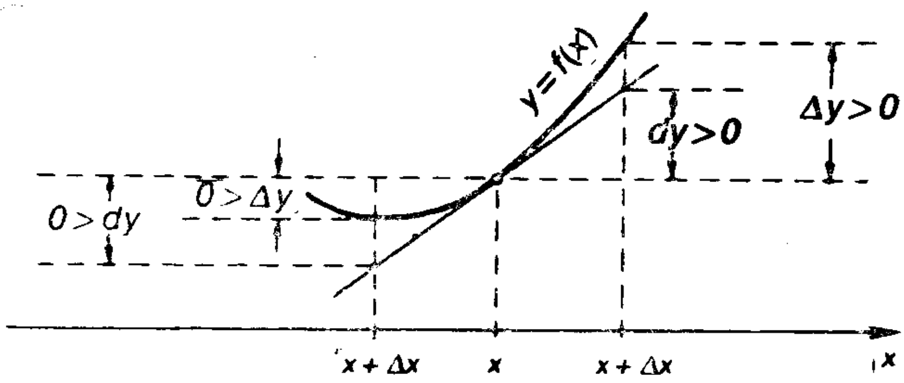
D 4.2.1. *Öeldakse, et funktsiooni f graafik* (2) *on vahemikus X* k u m e r (n õ g u s), *kui selle vahemiku X igas punktis x graafiku puutuja asetseb ülalpool* (*allpool*) *graafikut, s.o. kui selles vahemiku* X igas punktis x on

$$\Delta y < dy \quad (\Delta y > dy). \tag{3}$$

Kumera graafikuga funktsioon on kujutatud joonisel 4.7 ja nõgusa graafikuga funktsioon joonisel 4.8.



Joon. 4.7



Joon. 4.8

Nimetus «kumer» ja «nõgus» asemel kasutatakse ka nimetusi «kumer üles» ja «kumer alla».

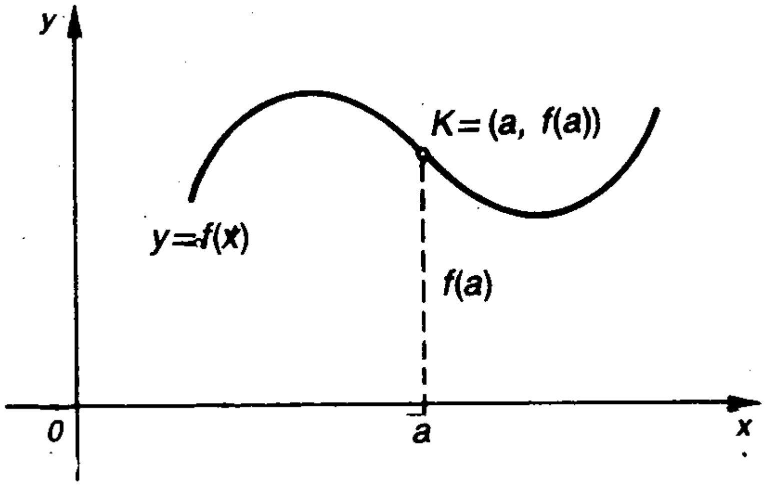
Definitsiooniga D 4.2.1. antud kumerust ja nõgusust nimetatakse ka rangeks. Kui aga tingimustes (3) lisandub ka võrdusmärk, siis kõneldakse mitterangest kumerusest ja nõgususest.

T 4.2.1. *Funktsiooni f graafik on vahemikus X rangelt kumer (nõgus) siis ja ainult siis kui tuletis $f'(x)$ kahaneb (kasvab) vahemikus X.*

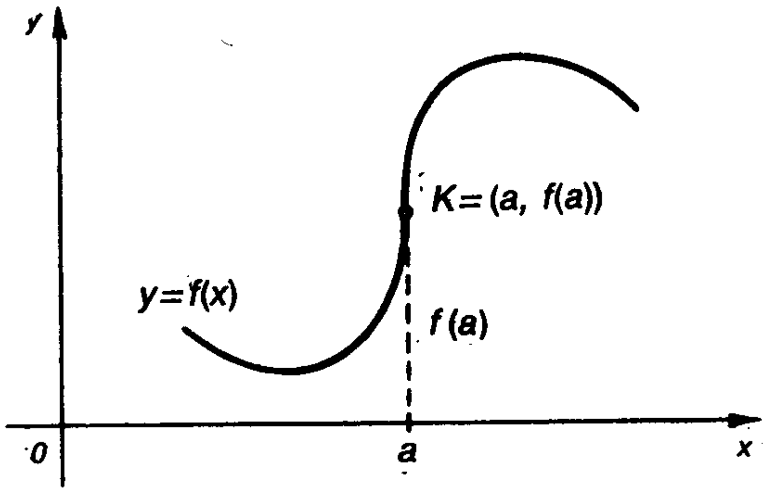
Funktsiooni graafiku kumeruse ja nõgususe piirkondade leidmiseks kasutatakse järgmist piisavat tunnust, mis teoreemi T 4.1.2 põhjal vahetult järeldub teoreemist T 4.2.1.

PT 4.2.1. *Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus X. Kui vahemikus X on $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), siis selles vahemikus on funktsiooni f graafik rangelt kumer (nõgus).*

D 4.2.2. *Funktsiooni f graafiku punkti $K=(a, f(a))$, kus funktsioon f on pidev, nimetatakse* käänupunktiks, *kui leiduvad sellised ühepoolsed ümbrused $(a-\delta, a)$ ja $(a, a+\delta)$, et ühes neist on funktsiooni f graafik kumer ja teises nõgus* (joonised 4.9 ja 4.10).



Joon. 4.9



Joon. 4.10

Funktsiooni graafiku käänupunktide leidmiseks võib kasutada tunnust PT 4.2.1 leides graafiku kumeruse ja nõgususe piirkonnad. Kui aga neid piirkondi ei ole vaja leida, siis võib kasutada ka järgmisi tunnuseid.

TT 4.2.1. *Funktsiooni f graafikul võib käänupunkt olla vaid tuletise $f'(x)$ kriitilises punktis.*

PT 4.2.2. *Kui tuletisel $f'(x)$ on kriitilises punktis a range lokaalne ekstreemum, siis punkt $K=(a, f(a))$ on funktsiooni f graafiku käänupunkt.*

Näited

N 4.2.1. Leida funktsiooni

$$y = x^3 - 3x^2 - 4$$

graafiku kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid.

Lahendus. Funktsiooni määramispiirkond on $(-\infty, \infty)$. Leiame esimese ja teise tuletise

$$y'=3x^2-6x, \quad y''=6(x-1).$$

Näeme, et $y''<0$, kui $x<1$, ja $y''>0$, kui $x>1$. Seega graafik on tunnuse PT 4.2.1 põhjal kumer vahemikus $(-\infty, 1)$ ja nõgus vahemikus $(1, \infty)$. Definitsiooni D 4.2.2 põhjal on punkt $K=(1, y(1))=(1, -6)$ graafiku käänupunkt.

N 4.2.2. Leida funktsiooni

$$y=x^4-2x^3$$

graafiku käänupunktid.

Lahendus. Leiame tuletise

$$y'=4x^3-6x^2.$$

Tunnuse TT 4.2.1 rakendamiseks leiame tuletise y' kriitilised punktid. Selleks leiame tema tuletise

$$y''=12x^2-12x=12x(x-1),$$

kust näeme, et tuletisel y' on kriitilisteks punktideks kaks statsionaarset punkti $x=0$ ja $x=1$.

Uurime nüüd, kas tuletisel y' on neis punktides ekstreemume. Selleks leiame kolmanda tuletise

$$y'''=24x-12.$$

Et $y'''(0)\neq 0$ ja $y'''(1)\neq 0$, siis tunnuse PT 4.1.3 põhjal on tuletisel y' mõlemas punktis $x=0$ ja $x=1$ range lokaalne ekstreemum. Tunnuse PT 4.2.2 põhjal punktid $(0, y(0))=(0, 0)$ ja $(1, y(1))=(1, -1)$ on siis graafiku käänupunktid.

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide graafikute kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid (vt. näide N 4.2.1).

589. $y=x^3-6x^2+12x+4$

590. $y=\dfrac{3}{x-4}$

591. $y=\arctan x-x$

592. $y=x^2\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)$

593. $y=e^{-x^2}$

Leida järgmiste funktsioonide graafikute käänupunktid (vt. näide N 4.2.2).

594. $y=x^3-6x^2$

595. $y=\ln(1+x^2)$

596. $y=x^4+2x^3-12x^2$

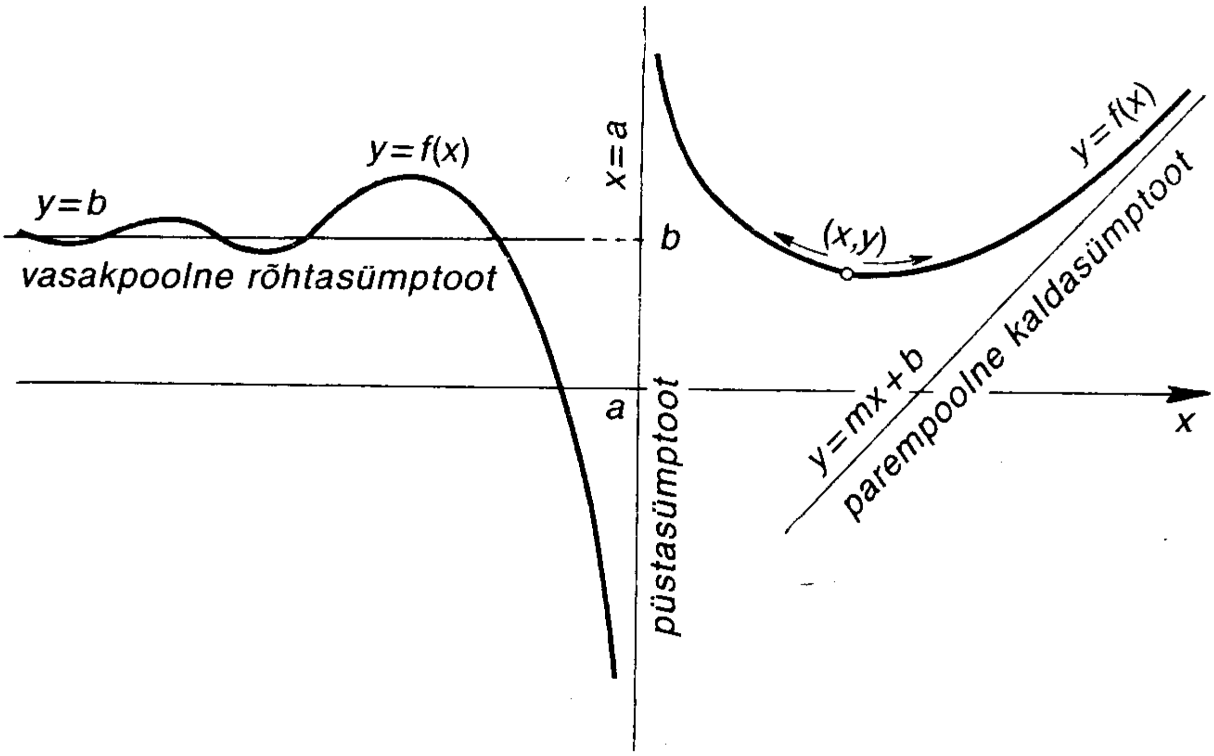
§ 4.3. FUNKTSIOONI GRAAFIKU ASÜMPTOODID

Asetsegu punkt (x, y) funktsiooni f graafikul

$$y=f(x), \tag{4}$$

millel on lõpmatusse ulatuv haru (joon. 4.11).

D 4.3.1. *Kui punkti (x, y) kaugenemisel lõpmatusse tema kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimeta-*



Joon. 4.11

takse f u n k t s i o o n i *f* *graafiku ehk* j o o n e (4) a s ü m p t o o m i k s.

D 4.3.2. *Asümptooti võrrandiga*

$$x=a \tag{5}$$

nimetatakse p ü s t - ehk v e r t i k a a l s ü m p t o o d i k s.

Asümptooti võrrandiga

$$y=mx+b \tag{6}$$

nimetatakse k a l d s ü m p t o o d i k s. Kui $m=0$, *siis kaldsümptooti* (6) *nimetatakse rõht- ehk* h o r i s o n t a a l s ü m p t o o d i k s (joon. 4.11).

Kaldsümptoote liigitatakse p a r e m - ja v a s a k p o o l s e t e k s. Kui punkt (x, y) läheneb kaldsümptoodile protsessis $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$, siis seda kaldsümptooti nimetatakse p a r e m p o o l s e k s (v a s a k p o o l s e k s).

Analoogilisi nimetusi kasutatakse ka püstsümptootide korral. Öeldakse, et sirge $x=a$ on p ü s t s ü m p t o o t punkti a p a r e m p o o l s e s (v a s a k p o o l s e s) ü m b r u s e s, kui punkt (x, y) läheneb püstasümptoodile paremalt (vasakult). Analoogiliselt defineeritakse veel alumine ja ülemine püstasümptoot.

Funktsiooni f graafiku asümptootide leidmiseks kasutatakse järgmisi teoreeme.

T 4.3.1. *Sirge* $x=a$ *on funktsiooni* f *graafiku püstasüptoot punkti* a *parempoolses* (*vasakpoolses*) *ümbruses siis ja ainult siis, kui*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty \right).$$

T 4.3.2. *Sirge $y=mx+b$ on funktsiooni f graafiku parempoolne kaldasümptoot siis ja ainult siis, kui*

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]. \tag{7}$$

T 4.3.3. *Sirge $y=mx+b$ on funktsiooni f graafiku vasakpoolne kaldsümptoot siis ja ainult siis, kui*

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]. \tag{8}$$

Näited

N 4.3.1. Leida funktsiooni

$$y=\frac{x^2+x}{x-1}$$

graafiku asümptoodid.

L a h e n d u s. Leiame kõigepealt püstasümptoodid. Et

$$\lim_{x\to1+}y=\infty,\qquad \lim_{x\to1-}y=-\infty,$$

siis teoreemi T 4.3.1 põhjal on sirge $x=1$ püstasümptoot, seejuures punkti a parempoolses ümbruses on ta ülemine ja vasakpoolses ümbruses alumine püstasümptoot.

Leiame kaldasümptoodid. Valemite (7) põhjal

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=1,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-x\right)=2.$$

Seega teoreemi T 4.3.2 põhjal sirge $y=x+2$ on graafiku parempoolne kaldasümptoot. Valemid (8) annavad samuti $m=1$ ja $b=2$. Järelikult, teoreemi T 4.3.2 põhjal sirge $y=x+2$ on ka vasakpoolne kaldasümptoot.

N 4.3.2. Leida funktsiooni

$$y=x+\ln x$$

graafiku asümptoodid.

L a h e n d u s. Leiame kõigepealt püstasümptoodid. Et

$$\lim_{x\to0+}y=-\infty,$$

siis teoreemi T 4.3.1 põhjal sirge $x=0$ on alumine püstasümptoot punkti $a=0$ parempoolses ümbruses. Punkti $a=0$ vasakpoolne ümbrus ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.

Leiame kaldasümptoodid. Valemite (7) põhjal

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x}=1,\qquad b=\lim_{x\to\infty}[x+\ln x-x]=\infty$$

Seega graafikul parempoolset kaldasümptooti ei ole. Et antud funktsioon on määratud vaid $x>0$ korral, siis graafikul ka vasakpoolset kaldasümptooti ei ole.

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid (vt. näited N 4.3.1 ja N 4.3.2).

597. $y=\frac{1}{x-2}$

598. $y=\frac{x^2}{x^2-4}$

599. $y=\frac{x}{\ln x}$

600. $y=\frac{2x^2+1}{x+1}$

601. $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$

602. $y=\frac{1}{1-e^x}$

603. $y=2x-\frac{\cos x}{x}$

§ 4.4. FUNKTSIOONI GRAAFIKU JOONESTAMINE ISELOOMUSTAVATE ANDMETE PÕHJAL

Funktsiooni graafiku joonestamine iseloomustavate andmete põhjal tähendab funktsiooni graafiku joonestamist järgmisel meetodil.

M 4.4.1. Funktsiooni graafiku joonestamiseks tuleb:

1. Leida funktsiooni määramispiirkond ning katkevuspunktid. Selgitada, kas funktsioon pole paaris, paaritu või perioodiline funktsioon.
2. Leida asümptoodid.
3. Leida monotoonsuse piirkonnad ja ekstreemumid.
4. Leida kumeruse piirkonnad ja käänupunktid.
5. Saadud andmete põhjal joonestada funktsiooni graafik.

Graafiku joonestamiseks valida andmetega sobiv mõõtühik ja telgede paigutus koordinaattasandil. Seejärel kanda koordinaattasandile asümptoodid, ekstreemumpunktid ja käänupunktid. Siis järk-järgult joonestada funktsiooni graafik punktides 1—4 saadud andmete järgi. Vajaduse korral võib leida täiendavalt veel mõned graafiku punktid (näit. graafiku lõikepunktid koordinaattelgedega või asümpootidega, samuti ühepoolsed piirväärtused esimest liiki katkevuspunktides jne.).

N 4.4.1. Joonestada funktsiooni

$$y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$$

graafik iseloomustavate andmete põhjal.

L a h e n d u s. Toimime vastavalt meetodile M 4.4.1.

1. Leiame funktsiooni määramispiirkonna $X=(-\infty, \infty)$. Piirkonnas X on funktsioon pidev teoreemi **T** 2.5.5. põhjal, sest ta on elementaarfunktsioon. Seega piirkonnas X funktsioonil katkevuspunkte ei ole. Funktsioon ei ole paaris, paaritu ega perioodiline.

2. Leiame asümptoodid. Püstasümptoote ei ole teoreemi T 4.3.1. põhjal. Leiame kaldsümptoodid $y=max+b$. Teoreemi T 4.3.2 järgi:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-x]=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x)=-2.$$

Viimane piirväärtus on leitud näites N 2.4.6. Seega sirge $y=x-2$ on parempoolne kaldsümptoot. Kui $x\to-\infty$, siis samal viisil teoreemi T 4.3.3 põhjal saame $m=1$ ja $b=-2$. Seega see sirge $y=x-2$ on ka vasakpoolne kaldasümptoot.

3. Leiame monotoonsuse piirkonnad ja ekstreemumid. Selleks leiame funktsiooni kriitilised punktid. Et

$$y'=\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}},$$

siis on funktsioonil kolm kriitilist punkti

$$x=0,\quad x=4,\quad x=6.$$

Jaotame nende punktide abil x-telje osadeks ja määrame igal osal tuletise y' märgi ning tunnuse PT 4.1.1 abil funktsiooni käigu. Siis teeme joonise 4.12. Jooniselt näeme, et funktsioon kasvab vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(4, \infty)$ ning kahaneb vahemikus $(0, 4)$.

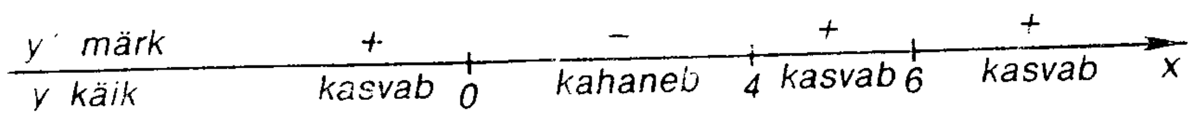
Leiame lokaalsed ekstreemumid. Et kriitilises punktis $x=0$ on funktsioon pidev, siis jooniselt 4.12 näeme tunnuse PT 4.1.2 a) põhjal, et punktis $x=0$ on funktsioonil range lokaalne maksimum $f(0)=0$. Analoogiliselt saame tunnuse PT 4.1.2 b) põhjal, et punktis $x=4$ on funktsioonil range lokaalne miinimum $f(4)=-2\cdot 4^{1/3}\approx-3{,}17$. Punktis $x=6$ ei ole funktsioonil lokaalset ekstreemumit tunnuse PT 4.1.2 c) põhjal.

Kokkuvõttes oleme seega saanud, et antud funktsioonil on lokaalne maksimum graafiku punktis $E_1=(0, 0)$ ja lokaalne miinimum graafiku punktis $E_2=(4, -2\cdot 4^{1/3})$.

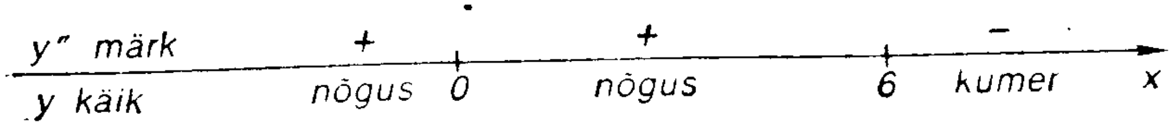
4. Leiame kumeruse piirkonnad ja käänupunktid. Selleks leiame (logaritmilise diferentseerimise võtte M 3.1.2 abil) teise tuletise

$$y''=-\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}.$$

Näeme, et teine tuletis y'' võib muuta märki vaid punktides $x=0$ ja $x=6$. Jaotame nende punktide abil x-telje osadeks ja määrame igal osal y'' märgi ning tunnuse PT 4.2.1 abil funktsiooni graafiku käigu tehes joonise 4.13.



Joon. 4.12



Joon. 4.13

Jooniselt näeme, et graafik on nõgus vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(0, 6)$ ning kumer vahemikus $(6, \infty)$. Definitsiooni D 4.2.2 põhjal on punkt $K=(6, y(6))=(6, 0)$ käänupunkt.

5. Joonestame saadud andmete põhjal funktsiooni graafiku. Selleks kujundame kõigepealt koordinaattasandi. Seejärel kanname koordinaattasandile asümptoodi $y=x-2$, ekstreemumpunktid $E_1=(0, 0)$ ja $E_2=(4, -2\sqrt[3]{4})$ ning käänupunkti $K=(6, 0)$.

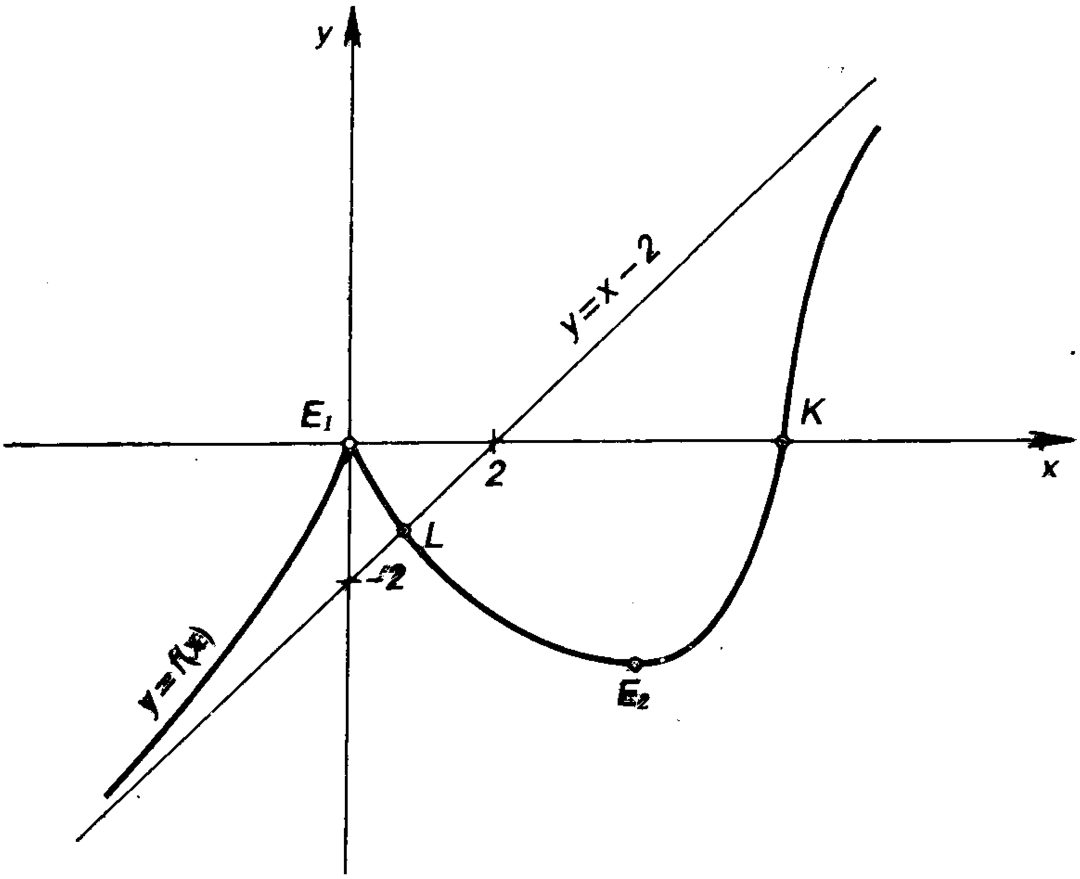
Uurime lisaks veel graafiku ja asümptoodi vastastikust asendit. Funktsiooni pidevusest ning punktide E_1 ja E_2 asendist näeme, et graafik lõikab asümptooti. Selle lõikepunkti L leidmiseks lahendame võrrandi

$$f(x)-y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}-(x-2)=0.$$

Saame $x=2/3$. Seega punktis $L=(2/3, f(2/3))=(2/3, -4/3)$ lõikab graafik asümptooti.

Ekstreemumpunkti E_1 asendi järgi näeme, et lõikepunktist L vasakul on graafik ülalpool asümptooti ja seega läheneb sellele $x\to-\infty$ korral ülaltpoolt. Ekstreemumpunkti E_2 asendi järgi näeme, et lõikepunktist L paremal on graafik allpool asümptooti ja seega läheneb sellele $x\to\infty$ korral altpoolt.

Ja lõpuks, arvestades joonistel 4.12 ja 4.13 märgitud andmeid funktsiooni kasvamise ja graafiku kumeruse kohta, joonestame graafiku (joon. 4.14).



Joon. 4.14

Ülesanded

Joonestada järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal (vt. näide N 4.4.1).

604. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}$

605. $y=4\frac{x+1}{x^2}$

606. $y=e^{(1-x^2)/2}$

607. $y=\frac{(1+\ln x)^2}{2}$

608. $y=\sqrt{x^2-2x}$

609. $y=\sqrt{|x^2-2x|}$

610. $y=\frac{1+\ln x}{x}$

611. $y=\begin{cases} 1+\ln|x|, & \text{kui } x\in(-\infty, 0)\cup(0, 1] \\ e^{-x}, & \text{kui } x\in(1, \infty) \end{cases}$

612. $y=\begin{cases} e^{x+2}-1, & \text{kui } x<-1, \\ x^3-3x^2, & \text{kui } x\geqslant-1. \end{cases}$

V. DIFERENTSIAALARVUTUSE RAKENDUSI

§ 5.1. JOONE PUUTUJA JA NORMAAL

Olgu xy-tasandil asetseva joone punktid (x, y) määratud võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

kus T on vahemik.

Võrrandeid (1) nimetatakse joone parameetrilisteks võrranditeks ja muutujat t parameetriks.

Eeldame, et funktsioonid $x(t)$ ja $y(t)$ on pidevad vahemikus T ja et neil on selles vahemikus pidevad tuletised $x'(t)$ ja $y'(t)$.

Joone (1) punkti nimetatakse harilikuks punktiks, kui selles punktis tuletised $x'(t)$ ja $y'(t)$ pole korraga nullid, ja iseäraseks punktiks, kui selles punktis on $x'(t) = y'(t) = 0$. Joont nimetatakse siledaks, kui kõik tema punktid on harilikud punktid.

Joonel (1) on igas tema harilikus punktis puutuja ja normaal. Olgu $P_0 = (x_0, y_0)$ joone (1) harilik punkt ja vastaku see parameetri t väärtusele t_0, s.t. olgu $x_0 = x(t_0)$ ja $y_0 = y(t_0)$.

Joone (1) puutuja võrrand punktis P_0 avaldub kujul

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} \tag{2}$$

ja normaali võrrand kujul

$$\frac{x - x_0}{-y'(t_0)} = \frac{y - y_0}{x'(t_0)}. \tag{3}$$

Erijuhul, kui joon (1) on antud võrrandiga

$$y = y(x), \tag{4}$$

avaldub tema puutuja võrrand punktis P_0 kujul

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \tag{5}$$

ja normaali võrrand kujul

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0). \tag{6}$$

Kui $y'(x_0) = 0$ $(= \pm\infty)$, siis joone (4) puutuja võrrandiks on $y = y_0$ $(x = x_0)$ ja normaali võrrandiks on $x = x_0$ $(y = y_0)$.

Leida puutuja ja normaal järgmistele joontele märgitud punktis.

613. $y=(x+1)\sqrt[3]{7-x}$, $P_0=(-1, 0)$
614. $y=\ln x$, $P_0=(e, 1)$
615. $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t=\pi/4$
616. $x=\ln(1+t^2)$, $y=t+\arctan t$, $P_0=(0, 0)$
617. Millise nurga all joon $y=\ln x$ lõikab x-telge?
618. Missuguse parameetri a väärtuse korral puutuvad jooned $y=ax^2$ ja $y=\ln x$?
619. Missugune peab olema kordajate a, b ja c vaheline seos, et parabool $y=ax^2+bx+c$ puutuks x-teljega.

§ 5.2. LIGIKAUDNE ARVUTAMINE

Kui arv a on ligikaudu võrdne arvuga b, siis kirjutatakse:

$$a \approx b.$$

Seejuures suurusi

$$a-b, \quad |a-b|, \quad \left|\frac{a-b}{a}\right|$$

nimetatakse vastavalt *veaks*, *absoluutseks veaks* ja *relatiivseks veaks*.

Olgu funktsioon $y=f(x)$ diferentseeruv mingis piirkonnas X, siis selle piirkonna igas punktis x funktsiooni muudu

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

ja diferentsiaali

$$dy=f'(x)\,dx$$

vahel on seos (vt. § 3.2)

$$\Delta y=dy+\alpha, \qquad \alpha=o(\Delta x).$$

Kui arvutustes asendada muut Δy diferentsiaaliga dy, siis tehtav viga, absoluutne viga ja relatiivne viga on vastavalt

$$\Delta y-dy=\alpha, \quad |\Delta y-dy|=|\alpha|, \quad \left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\left|\frac{\alpha}{\Delta y}\right|.$$

Et $\alpha=o(\Delta x)$, siis piirprotsessis $\Delta x\to 0$ viga α ja absoluutne viga $|\alpha|$ on Δx võrreldes kõrgemat järku lõpmata väikesed suurused. Seega väikeste Δx korral kehtib ligikaudne võrdus

$$\Delta y \approx dy. \tag{7}$$

Kui vaadeldavas punktis x on $dy\neq 0$, siis kehtib ekvivalentsus

$$\Delta y \sim dy, \quad \text{kui} \quad \Delta x\to 0.$$

Sel korral järeldub teoreemi T 2.4.2 põhjal, et valemis (7) ka relatiivne viga on lõpmata väike suurus piirprotsessis $\Delta x \to 0$.

Kirjutame valemi (7) täielikult välja:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x.$$

Kui valemis (8) võtta $x=0$ ja Δx asendada muutujaga x, siis saame valemi

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)x. \tag{9}$$

Valemil (9) on väikeste x korral praktiline tähtsus.

Kui funktsioon f on n korda diferentseeruv punktis a, siis punktis $x=a+\Delta x$ kehtib Taylori valem

$$f(x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(a)\Delta x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\Delta x^n+\alpha_n$$

kus paremal suurust

$$\alpha_n=o(\Delta x^n), \quad \text{kui} \quad \Delta x \to 0,$$

nimetatakse Taylori valemi jääkliikmeks Peano kujul ja ülejäänud osa Taylori polünoomiks.

Kui tuletis $f^{(n)}$ on pidev lõigus $[a, a+\Delta x]$ ja diferentseeruv vahemikus $(a, a+\Delta x)$, siis võib jääkliiget α_n kirjutada Lagrange'i kujul

$$\alpha_n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta\Delta x)\Delta x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

ja Cauchy kujul

$$\alpha_n=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta\Delta x)(1-\theta)^n\Delta x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

Kui $a=0$, siis $\Delta x=x$ ja Taylori valemist saame valemi

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\alpha_n, \tag{10}$$

mida nimetatakse ka Maclaurini valemiks.

Ligikaudse valemi (9) saame valemist (10), kui $n=1$.

Taylori valemi jääkliikme α_n kohta kehtib hinnang

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1}, \tag{11}$$

kus

$$M_{n+1}=\max_{a\leqslant x\leqslant a+\Delta x}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Valem (11) võimaldab hinnata absoluutset viga, mis tekib, kui funktsioon f asendada tema Taylori polünoomiga.

Esitame mõne tähtsama elementaarfunktsiooni Taylori valemi:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\alpha_n,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+\alpha_{2p},$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{p-1}\frac{x^{2p-2}}{(2p-2)!}+\alpha_{2p-1},$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+\alpha_n,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\alpha_n.$$

Näited

N 5.2.1. Arvutada ligikaudu valemi (8) abil

$$\sqrt{15,5}.$$

L a h e n d u s. Võtame funktsiooni $f(x)=\sqrt{x}$, siis $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$ ja valem (8) esitub kujul

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+1/(2\sqrt{x})\Delta x.$$

Et ruutjuur oleks hõlpsasti leitav, siis võtame $x=16$ ja $\Delta x=-0,5$.

$$\sqrt{15,5}\approx 4-\frac{0,5}{8}=4-0,0625=3,9375.$$

Võrreldes tulemust täpse juurega 3,9370 ..., näeme, et kolm kohta pärast koma on õiged.

N 5.2.2. Hinnata absoluutset viga järgmises ligikaudses valemis:

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},\quad \text{kui}\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

L a h e n d u s. Antud ligikaudse valemi paremal poolel on vaadeldava funktsiooni e^x Taylori polünoom $P_3(x)$. Seepärast absoluutse vea hindamiseks saame kasutada valemit (11), mis annab

$$|\alpha_3|\leqslant\frac{e}{4!}|x|^4\leqslant\frac{e}{4!}<\frac{3}{4!}=0,125.$$

Ülesanded

Arvutada ligikaudu valemi (8) abil (vt. näide N 5.2.1).

620. $\sqrt[3]{1,03}$

621. $\sqrt{24,5}$

622. arctan 1,05

623. sin 29°

Valemi (9) abil tõestada väikeste x jaoks järgmised ligikaudsed valemid.

624. $\sin x \approx x$
625. $\tan x \approx x$
626. $\ln(1+x) \approx x$
627. $\arcsin x \approx x$
628. $\arctan x \approx x$
629. $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{x}{n}$

Hinnata absoluutset viga järgmistes ligikaudsetes valemites (vt. näide N 5.2.2).

630. $\sin x \approx x-\frac{x^3}{6}$, kui $|x| \leqslant \frac{1}{2}$

631. $\tan x \approx x+\frac{x^3}{3}$, kui $|x| \leqslant 0{,}1$

632. $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, kui $0 \leqslant x \leqslant 1$

633. Funktsioonide $\cos x$ ja e^x Taylori valemite abil leida piirväärtus

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\exp(-x^2/2)}{x^4}.$$

§ 5.3. VÕRRANDITE LIGIKAUDNE LAHENDAMINE

Olgu funktsioon f vähemalt kaks korda diferentseeruv vaadeldavas piirkonnas X.

Vaatleme kahte meetodit võrrandi

$$f(x)=0 \tag{12}$$

lahendamiseks, kus lähtudes lahendi teatavast alglähendist, me saame seda järk-järgult lähendada lahendile, kuni nõutav täpsus on saavutatud.

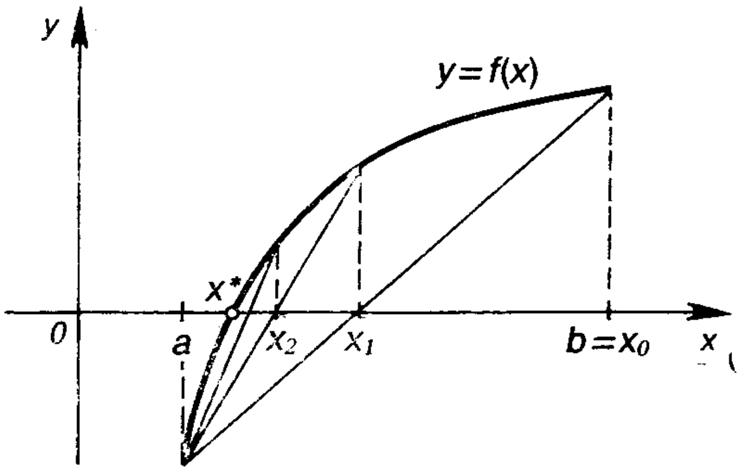
M 5.3.1 (Kõõlude meetod). Leiame piirkonnas X sellise lõigu $[a, b]$, milles $f(a)$ ja $f(b)$ on erinevate märkidega ning $f'(x)$ ja $f''(x)$ säilitavad märki (joon. 5.1). Sellega on eraldatud lõik $[a, b]$, milles teoreemi T 2.5.9 põhjal võrrandil (12) on olemas lahend x^* ja see on ainus selles lõigus tunnuse PT 4.1.1 põhjal.

Alglähendiks x_0 võtame lõigu $[a, b]$ selle otspunkti, kus $f(x)$ ja $f''(x)$ on erinevate märkidega. Järgnevad lähendid $x_1, x_2, \ldots$ arvutame järk-järgult valemist

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(a-x_n)f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}, \quad (n=0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Selliselt saadud lähendite jada (x_n) koondub võrrandi (12) lahendiks x^*, s.t.

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x^*.$$



Joon. 5.1

Tekkivat absoluutset viga iga n korral saab hinnata valemigа

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{14}$$

kus

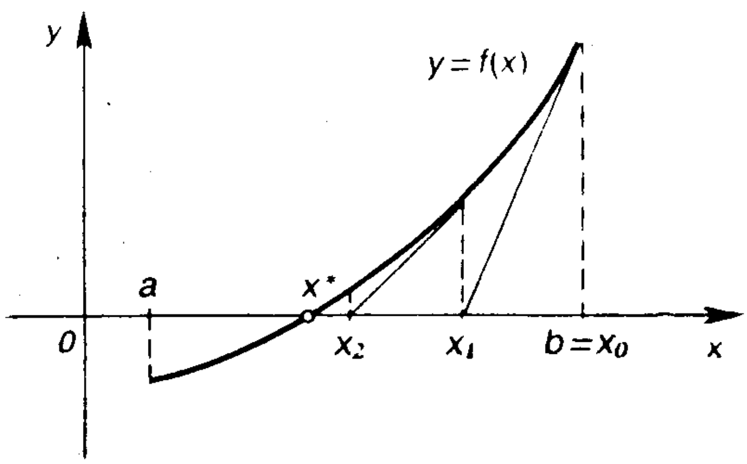
$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

Valemist (14) näeme, et lähendi täpsuse üle otsustame iga n korral väärtuse $f(x_n)$ abil, sest m ei olene arvust n ja me võime ta ette välja arvutada.

M 3.5.2 (Newtoni iteratsiooni ehk puutujate meetod). Valime piirkonnas X lõigu $[a, b]$ samal viisil nagu kõõlude meetodis M 5.3.1 (joon. 5.2).

Alglähendiks x_0 võtame lõigu $[a, b]$ selle otspunkti, kus $f(x)$ ja $f''(x)$ on sama märgiga. Järgnevad lähendid $x_1, x_2, \ldots$ arvutame järk-järgult valemist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n=0, 1, \ldots). \tag{15}$$



Joon. 5.2

Selliselt saadud lähendite jada (x_n) koondub võrrandi lahendiks x^*, s.t.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Tekkivat absoluutset viga saab iga n korral hinnata valemiga (14).

Kasutatakse ka nn. **kombineeritud meetodit**, s.o. kõõlude ja puutujate meetodit korraga, mis võimaldab täpsele lahendile läheneda mõlemalt poolt korraga. Nõnda saab viga hinnata vahetult tulemuse võrdlemisel.

Näited

N 5.3.1. Leida võrrandi

$$f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$$

lahend täpsusega kaks kohta pärast koma.

Lahendus. Proovimise teel leiame, et $f(2) = -3$ ja $f(3) = 13$. Sellega on leitud lõik $[2, 3]$, millest teoreemi T 2.5.9 põhjal on võrrandil olemas lahend. Leiame tuletised

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

Näeme, et kogu lõigus $[2, 3]$ on $f'(x) > 0$ ja $f''(x) > 0$. Seega tuletised $f'(x)$ ja $f''(x)$ säilitavad selles lõigus märki tunnuse PT 4.1.1. põhjal kasvab funktsioon f selles lõigus rangelt, mille tõttu võrrandil saab olla vaid üks lahend selles lõigus.

Lõigu otspunktis $b = 3$ on $f(3) > 0$ ja $f''(3) > 0$. Seega saame kasutada Newtoni iteratsiooni meetodit M 5.3.2 ja võtta alglähendiks $x_0 = 3$.

Arvutame valemi (15) abil järgmise lähendi x_1:

$$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{13}{24} = 2{,}5$$

(võtsime algul vaid ühe koha pärast koma).

Hindame saadud lähendi täpsust valemi (14) abil. Et $f''(x) > 0$ lõigul $[2, 3]$, siis tunnuse PT 4.1.1 põhjal tuletis $f'(x)$ kasvab sellel lõigul ja me saame $m = f'(2) = 12 - 3 = 9$. Valemi (14) järgi absoluutne viga on

$$|x_1 - x^*| \leqslant \frac{f(2{,}5)}{9} = \frac{3{,}1}{9} = 0{,}36.$$

Arvutame järgmise lähendi x_2:

$$x_2 = 2{,}5 - \frac{f(2{,}5)}{f'(2{,}5)} = 2{,}5 - \frac{3{,}1}{15{,}75} = 2{,}5 - 0{,}19 = 2{,}3.$$

Edasi arvutame lähendi x_3:

$$x_3 = 2{,}3 - \frac{0{,}267}{12{,}87} = 2{,}279.$$

Et $f(x_3) = f(2{,}279) = 0{,}003$, siis absoluutne viga on

$$|x_3 - x^*| \leqslant \frac{f(x_3)}{m} = \frac{0{,}003}{9} = 0{,}00036,$$

kust näeme, et x_3 annab meile lähendi, kus vähemalt kaks kohta pärast koma on juba õiged.

Et lõigu $[2, 3]$ vasakpoolses otspunktis on $f(2) < 0$ ja $f''(2) > 0$, siis saaksime kasutada ka kõõlude meetodit M 5.3.1, võttes alglähendiks $x_0 = 2$.

Ülesanded

Lahendada järgmised võrrandid absoluutse veaga mitte üle 0,001 (vt. näide N 5.3.1).

634. $x^3-6x+2=0$

635. $x^4-x-1=0$

636. $x-0{,}1\sin x=2$

637. $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$

638. $x\log x=1$

639. $x+e^x=0$

§ 5.4. JOONE KÕVERUS

Olgu funktsioonid f ja g n korda diferentseeruvad mingis punktis x_0. Vaatleme jooni

$$y=f(x),\quad y=g(x),\tag{16}$$

millel on olemas ühine punkt $P_0=(x_0, y_0)$.

D 5.4.1. *Öeldakse, et joontel* (16) *on punktis* P_0 n-järku puutumine, *kui*

$$f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0),\quad (k=0, 1, \ldots, n),$$

ning

$$f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0).$$

Asetsegu punkt $P_0=(x_0, y_0)$ joonel

$$x=x(t),\quad y=y(t).\tag{17}$$

D 5.4.2. *Ringjoont*

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

millel on vähemalt teist järku puutumine joonega (17) *punktis* P_0, *nimetatakse joone* (17) kõverusringiks *ja tema raadiust* R kõverusraadiuseks *selles punktis* P_0. *Kõverusringi keskpunkti* (ξ, η) *nimetatakse* kõveruskeskpunktiks. *Kõverusraadiuse pöördväärtust.*

$$k=\frac{1}{R}\tag{18}$$

nimetatakse joone (17) kõveruseks *punktis* P_0.

Kui joon on antud parameetrilisel kujul (17), siis tema kõverus k avaldub valemiga

$$k=\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.\tag{19}$$

Kui joon on antud võrrandiga

$$y=y(x),\tag{20}$$

siis

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{21}$$

Kui joon on antud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r=r(\varphi), \tag{22}$$

siis

$$k=\frac{r^2-2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}. \tag{23}$$

Kui punkt P_0 liigub mööda joont, siis joone kõverusraadius võib muutuda ja kõveruskeskpunkt muuta asukohta.

D 5.4.3. *Joone kõveruskeskpunktide hulka nimetatakse selle joone* evoluudiks *ja joont ennast tema evoluudi* evolvendiks.

Kui joon on antud parameetriliste võrranditega (17), siis tema kõveruskeskpunkti (ξ, η) koordinaadid on määratud võrdustega

$$\begin{cases} \xi=x-\dfrac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}y' \\ \eta=y+\dfrac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}x', \end{cases} \tag{24}$$

mis muutuva t korral on ühtlasi ka joone (17) evoluudi parameetrilisteks võrranditeks.

Kui joon on antud võrrandiga (20), siis tema evoluudi võrrand (24) esitub kujul

$$\xi=x-\frac{1+y'^2}{y''}y', \quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{25}$$

Näited

N 5.4.1. Leida polünoom, millel on funktsiooniga $f(x)=\cos x$ punktis $x=0$ vähemalt neljandat järku puutumine.

Lahendus. Et vaadeldaval juhul on $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=0$ ja $f^{(4)}(0)=1$, siis definitsiooni D 5.4.1 põhjal saame vastava polünoomi $P(x)$ kordajate määramiseks viis tingimust:

$$P(0)=1, \quad P'(0)=0, \quad P''(0)=-1, \quad P'''(0)=0, \quad P^{(4)}(0)=1.$$

Otsime neljanda astme polünoomi $P(x)$:

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4,$$

sest sellel on viis kordajat, mida saame määrata viie tingimuse abil. Et

$$\begin{aligned} P'(x)&=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3, \\ P''(x)&=2a_2+6a_3x+12a_4x^2, \\ P'''(x)&=6a_3+24a_4x, \\ P^{(4)}(x)&=24a_4, \end{aligned}$$

siis

$$P(0)=a_0=1, \quad P'(0)=a_1=0, \quad P''(0)=2a_2=-1, \quad P'''(0)=6a_3=0,$$
$$P^{(4)}(0)=24a_4=1,$$

kust $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=-1/2$, $a_3=0$, $a_4=1/24$.

Seega polünoomil

$$P(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4$$

on funktsiooniga $f(x)=\cos x$ punktis $x=0$ neljandat järku puutumine.

N 5.4.2. Leida ellipsi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ evoluut.

Lahendus. Et $x'=-a\sin t$, $x''=-a\cos t$, $y'=b\cos t$, $y''=-b\sin t$, siis

$$x'^2+y'^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t$$
$$y''x'-x''y'=ab\sin^2 t+ab\cos^2 t=ab$$

ja valemi (24) põhjal saame evoluudi võrrandiks

$$\begin{cases}\xi=a\cos t-\dfrac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}\,b\cos t=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t\\[2ex] \eta=b\sin t+\dfrac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}\,(-a\sin t)=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.\end{cases}$$

Tulemusest näeme, et ellipsi evoluudiks on astroid.

Ülesanded

640. Leida polünoom, millel on funktsiooniga $f(x)=\sin x$ punktis $x=0$ vähemalt kolmandat järku puutumine (vt. näide N 5.4.1).

641. Näidata, et joontel $f(x)=\tan x$ ja $g(x)=\arctan x$ on punktis $x=0$ teist järku puutumine.

642. Leida selline sirge $y=mx+b$, millel on joonega $y=x^3-3x^2+2$ enam kui esimest järku puutumine.

643. Millisel ruutparaboolil $y=ax^2+bx+c$ on punktis h joonega $y=e^x$ teist järku puutumine?

644. Olgu $y=e^{-1/x^2}$, kui $x\neq 0$, ja $y=0$, kui $x=0$. Näidata, et sel joonel on punktis $x=0$ x-teljega lõpmata suur puutumise järk. Leida järgmiste joonte kõverused:

645. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ punktis, kus $t=1$

646. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ punktis, kus $t=\pi/2$.

647. $r=a(1+\cos\varphi)$

Leida suurim kõverus järgmistel joontel.

648. $y=\ln x$

649. $y=a\,\mathrm{ch}(x/a)$

650. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$

651. Leida suurim kõverusraadius joonel $r=a\sin^3(\varphi/3)$.

Leida järgmiste joonte evoluudi võrrand (vt. näide N 5.4.2).

652. $y=x^2$

653. $y^3=ax^2$

654. $r=ae^{m\varphi}$

655. Näidata, et tsükloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ evoluudiks on samuti tsükloid, mis antust erineb vaid asendi poolest tasandil.

656. Leida ringi $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ evolvent.

VI. MÄÄRAMATA INTEGRAAL

§ 6.1. MÄÄRAMATA INTEGRAALI MÕISTE

Paljudes mehaanika, füüsika ja matemaatika ülesannetes tuleb leida funktsioon, mille tuletis on teada, ehk teisiti öeldes, taastada funktsioon tema tuletise järgi. Selle ülesande lahendamiseks defineeritakse algfunktsiooni ja määramata integraali mõiste.

D 6.1.1. *Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f* algfunktsiooniks *piirkonnas X, kui selles piirkonnas*

$$F'(x)=f(x). \tag{1}$$

Tingimust (1) võib üles kirjutada ka kujul

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x)=f(x)$$

ehk

$$\mathrm{d}F(x)=f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F, siis on tal lõpmata palju algfunktsioone G, mis kõik avalduvad kujul

$$G(x)=F(x)+C, \tag{3}$$

kus $C=\text{const}$.

D 6.1.2. *Funktsiooni f kõigi algfunktsioonide hulka piirkonnas X nimetatakse funktsiooni f* määramata integraaliks *piirkonnas X ja tähistatakse sümboliga*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Valemi (3) ja (1) tõttu võime kirjutada:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C, \text{ kui } F'(x)=f(x). \tag{4}$$

Valemis (4) nimetatakse:

$\int$ — integraalimärk,
$f(x)\,\mathrm{d}x$ — integraalialune avaldis,
$f(x)$ — integraalialune (integreeritav) funktsioon, integrand,
x — integreerimismuutuja,
C — integreerimiskonstant.

Definitsioonis D 6.1.2 sõna «määramata» märgib seda, et integraalis (4) on suvaline konstant.

Funktsiooni f määramata integraali leidmist nimetatakse funktsiooni f *integreerimiseks*.

Valemist (4) järeldub võrdus

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \tag{5}$$

mis ütleb, et määramata integraali tuletis võrdub integraalialuse funktsiooniga, ehk teisiti öeldes, määramata integraali leidmine ja tuletise leidmine on pöördtehted.

Kirjutame välja määramata integraali diferentsiaali. Võrduse (5) tõttu

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Valemi (4) ja (1) tõttu

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C. \tag{7}$$

Valemist (6) näeme, et märgid d ja $\int$ hävivad, kui nad on kõrvuti järjestuses $\mathrm{d}\int$. Valemist (7) aga ilmneb, et kõrvuti vastupidises järjestuses $\int\mathrm{d}$ hävivad need märgid samuti, kuid lisandub konstant.

Arvestades valemit (5), saame diferentseerimise põhivalemite (§ 3.1) abil koostada järgmise *integreerimise põhivalemite* tabeli.

Integreerimise põhivalemid

1) $\int 0\,\mathrm{d}x = C$,

2) $\int \mathrm{d}x = x + C$,

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,

5) $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $(a \neq -1)$,

6) $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$,

7) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$,

8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$,

9) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$,

10) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$,

11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$,

12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$,

13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$,

14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C_1$,

15) $\int \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C$,

16) $\int \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C$,

17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$,

18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$.

Integreerimisel kasutatakse järgmisi aritmeetiliste tehetega seotud reegleid:

$$\int cu(x)\,dx = c\int u(x)\,dx \quad (c=\mathrm{const}) \tag{8}$$

$$\int [u(x)\pm v(x)]\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx, \tag{9}$$

kus integraalide olemasolust paremal järeldub integraali olemasolu vasakul, kuid mitte vastupidi.

Funktsiooni määramata integraali leidmist vahetult reeglite (8) ja (9) ning integreerimise põhivalemite abil nimetatakse **vahetuks integreerimiseks.**

Kui funktsioonide diferentseerimine toimus kindlate reeglite järgi, s.t. oli põhimõtteliselt vaid tehniline protsess, siis juba järgnevatest näidetest selgub, et funktsioonide integreerimine on loominguline protsess.

Näited

N 6.1.1. Leida integraal

$$J=\int \left(x^2+2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right) dx.$$

Lahendus. Reeglite (9) ja (8) põhjal

$$J=\int x^2\,dx+2\int x^{1/2}\,dx-\int \frac{dx}{x}$$

ning põhivalemite 5) ja 8) põhjal

$$J=\frac{x^3}{3}+2\frac{x^{3/2}}{3/2}-\ln|x|+C=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\ln|x|+C,$$

kus kõigi kolme integraali kohta kirjutasime ühe suvalise konstandi C.

N 6.1.2. Leida integraal

$$J=\int (3^x e^x+3^{2x} e^{\alpha})\,dx,$$

kus $\alpha=\mathrm{const}$.

Lahendus. Reeglite (9) ja (8) põhjal

$$J=\int (3e)^x\,dx+e^{\alpha}\int (3^2)^x\,dx$$

ning põhivalemi 6) põhjal

$$J=\frac{(3e)^x}{\ln 3e}+\frac{e^{\alpha}(3^2)^x}{\ln 3^2}+C=\frac{3^x e^x}{1+\ln 3}+\frac{e^{\alpha}3^{2x}}{2\ln 3}+C.$$

N 6.1.3. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

Lahendus. Et $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, siis

$$J=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\tan x-\cot x+C.$$

N 6.1.4. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}.$$

Lahendus. Lisame lugejasse ja lahutame lugejast ühe ja sama suuruse x^2:

$$J=\int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx=\int \frac{dx}{x^2}-\int \frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$$

Ülesanded

Lihtsustada järgmised avaldised, kasutades valemeid (5), (6) ja (7).

657. $\left(\int \tan x\,dx\right)'$

658. $\left(\int 2^{x+1}\,dx\right)'$

659. $\dfrac{d}{dx}\int \arctan x\,dx$

660. $d\int \cos x\,dx$

661. $d\int (3+e^x)\,dx$

662. $\int d\ln x$

663. $\int d(6+7\tan x)$

Vahetu integreerimise teel leida järgmised integraalid (vt. näited N 6.1.1—6.1.4).

664. $\int x^4\,dx$

665. $\int (3\sqrt{x}-4)\,dx$

666. $\int 5x\sqrt{x}\,dx$

667. $\int \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

668. $\int (x^3-1)^2\,dx$

669. $\int 10^x\,dx$

670. $\int e^{5x}\,dx$

671. $\int 5^x e^x\,dx$

672. $\int (1+e^x)^2\,dx$

673. $\int (2^x-3^x)^2\,dx$

674. $\int (2^x e^x+\ln 2)\,dx$

675. $\int \sin\alpha\,dx$ ($\alpha=$const)

676. $\int (\cos x-3\sin x)\,dx$

677. $\int \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)dx$

678. $\int 2\cos^2\dfrac{x}{2}\,dx$

679. $\int \left(2\sin^2\dfrac{x}{2}-\sin^2 2\right)dx$

680. $\int \dfrac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$

681. $\int \dfrac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$

682. $\int \dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$

683. $\int \tan^2 x\,dx$

684. $\int \cot^2 x\,dx$

685. $\int (\tan x-\cot x)^2\,dx$

686. $\int (\arcsin x+\arccos x)\,dx$

687. $\int \frac{\arctan x+\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

688. $\frac{2dx}{\sqrt{4-4x^2}}$

689. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$

690. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$

691. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$

692. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

693. $\int (\operatorname{sh} 2-\operatorname{sh} x)\,dx$

694. $\int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx$

695. $\int 2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}\,dx$

696. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$

697. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}$

698. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} 2x-\operatorname{sh}^2 x}$

699. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}$

§ 6.2. MUUTUJATE VAHETUS

Olgu funktsioon f integreeriv piirkonnas X, s. t. olgu tal selles piirkonnas määramata integraal

$$J=\int f(x)\,dx \tag{10}$$

Vaatame kahte võtet, kuidas muutujate vahetusega leida määramata integraali (10).

1. Diferentsiaali märgi alla viimine. Lihtsamatel juhtudel saab integraali (10) teisendada kujule

$$J=\int g[t(x)]\,dt(x), \tag{11}$$

kus

$$t=t(x) \tag{12}$$

on uus integreerimismuutuja, mille suhtes integraal (10) omandab kuju

$$J=\int g(t)\,dt.$$

Kui G on funktsiooni g algfunktsioon, siis võime integraali (10) leida järgmise eeskirja põhjal:

$$J=\int g[t(x)]\,dt(x)=\int g(t)\,dt=G(t)+C=G[t(x)]+C \tag{13}$$

(vt. näide N 6.2.1).

Kui eeskirja (13) kasutamisel on tekkinud teatav vilumus, jäetakse vahepealsed liikmed $\int g(t)\,dt=G(t)+C$ ära, tehes need teisendused mõttes (vt. näide N 6.2.2).

2. Muutujate vahetus. Olgu integraalis (10) integreerimismuutuja x mingi teise muutuja t funktsioon piirkonnas T, s. t.

$$x=x(t), \quad t\in T. \tag{14}$$

T 6.2.1. Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon piirkonnas X ja $x=x(t)$ on diferentseeruv funktsioon piirkonnas T, siis kehtib võrdus

$$\int f(x)\,dx=\int f[x(t)]x'(t)\,dt. \qquad (15)$$

Valemit (15) nimetatakse määramata integraali *muutujate vahetuse valemiks*, muutujat t nimetatakse *uueks integreerimismuutujaks*. Funktsiooni (14) nimetatakse *asenduseks*.

Valem (15) võimaldab antud integraali (10) leidmist taandada ühe teise integraali leidmisele.

Sageli asenduse (14) asemel kasutatakse nn. *pöördasendust*, s.o. tema pöördfunktsiooni

$$t=t(x). \qquad (16)$$

mis võimaldab hõlpsamini leida sobival kujul valemi (15) jaoks vajalikke suurusi (vt. näide N 6.2.11). Samal põhjusel võetakse mõni kord asendus ilmutamata kujul

$$F(t,x)=0 \qquad (17)$$

või viiakse asendus sellisele kujule arvutuste hõlbustamiseks (vt. näide N 6.2.9).

Näited

N 6.2.1. Leida integraal

$$J=\int \cos 2x\,dx$$

diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Lahendus. Jagame ja korrutame integraali arvuga 2, viies selle korrutamisel diferentsiaali märgi alla:

$$J=\frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x).$$

Näeme, et muutujat $t=2x$ võib vaadelda uue integreerimismuutujana. Eeskirja (13) põhjal

$$J=\frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x)=\frac{1}{2}\int \cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

N 6.2.2. Leida integraal

$$J=\int (3x+4)^5\,dx$$

diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Lahendus. Korrutame ja jagame integraali arvuga 3, viies selle korrutamisel diferentsiaali märgi alla:

$$\int (3x+4)^5\,dx=\frac{1}{3}\int (3x+4)^5\,d(3x).$$

Lisame diferentsiaali alla veel arvu 4, millest võrdus ei muutu, sest $d(3x+4)=$ $=d(3x)$. Seega

$$\int (3x+4)^5\,dx=\frac{1}{3}\int (3x+4)^5\,d(3x+4).$$

Näeme, et muutujat $t=3x+4$ võib vaadelda kui uut integreerimismuutujat, mille suhtes meil on integraal $\int t^5\,dt=t^6/6+C$. Seega eeskirja (13) põhjal

$$\int (3x+4)^5\,dx=\frac{1}{3}\int (3x+4)^5\,d(3x+4)=\frac{1}{3}\,\frac{(3x+4)^6}{6}+C.$$

N 6.2.3. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel.

Lahendus. Eeskirja (13) põhjal

$$J=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{d\frac{3x}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$$

N 6.2.4. Leida integraal

$$J=\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Lahendus. Et $x\,dx=d(x^2)/2=d(x^2+1)/2$, siis

$$J=\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

N 6.2.5. Leida integraal

$$J=\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel.

Lahendus. Et $d\ln|x|=\frac{dx}{x}$, siis võime teha järgmised teisendused:

$$\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx=\int \ln|x|\,d\ln|x|.$$

Muutuja $t=\ln|x|$ esineb kui uus integreerimismuutuja, mille suhtes meil on integraal $\int t\,dt=t^2/2+C$. Seega

$$\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx=\int \ln|x|\,d\ln|x|=\frac{\ln^2|x|}{2}+C.$$

N 6.2.6. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3+2\tan x}}$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel.

Lahendus. Et

$$\frac{dx}{\cos^2 x}=d\tan x=\frac{1}{2}\,d(2\tan x)=\frac{1}{2}\,d(3+2\tan x),$$

siis

$$J=\int (3+2\tan x)^{-1/2}\,d(3+2\tan x)=2(3+2\tan x)^{1/2}+C.$$

N 6.2.7. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{\sin 2x}$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel.

Lahendus. Teeme järgmised teisendused

$$\int \frac{dx}{\sin 2x}=\int \frac{dx}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int \frac{d\tan x}{\tan x}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\tan x|+C.$$

N 6.2.8. Leida integraal

$$J=\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$$

diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Lahendus. Et $\cos x\, dx=d\sin x$, siis

$$J=\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}=\int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x}=\arctan \sin x+C.$$

N 6.2.9. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$$

muutuja vahetusega

$$t=\sqrt{e^x-1}.$$

Lahendus. Avaldame diferentsiaali dx muutuja t kaudu. Selleks võtame muutuja vahetuse ilmutamata kujul $t^2=e^x-1$. Diferentseerides viimase avaldise mõlemaid pooli, saame $2t\,dt=e^x\,dx$, kust

$$dx=\frac{2t\,dt}{e^x}=\frac{2t\,dt}{t^2+1}.$$

Seega

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int \frac{2t\,dt}{t(t^2+1)}=2\int \frac{dt}{1+t^2}=2\arctan t+C.$$

Minnes tagasi vanale muutujale x saame vastuseks

$$J=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

N 6.2.10. Leida integraal

$$J=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

muutuja vahetusega $x=1/t$.

Lahendus. Saame $dx=-dt/t^2$ ja

$$J=-\int \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\dfrac{1-t^2}{t^2}}}=-\int \frac{|t|\,dt}{t\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\operatorname{sgn} t\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\operatorname{sgn} t \arcsin t+C=-\arcsin|t|+C=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

N 6.2.11. Leida integraal

$$J=\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

muutuja vahetusega

$$t=x+\frac{1}{x}.$$

L a h e n d u s. Saame

$$dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^2-1}{x^2}\,dx$$

ehk $(x^2-1)\,dx=x^2\,dt$. Seega

$$J=\int\frac{x^2\,dt}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{x\,dt}{\left(x+\frac{1}{x}\right)|x|\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\operatorname{sgn}x\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}=\operatorname{sgn}t\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}},$$

sest $\operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}t$.

Saadud integraalis teeme veel kord muutuja vahetuse

$$t=\frac{1}{z},$$

siis $dt=-dz/z^2$, $\operatorname{sgn}t=\operatorname{sgn}z$, ja me saame:

$$J=-\operatorname{sgn}z\int\frac{dz}{z^2t\sqrt{\frac{1-2z^2}{z^2}}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}}.$$

Saadud integraali leiame nüüd diferentsiaali märgi alla viimise võttega

$$J=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-(\sqrt{2}z)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\,z)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\,z)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\sqrt{2}\,z+C.$$

Läheme vanale muutujale tagasi:

$$J=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{t}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C.$$

N 6.2.12. Leida integraal

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

L a h e n d u s. Integraalialuse funktsiooni määramispiirkond on $X=(-1,1)$. Teeme muutuja vahetuse $x=\sin t$. Et oleks $x\in X$, võtame

$$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Siis $dx = \cos t\, dt$, kus $\cos t > 0$. Seega $|\cos t| = \cos t$ ja me saame:

$$J = \int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{\cos^6 t}} = \int \frac{\cos t\, dt}{|\cos^3 t|} = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos^3 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Kui näiteks võtta $t \in (\pi/2, 3\pi/2)$, siis ka $x \in X$, kuid sel korral on $\cos t < 0$ ning $|\cos t| = -\cos t$ ja $\cos t = -(1-x^2)^{1/2}$. Järelikult siis on

$$J = \int \frac{\cos t\, dt}{|\cos^3 t|} = -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\tan t + C = \frac{\sin t}{-\cos t} + C =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Ülesanded

Leida diferentsiaali märgi alla viimise võttega järgmised integraalid (vt. näited N 6.2.1, N 6.2.2. ja N 6.2.3).

700. $\int \sin 2x\, dx$

701. $\int \frac{4\, dx}{\cos^2 4x}$

702. $\int (x-3)^5\, dx$

703. $\int (3x+5)^4\, dx$

704. $\int \frac{dx}{x+1}$

705. $\int \frac{dx}{2x-7}$

706. $\int (4-x)^6\, dx$

707. $\int \sqrt[3]{7-2x}\, dx$

708. $\int \sin(x-4)\, dx$

709. $\int \cos(1-2x)\, dx$

710. $\int e^{-2x+3}\, dx$

711. $\int \frac{4\, dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

712. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

713. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

714. $\int \frac{5\, dx}{1+(5x+1)^2}$

Leida diferentsiaali märgi alla viimise võttega järgmised integraalid (vt. näited N 6.2.4 ja N 6.2.5).

715. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

716. $\int \frac{x^2\, dx}{x^3+1}$

717. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^4+1}}$

718. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$

719. $\int \frac{(2x-5)\,dx}{x^2-5x+2}$

720. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+\ln 3}$

721. $\int e^x \cos e^x\,dx$

722. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

723. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{1+x^2}$

724. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

725. $\int \frac{x^2\,dx}{x+1}$

726. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

727. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

728. $\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$

729. $\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\sqrt{7+\operatorname{ch} x}}$

730. $\int \frac{(1+\operatorname{th} x)^3\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$

731. $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$

Leida järgmised integraalid diferentsiaali märgi alla viimise võttega (vt. näited N 6.2.6, N 6.2.7 ja N 6.2.8).

732. $\int \frac{\tan x\,dx}{\cos^2 x}$

733. $\int \frac{dx}{(1+\cot x)\sin^2 x}$

734. $\int \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

735. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

736. $\int 2\sin x\cos x\,dx$

737. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$

738. $\int \tan x\,dx$

739. $\int \cot x\,dx$

740. $\int \cos^2 x \sin 2x\,dx$

741. $\int \frac{\arctan^3 x\,dx}{1+x^2}$

742. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

743. $\int \sin^2 x\,dx$

744. $\int \cos^2 x\,dx$

745. $\int \sin^3 x\,dx$

746. $\int \cos^3 x\,dx$

747. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

748. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

749. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x\cos x}$

750. $\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\cos x}\,dx$

751. $\int (\tan^2 x+\tan^4 x)\,dx$

752. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

753. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

754. $\int \tan^3 x\, dx$

755. $\int \tan^4 x\, dx$

756. $\int (\sin x+\cos x)^2\, dx$

Leida järgmised integraalid märgitud muutuja vahetusega (vt. näited N 6.2.9, N 6.2.10 ja N 6.2.11).

757. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$, $x=t-1$

758. $\int x\sqrt{1-x}\, dx$, $t=\sqrt{1-x}$

759. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\, dx$, $t=\sqrt{1-x^2}$

760. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, $x=\sin^2 t$

761. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x=\frac{1}{\cos t}$

762. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$, $t=x-\frac{1}{x}$

Sobiva muutuja vahetusega leida järgmised integraalid (vt. näited N 6.2.10, N 6.2.11 ja N 6.2.12).

763. $\int \frac{\exp\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$

764. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x-1}}$

765. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

766. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\, dx}{x}$

767. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

768. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

769. $\int \frac{3\sqrt{x}\, dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$

770. $\int \frac{\ln\tan x\, dx}{\sin x\cos x}$

771. $\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}\, dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

772. $\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}\, dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

773. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)}\, dx$

774. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

§ 6.3. OSITI INTEGREERIMINE

Vaatleme integraali

$$J=\int f(x)\, dx$$

piirkonnas X. Jaotame integraalialuse avaldise kaheks teguriks $u=u(x)$ ja $dv=v'(x)\,dx$, s. o. vaatleme integraali kujul

$$J=\int u\, dv. \tag{18}$$

T 6.3.1. *Kui piirkonnas X funktsioonid $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on diferentseeruvad ning on olemas integraal $\int v\,du$, siis selles piirkonnas X on olemas ka integraal* (18) *ja kehtib võrdus*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{19}$$

Valemit (19) nimetatakse määramata integraali ositi integreerimise valemiks. Ta võimaldab antud integraali (18) leidmist taandada teise integraali $\int v\,du$ leidmisele.

Valemi (19) rakendamisel toimime järgmiselt. Kirjutame välja integraali (18) tegurid u ja dv. Neist esimest diferentseerime ja teist integreerime, s.o. leiame suurused $du=u'(x)dx$ ja $v=\int dv$. Seejärel teisendame integraali (18) valemi (19) kohaselt uueks integraaliks $\int v\,du$. Funktsioon v võetakse tavaliselt ilma integreerimiskonstandita. Kuid mõnede integraalide korral on siiski otstarbekohane lisada funktsioonile v teatav konstant, sest see lihtsustab saadud integraali $\int v\,du$ leidmist (vt. näide N 6.3.3). Integraali $\int v\,du$ leidmisel võime jälle kasutada valemit (19).

Kui integraalis

$$\int P_n(x) f(x)\,dx$$

$P_n(x)$ on n-astme polünoom ja $f(x)$ on üks funktsioonidest $a^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\operatorname{sh}\alpha x$ või $\operatorname{ch}\alpha x$, siis selle integraali leidmisel tuleb valemi (19) rakendamisel võtta

$$u=P_n(x), \quad dv=f(x)\,dx.$$

(vt. näide N 6.3.1).

Kui integraalis

$$\int R(x) g(x)\,dx$$

$R(x)$ on ratsionaalne funktsioon ja $g(x)$ on üks funktsioonidest $\ln P_n(x)$, $\arctan\alpha x$, $\operatorname{arccot}\alpha x$, $\arcsin\alpha x$ või $\arccos\alpha x$, tuleb valemi (19) rakendamisel võtta

$$u=g(x), \quad dv=R(x)\,dx,$$

(vt. näide N 6.3.2).

Paljude integraalide korral valemi (19) ühe- või kahekordsel rakendamisel saame lähteintegraali tagasi. Saadud võrdus kujutab siis võrrandit otsitava integraali suhtes, millest ta avaldame (vt. näide N 6.3.2).

Kui valemit (19) tuleb korduvalt rakendada, siis on mõni kord otstarbekohane kasutada järgmist üldistatud ositi integreerimise valemit:

$$\int uv\,dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - u'''v_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v_n + \\ + (-1)^n \int u^{(n)}v_n\,dx, \tag{20}$$

kus

$$v_1=\int v\,dx,\quad v_2=\int v_1\,dx,\ \ldots,\quad v_n=\int v_{n-1}\,dx.$$

(kõik integraalid võtame ilma integreerimiskonstantideta).

Valemis (20) eeldatakse, et seal kõik tuletised ja integraalid on olemas.

Kui $n=1$, siis valem (20) annab ositi integreerimise valemi (19) teisel kujul:

$$\int uv\,dx=uv_1-\int u'v_1\,dx, \tag{21}$$

mida nimetatakse ka korrutise uv integreerimise valemiks.

Kui $n=2$, siis valemist (20) saame valemi kahekordseks ositi integreerimiseks järgmisel kujul:

$$\int uv\,dx=uv_1-u'v_2+\int u''v_2\,dx. \tag{22}$$

Kui funktsioon $u=u(x)$ on selline, et vaadeldavas piirkonnas on $u^{(n)}(x)=0$, siis valemis (20) paremal poolel olev integraal on konstantne ja valem (20) annab lõpliku tulemuse

$$\int uv\,dx=uv_1-u'v_2+u''v_3-\ldots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v_n+C. \tag{23}$$

Tekib küsimus, kumb on integraalide leidmisel otstarbekohasem, kas rakendada valemit (19) kaks korda järjest või kasutada juba valmis valemit (22). Siin peab silmas pidama seda, et sageli valemi (19) kasutamisel saadud uue integraali $\int v\,du$ alune avaldis lihtsustub taandamiste tõttu. Sel korral on teist korda ositi integreerimisel otstarbekohasem kasutada uuesti valemit (19). Valemi (22) ja üldise valemi (20) korral sellist vahepealsete tulemuste lihtsustamise võimalust ei ole. Seepärast valemit (20) tuleb kasutada siis, kui funktsioonid u ja v on sellised, et korrutised $u^{(n)}v_n$ taandamistega ei lihtsustu (vt. näide N 6.3.4).

Näited

N 6.3.1. Leida integraal

$$J=\int xe^x\,dx.$$

Lahendus. Viime integraali kujule (18), võttes

$$u=x,\quad dv=e^x\,dx.$$

Siis

$$du=dx,\quad v=e^x$$

ja valemi (19) põhjal

$$J=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$$

N 6.3.2. Leida integraal

$$J=\int x\ln x\,dx.$$

Lahendus. Võtame

$$u=\ln x,\quad dv=x\,dx.$$

Saame:

$$du=\frac{1}{x}\,dx,\quad v=\frac{x^2}{2}$$

ja valemi (19) põhjal

$$J=\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

Antud integraali võib leida ka järgmisel viisil. Võttes

$$u=x\ln x,\quad dv=dx,$$

saame:

$$du=(\ln x+1)\,dx,\quad v=x$$

ja valemi (19) põhjal

$$J=x^2\ln x-J-\int x\,dx.$$

Saime võrrandi integraali J suhtes. Avaldame sellest võrrandist J:

$$J=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

N 6.3.3. Leida integraal

$$J=\int x\arctan x\,dx.$$

Lahendus. Märkides $u=\arctan x$, $dv=x\,dx$, saame:

$$du=\frac{dx}{1+x^2},\quad v=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

Paneme tähele, et selles ülesandes me lisasime leitud funktsioonile v konstandi $C=1/2$ sest see lihtsustab integraali edasist leidmise käiku. Valemi (19) põhjal saame nüüd kohe:

$$J=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int dx=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+C.$$

N 6.3.4. Leida integraal

$$J=\int x^2e^{-x}\,dx.$$

Lahendus. Võttes $u=x^2$ näeme, et $u'=2x$, $u''=2$ ja $u'''=0$. Et kergesti on leitavad ka suurused $v=e^{-x}$, $v_1=-e^{-x}$, $v_2=e^{-x}$ ja $v_3=-e^{-x}$, siis saame kasutada valemit (23), võttes $n=3$, mis kohe annab lõpliku tulemuse $J=uv_1-u'v_2+u''v_3+C=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=-e^{-x}(x^2+2x+2)+C.$

Ülesanded

Leida järgmised integraalid ositi integreerimise teel (vt. näide N 6.3.1).

775. $\int x\sin x\,dx$
776. $\int x\cos x\,dx$
777. $\int xe^{-x}\,dx$
778. $\int xa^x\,dx$
779. $\int \ln x\,dx$
780. $\int \ln(x^2+1)\,dx$
781. $\int x\tan^2 x\,dx$

Leida järgmised integraalid, kasutades üldistatud ositi integreerimise valemit (23) (vt. näide N 6.3.4).

782. $\int x^2\sin x\,dx$
783. $\int x^2e^{-2x}\,dx$
784. $\int x^3\operatorname{sh} x\,dx$
785. $\int x^4\cos x\,dx$

Leida järgmised integraalid, määrates nad kahekordsel ositi integreerimisel saadud võrrandeist (vt. näide N 6.3.2).

786. $\int e^x\sin x\,dx$
787. $\int e^x\cos x\,dx$
788. $\int \sin\ln x\,dx$
789. $\int \cos\ln x\,dx$
790. $\int \operatorname{ch} x\sin x\,dx$

Leida järgmised integraalid.

791. $\int x^2 \ln x \, dx$

792. $\int \frac{x e^x \, dx}{(1+x)^2}$

793. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

794. $\int x^2 \ln (x-1) \, dx$

795. $\int x \cos^2 x \, dx$

796. $\int e^{\sin x} \sin 2x \, dx$

797. $\int \arctan x \, dx$

798. $\int \arcsin x \, dx$

799. $\int x \arctan^2 x \, dx$

800. $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$

801. $\int x \sin \ln x \, dx$

802. $\int x^2 \cos \ln x \, dx$

803. $\int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \, dx$

804. Leida viga järgmises «tõestuses». Et $1=e^{-x}e^x$, siis integraali $\int dx$ on võimalik integreerida ositi, võttes $u=e^{-x}$ ja $dv=e^x dx$. Siis $du=-e^{-x} dx$ ja $v=e^x$ ning valemi (19) põhjal

$$\int dx=e^{-x}e^x+\int e^{-x}e^x \, dx$$

ehk

$$\int dx=1+\int dx.$$

Pärast ühesuguste integraalide koondamist saame $0=1$. Lisades saadud võrduse mõlemale poolele arvu 1, näeme, et ka $1=2$. Jätkates samal viisil saame, et kõik naturaalarvud on võrdsed nulliga.

§ 6.4. RATSIONAALSETE FUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE

Olgu antud ratsionaalne funktsioon

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{24}$$

kus $f(x)$ ja $g(x)$ on reaalsete kordajatega polünoomid.

Kui lugeja $f(x)$ aste on väiksem nimetaja $g(x)$ astmest, siis ratsionaalset funktsiooni (24) nimetatakse *lihtmurruks*, vastasel korral aga *liigmurruks*.

Kui (24) kujutab liigmurdu, siis võime polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $g(x)$ eraldada täisosa polünoomi $q(x)$, nii et kehtib

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{f_1(x)}{g(x)},$$

kus $f_1(x)/g(x)$ on juba lihtmurd. Siis

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx=\int q(x) \, dx+\int \frac{f_1(x)}{g(x)} dx,$$

kus paremal esimene integraal on polünoomi integraal ja on leitav vahetu integreerimise teel. Sellega taandub ratsionaalse funktsiooni integreerimine lihtmurru integreerimisele. Seepärast eeldame järgnevalt, et ratsionaalne funktsioon (24) on lihtmurd.

Lihtmurdu (24) on lihtsam integreerida kui lahutada ta ratsionaalsete funktsioonide nn. osamurdude summaks. Esitame selleks eeskirja.

M 6.4.1. Kui polünoom $g(x)$ on lahutatud reaalsete tegurite korrutiseks

$$g(x)=a_0(x-a)^k(x-b)^l\ldots(x^2+px+q)^n(x^2+rx+s)^m\ldots, \tag{25}$$

kus $a, b, \ldots$ on polünoomi erinevad nullkohad, mille järgud on vastavalt $k, l, \ldots$, ja avaldised x^2+px+q, $x^2+rx+s, \ldots$ on suuremad nullist iga x korral, siis leiduvad üheselt määratud reaalarvud $A_j, B_j\ldots$, nii et kehtib võrdus

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\\
&+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \qquad (26)\\
&+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{P_nx+Q_n}{(x^2+px+q)^n}+\\
&+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_mx+S_m}{(x^2+rx+s)^m}+\ldots\end{aligned}$$

Valemit (26) nimetatakse lihtmurru (24) osamurdudeks lahutamise valemiks. Tundmatud kordajad valemis (26) leitakse määramata kordajate meetodiga (vt. järgnevad näited). Valemi (26) abil taandub lihtmurru (24) integreerimine järgmist nelja tüüpi integraalide leidmisele:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x-a},\quad \mathrm{II}=\int\frac{dx}{(x-a)^k},\quad (k>1),$$

$$\mathrm{III}=\int\frac{Px+Q}{x^2+px+q}dx,\quad \mathrm{IV}=\int\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}dx\quad (n>1).$$

Integraalid I ja II on leitavad vahetu integreerimise teel.

Integraali III leidmiseks tehakse muutujate vahetus $x=$ $=t-p/2$;

$$\mathrm{III}=P\int\frac{tdt}{t^2+b^2}+\left(Q-\frac{Pp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+b^2}\quad\left(b^2=q-\frac{p^2}{4}\right),$$

kus mõlemad integraalid on leitavad diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Integraal IV leitakse ka muutujate vahetusega $x=t-p/2$;

$$\mathrm{IV}=P\int\frac{t\,dt}{(t^2+b^2)^n}+\left(Q-\frac{Pp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+b^2)^n},$$

kus esimene integraal on leitav diferentsiaali märgi alla viimise võttega, kuna teine integraal

$$J_n=\int\frac{dt}{(t^2+b^2)^n}\tag{27}$$

leitakse järgmise rekurrentse valemiga

$$J_n=\frac{t}{2b^2(n-1)(t^2+b^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2b^2(n-1)}J_{n-1},\tag{28}$$

seda korduvalt rakendades jõuame integraalini J_1, mis on diferentsiaali märgi alla viimise võttega leitav.

Nagu näeme, on ratsionaalse funktsiooni integreerimine kõige komplitseeritum, kui nimetajal on kordsed tegurid. Niisugustel juhtudel on otstarbekohane rakendada järgmist meetodit.

M 6.4.2. (Ostrogradski meetod). Kui polünoom (25) on esitatud kujul

$$g(x)=g_1(x)g_2(x),$$

kus $g_2(x)$ on polünoomi $g(x)$ kõigi erinevate tegurite korrutis (võetuna esimeses astmes) ja $g_1(x)$ on kõigi ülejäänud tegurite korrutis, siis

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\int\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\,dx,\tag{29}$$

kus $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on üheselt määratavate kordajatega polünoomid, mille astmed on ühe võrra madalamad vastavate nimetajate $g_1(x)$ ja $g_2(x)$ astmetest.

Polünoomide $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ kordajate määramiseks diferentseerime võrduse (28) mõlemat poolt muutuja x järgi;

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g_1(x)f_1'(x)-f_1(x)g_1'(x)}{g_1^2(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.\tag{30}$$

Tundmatud kordajad leitakse määramata kordajate meetodiga.

Et lihtmurru $f_2(x)/g_2(x)$ integraali leidmiseks tuleb lahutada osamurdude summaks, siis ei ole mõtet polünoomi $f_2(x)$ kordajaid otsida, vaid kohe integraali all valemis (29) või vähemalt võrduses (30) esitada lihtmurd $f_2(x)/g_2(x)$ osamurdude summana valemi (26) järgi ja alles siis asuda kordajate määramisele. Nii saame korraga määrata kõik need kordajad, mida vajame vaadeldava ratsionaalse funktsiooni integreerimiseks (vt. näide N 6.4.4).

Teatav üldine asendus on antud veel ülesandes 830.

Näited

N 6.4.1. Leida integraal

$$J=\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$$

L a h e n d u s. Et integraalialune funktsioon on liigmurd, siis eraldame selle täisosa:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Saadud lihtmurru lahutame nüüd osamurdude summaks. Selleks esitame kõigepealt nimetaja reaalsete tegurite korrutisena:

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2).$$

Näeme, et kõik tegurid on ühekordsed. Valemi (26) põhjal

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}.$$

Korrutades viimase võrduse mõlemat poolt nimetajaga $x(x+2)(x-2)$, saame

$$4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x-2)+Cx(x+2).$$

Võttes viimases võrduses $x=0$, $x=2$, $x=-2$, leiame kordajad A, B ja C. Arvutused võime paigutada järgmiselt.

$$\begin{array}{l|l} x=0 & -8=A(-4)\Rightarrow A=2 \\ x=2 & 40=C\cdot 2\cdot 4\Rightarrow C=5 \\ x=-2 & -24=B(-2)(-4)\Rightarrow B=-3. \end{array}$$

Seega

$$J=\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+C.$$

N 6.4.2. Leida integraal

$$J=\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(2x+1)}.$$

L a h e n d u s. Integraali all on lihtmurd, mille nimetaja on juba lahutatud teguriteks. Seepärast valemi (26) põhjal saame kohe:

$$\frac{x}{(x+1)^2(2x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{2x+1}.$$

Nimetajasse jätsime lihtsuse pärast teguri kujul $2x+1$, mida võib teha (see mõjustab praegu vaid otsitava kordaja C suurust). Korrutame viimase võrduse mõlemat poolt nimetajaga $(x+1)^2(2x+1)$;

$$x=A(x+1)(2x+1)+B(2x+1)+C(x+1)^2.$$

Võttes viimases võrduses $x=-1$ ja $x=-1/2$, saame kordajad $B=1$ ja $C=-2$. Kordaja A määramiseks võrdustame vasakul ja paremal olevad x^2 kordajad. Võrduse vasakul poolel on see kordaja null, aga paremal poolel on see kordaja $2A+C$, seega $0=2A+C$, kust $2A=-C=2$ ja $A=1$. Need arvutused märgime nagu eelmises näiteski üles järgmiselt:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & -1=-B \Rightarrow B=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}=\dfrac{C}{4} \Rightarrow C=-2 \\ x^2 \text{ kordaja} & 0=2A+C \Rightarrow 2A=-C=2,\ A=1 \end{array}$$

Seega

$$J=\int \frac{dx}{x+1}+\int \frac{dx}{(x+1)^2}-\int \frac{2\,dx}{2x+1}=$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\ln|2x+1|+C.$$

N 6.4.3. Leida integraal

$$J=\int \frac{x+2}{x(x^2+1)^2}\,dx.$$

L a h e n d u s. Integraali all on lihtmurd ja nimetaja on lahutatud reaalsete tegurite korrutiseks. Valemi (26) põhjal

$$\frac{x+2}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

kust

$$x+2=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x.$$

Kordajate hõlpsamaks määramiseks on selles ülesandes otstarbekohane kasutada ka imaginaarset väärtust $x=i$ ja asjaolu, et kaks kompleksarvu on võrdsed siis ja ainult siis, kui nende reaal- ja imaginaarosad on vastavalt võrdsed. Arvutused teeme järgmise skeemi kohaselt:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 2=A \Rightarrow A=2 \\ x=i & i+2=(Di+E)i \Rightarrow i+2=Ei-D \Rightarrow E=1,\quad D=-2 \\ x^4 \text{ kordaja} & 0=A+B \Rightarrow B=-A \Rightarrow B=-2 \\ x^3 \text{ kordaja} & 0=C \Rightarrow C=0 \end{array}$$

Seega

$$J=\int \frac{2dx}{x}-\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int \frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=$$

$$=2\ln|x|-\ln(x^2+1)-\int (x^2+1)^{-2}\,d(x^2+1)+\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=2\ln|x|-\ln(x^2+1)+(x^2+1)^{-1}+\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Viimase integraali leidmiseks kasutame rekurrentset valemit (28), võttes $n=2$ ja $b^2=1$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

Seega kokku oleme saanud:

$$J=2\ln|x|-\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

N 6.4.4. Ostrogradski meetodiga M 6.4.2 leida integraal

$$J=\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}.$$

L a h e n d u s. Et $g_2(x)=x(x^2+1)$ ja $g_1(x)=x^2+1$, siis valemi (29) järgi saame:

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left[\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\right]dx,$$

kus paremal integraali märgi all esitasime ratsionaalse funktsiooni kohe tema osamurdude summana.

Kordajate määramiseks diferentseerime viimast võrdust muutuja x järgi:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)A-(Ax+B)2x}{(x^2+1)^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+1},$$

kust saame kordajate määramiseks võrduse

$$1=(x^2+1)Ax-(Ax+B)2x^2+C(x^2+1)^2+(Dx+E)x(x^2+1).$$

Kordajad leiame järgmise skeemi kohaselt:

$x=0$	$1=C\Rightarrow C=1$
$x=i$	$1=-(Ai+B)(-2)\Rightarrow 1=2Ai+2B\Rightarrow A=0,\quad B=\frac{1}{2}$
x^4 kordaja	$0=C+D\Rightarrow D=-1$
x^3 kordaja	$0=A-2A+E\Rightarrow E=0.$

Seega

$$J=\frac{1}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Kordajate leidmiseks võib kasutada ka järgmist võtet. Leidnud nagu ülalpool väärtuste $x=0$ ja $x=i$ abil kordajad $A=0$, $B=1/2$ ja $C=1$, paigutame nad lähtevõrdusesse. Siis saame lihtsama võrduse:

$$1=x^4+x^2+1+Dx^4+Ex^3+Dx^2+Ex,$$

kust, võrdustades vastavad kordajad, saame $D=-1$ ja $E=0.$

Ülesanded

Kordajaid leidmata esitada osamurdude summana valemi (26) järgi järgmised ratsionaalsed funktsioonid, kasutades tundmatute kordajate märkimiseks tähti $A, B, C, \ldots$.

805. $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ **806.** $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$

807. $\dfrac{x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}$

809. $\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)(x^2-2x-3)}$

808. $\dfrac{x^2+1}{x(x+2)^2(x^2+x+1)^2}$

810. $\dfrac{x^3(x+1)+1}{(x-1)(x+2)}$

Leida järgmised integraalid (vt. näited N 6.4.1 ja N 6.4.2).

811. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

814. $\displaystyle\int\frac{(x+2)^2\,dx}{(x-1)^2x}$

812. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$

815. $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

813. $\displaystyle\int\frac{x^3+2}{x^2+x-2}\,dx$

816. $\displaystyle\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2(x+1)^2}$

Leida järgmised integraalid J (vt. näide N 6.4.3).

817. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$

821. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$

818. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

822. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

819. $\displaystyle\int\frac{(x+1)\,dx}{x(x^2+1)^2}$

823. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$

820. $\displaystyle\int\frac{2\,dx}{x(x^2+2x+2)}$

Kasutades Ostrogradski meetodit M 6.4.2, leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.4.4).

824. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

826. $\displaystyle\int\frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}$

825. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$

827. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$

Leida tingimused, mille korral järgmised integraalid kujutavad ratsionaalseid funktsioone.

828. $\displaystyle\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$

829. $\displaystyle\int\frac{ax^2+2bx+c}{(px^2+2qx+r)^2}\,dx$

830. Näidata, et integraal

$$J=\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n},$$

kus m ja n on naturaalarvud, on leitav asendusega

$$t=\frac{x+a}{x+b}=1+\frac{a-b}{x+b}.$$

Leida järgmised integraalid, kasutades asendust ülesandest 830.

831. $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+4)^5}$

832. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$

833. $\int \frac{dx}{(x^2-5x+6)^4}$

§ 6.5. TRIGONOMEETRILISTE AVALDISTE INTEGREERIMINE

Üheks põhiliseks meetodiks trigonomeetriliste avaldiste integreerimisel on integraali *ratsionaliseerimine*, s.t. integraali teisendamine ratsionaalse funktsiooni integraaliks sobiva muutujate vahetusega.

Olgu järgnevas $R(x,y)$ *ratsionaalne avaldis* muutujatest x ja y, s.o. avaldis, mis saadakse muutujatest x ja y aritmeetiliste tehete abil. Nimetame *ratsionaalseks trigonomeetriliseks avaldiseks* avaldist $R(\sin x, \cos x)$.

Integraali

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx \tag{31}$$

saab $x \in (-\pi, \pi)$ korral alati ratsionaliseerida asendusega

$$t = \tan\frac{x}{2}. \tag{32}$$

Sel korral

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{33}$$

Et asendus (32) viib sageli komplitseeritud arvutustele, siis on soovitatav võimaluse korral kasutada ka järgmisi asendusi.

1. Kui R on paaritu $\sin x$ suhtes, s.t. kui

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

siis teha asendus

$$\cos x = t. \tag{34}$$

2. Kui R on paaritu $\cos x$ suhtes, s.t. kui

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

siis teha asendus

$$\sin x = t. \tag{35}$$

3. Kui R on paaris $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes. s.t. kui

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

siis teha asendus

$$\tan x = t \tag{36}$$

või

$$\cot x = t. \tag{37}$$

Integraali

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx \tag{38}$$

saab ratsionaliseerida asendusega

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2}. \tag{39}$$

Sel korral

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}. \tag{40}$$

Integraalide

$$\int \sin mx \sin nx\,dx, \quad \int \cos mx \cos nx\,dx, \quad \int \sin mx \cos nx\,dx$$

leidmisel kasutatakse valemeid

$$\begin{aligned}
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]
\end{aligned} \tag{41}$$

Üldisi valemeid on antud veel ülesandeis 848 ja 849.

Näited

N 6.5.1. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}.$$

Lahendus. See integraal on kujuga (31) ja seda saab ratsionaliseerida asendusega (32). Valemite (33) põhjal

$$J = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5 - 4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{2-\tan\frac{x}{2}} + C.$$

N 6.5.2. Leida integraal

$$J = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx.$$

L a h e n d u s. Integraal on valemi (31) tüüpi ja integraalialune funktsioon on paaritu $\sin x$ suhtes. Seepärast teeme asenduse (34);

$$\cos x = t, \quad -\sin x\, dx = dt, \quad dx = -\frac{dt}{\sin x}.$$

Seega

$$J = -\int \frac{t^2\, dt}{\sin^2 x} = -\int \frac{t^2\, dt}{1-t^2} = \int \frac{(t^2-1+1)\, dt}{t^2-1} =$$

$$= t + \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1| + C =$$

$$= \cos x + \ln \tan \frac{x}{2} + C.$$

N 6.5.3. Leida integraal

$$J = \int \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{1+\sin^2 \frac{x}{2}}\, dx.$$

L a h e n d u s. Integraalialune funktsioon on paaritu $\cos \frac{x}{2}$ suhtes. Seepärast teeme asenduse

$$\sin \frac{x}{2} = t,$$

kust

$$dx = \frac{2\, dt}{\cos \frac{x}{2}}.$$

Seega

$$J = \int \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}\, dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = 2 \int \frac{-1-t^2+2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= -2 \int \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt = -2t + 4 \arctan t + C =$$

$$= -2 \sin \frac{x}{2} + 4 \arctan \sin \frac{x}{2} + C.$$

N 6.5.4. Leida integraal

$$J = \int \cos x \cos^2 3x\, dx.$$

L a h e n d u s. Valemite (41) põhjal saame:

$$J = \frac{1}{2} \int \cos x (1+\cos 6x)\, dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \int \cos x \cos 6x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4} \int (\cos 5x + \cos 7x)\, dx = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28} + C.$$

Ülesanded

Leida järgmised integraalid (vt. näited N 6.5.1., N 6.5.2. ja N 6.5.3).

834. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

835. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

836. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

837. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

838. $\int \cos^3 2x \sin 2x\, dx$

839. $\int \frac{dx}{\sin x}$

840. $\int \frac{dx}{\cos x}$

841. $\int \frac{\sin^4 x\, dx}{\cos^2 x}$

Leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.5.4).

842. $\int \sin 2x \sin 3x\, dx$

843. $\int \cos x \sin 3x\, dx$

844. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}\, dx$

845. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$

846. $\int \sin x \sin^2 3x\, dx$

847. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx$

848. Tõestada, et juhul $a^2+b^2\neq 0$ kehtib valem

$$\frac{p\cos x+q\sin x}{u}=A+\frac{Bu'}{u},$$

kus

$$u=a\cos x+b\sin x,$$

$$A=\frac{ap+bq}{a^2+b^2},\qquad B=\frac{bp-aq}{a^2+b^2}.$$

849. Tõestada, et juhul $a^2+b^2\neq 0$ kehtib valem

$$\frac{p\cos x+q\sin x+r}{u}=A+\frac{Bu'}{u}+\frac{C}{u},$$

kus

$$u=a\cos x+b\sin x+c,$$

$$A=\frac{ap+bq}{a^2+b^2},\qquad B=\frac{bp-aq}{a^2+b^2},\qquad C=r-cA.$$

Kasutades valemeid ülesandeist 848 ja 849, leida järgmised integraalid.

850. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\, dx$

851. $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{3\cos x+2\sin x}\, dx$

852. $\int \frac{dx}{3+5\tan x}$

853. $\int \frac{2-\sin x}{\cos x-1}\, dx$

854. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$

855. $\int \frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\, dx$

§ 6.6. MITTERATSIONAALSETE FUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE

Mitteratsionaalseid funktsioone integreeritakse põhiliselt integraali ratsionaliseerimise meetodil.

Olgu $R(x, y)$ ratsionaalne avaldis muutujatest x ja y.

1. Integraali

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx \tag{42}$$

saab ratsionaliseerida muutujate vahetusega

$$t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} \quad \text{või} \quad \frac{1}{t}=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}. \tag{43}$$

2. Integraali

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \tag{44}$$

saab ratsionaliseerida järgmiste Euleri asendustega.

a. Juhul $a>0$ tehakse Euleri esimene asendus

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\, x, \tag{45}$$

kus pluss- või miinusmärk valitakse sobivalt ülesandele.

b. Juhul $a<0$, kui ruutpolünoom lahutub reaalseteks teguriteks

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),$$

kus $\alpha_1\neq\alpha_2$, tehakse Euleri teine asendus

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha), \tag{46}$$

kus $\alpha=\alpha_1$ või $\alpha=\alpha_2$.

c. Juhul $c\geqslant 0$ tehakse Euleri kolmas asendus

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}, \tag{47}$$

kus pluss- või miinusmärk valitakse sobivalt ülesandele.

Euleri asendused viivad küll alati sihile, kuid sageli kaugeltki mitte kõige lühemat teed mööda. See ilmneb kohe, kui püüda lahendada Euleri asenduste abil näiteks ülesannet 765. Seepärast vaatleme veel teisi asendusi.

Kui $a>0$ ja $D=b^2-4ac<0$ (>0), siis asendusega

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-D}}{2a}t \quad \left(x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}t\right) \tag{48}$$

integraal (44) teisendub kujule

$$\int R(t, \sqrt{t^2+1})\, dt \qquad \left(\int R(t, \sqrt{t^2-1})\, dt\right), \tag{49}$$

mis asendusega $t=\operatorname{sh} u$ $(t=\operatorname{ch} u)$ muutub ratsionaalse trigonomeetrilise avaldise integraaliks.

Kui $a<0$ ja $D=b^2-4ac>0$, siis asendusega

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}t \tag{50}$$

integraal (44) teisendub kujule

$$\int R(t, \sqrt{1-t^2})\,dt, \tag{51}$$

mis asendusega $t=\sin u$ muutub ratsionaalse trigonomeetrilise avaldise integraaliks.

Teatav üldine valem on antud veel ülesandes 867.

3. Diferentsiaalbinoomi integraali

$$\int x^{\alpha}(ax^{\beta}+b)^{\gamma}\,dx \tag{52}$$

saab ratsionaliseerida ainult järgmisel kolmel juhul:

a) kui γ on täisarv, asendusega

$$\sqrt[n]{x}=t, \tag{53}$$

kus n on arvude α ja β ühine nimetaja;

b) kui $(\alpha+1)/\beta$ on täisarv, asendusega

$$ax^{\beta}+b=t^n, \tag{54}$$

kus n on arvu γ nimetaja;

c) kui $(\alpha+1)/\beta+\gamma$ on täisarv, asendusega

$$\frac{ax^{\beta}+b}{x^{\beta}}=a+bx^{-\beta}=t^n, \tag{55}$$

kus n on arvu γ nimetaja.

Muudel juhtudel pole integraal (52) elementaarfunktsioon.

Näited

N 6.6.1. Leida integraal

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

ratsionaliseerimise teel.

Lahendus. Integraal on kujuga (42), seepärast teeme muutujate vahetuse (43), s. o.

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t \quad \text{või} \quad \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{t}.$$

Esimene muutuja vahetus annab

$$x=-\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad dx=\frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

ja seega

$$J=\int\frac{4t^2\,dt}{(t^2-1)(t^2+1)}=\int\frac{4t^2\,dt}{t^4-1}.$$

Saime ratsionaalse funktsiooni integraali, mille leiame meetodiga M 6.4.1.

$$J=\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

N 6.6.2. Leida integraal

$$J=\int\frac{x\,dx}{2+\sqrt{4+x-x^2}}.$$

L a h e n d u s. Integraal on kujuga (44), sellepärast saab teda ratsionaliseerida Euleri asendustega. Et $a=-1<0$, siis Euleri esimest asendust teha ei saa. Euleri teist asendust ei ole aga otstarbekohane teha, sest polünoomi $4+x-x^2$ nullkohad on irratsionaalsed. Et $c=4>0$, siis teeme Euleri kolmanda asenduse (47) kujul

$$\sqrt{4+x-x^2}=tx-2.$$

Võtsime asenduse miinusmärgiga, sest siis avaldub lihtsamalt integraali nimetaja.

Avaldame asendusest muutuja x ja leiame dx:

$$x=\frac{4t+1}{t^2+1},\qquad dx=-2\frac{2t^2+t-2}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

seega

$$J=-2\int\frac{2t^2+t-2}{t(t^2+1)^2}\,dt.$$

Viimase integraali leiame Ostrogradski meetodiga M 6.4.2.:

$$J=\frac{4-t}{t^2+1}+4\ln|t|-2\ln(t^2+1)-\arctan t+C,$$

kus

$$t=\frac{2+\sqrt{4+x-x^2}}{x}.$$

N 6.6.3. Leida integraal

$$J=\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{x^4+1}}.$$

L a h e n d u s. Integraal on diferentsiaalbinoomist, s. o. valemi (52) tüüpi, kus $\alpha=-11$, $\beta=4$ ja $\gamma=-1/2$. Et $(\alpha+1)/\beta+\gamma=-3$ on täisarv, siis integraali saab ratsionaliseerida asendusega (55), s. o. asendusega

$$\frac{x^4+1}{x^4}=1+x^{-4}=t^2,$$

kust $-4x^{-5}\,dx=2t\,dt$ ja

$$dx=-\frac{1}{2}x^5t\,dt,\quad x^4+1=x^4t^2.$$

Asendades viimased suurused lähteintegraali, saame:

$$J=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{x^8}=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C,$$

kus

$$t=\sqrt{x^4+1}/x^2.$$

Ülesanded

Leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.6.1)

856. $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

857. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

858. $\int\frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

859. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

860. $\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{2x-1}}\,dx$

861. $\int\frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

Leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.6.2).

862. $\int\frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

863. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}}$

864. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

865. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

866. $\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x+2x^2}]^2}$

867. Näidata, et integraal

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

asendusega $x=t-\frac{b}{2a}$ teisendub $a>0$ korral kujule

$$J=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{A+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t+\sqrt{t^2+A}|+C$$

ja $a<0$, $A>0$ korral kujule

$$J=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{A-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{A}}+C,$$

kus

$$A=\frac{c}{|a|}-\frac{b^2}{4a|a|},\quad t=x+\frac{b}{2a}.$$

Leida järgmised integraalid, kasutades valmis valemeid eelmisest ülesandest 867.

868. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

869. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$

Leida järgmised diferentsiaalbinoomi integraalid (vt. näide N 6.6.3).

870. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2\,dx$

871. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

872. $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+1}}$

873. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+1/x}}$

874. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}+1)^2}$

875. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

876. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

877. $\int 3\sqrt{x-x^4}\,dx$

Näidata, et järgmised integraalid pole elementaarfunktsioonid.

878. $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$

879. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2}\,dx$

880. $\int x\sqrt{x^3+1}\,dx$

881. $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+3}}\,dx$

Milliseid tingimusi peab täitma arv r, et järgmised integraalid oleksid elementaarfunktsioonid?

882. $\int \sqrt{x^r+1}\,dx$

883. $\int x^r\sqrt[3]{x^2+x}\,dx$

884. $\int x^r(\sqrt[3]{x}+1)^2\,dx$

885. $\int \frac{x\,dx}{(x^3+1)^r}$

VII. MÄÄRATUD INTEGRAAL

§ 7.1. MÄÄRATUD INTEGRAALI MÕISTE

Olgu funktsioon f antud lõigus $[a, b]$, kus $a<b$. Jaotame lõigu $[a, b]$ punktidega

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

osalõikudeks $e_i=[x_{i-1}, x_i]$. Valime suvaliselt punktid $\xi_i \in e_i$ ja moodustame summa

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

kus $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Summat (1) nimetatakse funktsioooni f **Riemanni integraalsummaks** lõigus $[a, b]$.

Olgu λ osalõikude e_i suurim pikkus, s.o.

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i.$$

D 7.1.1. *Arvu J nimetatakse integraalsumma* (1) *piirväärtuseks protsessis $\lambda\to 0$, kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub arv $\delta>0$, et kehtib võrratus*

$$|J-\delta|<\varepsilon, \quad \text{kui} \quad \lambda<\delta,$$

sõltumata lõigu $[a, b]$ *jaotamisviisist ja punktide ξ_i valikust, ja kirjutatakse*

$$J=\lim_{\lambda\to 0} \sigma. \tag{2}$$

D 7.1.2. *Kui on olemas piirväärtus* (2), *siis funktsiooni f nimetatakse* (**Riemanni mõttes**) **integreeruvaks** *lõigus* $[a, b]$ *ja arvu J nimetatakse funktsiooni f* **määratud integraaliks** (*ehk* **Riemanni integraaliks**) *lõigus* $[a, b]$ *ja kirjutatakse*

$$J=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Arve a ja b nimetatakse vastavalt integraali **alumiseks** ja **ülemiseks rajaks**. Lõiku $[a, b]$ nimetatakse **integreerimislõiguks**. Kõigi Riemanni mõttes integreeruvate funktsioonide hulka märgime sümboliga $L[a, b]$.

Laiendame määratud integraali mõiste juhule $a \geqslant b$. Defineerime selle juhul $a > b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{4}$$

ja juhul $a = b$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Sellest definitsioonist on näha, et seos (4) kehtib ka juhul $a \leqslant b$, seega iga a ja b korral.

TT 7.1.1. *Funktsiooni integreeruvuseks mingis lõigus on tarvilik, et ta oleks tõkestatud selles lõigus.*

Kuid iga tõkestatud funktsioon ei ole Riemanni mõttes integreeruv (näide N 7.1.2). Funktsiooni integreeruvuse määramiseks kasutatakse järgmisi tunnuseid.

PT 7.1.1. *Lõigus pidev funktsioon on integreeruv selles lõigus.*

PT 7.1.2. *Lõigus tõkestatud monotoonne funktsioon on integreeruv selles lõigus.*

PT 7.1.3. *Lõigus tõkestatud funktsioon, millel on lõplik arv katkevuspunkte, on integreeruv selles lõigus.*

PT 7.1.4. *Lõigus tõkestatud funktsioon, millel on* l o e n d u v h u l k *katkevuspunkte, s.t. mille katkevuspunktid moodustavad jada, on integreeruv selles lõigus.*

PT 7.1.5. *Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad mingis lõigus, siis ka nende korrutis fg on integreeruv selles lõigus.*

Määratud integraalis võib funktsiooni väärtusi muuta (kõrvaldada, lisada) lõplikus arvus punktides. See ei muuda integraali ega mõjusta tema olemasolu.

Määratud integraalil on järgmised omadused.

I Aditiivsus. Kui $c \in [a, b]$, siis kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

kus integraalide olemasolust paremal järeldub integraali olemasolu vasakul ja vastupidi, integraali olemasolust vasakul järeldub mõlema integraali olemasolu paremal.

Aditiivsuse omadusest järeldub, et lõigus integreeruv funktsioon on integreeruv ka selle lõigu igas osalõigus.

II Lineaarsus. Kui $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, siis

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx, \tag{7}$$

kus integraalide olemasolust paremal järeldub integraali olemasolu vasakul, kuid mitte vastupidi.

Lineaarsuse omadusest järeldub, et integreeruvate funktsioonide korral

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx, \tag{8}$$

s. t. konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt välja, ja et

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx, \tag{9}$$

s. t. summa (vahe) integraal võrdub integraalide summaga (vahega).

III Monotoonsus. Kui $f, g\in L[a, b]$ ja $f(x)\leqslant g(x)$ iga $x\in [a, b]$ korral, kus $a\leqslant b$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

Monotoonsuse omadusest järeldub, et kui $f(x)\geqslant 0$ $(f(x)\leqslant 0)$, siis $a\leqslant b$ korral ka

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0 \qquad \left(\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0\right).$$

IV Absoluutne integreeruvus. Kui $f\in L[a, b]$, siis ka $|f|\in L[a, b]$ ja $a\leqslant b$ korral kehtib võrratus

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10}$$

V Keskväärtusteoreem. Kui $f, g\in L[a, b]$ ja funktsioon g säilitab märki, siis leidub selline $\mu\in[m, M]$, kus m ja M on funktsiooni f rajad lõigus $[a, b]$, et kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Erijuhul, kui $g(x)=1$ lõigus $[a, b]$, saame viimasest võrdusest

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mu(b-a).$$

Kui seejuures $f\in C[a, b]$, siis leidub punkt $\xi\in[a, b]$, et

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a). \tag{11}$$

VI Määratud integraal ülemise raja funktsioonina. Kui $f\in L[a, b]$, siis funktsioon

$$y=\int_a^x f(t)\,dt \tag{12}$$

on pidev lõigus $[a, b]$. Kui seejuures funktsioon f on pidev punktis $t=x$, siis funktsioon (12) on diferentseeruv punktis x ja

$$y'=f(x). \tag{13}$$

Näited

N 7.1.1. Missuguste tunnuste põhjal funktsioon

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left[\frac{1}{x+1}\right]$$

on integreeruv lõigus $[0, 1]$?

L a h e n d u s. Vaadeldav funktsioon on tõkestatud, sest funktsioon $\operatorname{sgn} x$ on tõkestatud. Arvestades täisosa võtmise reegleid, näeme, et

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ kui } x=0 \\ 0, \text{ kui } 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Seega on vaadeldaval funktsioonil lõigus $[0, 1]$ vaid üks katkevuspunkt. Tunnuse PT 7.1.3 põhjal on vaadeldav funktsioon integreeruv selles lõigus. Sama järeldub ka tunnusest PT 7.1.2, sest vaadeldav funktsioon on ka monotoonselt kahanev lõigus $[0, 1]$.

N 7.1.2. Näidata, et Dirichlet' funktsioon

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ kui } x\in Q \\ 0, \text{ kui } x\notin Q \end{cases}$$

ei ole integreeruv Riemanni mõttes lõigus $[a, b]$, kus $a<b$.

L a h e n d u s. Võtame integraalsummas (1) kõik punktid ξ_i ratsionaalsed, siis

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$$

ja piirväärtus (2) on $J=b-a$. Võtame aga punktid ξ_i kõik irratsionaalsed, siis $\sigma=0$ ja piirväärtus (2) on $J=0$. Näeme, et piirväärtus (2) sõltub punktide ξ_i valikust. Seega integraal (3) ei eksisteeri.

N 7.1.3. Leida integraal

$$J=\int_{-1}^{4}(2+x)\,dx.$$

vahetult definitsiooni D 7.1.2 põhjal, leides piirväärtuse (2).

L a h e n d u s. Funktsioon $f(x)=2+x$ on pidev lõigus $[-1, 4]$ ja tunnuse PT 7.1.1. põhjal on ta integreeruv selles lõigus. Seega teame ette, et piirväärtus (2) on olemas, ei olene lõigu jaotamisviisist ega punktide ξ_i valikust. Seepärast jagame lõigu n võrdseks osaks punktidega

$$x_i=x_0+i\Delta x_i=-1+i\Delta x_i,$$

kus

$$\Delta x_i=\frac{4-(-1)}{n}=\frac{5}{n},$$

ning valime

$$\xi_i = x_i = -1 + \frac{5i}{n}.$$

Siis, arvestades valemit ülesandest 50,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (2+\xi_i)\Delta x_i = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= 5 + \frac{25}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = 5 + \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Seega

$$\int_{-1}^{4} (2+x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 17{,}5.$$

N 7.1.4. Integraale

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx, \quad \int_{0}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$$

arvutamata teha kindlaks, kas need on positiivsed või negatiivsed ja kumb neist on suurem.

L a h e n d u s. Et vahemikus $(0, \pi/2)$ on $\cos x > 0$, siis monotoonsuse omaduse järelduse põhjal on mõlemad integraalid positiivsed. Et $\cos x$ väärtused ei ületa arvu 1, siis $\cos x \geqslant \cos^3 x$ ja seega esimene integraal on suurem teisest monotoonsuse omaduse põhjal.

N 7.1.5. Määrata arv ξ nii, et integraali

$$\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}$$

korral kehtiks võrdus (11).

L a h e n d u s. Et $a=1$, $b=4$ ja $f(x)=\sqrt{x}$, siis peab kehtima võrdus

$$\frac{14}{3} = \sqrt{\xi}\,(4-1),$$

kust saame $\xi = 14^2/9^2$.

N 7.1.6. Leida funktsiooni

$$y = \int_{a}^{x} 2^t\,dt$$

tuletis punktis x.

L a h e n d u s. Et integraalialune funktsioon 2^t on pidev iga t korral, siis valemi (13) põhjal $y' = 2^x$.

Ülesanded

Mis tunnuse põhjal on järgmised funktsioonid integreeruvad lõigus $[0, 1]$ (vt. näide N 7.1.1)?

886. $f(x)=e^{|\sin x|}$

887. $f(x)=\left[\frac{1}{x+0,1}\right]$

888. $f(x)=10x-[10x]$

889. $f(x)=\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}$

890. $f(x)=(10x-[10x])e^{|\sin x|}$

Näidata, et järgmised funktsioonid ei ole integreeruvad lõigus $[0, 1]$ (vt. näide N 7.1.2).

891. $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{kui } x\in \mathbf{Q} \\ -1, & \text{kui } x\notin \mathbf{Q}\end{cases}$

892. $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{kui } x\in \mathbf{Q} \\ 2, & \text{kui } x\notin \mathbf{Q}\end{cases}$

893. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{kui } x\in \mathbf{Q} \\ x, & \text{kui } x\notin \mathbf{Q}\end{cases}$

Leida järgmised integraalid vahetult definitsiooni D 7.1.2 põhjal, arvutades piirväärtuse (2) (vt. näide N 7.1.3).

894. $\int_0^2 x\,dx$

895. $\int_2^3 x^2\,dx$

896. $\int_0^3 e^x\,dx$

897. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

Järgmisi integraale arvutamata teha kindlaks, kas nad on positiivsed või negatiivsed ja kumb kahest integraalist on suurem (vt. näide N 7.1.4).

898. $\int_1^2 x\,dx, \quad \int_1^2 x^2\,dx$

899. $\int_0^1 x\,dx, \quad \int_0^1 x^2\,dx$

900. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} x\,dx$

901. $\int_{1/e}^1 \ln x\,dx, \quad \int_{1/e}^1 \ln^3 x\,dx$

902. $\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$

903. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \quad \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$

Kasutades ülesannete 894—897 vastuseid, määrata arv ξ nii, et järgmiste integraalide korral kehtiks võrdus (11) (vt. näide N 7.1.5).

904. $\int_0^2 x\,dx$

905. $\int_2^3 x^2\,dx$

906. $\int\limits_0^3 e^x\,dx$

907. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised punktis x (vt. näide N 7.1.6).

908. $y=\int\limits_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

909. $y=\int\limits_2^x \sin t\,dt$

910. $y=\int\limits_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt.$

911. $y=\int\limits_2^{\exp x} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

912. $y=\int\limits_x^3 \sqrt{1+t^2}\,dt$

913. $y=\int\limits_{x^2}^1 \frac{dt}{\ln t}$

914. $y=\int\limits_x^x e^t\,dt$

915. $y=\int\limits_x^{2x} \ln^2 t\,dt$

916. $y=\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \exp t^2\,dt$

917. $y=\int\limits_2^x e^x \sin x\,dx$

§ 7.2. MÄÄRATUD INTEGRAALI ARVUTAMINE

Määratud integraali

$$J=\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{14}$$

arvutamiseks kasutatakse järgmisi võtteid.

1. Newtoni—Leibnizi valemi kasutamine. See võte tugineb järgmisele teoreemile.

T 7.2.1. *Kui funktsioon f on integreeruv lõigus $[a, b]$ ja tal on olemas algfunktsioon F selles lõigus, siis*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{15}$$

Arvutamisel on valemit (15) otstarbekohane kasutada kujul

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b, \tag{16}$$

kus

$$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Valemit (15) nimetatakse **Newtoni—Leibnizi valemiks** ehk **integraalarvutuse põhivalemiks**.

Kui lõigus $[a, b]$ integreeruval funktsioonil f on olemas algfunktsioon F vaid vahemikus (a, b), kus $a<b$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) \tag{17}$$

ehk kujul (16)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a+}^{b-}. \tag{18}$$

Samasugune on olukord ka juhul, kui algfunktsioon F on olemas vaid poollõikudes $[a, b)$ või $(a, b]$, kus $a<b$. Siis on vastavalt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{b-} \tag{19}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a+}^{b}. \tag{20}$$

2. Integraal sümmeetrilisel lõigul. Olgu funktsioon f integreeruv **sümmeetrilisel lõigul**, s.o. lõigul $[-a, a]$.

Kui sellel lõigul f on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \tag{21}$$

ja kui on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx. \tag{22}$$

3. Diferentsiaali märgi alla viimine. Paljudel juhtudel on võimalik integraalis (14) integraalialust avaldist teisendada kujule

$$f(x)\,dx = g[t(x)]\,dt(x), \tag{23}$$

kus $t=t(x)$ esineb uue integreerimismuutujana. Kui tekkinud funktsiooni g algfunktsioon on G, siis saame Newtoni—Leibnizi valemi (16) abil

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g[t(x)]\,dt(x) \overset{(16)}{=} G[t(x)]\Big|_a^b = G[t(b)] - G[t(a)], \tag{24}$$

millega integraal on leitud.

Integraalialune avaldis teisendatakse kujule (23) analoogiliselt nagu määramata integraali korral (vt. § 6.2).

4. Muutujate vahetus. See võte tugineb järgmisele teoreemile.

T 7.2.2. *Kui funktsioonil $f(x)$ on olemas algfunktsioon lõigus $[a, b]$ ja muutuja $x=x(t)$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ diferentseeruv funktsioon, kusjuures*

$$a=x(\alpha), \quad b=x(\beta), \tag{25}$$

siis

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)\,dt \tag{26}$$

eeldusel, et integraalid võrduse mõlemal poolel eksisteerivad.

Valemit (26) nimetatakse määratud integraali muutuja vahetuse valemiks. Muutujat t nimetatakse uueks integreerimismuutujaks. Funktsiooni $x=x(t)$ nimetatakse asenduseks.

Valem (26) võimaldab antud integraali (14) arvutamist taandada mõne teise integraali arvutamisele.

5. Ositi integreerimine. See võte tugineb järgmisele teoreemile.

T 7.2.3. *Kui funktsioonidel $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ on olemas integreeruvad tuletised lõigus $[a, b]$, siis*

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du, \tag{27}$$

kus

$$uv\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a).$$

Valemit (27) nimetatakse määratud integraali ositi integreerimise valemiks. Ta võimaldab antud integraali arvutamist taandada teise integraali arvutamisele, mille arvutamisel võime jälle kasutada valemit (27).

Integraalis (14) valitakse osad u ja dv samuti kui määramata integraali korral (vt. § 6.3).

Kui valemit (27) tuleb korduvalt rakendada, siis on mõni kord otstarbekohane kasutada järgmist üldistatud ositi integreerimise valemit:

$$\int_a^b uv\,dx=(uv_1-u'v_2+u''v_3-\ldots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v_n)\Big|_a^b+$$
$$+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}v_n\,dx, \tag{28}$$

kus

$$v_1=\int v\,dx, \quad v_2=\int v_1\,dx, \ldots, v_n=\int v_{n-1}\,dx$$

(integraalid $v_1, \ldots, v_n$ võetakse ilma konstantideta).

Kui funktsioon $u=u(x)$ on selline, et $u^{(n)}(x)=0$ lõigus $[a,b]$, siis valem (28) annab lõpliku tulemuse

$$\int_a^b uv\,dx=(uv_1-u'v_2+u''v_3-\ldots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v_n)\Big|_a^b. \qquad (29)$$

Erijuhul, kui $n=1$, saame valemist (28) ositi integreerimise valemi teisel kujul

$$\int_a^b uv\,dx=uv_1\Big|_a^b-\int_a^b u'v_1\,dx. \qquad (30)$$

Kui $n=2$, siis valemist (28) saame valemi kahekordseks ositi integreerimiseks:

$$\int_a^b uv\,dx=(uv_1-u'v_2)\Big|_a^b+\int_a^b u''v_2\,dx. \qquad (31)$$

Kui on vaja ositi integreerida järjest mitu korda, siis toimime samuti kui määramata integraali korral (vt. § 6.3). Kui korrutised $u^{(n)}v_n$ taandamistega ei lihtsustu, siis kasutame korduvaks ositi integreerimiseks valmis valemit (28) või selle erijuhte (29) ja (31). Kui aga korrutised $u^{(n)}v_n$ lihtsustuvad, siis on otstarbekohasem rakendada järjest valemit (27).

Näited

N 7.2.1. Leida integraal

$$\int_0^\pi (1+\sin x)\,dx,$$

kasutades Newtoni—Leibnizi valemit (16).

Lahendus. Funktsiooni $1+\sin x$ algfunktsioon on $x-\cos x$. Valemi (16) põhjal

$$\int_0^\pi (1+\sin x)\,dx=(x-\cos x)\Big|_0^\pi=$$
$$=(\pi-\cos\pi)-(0-\cos 0)=\pi+2.$$

Lineaarsuse omaduse põhjal võib selle ülesande ka järgmisel viisil lahendada:

$$\int_0^\pi (1+\sin x)\,dx=\int_0^\pi dx+\int_0^\pi \sin x\,dx=x\Big|_0^\pi-\cos x\Big|_0^\pi=\pi+2.$$

Näide 7.2.2. Integreerida funktsioon

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{kui } -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \sin x, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant \pi, \end{cases}$$

võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna.

Lahendus. Jaotame integreerimislõigu $[-1,\pi]$ kaheks osaks punktiga $x=0$, kus toimub üleminek funktsiooni ühelt avaldiselt teisele. Saame osad

$[-1, 0]$, kus $f(x)=x^3$, ja $[0, \pi]$, kus $f(x)=\sin x$. Integraali aditiivsuse omaduse põhjal on siis

$$\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\pi} = \frac{7}{4}.$$

Näide 7.2.3. Leida integraal

$$J = \int_{-1}^{2} x|x|\,dx.$$

Lahendus. Kõrvaldame kõigepealt absoluutväärtuse märgid integraalialusest funktsioonist definitsiooni D 1.2.1 põhjal:

$$x|x| = \begin{cases} -x^2, & \text{kui } x \in [-1, 0] \\ x^2, & \text{kui } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Integraali aditiivsuse omaduse põhjal

$$\int_{-1}^{2} x|x|\,dx = -\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{7}{3}.$$

N 7.2.4. Leida integraal

$$J = \int_{-1}^{1} (\sin x + x^2)\,dx$$

Lahendus. Integraal on antud sümmeetrilisel lõigul $[-1, 1]$. Et $\sin x$ on paaritu funktsioon ja x^2 on paarisfunktsioon, siis valemite (21) ja (22) põhjal

$$J = \int_{-1}^{1} \sin x\,dx + \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

N 7.2.5. Leida integraal

$$J = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\cos^2(2x-\pi)}$$

diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Lahendus. Viime integraalialuse avaldise kujule (23), arvestades, et

$$dx = \frac{1}{2}\,d(2x) = \frac{1}{2}\,d(2x-\pi).$$

Siis valemi (24) põhjal

$$J = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{d(2x-\pi)}{\cos^2(2x-\pi)} = \frac{1}{2}\tan(2x-\pi)\Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

N 7.2.6. Leida integraal

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$$

diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Lahendus. Viime integraalialuse avaldise kujule (23), arvestades, et

$$\sin x\,dx = -d\cos x.$$

Siis valemi (24) põhjal

$$J = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x}\, d\cos x = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos x|\, d\cos x.$$

Et integraali märgi all on paarisfunktsioon ja lõigus $[0, \pi/2]$ on $\cos x > 0$, siis valemi (22) põhjal

$$J = -2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\, d\cos x = -2\,\frac{\cos^2 x}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

N 7.2.7. Kasutades muutuja vahetust, leida integraal

$$J = \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

L a h e n d u s. Võtame

$$t = \sqrt{x},$$

siis $x = t^2$ $(t \geqslant 0)$ ja $dx = 2t\, dt$. Määrame integraalis uued rajad muutuja t järgi järgmise skeemi järgi:

x	t
$\pi^2/16$	$\pi/4$
$\pi^2/4$	$\pi/2$

Seega

$$J = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, t\, dt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin t\, dt = -2\cos t\,\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \sqrt{2}.$$

N 7.2.8. Leida integraal

$$J = \int_0^1 x e^x\, dx$$

ositi integreerimise teel.

L a h e n d u s. Võtame $u = x$ ja $dv = e^x\, dx$, siis $du = dx$ ja $v = e^x$. Valemi (27) põhjal

$$J = x\, e^x\,\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - e^x\,\Big|_0^1 = 1.$$

Ülesanded

Leida järgmised integraalid, kasutades valemit (16) (vt. näide N 7.2.1).

918. $\int_1^2 x^3\, dx$

919. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$

920. $\int_1^{\ln 3} e^x\, dx$

921. $\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

922. $\int\limits_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$

926. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

923. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

927. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{5\,dx}{\mathrm{ch}^2 x}$

924. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+x}{x^2}\,dx$

928. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

925. $\int\limits_{-1}^{3} (2^x+1)\,dx$

929. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$

Integreerida järgmised funktsioonid, võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna (vt. näide N 7.2.2).

930. $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{kui } -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2, & \text{kui } 0<x\leqslant 1 \end{cases}$

931. $f(x)=\begin{cases} \cos^{-2} x, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4} \\ \sin^{-2} x, & \text{kui } \frac{\pi}{4}<x\leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

932. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{kui } -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0 \\ 1-x^2, & \text{kui } 0\leqslant x<1 \\ e^x, & \text{kui } 1\leqslant x\leqslant \ln 4 \end{cases}$

Leida järgmised integraalid, kasutades valemit (16) (vt. näide N 7.2.3).

933. $\int\limits_{-1}^{2} |x|\,dx$

936. $\int\limits_{-1}^{3} |x(x-2)|\,dx$

934. $\int\limits_{0}^{4} |x-2|\,dx$

937. $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x-e^{|x|}}{2}\,dx$

935. $\int\limits_{0}^{\pi} |\cos x|\,dx$

Leida järgmised sümmeetrilisel lõigul antud integraalid (vt. näide N 7.2.4).

938. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,dx$

939. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

940. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

941. $\int\limits_{-e}^{e} \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, dx$

942. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos x + \tan \frac{x}{3} \right) dx$

943. $\int\limits_{-2}^{2} (x^5+x^4+15x^3+4)\, dx$

944. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x + e^x)\, dx$

945. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin |x| + |\sin x|)\, dx$

Leida järgmised integraalid diferentsiaali märgi alla viimise võttega (vt. näited N 7.2.5 ja N 7.2.6).

946. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2x\, dx$

947. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dt}{t+1}$

948. $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3)^3\, dx$

949. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos(2x+\pi)\, dx$

950. $\int\limits_{0}^{4} (4-x)^{1/2}\, dx$

951. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

952. $\int\limits_{-2}^{5} e^{5-x}\, dx$

953. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{8\, dx}{1+4x^2}$

954. $\int\limits_{0}^{2/3} \frac{dx}{4+9x^2}$

955. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

956. $\int\limits_{0}^{1/10} \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

957. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x\, dx}{x}$

958. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

959. $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\, dx$

960. $\int\limits_{0}^{1} (e^x-1)^4 e^x\, dx$

961. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx$

962. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$

963. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$

964. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

Kasutades muutuja vahetust, leida järgmised integraalid (vt. näide N 7.2.7).

965. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

966. $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$

967. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}$

968. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

969. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

970. $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

971. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

972. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{5}\,dx}{3+2\cos x}$

Leida järgmised integraalidositi integreerimise teel (vt. näide N 7.2.8).

973. $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

974. $\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$

975. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$

976. $\int_0^1 x\arctan x\,dx$

977. $\int_0^3 \ln(x+3)\,dx$

978. $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$

979. $\int_0^1 x^3 e^x\,dx$

980. $\int_0^{\pi/2} e^x\sin x\,dx$

981. $\int_1^{\exp \pi} \sin\ln x\,dx$

982. $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$

Leida järgmised integraalid.

983. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$

984. $\int_0^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\,dx$

985. $\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx$

986. $\int_0^1 2^{4x+5}\,dx$

987. $\int_0^4 3^{\sqrt{x}}\,dx$

988. $\int_{\pi^2}^{-\pi^2/16} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

989. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

990. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$

991. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$

992. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

993. $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} x \arctan^2 x\, dx$

994. $\int\limits_{1}^{5} (x-3)^5 e^{|x-3|}\, dx$

995. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x\, dx}{1+e^x}$

996. $\int\limits_{0}^{\ln 3} \frac{1-e^x}{1+e^x}\, dx$

997. $\int\limits_{0}^{\pi} e^{2x} \sin 3x\, dx$

998. $\int\limits_{0}^{\pi^2/4} x \sin \sqrt{x}\, dx$

999. $\int\limits_{1}^{5} \frac{x\, dx}{\sqrt{5+4x}}$

1000. $\int\limits_{1}^{e^{\pi/2}} x \cos \ln x\, dx$

1001. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^3\, dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

1002. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\, dx}{x^8+1}$

1003. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

1004. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$

1005. $\int\limits_{0}^{\pi} |\cos^3 x| \sin x\, dx$

1006. $\int\limits_{0}^{\pi} |1-2\sin x|\, dx$

§ 7.3. TÕKESTAMATA FUNKTSIOONI INTEGRAAL

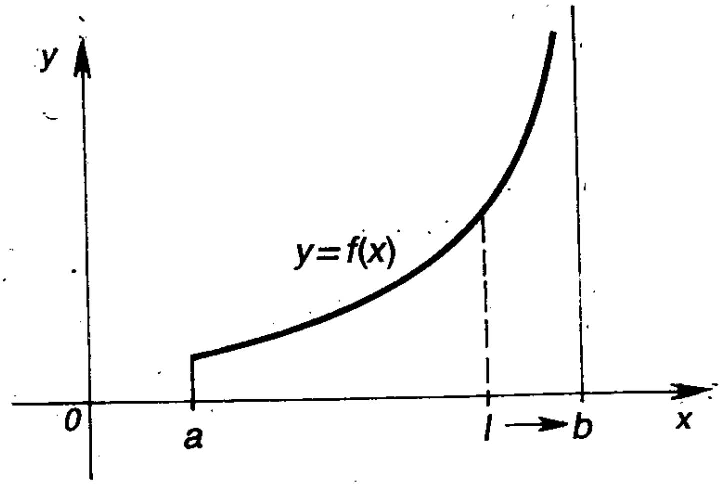
Olgu funktsioon $y=f(x)$, $x \in [a, b)$ $(a<b)$ integreeruv igas osalõigus $[a, l] \subset [a, b)$ ja tõkestamata punkti b ümbruses (joon. 7.1).

Selline funktsioon f ei ole integreeruv lõigus $[a, b]$, sest integreeruvuse tarvilik tingimus TT 7.1.1 ei ole täidetud. Järgmine definitsioon üldistab integraali mõiste sellisele punkti b ümbruses tõkestamata funktsioonile.

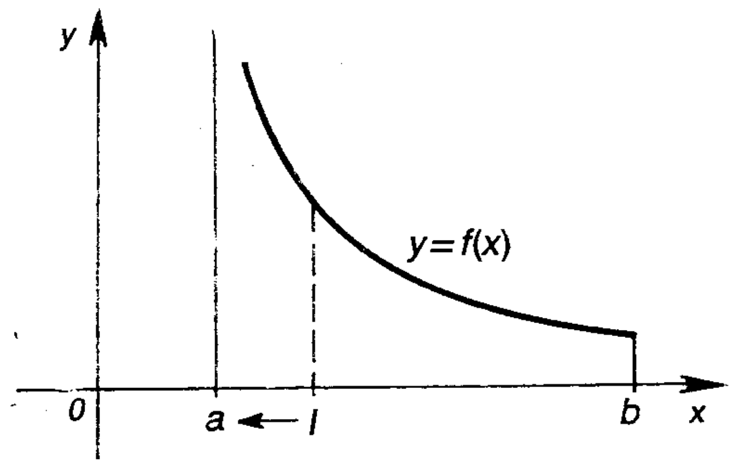
D 7.3.1. *Kui funktsioon f on tõkestamata punkti b ümbruses, siis tema integraaliks lõigus $[a, b]$ nimetatakse piirväärtust*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{l \to b-} \int\limits_{a}^{l} f(x)\, dx. \tag{32}$$

Kui funktsioon f on integreeruv lõigu $[a, b]$ igas osalõigus $[l, b] \subset (a, b]$ ja on tõkestamata punkti a ümbruses (joon. 7.2), siis funktsiooni f integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse analoogiliselt.



Joon. 7.1



Joon. 7.2

D 7.3.2. *Kui funktsioon f on tõkestamata punkti a ümbruses, siis tema integraaliks lõigus $[a, b]$ nimetatakse piirväärtust*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{l\to a+} \int_l^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

Kui funktsioon f on tõkestamata lõigu $[a, b]$ sisepunkti c ümbruses, siis tema integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{34}$$

kus parempoolsed integraalid on määratud definitsioonide D 7.3.1 ja D 7.3.2 järgi.

Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni f integraal lõigus $[a, b]$, kus funktsioon f on tõkestamata mitme punkti ümbruses.

Definitsioonidega D 7.3.1 ja D 7.3.2 antud integraale nimetatakse päratuteks integraalideks.

D 7.3.3. *Kui piirväärtus* (32) *eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal* (32) koondub. *Muudel juhtudel öeldakse, et ta* hajub.

Samasugused mõisted defineeritakse ka integraali (33) kohta.

Arvutamine. Päratute integraalide arvutamiseks võib kasutada definitsioonavaldisi (32) ja (33), leides vastavad piirväärtused. Algfunktsiooni olemasolu korral kasutatakse järgmisi teoreeme.

T 7.3.1. *Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F piirkonnas $[a, b)$, siis päratu integraali* (32) *korral kehtib võrdus*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{b-} \tag{35}$$

T 7.3.2. *Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F piirkonnas $(a, b]$, siis päratu integraali* (33) *korral kehtib võrdus*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a+}^{b}. \tag{36}$$

T 7.3.3. *Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon f piirkonnas $[a, c) \cup (c, b]$, siis päratu integraali* (34) *korral kehtib võrdus*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{c-} + F(x)\Big|_{c+}^{b}. \tag{37}$$

T 7.3.4. *Kui funktsiooni f algfunktsioon F on pidev lõigus $(a, b]$, siis valemid* (35), (36) *ja* (37) *omandavad kuju*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{b}. \tag{38}$$

Viimane valem (38) laiendab Newtoni—Leibnizi valemi (15) tõkestamata funktsiooni integraalile.

Päratute integraalide (32), (33) ja (34) korral kehtivad aditiivsuse, lineaarsuse ja monotoonsuse omadused ning algfunktsiooni leidmiseks kasutatakse neid samu võtteid, mis määratud integraali korralgi, s.o. muutujate vahetust, ositi integreerimist jne.

Koonduvuse uurimine. Päratute integraalide koonduvust ja hajuvust uuritakse järgmiste tunnuste abil.

Olgu funktsioonid f ja g integreeruvad igas osalõigus $[a, l] \subset [a, b)$, kus $a < b$, ning olgu nad tõkestamata punkti b ümbruses. Vaatleme integraale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{39}$$

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{40}$$

KT 7.3.1 (I võrdluslause). *Kui raja b mingis vasakpoolses ümbruses kehtib võrratus*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

siis integraali (40) *koonduvusest järeldub integraali* (39) *koon-*

duvus ja integraali (39) *hajuvusest järeldub integraali* (40) *hajuvus.*

KT 7.3.2. **(II võrdluslause).** *Kui raja b mingis vasakpoolses ümbruses on* $f(x)>0$ *ja* $g(x)>0$ *ning*

$$\exists \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = M, \quad \text{kus} \quad 0<M<\infty, \tag{41}$$

siis integraalid (39) *ja* (40) *üheaegselt kas koonduvad või hajuvad.*

Analoogilised võrdluslaused kehtivad ka päratu integraali (33) korral.

Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F, siis saab kasutada ka järgmisi koonduvustunnuseid.

KT 7.3.3. *Integraal* (35) *koondub siis ja ainult siis, kui*

$$\exists \lim_{x\to b-} F(x) \neq \pm\infty. \tag{42}$$

KT 7.3.4. *Integraal* (36) *koondub siis ja ainult siis, kui*

$$\exists \lim_{x\to a+} F(x) \neq \pm\infty. \tag{43}$$

KT 7.3.5. *Integraal* (37) *koondub siis ja ainult siis, kui*

$$\exists \lim_{x\to c-} F(x) \neq \pm\infty, \quad \exists \lim_{x\to c+} F(x) \neq \pm\infty.$$

Sageli saab päratu integraali koonduvuse või hajuvuse üle otsustada järgmise koonduvustunnuse abil.

KT 7.3.6. *Olgu funktsioon* $f(x)\geqslant 0$ *tõkestamata punkti* $l \in [a, b]$ *ümbruses. Kui leiduvad arvud k ja M, et*

$$f(x) \sim \frac{M}{|x-l|^k}, \quad \text{kui} \quad x\to l, \tag{44}$$

siis integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

koondub, kui $k<1$, *ja hajub, kui* $k\geqslant 1$.

D 7.3.4. *Kui funktsiooni* $|f|$ *päratu integraal koondub, siis öeldakse, et funktsiooni f päratu integraal* k o o n d u b a b s o l u u t s e l t.

Päratu integraali absoluutsest koonduvusest järeldub päratu integraali koonduvus, kuid mitte vastupidi.

D 7.3.5. *Koonduvat päratut integraali, mis ei koondu absoluutselt, nimetatakse* t i n g i m i s i k o o n d u v a k s.

Kui $f(x)\geqslant 0$, siis kirjutised

$$\int_a^b f(x)\,dx<\infty \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x)\,dx=\infty$$

tähendavad vastavalt, et päratu integraal koondub ja hajub.

Näited

N 7.3.1. Leida integraal

$$J=\int_0^1 \ln x \, dx.$$

L a h e n d u s. Integraalialune funktsioon $f(x)=\ln x$ on tõkestamata integraali alumise raja $a=0$ ümbruses. Et funktsioon f on pidev piirkonnas $(0, 1]$, siis on ta integreeruv igas osalõigus $[l, 1] \subset (0, 1]$ tunnuse PT 7.1.1 põhjal. Seega on tegemist päratu integraaliga.

Et funktsioonil $f(x)=\ln x$ on olemas algfunktsioon (vt. ülesanne 779) $F(x)=x\ln x - x$ piirkonnas $(0, 1]$, siis võime arvutamiseks kasutada valemit (36). Seega

$$J=(x\ln x - x)\Big|_{0+}^{1}=-1-\lim_{x\to 0+} x\ln x=-1.$$

N 7.3.2. Leida integraal

$$J=\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$$

L a h e n d u s. Integraalialune funktsioon f on tõkestamata integreerimislõigu $[1/e, e]$ sisemises punktis $c=1$. Ülejäänud punktides, s. o. piirkonnas $[1/e, 1) \cup (1, e]$ on funktsioon f pidev ja seepärast integreeruv selle piirkonna igas osalõigus tunnuse PT 7.1.1 põhjal. Seega on tegemist päratu integraaliga.

Algfunktsiooni leidmiseks piirkonnas $[1/e, 1) \cup (1, e]$ viime $1/x$ diferentsiaali märgi alla. Integraali arvutamiseks võime kasutada valemit (37), siis saame:

$$J=\int_{1/e}^{e} \ln^{-1/3} x \, d\ln x=\frac{3\ln^{2/3} x}{2}\Big|_{1/e}^{1-}+\frac{3\ln^{2/3} x}{2}\Big|_{1+}^{e}=0.$$

Et vaadeldaval juhul on algfunktsioon pidev integreerimislõigus $[1/e, e]$, siis võime kasutada ka valemit (38), mis otsekohe annab

$$J=\frac{3\ln^{2/3} x}{2}\Big|_{1/e}^{e}=\frac{3}{2}(1-1)=0.$$

N 7.3.3. Leida integraal

$$J=\int_{-1}^{0} x^{-2} e^{-1/x} \, dx.$$

L a h e n d u s. Integraalialune funktsioon f on tõkestamata ülemise raja $b=0$ ümbruses. Et funktsioon f on pidev piirkonnas $[-1, 0)$, siis ta on integreeruv selle piirkonna igas osalõigus $[-1, l]$. Seega on tegemist päratu integraaliga.

Algfunktsiooni leidmiseks viime $1/x^2$ diferentsiaali märgi alla. Nüüd valemi (35) põhjal

$$J=\int_{-1}^{0} e^{-1/x} \, d\left(-\frac{1}{x}\right)=e^{-1/x}\Big|_{-1}^{0-}=\lim_{x\to 0-} e^{-1/x}-e=\infty.$$

Koonduvustunnuse KT 7.3.3 põhjal vaadeldav päratu integraal hajub.

N 7.3.4. Leida funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases} 1/\sqrt{1-x^2}, & \text{kui } x\in[0, 1) \\ \pi/2, & \text{kui } x\in[1, 2] \end{cases}$$

päratu integraal, võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna.

Lahendus. Funktsioon f on tõkestamata punkti $c=1$ ümbruses, kuigi selles punktis $c=1$ on tal lõplik väärtus. Piirkondades $[0, 1)$ ja $[1, 2]$ funktsioon f on pidev ja seepärast integreeruv nende piirkondade igas osalõigus tunnuse PT 7.1.1 põhjal. Et funktsiooni f algfunktsioon

$$F(x)=\begin{cases}\arcsin x, & \text{kui } x\in[0,1),\\ \pi x/2, & \text{kui } x\in[1,2]\end{cases}$$

on pidev integreerimislõigus $[0, 2]$, siis võime arvutamiseks kasutada valemit (38). Saame:

$$J=F(x)\Big|_0^2=\pi-\arcsin 0=\pi.$$

N 7.3.5. Näidata integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

koonduvust.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on pidev igas osalõigus $[0, l]\subset\subset[0, 1)$ ja on tõkestamata ülemise raja $b=1$ ümbruses.

Kehtib võrratus

$$0\leqslant\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integraal lõigus $[0, 1]$ parempoolsest avaldisest koondub, s. o.

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}<\infty.$$

Esimese võrdluslause KT 7.3.1 põhjal siis ka

$$\int_0^1\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}<\infty,$$

s. o. koondub.

N 7.3.6. Näidata integraali

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$$

koonduvust.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on tõkestamata ülemise raja $b=1$ ümbruses. Piirprotsessis $x\to 1-$ aga on

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)(1+x)(1-x)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

sest $1+x^2\to 2$ ja $1+x\to 2$. Seega koonduvustunnuse KT 7.3.6 põhjal vaadeldav integraal koondub, sest $k=1/3<1$.

Ülesanded

Arvutada järgmised integraalid või veenduda nende hajuvuses (vt. näited N 7.3.1, 7.3.2 ja N 7.3.3).

1007. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

1008. $\int_0^2 \sqrt[3]{\frac{2}{x}}\, dx$

1009. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$

1010. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1011. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1012. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$

1013. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

1014. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

Leida päratud integraalid järgmistest funktsioonidest, võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna (vt. näide N 7.3.4).

1015.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{kui} \quad x\in[0,1), \\ \pi^2/8, & \text{kui} \quad x\in[1,3] \end{cases}$$

1016. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\arctan^{-2/3} x}{1+x^2}, & \text{kui} \quad x\in[-1,0), \\ \arctan 4, & \text{kui} \quad x=0 \end{cases}$$

1017. $$f(x)=\begin{cases} \tan x, & \text{kui} \quad x\in[0,\pi/2), \\ \tan 1, & \text{kui} \quad x\in[\pi/2,\pi] \end{cases}$$

1018. $$f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{kui} \quad x\in[-2,-1], \\ \ln(1+x), & \text{kui} \quad x\in(-1,0], \\ 2(1-x)+1/\sqrt{x}, & \text{kui} \quad x\in(0,1] \end{cases}$$

Näidata järgmiste integraalide koonduvust, absoluutset koonduvust või hajuvust (vt. näited N 7.3.5 ja N 7.3.6).

1019. $\int_1^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{x-1}}$

1020. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

1021. $\int_2^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$

1022. $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(4-x)}}$

1023. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$

1026. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

1024. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$

1027. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{arccot} x}{\sqrt{\pi-x}}\,dx$

1025. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

1028. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$

§ 7.4. LÕPMATUTE RAJADEGA INTEGRAALID

D 7.4.1. *Kui funktsioon f on määratud piirkonnas $[a, \infty)$ ja on integreeruv igas lõigus $[a, c] \subset [a, \infty)$, siis tema integraaliks piirkonnas $[a, \infty)$ nimetatakse piirväärtust*

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx. \tag{45}$$

D 7.4.2. *Kui funktsioon f on määratud piirkonnas $(-\infty, b]$ ja ta on integreeruv igas lõigus $[c, b] \subset (-\infty, b]$, siis tema integraaliks piirkonnas $(-\infty, b]$ nimetatakse piirväärtust*

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx. \tag{46}$$

Definitsioonidega D 7.4.1 ja D 7.4.2 antud integraale nimetatakse ka p ä r a t u t e k s i n t e g r a a l i d e k s.

D 7.4.3. *Kui piirväärtus* (45) *eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal* (45) k o o n d u b. *Muudel juhtudel öeldakse, et ta* h a j u b.

Samasugused mõisted defineeritakse ka päratu integraali (46) kohta.

Kui funktsioon f on määratud piirkonnas $(-\infty, \infty)$, siis tema päratu integraal selles piirkonnas defineeritakse võrdusega

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx, \tag{47}$$

kus c on suvaline arv. Seejuures öeldakse, et päratu integraal (47) koondub, kui võrduses (47) paremal mõlemad integraalid koonduvad. Muudel juhtudel öeldakse, et ta hajub. Olgu märgitud, et integraal (47) ei olene arvu c valikust.

Arvutamine. Päratute integraalide (45), (46) ja (47) arvutamiseks võib kasutada nende definitsioonavaldusi, leides vastavad piirväärtused. Algfunktsiooni olemasolu korral kasutatakse järgmisi teoreeme.

T 7.4.1. *Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F piirkonnas* $[a, \infty)$, *siis kehtib võrdus*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^\infty, \tag{48}$$

kus

$$F(x)\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a).$$

T 7.4.2. *Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F piirkonnas* $(-\infty, b]$, *siis kehtib võrdus*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^b, \tag{49}$$

kus

$$F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

T 7.4.3. *Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F piirkonnas* $(-\infty, \infty)$, *siis kehtib võrdus*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^\infty, \tag{50}$$

kus

$$F(x)\Big|_{-\infty}^\infty = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Päratute integraalide (45), (46) ja (47) korral kehtivad aditiivsuse, lineaarsuse ja monotoonsuse omadused ning algfunktsiooni leidmiseks kasutatakse neidsamu võtteid, mis määratud integraali korralgi, s. o. muutuja vahetust, ositi integreerimist jne.

Koonduvuse uurimine. Päratute integraalide (45) ja (46) koonduvuse ja hajuvuse uurimiseks kasutatakse järgmisi võrdluslauseid.

Olgu funktsioonid f ja g integreeruvad igas lõigus $[a, c] \subset [a, \infty)$. Vaatleme integraale

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{51}$$

$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{52}$$

KT 7.4.1. (I võrdluslause). *Kui raja* ∞ *mingis ümbruses kehtib võrratus*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

siis integraali (52) *koonduvusest järeldub integraali* (51) *koonduvus ja integraali* (51) *hajuvusest järeldub integraali* (52) *hajuvus.*

KT 7.4.2. (II võrdluslause). *Kui raja* ∞ *mingis ümbruses on* $f(x)>0$ *ja* $g(x)>0$ *ning*

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M, \quad \text{kus} \quad 0<M<\infty, \tag{53}$$

siis integraalid (51) *ja* (52) *üheaegselt kas koonduvad või hajuvad.*

Analoogilised võrdluslaused kehtivad ka päratu integraali (46) korral.

Praktikas piisab II võrdluslause KT 7.4.2 rakendamisel, kui näidata ekvivalentsust

$$f(x) \sim Mg(x)$$

vaadeldavas piirprotsessis.

Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon F, siis võib kasutada ka järgmisi koonduvustunnuseid.

KT 7.4.3. *Integraal* (48) *koondub siis ja ainult siis, kui*

$$\exists \lim_{x\to\infty} F(x) \neq \pm\infty. \tag{54}$$

KT 7.4.4. *Integraal* (49) *koondub siis ja ainult siis, kui*

$$\exists \lim_{x\to-\infty} F(x) \neq \pm\infty. \tag{55}$$

KT 7.4.5. *Integraal* (50) *koondub siis ja ainult siis, kui on täidetud tingimused* (54) *ja* (55).

Sageli saab päratu integraali koonduvuse või hajuvuse üle otsustada järgmiste koonduvustunnuste abil.

KT 7.4.6. *Olgu* $f(x)\geqslant 0$ *ülemise raja* ∞ *ümbruses. Kui leiduvad arvud* k *ja* M, *et*

$$f(x) \sim \frac{M}{x^k}, \quad \text{kui} \quad x\to\infty, \tag{56}$$

siis integraal (45) *koondub, kui* $k>1$, *ja hajub, kui* $k\leqslant 1$.

KT 7.4.7. *Kui piirkonnas* $[a, \infty)$

1) *funktsioonil* f *on olemas tõkestatud algfunktsioon;*

2) *funktsioon* g *monotoonselt läheneb nullile, kui* $x\to\infty$, *siis integraal*

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

koondub.

Analoogilised tunnused kehtivad ka integraali (46) korral.

Analoogiliselt tõkestamata funktsiooni integraaliga defineeritakse ka lõpmatute rajadega integraalide korral mõisted absoluutne koonduvus (vt. D 7.3.4) ja tingimisi koonduvus (vt. D 7.3.5).

Kui $f(x) \geqslant 0$ piirkonnas $[a, \infty)$, siis kirjutised

$$\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty \quad \text{ja} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$$

tähendavad vastavalt, et päratu integraal koondub ja hajub.

Näited

N 7.4.1. Leida integraal

$$J = \int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^5}\,dx.$$

Lahendus. Integraalialune funktsioon on pidev ja seega integreeruv igas lõigus $[1, c] \subset [1, \infty)$. Seega tegemist on päratu integraaliga. Valemi (48) põhjal saame:

$$J = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^4}\right)\Bigg|_1^\infty = \frac{5}{4}.$$

N 7.4.2. Leida integraal

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arccot}^2\, x}$$

Lahendus. Integraalialune funktsioon on pidev ja seega integreeruv igas lõigus $[0, c] \subset [0, \infty)$. Seega on tegemist päratu integraaliga. Valemi (48) põhjal saame:

$$J = -\int_0^\infty \frac{d\,\mathrm{arccot}\, x}{\mathrm{arccot}^2\, x} = \frac{1}{\mathrm{arccot}\, x}\Bigg|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{arccot}\, x} - \frac{2}{\pi} = \infty$$

sest $\lim \mathrm{arccot}\, x = 0$, kui $x \to \infty$ (vt. joon. 1.17). Seega vaadeldav integraal hajub koonduvustunnuse KT 7.4.3 põhjal.

N 7.4.3. Otsustada, kas integraal

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

koondub või hajub.

Lahendus. Kogu integreerimispiirkonnas kehtib võrratus

$$0 \leqslant \frac{1}{x} e^{-x} \leqslant e^{-x}$$

ja valemi (48) põhjal

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{1}{e}.$$

Seega I võrdluslause KT 7.4.1 põhjal vaadeldav integraal koondub.

N 7.4.4. Otsustada, kas integraal

$$\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{x^3+2x+3}\,dx$$

koondub või hajub.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on integreerimispiirkonnas mittenegatiivne. Et piirprotsessis $x \to \infty$ on

$$\frac{x \arctan x}{x^3+2x+3} = \frac{x[\pi/2+o(1)]}{x^3[1+o(1)]} \sim \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^2},$$

siis koonduvustunnuse KT 7.4.6 põhjal vaadeldav integraal koondub, sest $k=2>1$.

N 7.4.5. Näidata integraali

$$\int_1^\infty e^{-x} \sin 3x\,dx$$

absoluutset koonduvust.

Lahendus. Et kogu integreerimispiirkonnas kehtib võrratus

$$0 \leqslant |e^{-x} \sin 3x| \leqslant e^{-x},$$

siis I võrdluslause KT 7.4.1 põhjal antud integraal koondub absoluutselt.

N 7.4.6. Otsustada, kas integraal

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

koondub absoluutselt või tingimisi.

Lahendus. Veendume kõigepealt, et integraal koondub. Selleks tähistame $f(x)=\cos x$ ja $g(x)=1/x$. Funktsioonil f on olemas tõkestatud algfunktsioon $\sin x$ ja funktsioon g läheneb monotoonselt nullile. Tunnuse KT 7.4.7 põhjal vaadeldav integraal koondub.

Uurime nüüd integraali absoluutset koonduvust. Et

$$|\cos x| \geqslant \cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1+\cos 2x),$$

siis piirkonnas $[1, \infty)$ on

$$\left|\frac{\cos x}{x}\right| \geqslant \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Võrratuse paremal poolel oleva funktsiooni integraal

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}\right) dx$$

hajub (esimese liidetava integraal hajub tunnuse KT 7.4.6 põhjal, aga teise oma koondub eelmises lõigus näidatu põhjal). Seega I võrdluslause KT 7.4.1 põhjal integraal

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$$

hajub.

Kokkuvõttes oleme saanud, et vaadeldav integraal koondub tingimisi.

Ülesanded

Arvutada järgmised integraalid või veenduda nende hajuvuses (vt. näited N 7.4.1 ja N 7.4.2).

1029. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

1030. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

1031. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

1032. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$

1033. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

1034. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$

1035. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

1036. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

1037. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

1038. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

1039. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

1040. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

1041. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x}\,dx$

1042. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

Otsustada, kas järgmised integraalid koonduvad või hajuvad (vt. näited N 7.4.3 ja N 7.4.4).

1043. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

1044. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3+1}$

1045. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

1046. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^2}$

1047. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

1048. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

1049. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{13}\,dx}{(x^5+2x^3+4)^2}$

1050. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$

Otsustada, kas järgmised integraalid koonduvad absoluutselt või tingimisi (vt. näited N 7.4.5 ja N 7.4.6).

1051. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

1052. $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

1053. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x^2}{1+x^4}\,dx$

1054. $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$

1055. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

1056. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x^3}{1+x^3}\,dx$

§ 7.5. MÄÄRATUD INTEGRAALI LIGIKAUDNE ARVUTAMINE

Vajadus määratud integraali

$$J=\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{57}$$

ligikaudseks arvutamiseks tekib siis, kui funktsiooni f algfunktsiooni F ei saa avaldada elementaarfunktsioonides või ei saa seda küllalt lihtsalt teha.

Jaotame lõigu $[a, b]$ n võrdseks osaks punktidega

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

ja arvutame funktsiooni väärtused

$$y_k=f(x_k).$$

1. Ristkülikvalem. Kui funktsioonil f on olemas pidev tuletis $f'(x)$ lõigus $[a, b]$, siis

$$J=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})+\alpha_n, \tag{58}$$

kus

$$\alpha_n=\frac{(b-a)^2}{2n}f'(\xi), \qquad a\leqslant\xi\leqslant b$$

2. Trapetsvalem. Kui funktsioonil f on olemas pidev teine tuletis lõigus $[a, b]$, siis

$$J=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+\alpha_n, \tag{59}$$

kus

$$\alpha_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \qquad a\leqslant\xi\leqslant b.$$

3. Parabool- ehk Simpsoni valem. Kui n on paarisarv ja funktsioonil f on olemas pidev neljas tuletis $f^{(4)}(x)$ lõigus $[a, b]$, siis

$$J=\frac{b-a}{3n}\left[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+\right.$$
$$\left.+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})\right]+\alpha_n, \qquad (60)$$

kus

$$\alpha_n=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi), \qquad a\leqslant\xi\leqslant b.$$

Ühe ja sama n korral on trapetsvalem täpsem ristkülikvalemist ja paraboolvalem omakorda täpsem trapetsvalemist.

Jättes võrdustes (58)—(60) ära liikmed α_n, saame ligikaudsed valemid integraali (57) arvutamiseks. Seejuures α_n jaoks antud avaldisi saab kasutada tekkinud vea hindamiseks.

Ülesanded

1057. Võttes $n=12$, arvutada ristkülikvalemi abil integraal

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

ja võrrelda tulemust täpse vastusega.

Arvutada trapetsvalemi abil järgmised integraalid ja hinnata tekkinud viga.

1058. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, $(n=8)$ **1059.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n=12)$

Arvutada paraboolvalemi abil järgmised integraalid.

1060. $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$ $(n=4)$ **1061.** $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx$ $(n=6)$

1062. Arvutada integraal

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

täpsusega kuni 0,001.

1063. Kasutades valemit

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

arvutada arv π täpsusega 0,00001.

VIII. INTEGRAALARVUTUSE RAKENDUSI

§ 8.1. TASANDILISE KUJUNDI PINDALA ARVUTAMINE

Olgu antud tasandiline kujund, s.o. tasandil asetsev punktide hulk.

D 8.1.1. *Öeldakse, et tasandiline kujund on* tõkestatud, *kui teda saab paigutada lõpliku raadiusega ringi. Vastasel juhul öeldakse, et ta on* tõkestamata.

Tasandilise tõkestatud kujundi K pindala mõiste defineerimisel võtame aluseks hulknurga pindala, milleks loeme teda moodustavate kolmnurkade pindalade summa.

Olgu hulknurgad A ja B pindaladega vastavalt S_A ja S_B sellised, et $A \subset K \subset B$. Siis alati

$$\sup_{A \subset K} S_A \leqslant \inf_{B \supset K} S_B.$$

D 8.1.2. *Kui kehtib võrdus*

$$\sup_{A \subset K} S_A = \inf_{B \supset K} S_B,$$

siis öeldakse, et kujund K on mõõtuv, *ja arvu*

$$S = \sup_{A \subset K} S_A = \inf_{B \supset K} S_B$$

nimetatakse kujundi K pindalaks.

Kujundi pindalal on järgmised omadused. Olgu mõõtuvate kujundite K, K_1 ja K_2 pindalad vastavalt S, S_1 ja S_2.

Pindala monotoonsus. Kui $K_1 \subset K_2$, siis $S_1 \leqslant S_2$.

Pindala aditiivsus. Kui kujund K jaotub osadeks K_1 ja K_2, millel pole ühiseid sisepunkte, siis $S = S_1 + S_2$.

Järgmine definitsioon annab pindala mõiste, kui kujund K on tasandiline joon, s.o. tasandil asetsev joon.

D 8.1.3. *Öeldakse, et joone pindala on null, kui leidub kui tahes väikese pindalaga hulknurk, mis sisaldab seda joont.*

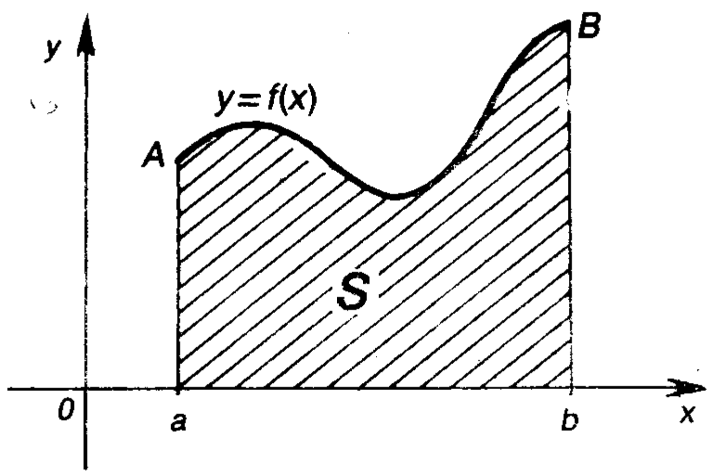
Sileda joone pindala on null.

T 8.1.1. *Tasandilise tõkestatud kujundil on pindala olemas siis ja ainult siis, kui tema rajajoone pindala on null.*

Tasandilise kujundi pindala arvutamiseks kasutatakse järgmisi valemeid.

1. Olgu funktsioon $f(x) \geqslant 0$ pidev lõigus $[a, b]$. Siis (joon 8.1) kõvertrapets $abBA$, s.o. kujund, mis on piiratud ülalt joonega $y=f(x)$ ja alt x-teljega ning vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x=a$ ja $x=b$, on mõõtuv ja tema pindala S avaldub valemiga

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$



Joon. 8.1

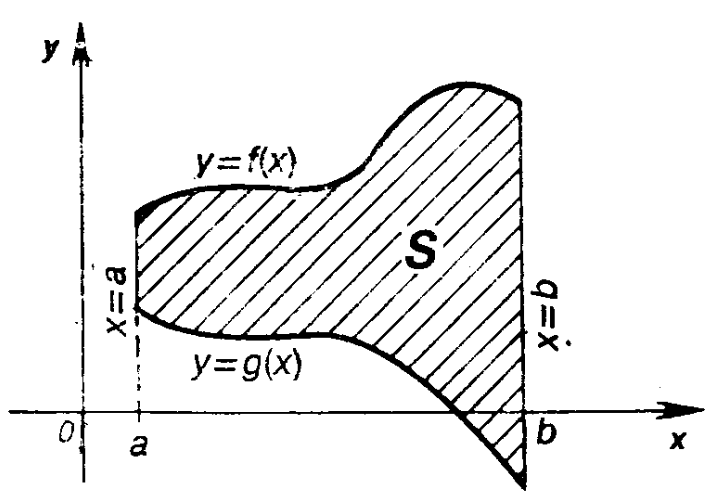
Valem (1) annab määratud integraali geomeetrilise tähenduse.

Kui joon $y=f(x)$ on antud parameetriliste võrranditega

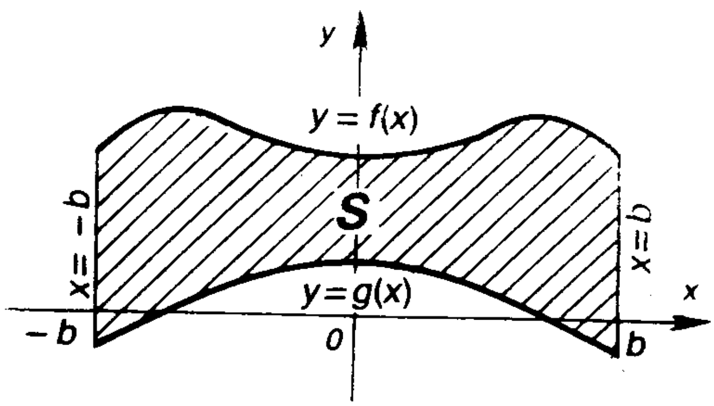
$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in[\alpha, \beta],$$

siis valemi (1) kasutamiseks teeme integraalis muutujate vahetuse $x=x(t)$, siis $dx=x'(t)\,dt$ ja $y=y(t)$ (vt. näide N 8.1.2).

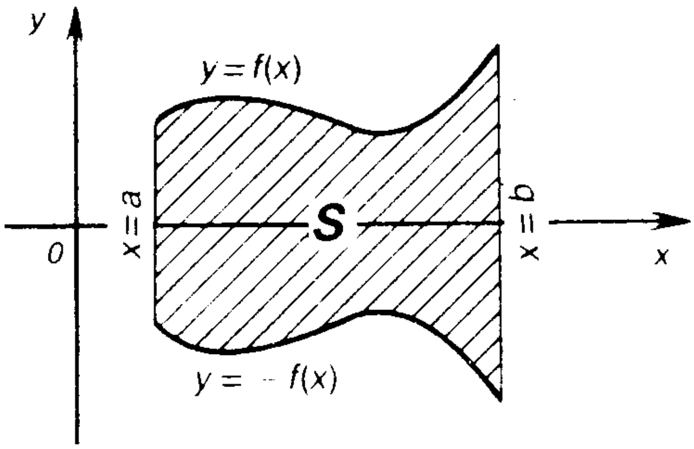
2. Olgu funktsioonid f ja g pidevad lõigus $[a, b]$, kus $g(x) \leqslant f(x)$. Siis kõvertrapets, mis on piiratud (joon. 8.2) ülalt ja alt vastavalt joontega $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ ning vasakult ja pa-



Joon. 8.2



Joon. 8.3



Joon. 8.4

remalt vastavalt sirgetega $x=a$ ja $x=b$, on mõõtuv ja tema pindala S avaldub valemiga

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Valemist (2) järeldub valem (1), kui $g(x)=0$ lõigus $[a, b]$, s. t. kui joon $y=g(x)$ on x-telg.

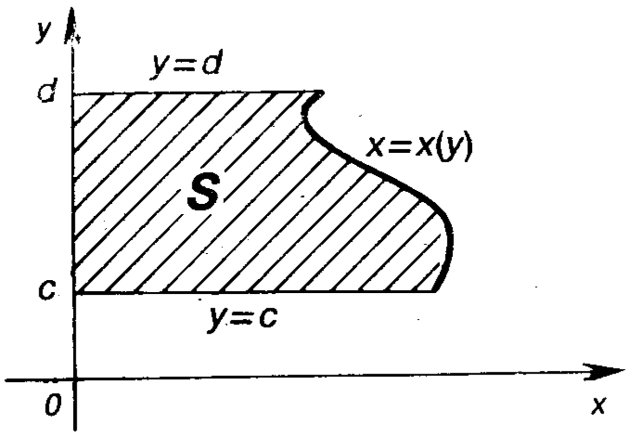
Kui kõvertrapets on sümmeetriline y-telje suhtes (joon. 8.3), siis valem (2) omandab kuju

$$S=2\int_0^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

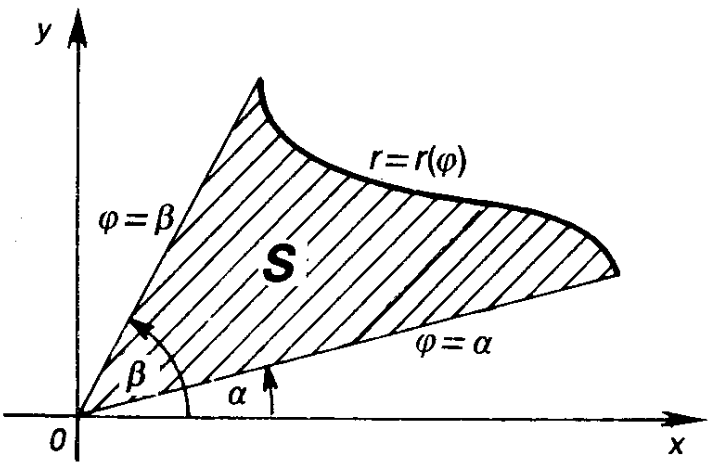
Kui aga kõvertrapets on sümmeetriline x-telje suhtes (joon. 8.4), siis valem (2) omandab kuju

$$S=2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

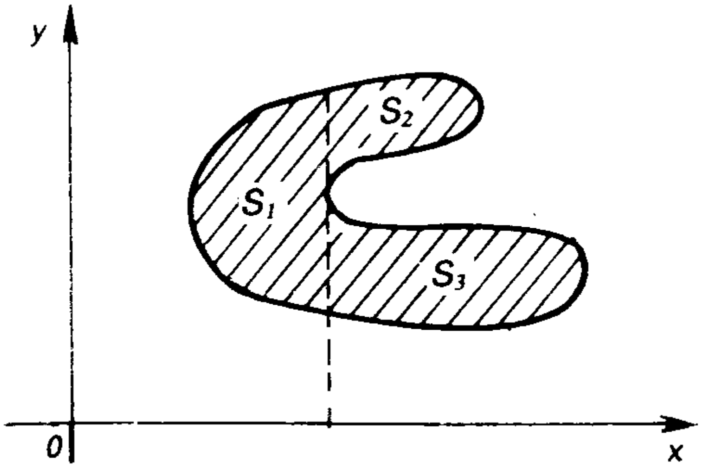
3. Olgu funktsioon $x(y)\geqslant 0$ pidev lõigus $[c, d]$. Siis kõvertrapets, mis on piiratud (joon. 8.5) alt ja ülalt vastavalt sirgetega $y=c$ ja $y=d$ ning vasakult y-teljega ja paremalt joonega $x=x(y)$, on mõõtuv ja tema pindala S avaldub valemiga



Joon. 8.5



Joon. 8.6



Joon. 8.7

$$S=\int_c^d x\,dy. \tag{5}$$

4. Olgu funktsioon $r(\varphi)\geqslant 0$ pidev lõigus $[\alpha, \beta]$. Siis sektor, mis on piiratud (joon. 8.6) polaarkoordinaatides antud kiirtega $\varphi=\alpha$ ja $\varphi=\beta$ ning joonega $r=r(\varphi)$, on mõõtuv ja tema pindala S avaldub valemiga

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi. \tag{6}$$

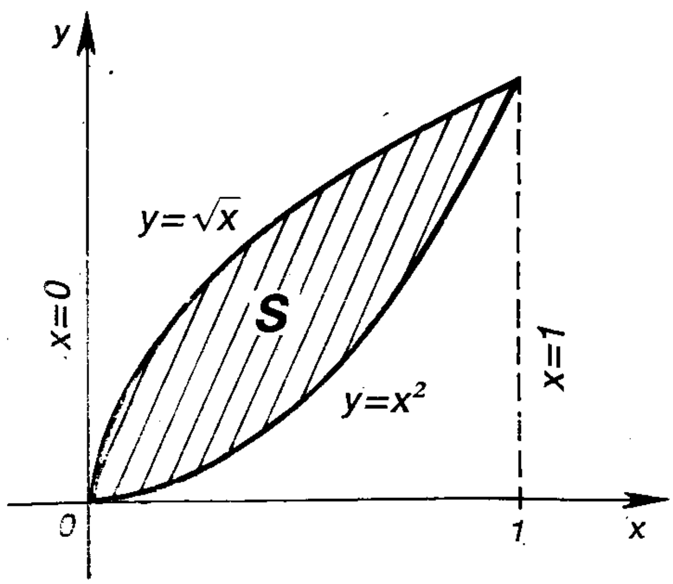
5. Kui tasandilist kujundit saab jaotada lõplikuks arvuks kõvertrapetsiteks, siis see kujund on mõõtuv ja pindala aditiivsuse omaduse põhjal võrdub tema pindala S üksikute kõvertrapetsite pindalade summaga. Näiteks joonisel 8.7 antud kujund on jaotatud kolmeks kõvertrapetsiks, mille pindalad S_1, S_2 ja S_3 on arvutatavad valemiga (2). Seega selle kujundi pindala on $S=S_1+S_2+S_3$.

Näited

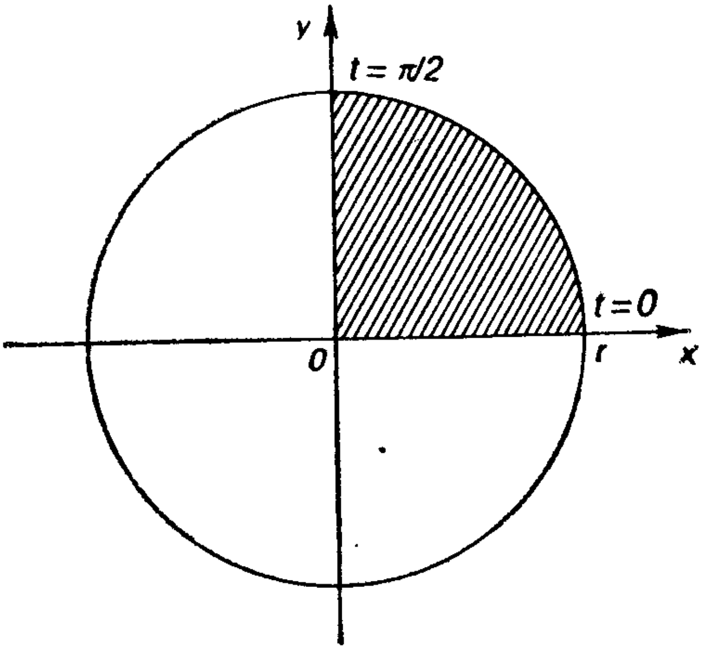
N 8.1.1. Leida joontega $y=x^2$ ja $y^2=x$ piiratud kujundi pindala.

L a h e n d u s. Joonistame kõigepealt vaadeldava kujundi (joon. 8.8). Jooniselt näeme, et kujund on kõvertrapets, mis on piiratud ülalt joonega $y=\sqrt{x}$ ja alt joonega $y=x^2$ ning vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x=0$ ja $x=1$. Et funktsioonid $y=x$ ja $y=x^2$ on pidevad (mistõttu kujund on mõõtuv), siis saame kujundi pindala arvutada valemi (2) järgi.

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}.$$



Joon. 8.8



Joon. 8.9

N 8.1.2. Leida ringi pindala, kui ringi raadius on r.

L a h e n d u s. Paigutame ringi xy-tasandil keskpunktiga koordinaatide alguspunkti (joon. 8.9). Meil piisab leida esimeses veerandis oleva ringi osa pindala, hiljem korrutame selle neljaga.

Kasutame valemit (1). Selleks võtame ringi vaadeldavat osa piirava ringjoone võrrandi parameetrilisel kujul $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in[0,\pi/2]$ ja teeme valemis (1) muutuja vahetuse $x=r\cos t$, siis $dx=-r\sin t\,dt$ ja $y=r\sin t$. Et punktile a vastab $t=\pi/2$ ja punktile b vastab $t=0$, siis valemi (1) põhjal

$$S=4\int_{\pi/2}^{0} r\sin t(-r)\sin t\,dt=4r^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=\pi r^2.$$

Ülesanded

Leida järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad (vt. näited N 8.1.1 ja N 8.1.2).

1064. $y=x^2$, $y^2=8x$

1065. $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$

1066. $y=2x-x^2$, $x+y=0$

1067. $y=x^2$, $y=x^3$

1068. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\pi/2$, $x=\pi/2$

1069. $y=\sin x$, $y=-\sin x$, $x=0$, $x=\pi$

1070. $y=|\ln x|$, $y=0$, $x=1/e$, $x=e$

1071. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (ellips)

1072. $y^2=x^2(a^2-x^2)$

1073. $y=x^2\ln x$, $y=0$

1074. $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioid)

1075. $r=a\sin 3\varphi$ (kolmeleheline roos)

1076. $r=2a(2+\cos\varphi)$

1077. $(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0$

1078. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (Bernoulli lemniskaat)

1079. Leida joone $x=\ln t$, $y=e^2-t^2$, $t\in[1,e]$ ja koordinaattelgedega piiratud kujundi pindala.

1080. Leida tsükloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ühe kaare ja x-teljega piiratud kujundi pindala.

1081. Leida joonega $x^2y^2=4(x-1)$ ja selle käänupunkte läbiva sirgega piiratud kujundi pindala.

1082. Kujund on piiratud joonega $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ ja x-telje lõiguga, mis ühendab selle joone kahte järjestikulist lõikepunkti x-teljega. Leida kujundi pindala.

Leida järgmiste joonte ja nende asümptootidega piiratud kujundite pindalad.

1083. $(1+x^2)y=1$

1084. $y=xe^{-x^2/2}$

1085. $xy^2=8-4x$

1086. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$

§ 8.2. KEHA RUUMALA ARVUTAMINE

D 8.2.1. *Öeldakse, et ruumiline kujund ehk keha on* tõkestatud, *kui teda saab paigutada lõpliku raadiusega kerasse. Vastasel juhul öeldakse, et ta on* tõkestamata.

Tõkestatud keha K ruumala mõiste defineerimisel lähtume hulktahuka ruumalast, milleks loeme hulktahukat moodustavate püramiidide ruumalade summa.

Olgu hulktahukad A ja B ruumaladega vastavalt V_A ja V_B sellised, et $A\subset K\subset B$. Siis alati

$$\sup_{A\subset K} V_A \leqslant \inf_{B\supset K} V_B.$$

D 8.2.2. *Kui kehtib võrdus*

$$\sup_{A\subset K} V_A = \inf_{B\supset K} V_B,$$

siis öeldakse, et keha K on mõõtuv, *ja arvu*

$$V=\sup_{A\subset K} V_A = \inf_{B\supset K} V_B$$

nimetatakse keha K ruumalaks.

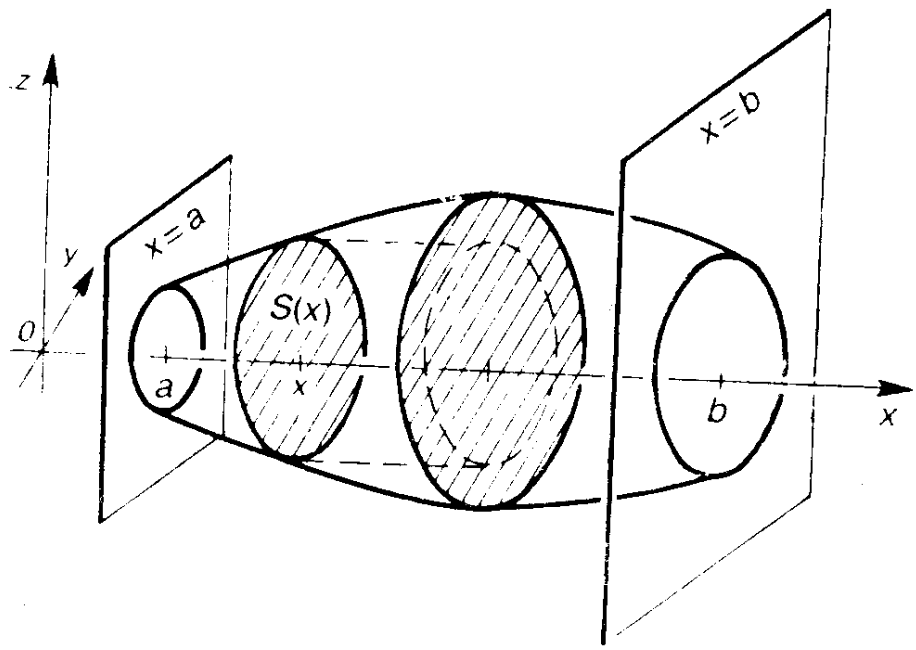
Keha ruumalal on järgmised omadused. Olgu kehade K, K_1 ja K_2 ruumalad vastavalt V, V_1 ja V_2.

Ruumala monotoonsus. Kui $K_1\subset K_2$, siis $V_1\leqslant V_2$.

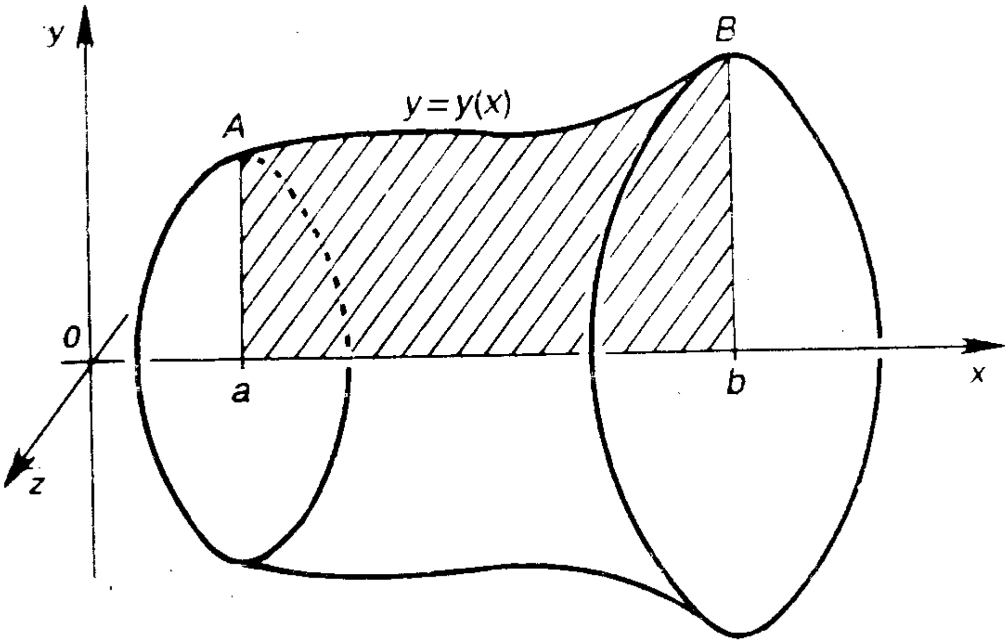
Ruumala aditiivsus. Kui keha K jaotub osadeks K_1 ja K_2, millel pole ühiseid sisepunkte, siis $V=V_1+V_2$.

Keha ruumala arvutamiseks kasutatakse järgmisi valemeid.

1. Olgu keha piiratud tasanditega $x=a$ ja $x=b$ (joon. 8.10). Vaatleme keha lõikeid tasanditega, mis on risti x-teljega. Kohal x võetud lõike pindala olgu $S(x)$. Eeldame veel, et iga kahe lõike korral ühe projektsioon teisele asetseb täielikult selle sees (joon.



Joon. 8.10



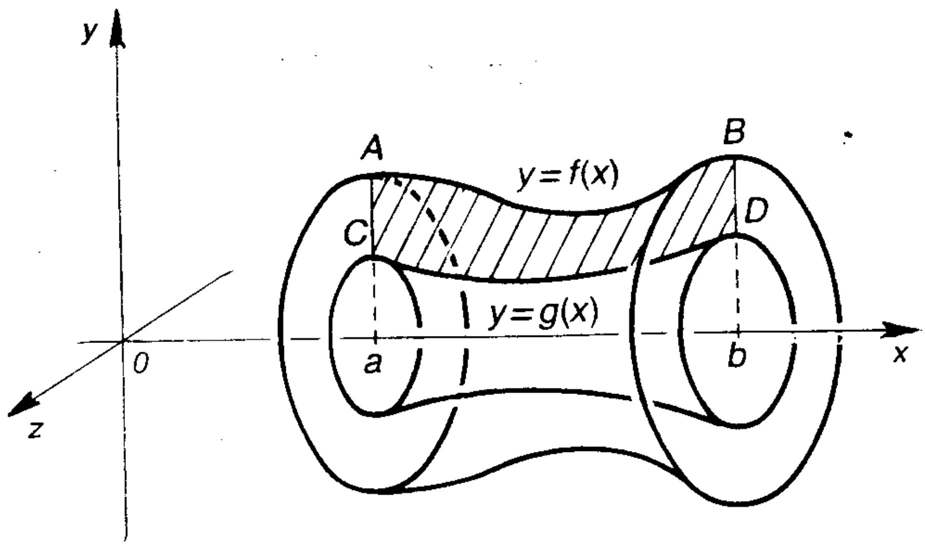
Joon. 8.11

8.10). Kui $S(x)$ on pidev funktsioon oma määramispiirkonnas $[a, b]$, siis vaadeldava keha ruumala V avaldub valemiga

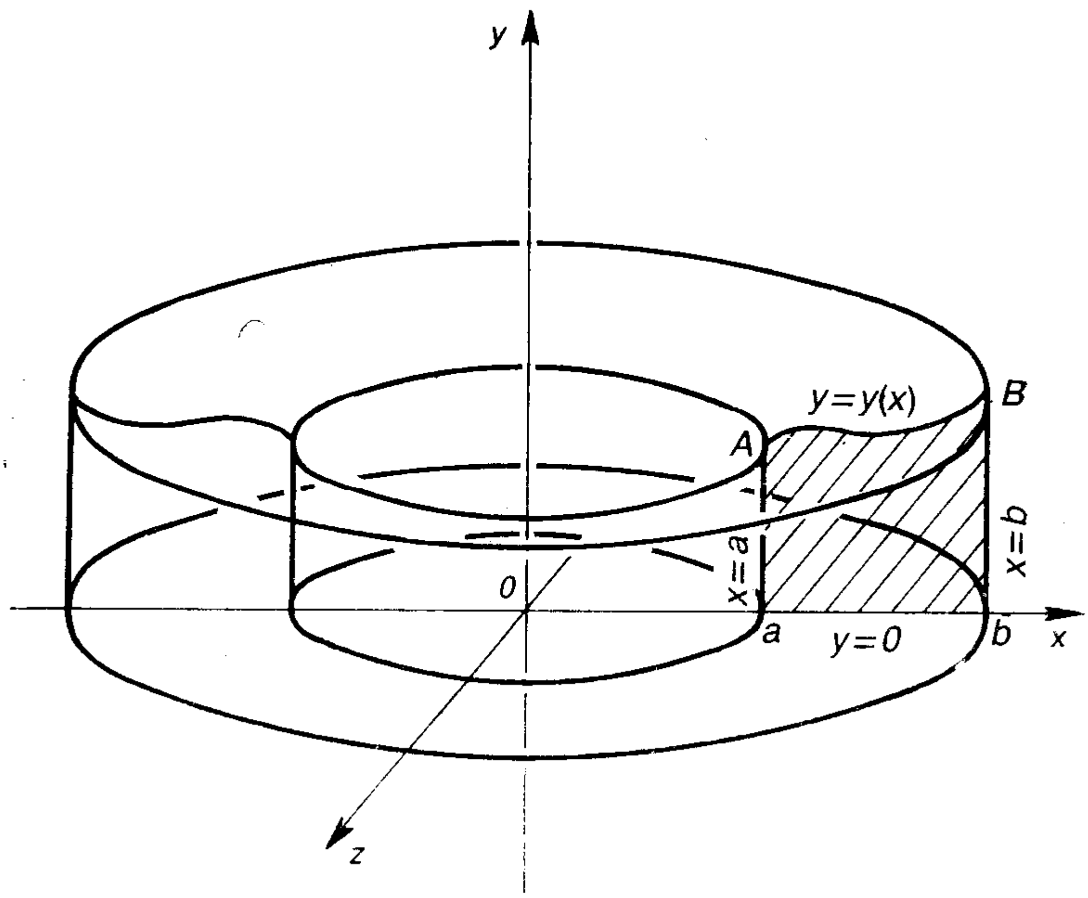
$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{7}$$

2. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$. Vaatleme pöördkeha, mis tekib kõvertrapetsi $abBA$ pöörlemisel ümber x-telje (joon. 8.11). See pöördkeha on mõõtuv ja tema ruumala V avaldub valemiga

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx. \tag{8}$$



Joon. 8.12



Joon. 8.13

Valem (8) on erijuhtum valemist (7).

3. Olgu funktsioonid f ja g pidevad lõigus $[a, b]$, kus $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Vaatleme pöördkeha, mis tekib kõvertrapetsi $CDBA$ pöörlemisel ümber x-telje (joon. 8.12). See pöördkeha on mõõtuv ja tema ruumala V avaldub valemiga

$$V=\pi\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\,dx. \tag{9}$$

Kui $g(x)=0$ lõigus $[a, b]$, siis valemist (9) saame valemi (8).

4. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$. Vaatleme pöördkeha, mis tekib kõvertrapetsi $abBA$ pöörlemisel ümber y-telje (joon. 8.13). See pöördkeha on mõõtuv ja tema ruumala V avaldub valemiga

$$V=2\pi\int_a^b xy\,dx. \tag{10}$$

Näited

N 8.2.1. Leida püramiidi ruumala V, kui püramiidi põhja pindala on S ja kõrgus on h ning püramiidi tipu projektsioon püramiidi põhjale asetseb viimase sees.

Lahendus. Paigutame püramiidi nii, et tema põhi asetseks yz-tasandil ja tipp oleks x-telje positiivsel poolel (joon. 8.14). Võtame kohal x püramiidi lõike risti x-teljega. Selle lõike pindala $S(x)$ leidmiseks kasutame geomeetriast teadaolevat tulemust, et püramiidi kahe ristlõike pindalade suhe võrdub nende kauguste (püramiidi tipust) suhte ruuduga. Seepärast

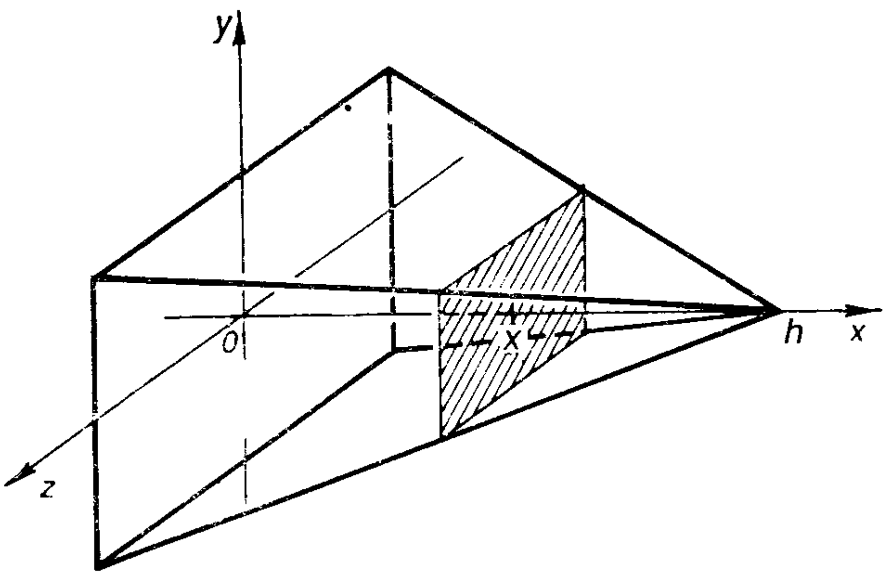
$$\frac{S(x)}{S}=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2,$$

kust

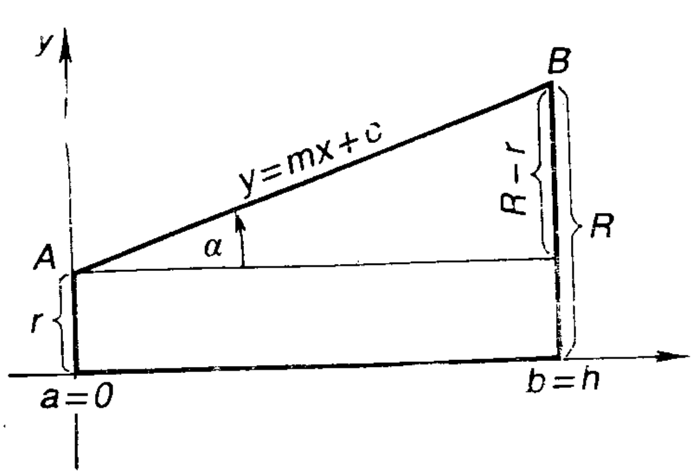
$$S(x)=\frac{S}{h^2}(x-h)^2.$$

Et $S(x)$ on pidev funktsioon lõigus $[0, h]$ ja iga kahe lõike korral ühe projektsioon teisele asetseb täielikult selle sees, siis võime kasutada valemit (7), mis annab

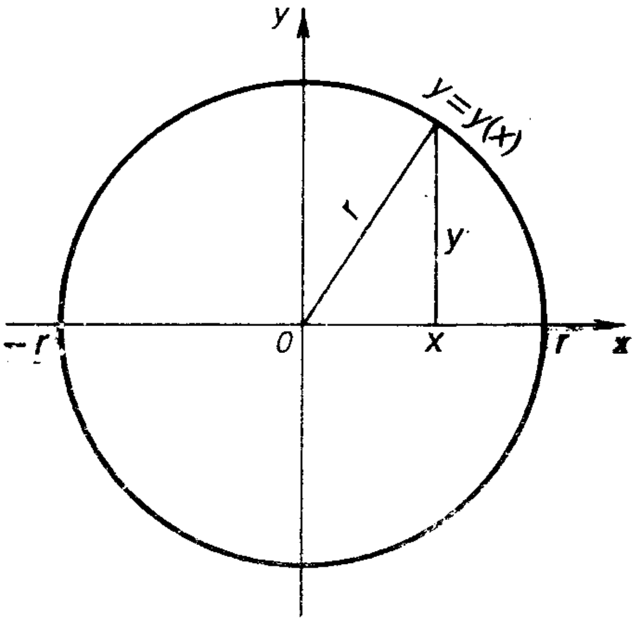
$$V=\frac{S}{h^2}\int_0^h (x-h)^2\,dx=\frac{S}{3h^2}(x-h)^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}Sh.$$



Joon. 8.14



Joon. 8.15



Joon. 8.16

N 8.2.2. Leida pöördtüvikoonuse ruumala V, kui koonuse põhjade raadiused on R ja r ning kõrgus on h.

L a h e n d u s. Pöördtüvikoonus tekib trapetsi $abBA$ pöörlemisel ümber x-telje (joon. 8.15). Leiame sirge AB võrrandi $y=mx+c$. Saame:

$$m=\tan\alpha=\frac{R-r}{h}, \qquad c=r.$$

Seega valemi (8) põhjal

$$V=\pi\int_0^h (mx+c)^2\,dx=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2 dx=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

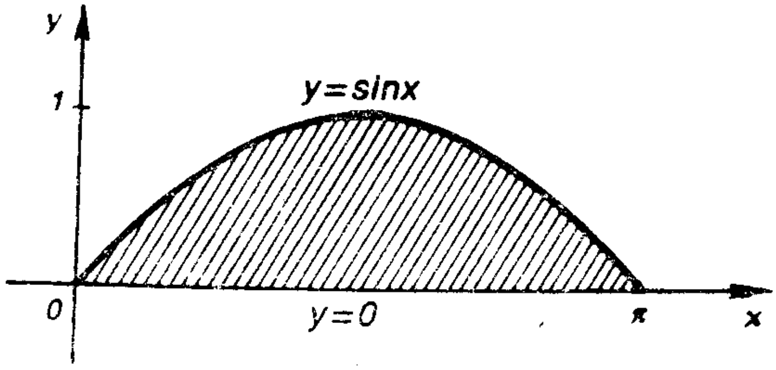
N 8.2.3. Leida kera ruumala, kui kera raadius on R.

L a h e n d u s. Kasutame valemit (8). Selleks vaatleme kera kui ringi $x^2+y^2\leqslant R^2$ pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördkeha. Jooniselt 8.16 on näha, et $y^2=r^2-x^2$. Kujund on sümmeetriline, seetõttu võime leida poole kera ruumalast, kui $x \in [0, r]$, ja võtta selle kahekordselt. Valemi (8) põhjal on siis

$$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

N 8.2.4. Leida ruumala kehal, mis tekib joontega $y = \sin x$, kus $x \in [0, \pi]$, ja $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber y-telje.

L a h e n d u s. Joonistame kõigepealt vaadeldava kujundi (joon. 8.17).



Joon. 8.17

Et funktsioon $y = \sin x$ on pidev, siis tekkiva pöördkeha ruumala leidmiseks võime kasutada valemit (10). Saame:

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi^2.$$

Ülesanded

Leida järgmiste pindadega piiratud kehade ruumalad (a, b, c on positiivsed konstandid) (vt. näide N 8.2.1).

1087. $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1, \quad x = 0, \quad z = 0$

1088. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a} x \quad (x \geqslant 0), \quad z = 0$

1089. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (ellipsoid)

1090. $x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$

Leida ruumalad kehadel, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x-telje (vt. näide N 8.2.2).

1091. $y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \quad y = 0$

1092. $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

1093. $y = x^2, \quad y^2 = x$

1094. $y = e^{-x} \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad y = 0$

1095. Leida kera segmendi ruumala, kui kera raadius on r ja segmendi kõrgus on h (vt. näide N 8.2.3).

1096. Leida kera sektori ruumala, kui kera raadius on r ja sektorit moodustava pöördkoonuse kõrgus on h.

Leida, missuguse ruumalaga kehad tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber y-telje (vt. näide N 8.2.4).

1097. $y=e^{-x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1$

1098. $y=\ln x,\ y=0,\ x=1,\ x=e$

1099. $y^2+x-4=0,\ x=0$

1100. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0,\ y=b$

1101. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ x=0,\ y=0$

1102. $x=a\sin^3 t,\ y=b\cos^3 t,\ t\in[0, 2\pi]$

1103. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0, 2\pi];\ y=0$

§ 8.3. Joone kaare pikkus

Olgu pideva joone kaar AB antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta],$$

kus parameetri väärtusele $t=\alpha$ vastab kaare otspunkt A ja väärtusele $t=\beta$ kaare otspunkt B. Jaotame lõigu $[\alpha,\beta]$ osadeks punktidega

$$\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta.$$

Olgu

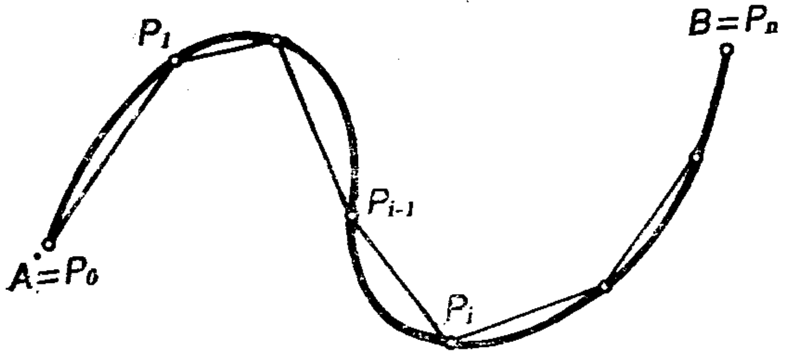
$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1}).$$

Leiame kaarel AB punktid P_i, mis vastavad parameetri väärtustele t_i, ja ühendame nad sirglõikudega (joon. 8.18). Saame kõõlmurdjoone, mille pikkus olgu p.

D 8.3.1. *Joone kaare AB* pikkuseks s *nimetatakse piirväärtust*

$$s=\lim_{\lambda\to 0} p.$$

Kaart, millel on olemas lõplik pikkus, nimetatakse sirgestuvaks.



Joon. 8.18

Joone kaare pikkusel on järgmised omadused. Olgu kaarte AB, A_1B_1 ja A_2B_2 pikkused vastavalt s, s_1 ja s_2.

Pikkuse monotoonsus. Kui kaar A_1B_1 on kaare A_2B_2 osa, siis $s_1 \leqslant s_2$.

Pikkuse aditiivsus. Kui kaar AB jaotub kaheks kaareks A_1B_1 ja A_2B_2, siis $s = s_1 + s_2$.

Joone kaare pikkuse arvutamiseks kasutatakse järgmisi valemeid.

1. Olgu funktsioonil $y(x)$ olemas pidev tuletis $y' = y'(x)$ lõigus $[a, b]$. Siis joon

$$y = y(x), \qquad x \in [a, b] \tag{11}$$

on sirgestuv ja tema pikkus s avaldub valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{12}$$

2. Olgu funktsioonidel $x(t)$ ja $y(t)$ olemas pidevad tuletised $x' = x'(t)$ ja $y' = y'(t)$ lõigus $[\alpha, \beta]$. Siis joon

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta] \tag{13}$$

on sirgestuv ja tema pikkus s avaldub valemiga

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt. \tag{14}$$

3. Olgu funktsioonil $r(\varphi)$ olemas pidev tuletis $r' = r'(\varphi)$ lõigus $[\alpha, \beta]$. Siis joon, mille võrrand polaarkoordinaatides on

$$r = r(\varphi), \qquad \varphi \in [\alpha, \beta] \tag{15}$$

on sirgestuv ja tema pikkus s avaldub valemiga

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{16}$$

Näited

N 8.3.1. Leida sirglõigu

$$y = \sqrt{3}\,x + 2, \qquad x \in [0, 2]$$

pikkus.

L a h e n d u s. Joone võrrand on kujul (11), seepärast kasutame valemit (12). Et $y'^2 = 3$, siis valemi (12) põhjal

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+3}\, dx = 2 \int_0^2 dx = 4.$$

N 8.3.2. Leida ringjoone

$$x^2 + y^2 = r^2$$

pikkus

Lahendus. Esitame ringjoone võrrandi parameetrilisel kujul

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad t\in[0,2\pi]$$

ja arvutamiseks kasutame valemit (14). Et $x'=-r\sin t$, $y'=r\cos t$, siis

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt=r\int_0^{2\pi}dt=2\pi r.$$

Ülesanded

Leida järgmiste joonte märgitud kaarte pikkused (vt. näide N 8.3.1).

1104. $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$ 1105. $y=\ln\cos x$ $\left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$

1106. $y=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]$ $(1\leqslant x\leqslant 1+a)$

1107. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$

Leida järgmiste joonte pikkused (vt. näide N 8.3.2).

1108. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$
1109. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (astroid)
1110. $r=\varphi^2$, $\varphi\in[0,\sqrt{5}]$
1111. $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioid)
1112. Leida hüperboolse spiraali $r\varphi=1$ kaare pikkus punktide (2, 1/2) ja (1/2, 2) vahel.
1113. Leida, kui pikk on logaritmilise spiraali $r=ae^{m\varphi}$ kaar, mis asetseb ringis $r=a$.
1114. Leida joone

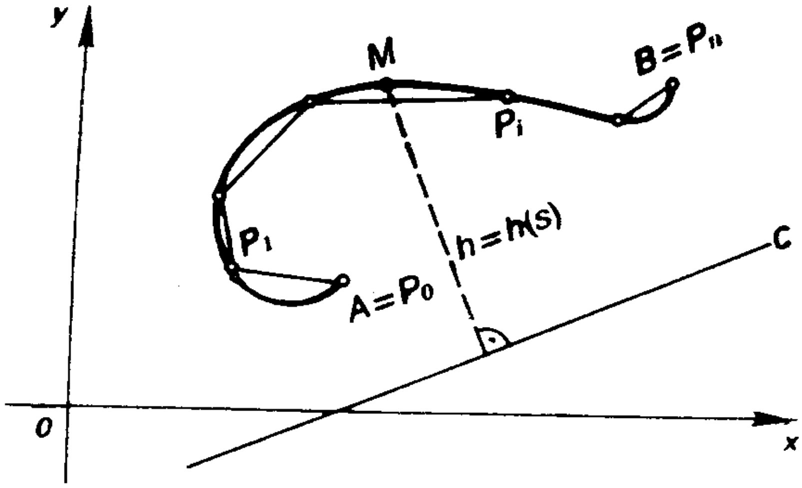
$$x=\int_1^t\frac{\cos z}{z}\,dz,\quad y=\int_1^t\frac{\sin z}{z}\,dz$$

kaare pikkus nullpunkti ja selle lähima punkti vahel, kus puutuja on vertikaalne.
1115. Tõestada, et sinusoidi $y=\sin x$ ühele perioodile vastava kaare pikkus on võrdne ellipsi pikkusega, kui ellipsi pooltelјed on $\sqrt{2}$ ja 1.

§ 8.4. PÖÖRDPINNA PINDALA

Olgu xy-tasandil antud sirgestuv joon AB ja mingi seda joont mittelõikav sirge c. Jaotame joone AB punktidega P_i osadeks ja moodustame kõõlmurdjoone nagu joone kaare pikkuse defineerimisel paragrahvis 8.3 (joon. 8.19).

Joone AB pöörlemisel ümber sirge c tekib pöördpind T, aga kõõlmurdjoone pöörlemisel tekib tüvikoonuste külgpindadest koosnev pöördpind K.



Joon. 8.19

D 8.4.1. P ö ö r d p i n n a T p i n d a l a k s *nimetatakse pöördpinna K pindala piirväärtust, kui kaarte $P_{i-1}P_i$ maksimaalne pikkus läheneb piiramata nullile.*

Pöördpinna T pindala arvutamiseks kasutatakse järgmisi valemeid.

1. Olgu joone AB punktid M sirgest c kaugusel $h=h(s)$, $s\in[0, l]$, kus s on kaare AM pikkus (joon. 8.19) ja l on kogu joone AB pikkus. Siis pöördpinna T pindala S avaldub valemiga

$$S=2\pi\int_0^l h(s)\,ds. \tag{17}$$

2. Olgu x-telg sirgeks c ja olgu joon AB antud ilmutatud võrrandiga

$$y=y(x), \quad x\in[a, b], \tag{18}$$

kus punktile A vastab argumendi väärtus $x=a$ ja punktile B väärtus $x=b$. Kui funktsioonil (18) on olemas pidev tuletis, siis valem (17) omandab kuju

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{19}$$

3. Olgu x-telg sirgeks c ja olgu joon AB antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in[\alpha, \beta] \tag{20}$$

kus punktile A vastab parameeter $t=\alpha$ ja punktile B parameeter $t=\beta$. Kui funktsioonidel (20) on olemas pidevad tuletised, siis valem (17) omandab kuju

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{21}$$

Kui y-telg on sirgeks c, siis samadel tingimustel

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta x\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{22}$$

4. Olgu polaartelg sirgeks c ja olgu joone AB võrrand polaarkoordinaatides

$$r=r(\varphi), \quad \varphi\in[\alpha,\beta] \tag{23}$$

kus punktile A vastab $\varphi=\alpha$ ja punktile B vastab $\varphi=\beta$. Kui funktsioonil (23) on olemas pidev tuletis, siis valem (17) omandab kuju

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \tag{24}$$

N 8.4.1. Leida sfääri

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

pindala.

L a h e n d u s. Seda sfääri võib vaadelda pöördpinnana, mis tekib ringjoone $x^2+y^2=r^2$ pöörlemisel ümber x-telje. Võtame sellest ringjoonest esimese veerandi parameetrilisel kujul

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t, \quad t\in[0,\pi/2].$$

Selle veerandi pöörlemisel ümber x-telje saame pool sfääri pinnast. Arvutamiseks kasutame valemit (21); kogu sfääri pindala saamiseks korrutame valemis olevat integraali kahega. Et $x'^2+y'^2=r^2$, siis

$$S=4\pi\int_0^{\pi/2} r\sin t\, r\,dt=4\pi r^2.$$

Ülesanded

Leida järgmiste joonte pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördpindade pindalad (vt. näide N 8.4.1).

1116. $3y-x^3=0$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ **1118.** $y=a\operatorname{ch}(x/a)$, $x\in[0,a]$

1117. $y^2=2x$ $(0\leqslant x\leqslant 3/2)$ **1119.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

1120. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $t\in[0,\pi/2]$

Leida järgmiste joonte pöörlemisel ümber y-telje tekkinud pindade pindalad.

1121. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$

1122. $x=4-t^2/2$, $y=t^3/3$, $t\in[0,2\sqrt{2}]$

1123. Leida kardioidi $r=a(1+\cos\varphi)$ pöörlemisel ümber polaartelje tekkinud pöördpinna pindala.

1124. Tsükloidi üks kaar pöörleb ümber oma sümmeetriatelje. Leida tekkinud pöördpinna pindala.

1125. Astroid $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ pöörleb ümber sirge $y=x$. Leida tekkinud pöördpinna pindala.

1126. Joon $y=e^{-x}$ $(x\geqslant 0)$ pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud pinna pindala.

1127. Joon $x=\cos t+\ln\tan(t/2)$, $y=\sin t$ pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud pinna pindala.

§ 8.5. MÄÄRATUD INTEGRAALI FÜÜSIKALISI RAKENDUSI

Olgu funktsioon $f(x)$ integreeruv lõigus $[a, b]$. Siis integraali aditiivsuse omaduse (§ 7.1) põhjal igas osalõigus $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ eksisteerib suurus

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx,$$

mis täidab tingimust

$$Q(\alpha, \beta) = Q(\alpha, c) + Q(c, \beta)$$

iga $c \in [\alpha, \beta]$ korral.

Selliseid suurusi $Q(\alpha, \beta)$ nimetatakse **aditiivseiks lõigust $[\alpha, \beta]$ sõltuvateks suurusteks.**

Näiteks joone kaare pikkus, tasandilise kujundi pindala, keha ruumala, pöördkeha pindala, kujundite mass, materiaalse punkti liikumisel jõu poolt tehtud töö jne. on aditiivsed lõigust sõltuvad suurused.

Järgmine teoreem annab eeskirja väärtuse $Q = Q(a, b)$ arvutamiseks, kui on teada väärtus

$$\Delta Q = Q(x, x + \Delta x)$$

suvalisel osalõigul $[x, x + \Delta x]$ pikkusega Δx.

T 8.5.1. *Kui leidub selline lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon $q(x)$, et kehtib võrdus*

$$\Delta Q = q(x)\Delta x + \alpha, \tag{25}$$

kus $\alpha = o(\Delta x)$, siis

$$Q = \int_{a}^{b} q(x)\, dx. \tag{26}$$

Seos (25) tähendab ühest küljest, et kehtib ligikaudne võrdus $\Delta Q \approx q(x)\Delta x$, ja teisest küljest, et funktsiooni $Q(a, x)$ diferentsiaal on $dQ(a, x) = q(x)\Delta x$.

Seega suuruse Q leidmiseks lõigus $[a, b]$ teoreemi T 8.5.1 abil tuleb võrduse (25) järgi leida see suurus ligikaudu kujul $q(x)\Delta x$ kui tahes väikeses osalõigus $[x, x + \Delta x]$ pikkusega Δx. Sageli saadakse seos $q(x)\Delta x$ intuitiivselt, hindamata tehtavat viga α (vt. näide N 8.5.2).

Vaatleme xy-tasandil asetsevate geomeetriliste kujunditega seotud füüsikalisi suurusi ja nende leidmist. Eeldame, et need kujundid on **homogeensed**, s.t. mass täidab neid ühtlaselt tihedusega $\varrho = \text{const}$. Kui $\varrho = 1$, siis joone mass langeb arvuliselt kokku tema pikkusega ja tasandilise kujundi mass tema pindalaga ning keha mass tema ruumalaga.

1. Staatilised momendid. Materiaalse punkti P massiga m **staatiliseks momendiks** telje l suhtes nimetatakse suurust $M_l = md$, kus d on punkti P kaugus teljest.

Kui leitakse mitme punkti staatiliste momentide summat, võetakse ühel pool telge olevate punktide kaugused pluss- ja teisel pool telge olevate punktide kaugused miinusmärgiga.

Kui punkti $P=(x, y)$ mass on m, siis tema staatilised momendid x- ja y-telje suhtes on

$$M_x=my, \qquad M_y=mx.$$

Olgu antud tasandiline joon $x=x(s)$, $y=y(s)$, kus $s\in[0, L]$ on joone kaare pikkus ning $x(s)$ ja $y(s)$ on pidevad funktsioonid. Selle joone staatilised momendid x- ja y-telje suhtes avalduvad valemitega

$$M_x=\varrho\int_0^L y(s)\,ds, \qquad M_y=\varrho\int_0^L x(s)\,ds, \tag{27}$$

kus ϱ on joone j o o n t i h e d u s, s.o. ühikulise pikkusega joone mass.

Kui homogeenne tasandiline joon on antud võrrandiga $y=y(x)$, $x\in[a, b]$, kus funktsioonil $y(x)$ on olemas pidev tuletis, siis tema staatilised momendid x- ja y-telje suhtes avalduvad vastavalt valemitega

$$M_x=\varrho\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad M_y=\varrho\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{28}$$

kus ϱ on joone joontihedus.

Kui homogeenne tasandiline kujund on piiratud pideva joonega $y=y(x)$, x-teljega ning sirgetega $x=a$ ja $x=b$, siis tema staatilised momendid x- ja y-telje suhtes avalduvad valemitega

$$M_x=\frac{\varrho}{2}\int_a^b y|y|\,dx, \qquad M_y=\varrho\int_a^b x|y|\,dx, \tag{29}$$

kus ϱ on kujundi p i n d t i h e d u s, s. o. ühikulise pindalaga mass.

Kui homogeenne tasandiline kujund on ülalt ja alt piiratud pidevate joontega $y=f(x)$ ja $y=g(x)>0$ ning vasakult ja paremalt sirgega $x=a$ ja $x=b$, siis tema staatilised momendid x- ja y-telje suhtes on

$$M_x=\frac{\varrho}{2}\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\,dx, \qquad M_y=\varrho\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx, \tag{30}$$

kus ϱ on kujundi pindtihedus.

2. Inertsimomendid. Materiaalse punkti P massiga m i n e r t s i m o m e n d i k s telje l suhtes nimetatakse suurust $I=md^2$, kus d on punkti P kaugus teljest l.

Kui punkti $P=(x, y)$ mass on m, siis tema inertsimomendid x- ja y-telje suhtes on

$$I_x=my^2, \qquad I_y=mx^2. \tag{31}$$

Olgu antud homogeenne tasandiline joon $x=x(s)$, $y=y(s)$, kus $s\in[0,L]$ on joone kaare pikkus ning $x(s)$ ja $y(s)$ on pidevad funktsioonid. Selle joone inertsimomendid x- ja y-telje suhtes avalduvad valemitega

$$I_x=\varrho\int_0^L y^2\,ds,\qquad I_y=\varrho\int_0^L x^2\,ds, \tag{32}$$

kus ϱ on joone joontihedus.

Kui homogeenne tasandiline joon on antud võrrandiga $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, kus funktsioonil $y(x)$ on olemas pidev tuletis, siis tema inertsimomendid x- ja y-telje suhtes on

$$I_x=\varrho\int_a^b y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,\qquad I_y=\varrho\int_a^b x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{33}$$

3. **Massikeskmed.** Tasandilise kujundi m a s s i - ehk i n e r t s i k e s k m e k s nimetatakse punkti $C=(\xi,\eta)$ koordinaatidega

$$\xi=\frac{M_y}{M},\qquad \eta=\frac{M_x}{M},$$

kus M_y ja M_x on kujundi staatilised momendid y- ja x-telje suhtes ning M on kujundi mass.

Kujundi massikeskmel $C=(\xi,\eta)$ on see omadus, et kui koondada kujundi kogu mass punkti C, siis selle punkti C staatiline moment iga telje suhtes on võrdne kujundi staatilise momendiga selle telje suhtes.

Kui kujundil on olemas sümmeetriatelg, siis läbib see tema massikeset.

Homogeense tasandilise joone $x=x(s)$, $y=y(s)$, $s\in[0,L]$, kus $x(s)$ ja $y(s)$ on pidevad funktsioonid ja s on joone kaare pikkus, massikeskme $C=(\xi,\eta)$ koordinaadid avalduvad valemitega

$$\xi=\frac{1}{L}\int_0^L x(s)\,ds,\qquad \eta=\frac{1}{L}\int_0^L y(s)\,ds, \tag{34}$$

kus L on joone pikkus.

Kui homogeenne tasandiline joon on antud võrrandiga $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, kus funktsioonil $y(x)$ on olemas pidev tuletis, siis tema massikeskme $C=(\xi,\eta)$ koordinaadid on

$$\xi=\frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx,\qquad \eta=\frac{1}{L}\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{35}$$

kus L on joone pikkus.

Kui homogeenne tasandiline joon on antud parameetriliste võrranditega $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, kus funktsioonid $x(t)$ ja $y(t)$ on olemas pidevad tuletised, siis tema massikeskme $C=(\xi,\eta)$ koordinaadid avalduvad valemiga

$$\xi=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \qquad \eta=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \tag{36}$$

kus L on joone pikkus.

T 8.5.2. (Pappose—Guldini I teoreem). *Tasandilise joone pöörlemisel teda mittelõikava ja joone tasandil asetseva telje ümber tekkinud pöördpinna pindala võrdub selle joone pikkuse ja tema massikeskme poolt moodustatud ringjoone pikkuse korrutisega.*

Kui homogeenne tasandiline kujund on piiratud ülalt ja alt joontega $y=f(x)$ ja $y=g(x)$, kus f ja g on pidevad funktsioonid, ning vasakult ja paremalt sirgetega $x=a$ ja $x=b$, siis tema massikeskme $C=(\xi, \eta)$ koordinaadid avalduvad valemitega

$$\xi=\frac{1}{S}\int_{a}^{b} x[f(x)-g(x)]\,dx, \qquad \eta=\frac{1}{2S}\int_{a}^{b}[f^2(x)-g^2(x)]\,dx, \tag{37}$$

kus S on kujundi pindala.

T 8.5.3 (Pappose—Guldini II teoreem). *Tasandilise kujundi pöörlemisel teda mittelõikava ja kujundi tasandil asetseva telje ümber tekkinud pöördkeha ruumala võrdub selle kujundi pindala ja tema massikeskme poolt moodustatud ringjoone pikkuse korrutisega.*

4. Punkti poolt läbitud tee. Kui punkt liigub mööda mingit joont ajamomendil t kiirusega $v=v(t)$, siis ajavahemikus $[t_1, t_2]$ läbitud tee pikkus s on

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{38}$$

5. Töö arvutamine. Läbigu materiaalne punkt P sirgjoonelisel teel liikumise suunas mõjuva jõu f toimel lõigu $[s_1, s_2]$.

Kui jõud f on konstantne, siis jõu f poolt tehtud töö W on

$$W=f(s_2-s_1). \tag{39}$$

Kui jõud f ei ole konstantne, s.o. $f=f(s)$, ja $f(s)$ on pidev funktsioon, siis jõu f poolt tehtud töö W on

$$W=\int_{s_1}^{s_2} f(s)\,ds. \tag{40}$$

Kui punkti P mass on m ja liikumiskiirus kohal s on $v=v(s)$, siis

$$W=\frac{1}{2}mv^2(s_2)-\frac{1}{2}mv^2(s_1), \tag{41}$$

s.t. jõu f poolt piirkonnas $[s_1, s_2]$ tehtud töö W võrdub punkti P kineetilise energia muuduga selles piirkonnas.

Näited

N 8.5.1. Leida sirgetega $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ piiratud kolmnurga staatilised momendid x- ja y-telje suhtes, kui kolmnurga pindtihedus $\varrho=1$.

Lahendus. Et $y=1-x$, siis valemi (29) põhjal (joon. 8.20) saame:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx=\frac{1}{6}$$

$$M_y=\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{1}{6}.$$

N 8.5.2. Leida ringi raadiusega r inertsimoment I diameetri suhtes, kui selle ringi pindtihedus on $\varrho=1$.

Lahendus. Sümmeetria tõttu on inertsimomendid kõikide diameetrite suhtes võrdsed. Paigutame seepärast ringi keskpunktiga koordinaatide alguspunkti ja leiame ringi inertsimomendi y-telje suhtes, mis on nüüd ringi üheks diameetriks. Et kujund on sümmeetriline, siis piisab sellest, kui leida koordinaattasandi esimeses veerandis asuva ringi osa inertsimoment ja korrutada see neljaga.

Vaatleme ringist üht y-teljega paralleelset ribakest laiusega Δx ja kõrgusega y, mis asub y-teljest kaugusel x (joon. 8.21). Vaadeldava ribakese mass on võrdne selle ribakese pindalaga, mis küllalt väikese Δx korral on ligikaudu $y\cdot\Delta x$. Vaadeldava ribakese inertsimoment ΔI y-telje suhtes on valemite (31) järgi ligikaudu

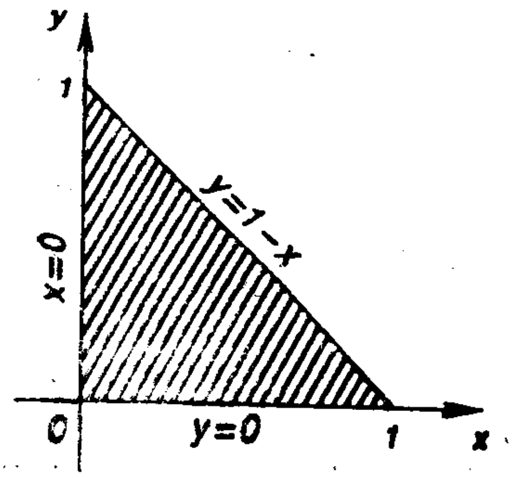
$$\Delta I \approx x^2 y\,\Delta x.$$

Sellega oleme saanud ringi suvalise ribakese inertsimomendi y-telje suhtes vajalikul kujul (25).

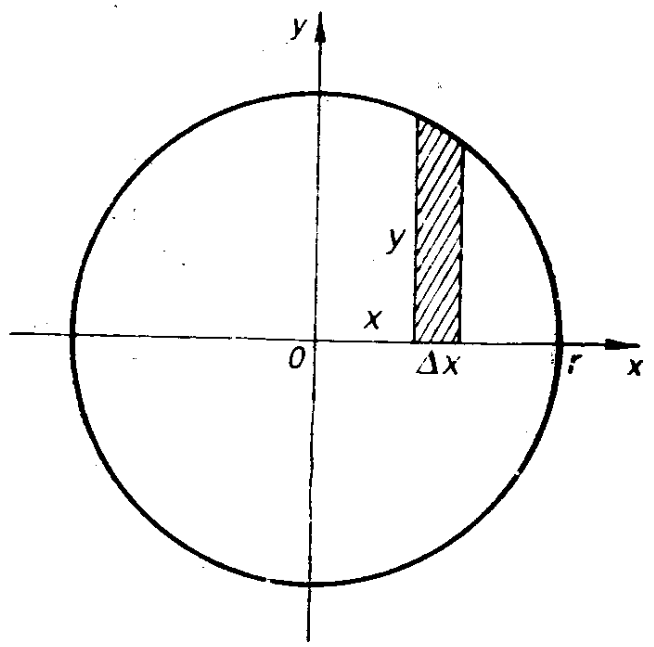
Valemi (26) põhjal saame nüüd:

$$I=4\int_0^r x^2 y\,dx=4\int_0^r x^2\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi r^4}{4}.$$

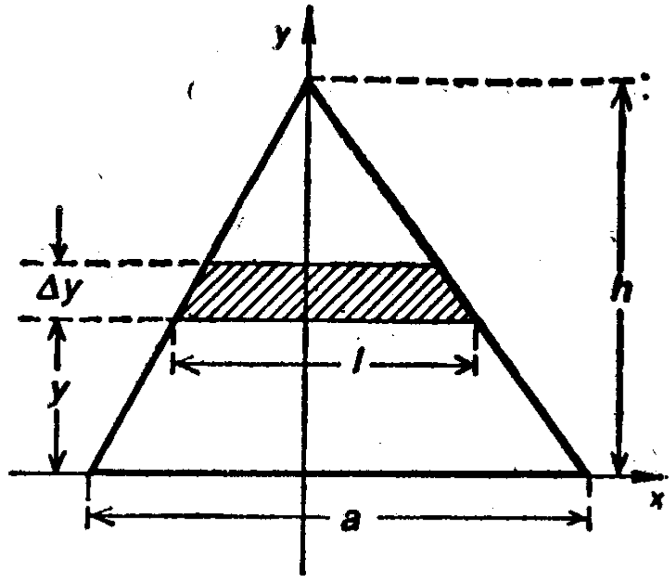
Seega ringi inertsimoment diameetri suhtes on $\pi r^4/4$.



Joon. 8.20



Joon. 8.21



Joon. 8.22

N 8.5.3. Kolmnurga alus on a ja kõrgus on h. Leida kolmnurga inertsimoment I aluse suhtes, kui kolmnurga pindtihedus $\varrho=1$.

L a h e n d u s. Võtame kolmnurga aluse x-teljeks ja kõrguse y-teljeks (joon. 8.22). Vaatleme kolmnurgas üht x-teljega paralleelset ribakest laiusega Δy, mis on x-teljest kaugusel y (joon. 8.22). Selle ribakese pikkuse leidmiseks moodustame (sarnaste kolmnurkade abil) suhte

$$\frac{a}{h}=\frac{l}{h-y},$$

kust

$$l=\frac{a}{h}(h-y).$$

Küllalt väikese Δy korral on vaadeldava ribakese pindala ligikaudu

$$l\,\Delta y=\frac{a}{h}(\mathrm{h}-y)\Delta y,$$

mis on ühtlasi ka tema massiks. Valemite (31) järgi selle ribakese inertsimoment ΔI aluse suhtes on

$$\Delta I\approx l\,\Delta y\,y^2=\frac{n}{h}(h-y)y^2\,\Delta y.$$

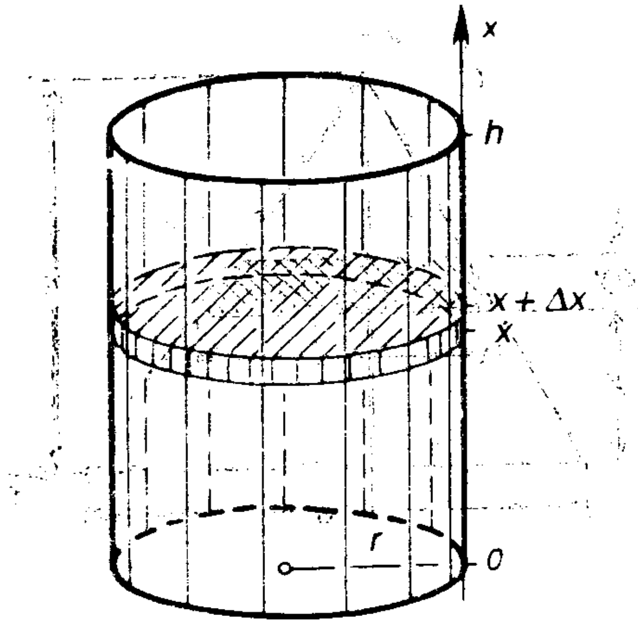
Sellega on inertsimoment ΔI kujul (25) leitud. Valemi (26) järgi saame vastuseks

$$I=\frac{a}{h}\int\limits_0^h (h-y)y^2\,\mathrm{d}y=\frac{ah^3}{12}.$$

N 8.5.4. Punkti kiirus liikumisel muutub seaduse $v=v_0+at$ järgi, kus v_0 on punkti kiirus aja algmomendil $t=0$. Leida tee, mille läbib see punkt ajavahemikus $[0,T]$.

L a h e n d u s. Valemi (38) põhjal saame:

$$s=\int\limits_0^T v\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^T (v_0+at)\,\mathrm{d}t=v_0T+\frac{aT^2}{2}.$$



Joon. 8.23

N 8.5.5. Leida töö W, mis on vaja teha pöördsilindrikujulise paagi veest tühjaks pumpamiseks, kui paagi põhja raadius on r, kõrgus on h ja paak on asetatud püsti põhjale.

Lahendus. Paigutame x-telje vertikaalselt, nagu on näidatud joonisel 8.23. Vaatleme veekihti kõrgusel x paksusega Δx. Selle veekihi ruumala on $\pi r^2 \Delta x$ ja kaal $\varrho \pi r^2 \Delta x$, kus ϱ on vee ruumalaühiku kaal.

Vaadeldava veekihi väljapumpamiseks tuleb ta tõsta kõrgusele $h-x$. Et tuleb ületada veekihi kaaluga võrdne raskusjõud, siis veekihi tõstmiseks peame rakendama jõudu $f=\varrho\pi r^2 \Delta x$. Kui Δx on küllalt väike, siis veekihi väljapumpamiseks tehtud töö on valemi (39) järgi ligikaudu

$$\Delta W \approx f(h-x)=\varrho\pi r^2(h-x)\Delta x.$$

Sellega on kui tahes õhukese veekihi väljapumpamiseks tehtud töö leitud kujul (25). Valemi (26) põhjal saame vastuseks

$$W=\int_0^h \varrho\pi r^2(h-x)\,dx=\frac{1}{2}\varrho\pi r^2h^2.$$

Ülesanded

1128. Leida sirge $x+y=1$ esimeses veerandis asuva osa staatilised momendid x- ja y-telje suhtes, kui sirge joontihedus on ϱ.

1129. Leida sirgetega $x+y=a$, $x=0$, $y=0$ piiratud kolmnurga staatilised momendid x- ja y-telje suhtes, kui kolmnurga pindtihedus $\varrho=1$ (vt. näide N 8.5.1).

1130. Leida sirgetega $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$ piiratud kolmnurga staatilised momendid x- ja y-telje suhtes, kui pindtihedus on ϱ.

1131. Leida joontega $y=2/(1+x^2)$ ja $y=x^2$ piiratud kujundi staatiline moment x-telje suhtes, kui kujundi pindtihedus $\varrho=1$.

1132. Leida sirglõigu $y=x$, $x\in[1,4]$ inertsimoment x-telje suhtes, kui sirglõigu joontihedus $\varrho=1$.

1133. Leida aheljoone $y=\operatorname{ch} x$, $x\in[-a,a]$ inertsimoment x-telje suhtes, kui joone joontihedus $\varrho=1$.

1134. Arvutada kesknurgale α vastava ringjoone (raadius on r ja joontihedus on ϱ) kaare inertsimoment selle kaare üht otsepunkti läbiva diameetri suhtes.

1135. Leida ringjoone inertsimoment telje suhtes, mis asub ringjoone ühes tasandis ning ei lõika seda ringjoont, kui $\varrho=1$.

1136. Leida ristküliku inertsimomendid tema külgede suhtes, kui küljed on a ja b ning pindtihedus $\varrho=1$ (vt. näited N 8.5.2 ja N 8.5.3).

1137. Leida joontega $y^2=ax$, $x=b$ piiratud kujundi inertsimoment tema sümmeetriatelje suhtes, kui kujundi pindtihedus on ϱ.

1138. Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ inertsimomendid tema telgede suhtes, kui ellipsi pindtihedus on $\varrho=1$.

1139. Leida aheljoone $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $x\in[-a,a]$ massikese.

1140. Leida tsükloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ esimese kaare, s. o. kus $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, massikese.

1141. Tsükloidi esimene kaar (vt. ülesanne 1140) pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud pöördpinna pindala Pappose—Guldini I teoreemi T 8.5.2. abil.

1142. Leida astroidi $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ esimeses veerandis asuva kaare massikese.

1143. Astroid pöörleb ümber x telje. Leida tekkinud pöördpinna pindala Pappose—Guldini I teoreemi T 8.5.2 abil.

1144. Leida ellipsi osa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ massikese.

1145. Ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud pöördkeha ruumala Pappose—Guldini II teoreemi T 8.5.3 abil.

1146. Leida tsükloidi esimese kaare (vt. ülesanne 1140) ja x-teljega piiratud kujundi massikese.

1147. Kujund, mis on piiratud tsükloidi esimese kaare (vt. ülesanne 1140) ja x-teljega, pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud pöördkeha ruumala Pappose—Guldini II teoreemi T 8.5.3 abil.

1148. Keha visatakse vertikaalselt üles algkiirusega v_0. Õhu takistust arvestamata muutub selle keha kiirus seaduse $v=v_0-gt$ järgi, kus t on lennuaeg ja g vaba langemise kiirendus. Leida keha kõrgus s aja t möödumisel viskemomendist (vt. näide N 8.5.4).

1149. Keha visatakse vertikaalselt üles algkiirusega v_0. Õhu takistust arvestades muutub selle keha kiirus seaduse

$$v=c\tan\left(\arctan\frac{v_0}{c}-\frac{gt}{c}\right)$$

järgi, kus t on lennuaeg, g vaba langemise kiirendus ja c konstant. Leida keha tõusu kõrgus H ja selleks kulunud aeg T.

1150. Punkt liigub kiirusega $v=te^{-0,01t}$ m/s. Leida tee pikkus s, mille läbib punkt enne peatumist.

1151. Punkt x võngub x-teljel ümber koordinaatide alguspunkti kiirusega $v=v_0\cos\omega t$, kus t on võnkumise aeg ning v_0 ja ω on konstandid. Leida punkti võnkumise seadus, kui ajamomendil $t=0$ oli punkti abstsiss null. Leida punkti liikumise keskmine kiirus.

1152. Leida töö W, mis on vaja teha pöördkoonusekujulise nõu veest tühjaks pumpamiseks, kui koonuse põhja raadius on r, kõrgus on h ja koonuse tipp on suunatud allapoole (vt. näide N 8.5.5).

1153. Leida töö W, mis on vaja teha vee väljapumpamiseks poolsfäärikujulisest katlast, mille raadius on r.

1154. Kera tihedusega 1 ja raadiusega r asetseb vees nõnda, et ta puutub veepinda. Kui suur töö tuleb teha selle kera veest väljatõmbamiseks.

1155. Milline kuju peab olema pöördpinnalisel anumal, et vedeliku väljavoolamisel läbi põhjas oleva augu alaneks vedeliku tase ühtlaselt.

VASTUSED

§ 1.1

1. $\sum\limits_{i=1}^{5} i$. 2. $\sum\limits_{k=0}^{5} (-1)^k$. 3. $\sum\limits_{i=1}^{6} 1$. 4. $\sum\limits_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}k^2$. 5. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. 6. $1^1+2^{-1}+3^1+$ $+4^{-1}+\ldots+7^1=\sum\limits_{k=1}^{7} k^{(-1)^{k+1}}$. 7. $20+\sum\limits_{i=0}^{4} 2^i=\sum\limits_{i=0}^{4} (2^i+4)$. 8. $\sum\limits_{i=1}^{10} a_i$. 9. $\sum\limits_{i=0}^{k} q^i$. 10. $\sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$. 11. $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$. 12. $3^2+3^3+3^4+3^5$. 13. $2+(2+1)+$ $+(2+2)+(2+3)+(2+4)=20$. 14. $\log 2-\log 3+\ldots+(-1)^n \log n$. 15. 5. 16. $3(n+1)$.

§ 1.2

35. $|x-2|\sqrt{y}=\begin{cases}(x-2)\sqrt{y}, & \text{kui } x\geqslant 2,\\ (2-x)\sqrt{y}, & \text{kui } x\leqslant 2.\end{cases}$ 36. $\frac{a-b}{|a-b|}\sqrt{a+b}=$ $=\begin{cases}\sqrt{a+b}, & \text{kui } a>b\\ -\sqrt{a+b}, & \text{kui } a<b.\end{cases}$ Lähteavaldis pole määratud, kui $a=b$. 37. $x+|x|=$ $=\begin{cases}2x, & \text{kui } x\geqslant 0\\ 0, & \text{kui } x\leqslant 0.\end{cases}$ 38. x. 39. $|x|\sqrt{x}=x\sqrt{x}$, sest peab olema $x\geqslant 0$. Juhul $x<0$ lähteavaldis ei ole määratud, sest negatiivsetel arvudel ruutjuurt ei ole. 40. $5xy\sqrt{xy}$, sest $xy\geqslant 0$. Juhul. $xy<0$ lähteavaldis ei ole määratud. 41. $(x^2-x+1)\sqrt{x}$, sest alati $x^2-x+1>0$. 42. $\sqrt{x(x-2)^2}=|x-2|\sqrt{x}=$ $=\begin{cases}(x-2)\sqrt{x}, & \text{kui } x\geqslant 2,\\ (2-x)\sqrt{x}, & \text{kui } 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ Välja tuleb jätta juhtum $x<0$, sest siis lähteavaldis ei ole määratud. 43. $\sqrt{2x^2}$, kui $x\geqslant 0$; $-\sqrt{2x^2}$, kui $x\leqslant 0$. 44. $-\sqrt{(1-m)^2(m-2)}$, sest juure all peab olema $m-2\geqslant 0$, mille tõttu $1-m<0$. 45. $\sqrt{x^2(x-1)}$, sest peab olema $x\geqslant 1$. 46. $-\sqrt{(x^2-2x)^2x}$, kui $0\leqslant x\leqslant 2$; $\sqrt{(x^2-2x)^2x}$, kui $x\geqslant 2$. Juhul $x<0$ ei ole lähteavaldis määratud.

§ 1.3

47. $S_n=n^2$. 48. $S_n=n(n+1)$. 49. $S_n=n/(2n+1)$. 55. Matemaatilise induktsiooni meetodi tingimuse 2° kontrollimiseks liita antud võrratusele võrratus $2^n>2$. 56. Kasutada võrratust ülesandest 55.

§ 1.4

58. $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. 59. $x\in(-1,\infty)$. 60. $x\in[-3,-1]\cup$ $\cup[5,\infty)$. 61. $x\in(-\infty,\infty)$. 62. $x\in(-\infty,0)$. 63. $x\in[0,2/3]$. 64. $x\in$ $\in[0,2]$. 65. $x\in(-\infty,1)\cup(1,2)$. 66. $x\in[3/4,1)\cup(1,\infty)$. 67. $x\in$ $\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(5,\infty)$. 68. $x\in(1,\infty)$.

§ 1.5

69. $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$. **70.** $x \in (-2, 1)$. **71.** $x \in (-\infty, \infty)$. **72.** $x \in (-3, 3)$. **73.** $x \in (-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$. **74.** $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$. **75.** $x \in (-6, -1) \cup (0, 3)$.

§ 1.6

76. $x \in (-2, -1) \cup (0, 1)$. **77.** $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$. **78.** $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$. **79.** $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 2]$. **80.** $x \in [-1, 1] \cup \{2\}$. **81.** $x \in (-\infty, -2)$. **82.** $x \in (-5, 2) \cup (3, 5)$. **83.** $x \in (-\infty, -6) \cup (-6, 1) \cup (2, 8) \cup (8, 9)$.

§ 1.7

84. 0, 1/5, 0, 1/5. **85.** puudub, 1, 0, 1. **86.** puudub, puudub, -1, 1. **87.** 2, puudub, 2, ∞. **88.** 0, 1, 0, 1. **89.** puudub, puudub, 0, 1. **90.** -1, puudub, -1, ∞. **91.** 1/3, 2, 1/3, 2. **92.** Tõestame juhu, kus hulk $\{-x\}$ on alt tõkestatud, s. t. $\inf(-x) = a \neq -\infty$. T 1.7.2 põhjal on $-x \geqslant a$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline x', et $-x' < a+\varepsilon$. Seega on iga $x \leqslant -a$ ja $x' > -a-\varepsilon$. T 1.7.1 põhjal $-a = \sup x$ ehk $a = -\sup x$. Mott. **94.** Tõestame juhu, kus hulgad on alt tõkestatud, s. t. $\inf x = a \neq -\infty$ ja $\inf y = b \neq -\infty$. T 1.7.2 põhjal on $x \geqslant a$ ja $y \geqslant b$ ning iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad sellised x' ja y', et $x' < a+\varepsilon/2$ ja $y' < b+\varepsilon/2$. Seega $x+y \geqslant a+b$ ja $x'+y' < a+b+\varepsilon$. T 1.7.2 järgi on siis $\inf(x+y) = a+b$. Mott. **96.** Valemite põhjal ülesandeist 95 ja 93 saame $\sup(x-y) = \sup[x+(-y)] = \sup x + \sup(-y) = \sup x - \inf y$.

§ 1.8

101. $[-4, \infty)$. **102.** $\{x : |x| \geqslant 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. **103.** $\{x : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **104.** $\{x : |x| \neq 2\}$. **105.** $(-2, 0]$. **106.** $(-\infty, \infty)$. **107.** $(6, \infty)$. **108.** $[-2, 0) \cup (0, 1)$. **109.** $[0, 1) \cup (1, 4)$. **110.** $\{x : 0 < |x| < 1\}$. **111.** $[0, 1]$. **112.** $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$. **113.** $[1, 100]$. **114.** Q. **115.** $(-\infty, \tan 1)$. **116.** $\{x : x = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in Z\}$. **117.** Z. **118.** $(0, 1) \cup (1, 2)$. **119.** $[0, \infty)$. **120.** $(-1, 1)$. **121.** Samad. **122.** Erinevad, sest $f(x) = x$ ja $g(x) = |x|$. **123.** Erinevad, sest määramispiirkonnad on erinevad. **124.** Samad. **125.** Samad. **126.** Erinevad, sest määramispiirkonnad $\{x : \cos x = 0\}$ ja $(-\infty, \infty)$ on erinevad. **127.** Erinevad, sest neil on erinevad määramispiirkonnad. **128.** $f(x) = 0$, kui $x = 0$ või $x = 1$; $f(x) < 0$, kui $x \in (0, 1)$; $f(x) > 0$, kui $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. **129.** $f(x) = 0$, kui $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $f(x) < 0$, kui $x \in \{x : x \neq k\pi\}$; $f(x) > 0$, kui $x \in \varnothing$. **130.** $f(x) = 0$, kui $x \in \varnothing$, s. t. nullkohti ei ole; $f(x) < 0$, kui $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$; $f(x) > 0$, kui $x \in (2, \infty)$. **131.** $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, \infty)$. **132.** $x = -\sqrt{y}$, $y \in (0, \infty)$. **133.** Kahene pöördfunktsioon $x = \pm\sqrt{y}$, $y \in [0, \infty)$. Ühesed pöördfunktsioonid saame funktsiooni määramispiirkonna $X = (-\infty, \infty)$ osadel. Kui $x \in (-\infty, 0]$, siis $x = -\sqrt{y}$, ja kui $x \in [0, \infty)$, siis $x = \sqrt{y}$. **134.** $x = \log(y-1)$, $y \in (1, \infty)$. **135.** $x = 1 - \sqrt{4+y}$, $y \in [-4, \infty)$. **136.** $x = 2 - 10^{y-1}$, $y \in (-\infty, \infty)$. **137.** $x = 3\sin 2y$, $y \in [-\pi/4, 0]$. **138.** $x = 1 - \cos(y-1)$, $y \in [1, 1+\pi]$. **139.** $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. **140.** $x = \pm\ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

§ 1.9

141. Paaritu. **142.** Paaris. **143.** Paaris. **144.** Paaritu. **145.** Ei paaris ega paaritu. **146.** Paaritu. **147.** $k\pi$, π. **148.** $2k\pi/\lambda$, $2\pi/\lambda$. **149.** $k\pi$, π. Peab kehtima tingimus $|\sin(x+\omega)| = |\sin x|$, mis absoluutväärtuse kõrvaldamisel laguneb kaheks tingimuseks $\sin(x+\omega) = \sin x$ ja $\sin(x+\omega) = -\sin x$, mille lahendamine (näite N 1.9.3 järgi) annab $\omega = 2k\pi$ ja $\omega = (2k+1)\pi$ ehk kokku $\omega = k\pi$. **150.** $k\pi$, π. **151.** $k\pi$, π. Peab kehtima tingimus $\sin^2(x+\omega) = \sin^2 x$ ehk

$[\sin(x+\omega)+\sin x]$ $[\sin(x+\omega)-\sin x]=0$ ja me saame samad tingimused, mis olid ülesande 149 lahenduses. Võib arutleda ka nii: funktsioonidel $y=\sin^2 x$ ja $y=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$ on samad perioodid ja seepärast vastuse saame ülesandest 149. **152.** Ei ole perioodiline funktsioon. **153.** $12k\pi$, 12π. **154.** $4k\pi$, 4π. **155.** Iga täisarv $n\neq 0$; 1. Peab kehtima tingimus $(x+\omega)-[x+\omega]=x-[x]$, kust $[x]+\omega=[x+\omega]$, mis kehtib vaid kui $\omega\in\mathbf{Z}$. **156.** Iga arv $r\in Q$. Vähim positiivne periood puudub, sest positiivsete ratsionaalarvude seas pole vähimat. **157.** $y=\ln|\arcsin x|+2\arcsin x$. **158.** $x=\ln^5 y+\ln y$. **159.** $y=x\pm 2$. **160.** $y==\ln x$.

§ 1.10

161. $f(-3)=2$, $f(0)=1$, $f(0,1)=\pi$, $f(1)=\pi/2$, $f(10)=0$. **162.** $f[g(x)]==2\log|x|$, $g[f(x)]=\log^2 x$, $f[f(x)]=\log\log x$, $g[g(x)]=x^4$. **163.** $f(-x)==1/2^x$, $f(x+1)=2\cdot 2^x$, $f(1/x)=2^{1/x}$. **164.** $f(x)=x^2+x+1$. **165.** $f(x)=1+2x^2$. **166.** $f(x)=x^2-2$, sest $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2$. **167.** $y=u^2$, $u=2x+3$. **168.** $y==u^{1/2}$, $u=\log v$, $v=\arctan x$. **169.** $y=f(u)$, $u=x+1$. **170.** $y=f(u)$, $u=\log v$, $v=x+1$. **171.** $y=\sin u$, $u=g(x)$. **172.** On. **173.** On. **174.** Ei ole T 1.10.1 põhjal. **175.** Ei ole T 1.10.1 põhjal. **176.** Ei ole. **177.** On. **178.** On. **179.** On T 1.10.1 põhjal. **180.** On, sest $|x|=\sqrt{x^2}$. Sama järeldub ka T 1.10.1 põhjal, kui funktsioonist kõrvaldada absoluutväärtus. **181.** Ei ole T 1.10.1 põhjal. **182.** On T 1.10.1 põhjal või selle tõttu, et käesoleval juhul $y=|x|+|x-3|$.

§ 2.1

195. 2/5. **196.** 3. **197.** 1. **198.** —2/3. **199.** 1/9. **200.** 1. Arvestada, et $\sin n\pi=0$. **201.** 1/18. Kasutada valemit ülesandest 50. **202.** e^2+1. **203.** $1/e$. **204.** 0. **207.** 1, 1, koondub. **208.** 0, 0, koondub. **209.** —1, 1, hajub. **210.** 0, ∞, hajub. **211.** $-\infty$, ∞, hajub. **212.** 0, 1, hajub. **213.** —1, 1, hajub. **214.** ∞, ∞, hajub.

§ 2.2

223. 1. **224.** 3/5. **225.** 3/2. **226.** 1/3. **227.** 1. **228.** —1/3. Teha muutujate vahetus $x+1=u^3$. **229.** 2/3. Teha muutujate vahetus $x^2+1=u^6$. **230.** —1/3. **231.** 1/32. **232.** —2. Viia irratsionaalsus nimetajast lugejasse. **233.** π. **234.** 4. **235.** 2/3. Teha muutujate vahetus $\arcsin x=u$, siis $x=\sin u$. **236.** 1. Kasutada valemit (10). **237.** ∞. **238.** ∞. **239.** $-\infty$. **240.** 0. Arvestada, et $x=0$ ümbruses on $\cos x>0$, mistõttu $|\cos x|=\cos x$. **241.** e. Teha muutujate vahetus $\sin x=u$. **242.** e^{-2}. Arvestada, et $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. **243.** Valida nulliks koonduvad jadad $x_n=(\pi/2+2n\pi)^{-1}$ ja $x_n=(n\pi)^{-1}$.

§ 2.3

246. $f(1-)=2$, $f(1+)=0$, $f(2-)=f(2+)=1$. **247.** $f(0-)$ ei eksisteeri, $f(0+)=0$, $f(1-)=1$, $f(1+)=0$. **248.** 1. **249.** 3. **250.** 1/2. **251.** 0. **252.** 5. **253.** 0. **254.** 1/4. **255.** 1. **256.** —1. **257.** —2. **258.** ∞. **259.** 1. **260.** —1, **261.** 1. **262.** —1. **263.** ∞. **264.** $-\infty$. **265.** —6. **266.** 6. **267.** 0. **268.** 1. **269.** 1. **270.** ∞. **271.** 1. **272.** 1. **273.** 0. **274.** 0. **275.** e^2. **276.** e^{-1}. **277.** e^{-1}. **278.** e^6. **279.** $m=1$, $n=-1$. **280.** $m=1$, $n=-1/2$.

§ 2.4

281. $\beta_n=o(\alpha_n)$. **282.** Sama järku. **283.** Sama järku. **284.** $\alpha=o(\beta)$. **290.** $x\to 0$, $4x^3$, $k=3$. **291.** $x\to 0$, x, $k=1$. **292.** $x\to 1$, $-(1-x)^2(x+3)^2/4$, $k=2$. **293.** $n\to\infty$, $n^{-1/2}$, $k=1/2$. **294.** 3. **295.** 5. Arvestada, et $\sin 5x\sim 5x$ ja $x+x^2\sim x$. **296.** 2. Kasutada valemeid (30) ja (31). **297.** 1. **298.** 6. **299.** 1. Kasutada valemeid (25) ja (27). **300.** —1. **301.** 1/24. Kasutada valemit (32) ja

N 2.4.2. **302.** 1/9. Arvestada, et valemi (32) põhjal $(1+x+x^2)^{1/3}-1\sim(x+x^2)/3$. **303.** 1/2. Kasutada valemit (38) ja N 2.4.3. **304.** —2/5. **305.** —7/12. Kasutada valemit (38) ja N 2.4.4. **306.** 0. Kasutada valemit (33) ja arvestada, et $x+x^3\sim x$. **307.** 0. Kasutada valemit (36) ja arvestada, et $x+x^2\sim x$. **308.** 3/2. Kasutada valemit (36) ja N 2.4.5. **309.** 5. **310.** 1. **311.** —1. Kasutada valemit (32) ja N 2.4.6.

§ 2.5

312. Vt. N 2.5.1. **313.** Vt. N 2.5.2. **314.** Kasutada valemit (12). **315.** Vaadelda kui pidevate funktsioonide korrutist $y=xxx$. **317.** Vaadelda kui kahe pideva funktsiooni suhet $y=\sin x/\cos x$. **326.** Kasutada $x>0$ korral valemit $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$. Kui määramispiirkond on $X=(-\infty, \infty)$, siis astmefunktsioon on paaris- või paaritu funktsioon. **327.** Vasakpoolne. **328.** Vasakpoolne. **329.** Parempoolne. **330.** Parempoolne. **331.** $a=-1$. **332.** $a=2$. **333.** $a=-1$, $b=1$. **334.** $\delta=$ $=\varepsilon/|a|$. **335.** $\delta=\varepsilon/7$. **336.** $\delta=2\varepsilon/31$. Küllalt on näidata pidevust, sest ühtlane pidevus järeldub siis teoreemist T 2.5.11. **337.** $\delta=\varepsilon/55$. **338.** Teist liiki katkevus punktis $x=0$. **339.** Esimest liiki (mittekõrvaldatav) katkevus punktis $x=0$. **340.** Teist liiki katkevus punktis $x=0$. **341.** Kõrvaldatav katkevus punktis $x=0$. **342.** Kõrvaldatav katkevus punktis $x=0$; teist liiki katkevused punktides $x=1$ ja $x=-1$. **343.** Teist liiki katkevus punktis $x=3$. **344.** Esimest liiki katkevus punktis $x=0$. **345.** $f(0)=1$. **346.** $f(-1)=3$. **347.** $f(7)=-1/56$. **348.** $f(0)=0$. Punktides $x=-1$ ja $x=1$ katkevust ei saa kõrvaldada. **349.** Igas punktis teist liiki katkevus. **350.** Pidevuse näitamiseks punktis $a=0$ kasutada T 2.5.1 või D 2.5.1.

§ 3.1

351. $2x$. **352.** $3x^2$. **353.** $-\sin x$. **354.** $1/x$. **355.** $4x^3$. **356.** $1+2x^{-2/3}$. **357.** $-x^{-2}+x^{-1/2}$. **358.** $2^x\ln 2-e^x$. **359.** $(x\ln 2)^{-1}+\cos x$. **360.** $-\sin x\tan\alpha$. **361.** $x^{a-1}a^x(a+x\ln a)$. **362.** $x^4e^x(5+x)$. **363.** $e^x(x-1)x^{-2}+(2x)^{-1/2}$. **364.** $\ln x+$ $+1+10^x\ln 10$. **365.** $x\ln^{-1}x(2+\ln^{-1}x)+1/x$. **366.** $3e^{3x}+(x\ln 10)^{-1}$. **367.** $t^2\sin t$. **368.** e^xa^x. **369.** $4/\sin^2 2x$. **370.** $\sin u(\ln u-u^{-2})$. **371.** $2(1+x^2)^{-2}$. **372.** $\arcsin x+$ $+x(1-x^2)^{-1/2}$. **373.** 0. Kasutada valemit $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\pi/2=$ $=\text{const}$. **374.** 0. Kasutada valemit $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$. **375.** $x\operatorname{ch} x$. **376.** $(1-\operatorname{sh} x)\operatorname{ch}^{-2}x$. **377.** $2/(1-x^4)$. **378.** 0, sest $y=\text{const}$. **379.** $(1+x^2)^{-1/2}\times$ $\times\arcsin\alpha$. **380.** $(1+2x\operatorname{arcth} x)(1-x^2)^{-2}$. **381.** $12(3x-5)^3$. **382.** $-20(3-5x)^3$. **383.** $(2x+1)^{-1/2}$. **384.** $-(1-x)^{-1/2}$. **385.** $-2x(1-x^2)^{-2/3}$. **386.** $4(1-2x)^{-3}$. **387.** $2e^{2x+\cos 2x}(1-\sin 2x)$. **388.** $2\cos 2x+1/x$. **389.** $-3\sin 6x$. **390.** $2\cot(2x+1)$. **391.** $2\sin 2x(\ln\cos 2x-1)/\cos^2 2x$. **392.** $3e^{3x}a^{3x+5}$. **393.** $2/\sin 2x$. **394.** 0. Arvestada, et $y=\ln(\tan x\cot x)=\ln 1=0$. **395.** $\ln[x+(1+x^2)^{1/2}]$. **396.** $\cot^{1/2}x\sin 2x-$ $-\tan^{1/2}x/2$. **397.** $2(1+4x)/(1+4x^2)$. **398.** $-(1+\ln\operatorname{arccot} x)/(1+x^2)$. **399.** $\arcsin x$. **400.** $\arccos x$. **401.** $2^{-1}/(1+x^2)$. **402.** $x\operatorname{ch} x$. **403.** $x^{-1}\operatorname{ch}^{-2}\ln x$. **404.** $\exp\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh} 2x$. **405.** $\operatorname{th}^3 x$. **406.** $-2\operatorname{sgn} x/(1+x^2)$. **407.** $-\tan x(\ln^2\cos x-$ $-1)^{-1/2}$. **408.** $e^x(1+e^{2x})^{-1/2}$. **409.** $12x^5(1+x^{12})^{-2}$. **410.** $2x\operatorname{arsh}(x^2a^{-2})$. **411.** $2\cot 2x/(1-\ln^2\sin 2x)$. **412.** 1. Arvestada, et $y=x$, sest $\operatorname{arcth} x$ on $\operatorname{cth} x$ pöördfunktsioon. **413.** $-\ln a/(x\ln^2 x)$. Kasutada valemit $\log_x a=\ln a/\ln x$. **414.** $3x^2-1$, kui $x<1$; $2x$, kui $x\geqslant 1$. **415.** $2x$, kui $x<2$; ei eksisteeri, kui $x=2$; $3x^2$, kui $x>2$. **416.** 1, kui $x\leqslant 1$; $1/x$, kui $x>1$. **417.** $\cos x$, kui $|x|<\pi/2$; 0, kui $|x|>\pi/2$; 0, kui $x\neq\pi/2$; ei eksisteeri, kui $x=-\pi/2$. **418.** $1/(1+x^2)$, kui $|x|<1$; $\pi/4\operatorname{sgn} x$, kui $|x|>1$; ei eksisteeri, kui $|x|=1$. **419.** $\operatorname{sgn} x$, kui $x\neq 0$; ei eksisteeri, kui $x=0$. **420.** $2x\operatorname{sgn} x$. **421.** $\operatorname{sgn}(x-1)/x$, kui $x\neq 1$; ei eksisteeri, kui $x=1$. **422.** $2x-3$, kui $x<1\vee x>2$; $3-2x$, kui $1<x<2$; ei eksisteeri, kui $x=1\vee x=2$. **423.** $2x$, kui $x<0\vee x>1$; $2-2x$, kui $0<x<1$; ei eksisteeri, kui $x=0\vee x=1$. **424.** $\operatorname{sgn} x\cos x$, kui $x\neq 0$; ei eksisteeri, kui $x=0$. **425.** $-x^{-1}(x^2-1)^{-1/2}$. **426.** $x^x(1+\ln x)$. **427.** $x^{\sin x}(\cos x\ln x+x^{-1}\sin x)$. **428.** $(1+x^{-1})^x[\ln(1+x^{-1})-(1+x)^{-1}]$. **429.** $\ln^x x(\ln^{-1}x+\ln\ln x)$. **430.** $x^2\exp x^2\cdot$ $\cdot\sin 2x(3+2x^2+2x\cot 2x)$. **431.** $-2(x-2)(x^2+11x+1)/[3(x-5)^4(x+1)^{2/3}]$. **432.** $y(x^4+6x^2+1)/[3x(1-x^4)]$. **433.** $y/(2y-x)$. **434.** $-x/y$. **435.** $e^y/(2-y)$.

436. $(1+y^2)/y^2$. 437. $(y^2-xy\ln y)/(x^2-xy\ln x)$. Kasutada logaritmilise diferentseerimise võtet M 3.1.2. 438. $(x+y)/(x-y)$. 439. $2u(x)u'(x)$. 440. $\cos v(x)v'(x)$. 441. $3x^2u(x)+x^3u'(x)$. 442. $3u^2(x)u'(x)\cos x - u^3(x)\sin x$. 443. $u'(x)\ln v(x)+u(x)v'(x)/v(x)$. 444. $[v(x)u'(x)-u(x)v'(x)]/[u^2(x)+v^2(x)]$. 445. $2f'(x^2)x$. 446. $f'(x+\cos x)(1-\sin x)$. 447. $f(\ln x)+f'(\ln x)$. 448. $(1-\cos x)^{-1}$. 449. $(1-x^2)^{1/2}e^{-\arcsin x}$. 450. $e^x/(1-x)$.

§ 3.2

453. $2x\,dx$. 454. $(2^x\ln 2+3)\,dx$. 455. $2x(1-x^2)^{-2}\,dx$. 456. $\operatorname{sgn} a(a^2-x^2)^{-1/2}\,dx$. Arvestada, et a viimisel juure alla saame $a=(a^2)^{1/2}\operatorname{sgn} a$. 457. $(x^2+a)^{-1/2}\,dx$. 458. 0. 459. $e^x(1+x)\,dx$. 460. $x(1+x^2)^{-1/2}\,dx$. 461. $2x(x^2-1)^{-1}\,dx$. 462. $x^{-1}(x^2-1)^{-1/2}\,dx$. 463. $df(2)=80dx$. 464. $df(\pi)=0$. 465. $df(1/4)=dx$. 466. $dy=0{,}1$. 467. $dy=0$. 468. $dy=\pi/45$. 469. $dy=u^{-1/2}du$. 470. $dy=\cos u\,du$. 471. $dy=(v\,du-2u\,dv)/v^3$. 472. $dy=(u\,du+v\,dv)/(u^2+v^2)$. 473. $dy=f(\ln x)dx+f'(\ln x)dx$. 474. $dy=2x\,dx\arctan(u/v)+x^2(v\,du-u\,dv)/(u^2+v^2)$. 475. $\cos x/(2x)$. 476. $(x\cos x-\sin x)/(2x^3)$. 477. $-\tan^2 x$. 478. $-\cot x$ 479. -1.

§ 3.3

480. $2\exp(-x^2)(2x^2-1)$. 481. $2\sin x/\cos^3 x$. 482. $x(3+2x^2)/(1+x^2)^{3/2}$. 483. $x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$. 484. $4!(1-x)^{-5}$. 485. $4x^{-3}$. 486. $8e^x\sin x$. 487. $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$. 488. $f'''(e^x)e^{3x}+3f''(e^x)e^{2x}+f'(e^x)e^x$. 489. $6u'u''+2uu'''$. 490. $u''-v'^2v^{-2}+v^{-1}v''$. 491. $2[x^{-3}f(x^2)-x^{-1}f'(x^2)+2xf''(x^2)]$. 492. $d^2y=20x^3\,dx^2$. 493. $d^2y=x^{-3}(2\ln x-3)\,dx^2$. 494. $d^2y=(1+x^2)^{-3/2}\,dx^2$. 495. $d^5y=0$. 496. $d^3y=-15x^{-7/2}\,dx^3$. 497. $d^4y=2x^{-3}\,dx^4$. 498. $e^4(du^2+d^2u)$. 499. $6\,du\,d^2u+2u\,d^3u$. 500. $[f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x]\,dx^2$. 501. $[e^{-x}f(e^x)-f'(e^x)+f''(e^x)e^x]\,dx^2$. 502. $d^4uv+4d^3u\,dv+6d^2u\,d^2v+4d\,u\,d^3v+u\,d^4v$. Kasutada valemeid (17) ja (21). 503. $-1/y^3$. 504. $-y^2/(x+y)^3$.

§ 3.4

505. 1/2. 506. 0. 507. 2. 508. 1/2. 509. $-1/3$. 510. 0. 511. 1. 512. 1/3. 513. $2/\pi$. 514. 0. 515. 1/2. 516. 0. 517. 1. 518. e^{-1}. 519. 1. 520. e^2. 521. 1. L'Hospitali reegliga saadud tulemusel puudub piirväärtus. 522. 1. Rakendades kaks korda l'Hospitali reeglit saame lähteavaldise tagasi.

§ 3.5

523. $-\cot t$. 524. -1. 525. $t/2$. 526. $\cot(t/2)$. 527. $3t^{-1}$, $-t^{-4}/2$. 528. $2(1+t)^2$, $4(1+t)^2$. 529. $-\tan t$, $1/(3a\cos^4 t\sin t)$. 530. $-\cot t$, $-1/(a\sin^3 t)$. 531. $-2\sin^{-3} t$. 532. $1/t$. 533. $-2\sin t/[a^2(1-\cos t)^4]$.

§ 4.1

534. Kasvab vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(2, \infty)$; kahaneb vahemikus $(0, 2)$. 535. Kasvab vahemikes $(-\infty, -2)$ ja $(0, 2)$; kahaneb vahemikes $(-2, 0)$ ja $(2, \infty)$. 536. Kogu määramispiirkonnas $X=(-\infty, \infty)$ on $y'\geqslant 0$ ja statsionaarsed punktid $x=2k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$ ei moodusta vahemikke. T 4.1.2 põhjal funktsioon kasvab kogu määramispiirkonnas X. 537. Määramispiirkonnas $X=(0, 1)\cup(1, \infty)$ kriitiliseks punktiks on statsionaarne punkt $x=e$. Kahaneb vahemikes $(0, 1)$ ja $(1, e)$; kasvab vahemikus (e, ∞). 538. Määramispiirkond on $X=[-2, 0]$. Kahaneb vahemikus $(-2, 0)$. 539. Kasvab vahemikus $(0, 1)$; kahaneb vahemikus $(1, \infty)$. 540. $y'=-1/x^2$, kui $x\in(-\infty, -1)$; $y'=0$, kui $x\in(-1, 1]$; $y'=2x-2$, kui $x\in(1, \infty)$. Punktis $x=-1$ tuletist ei ole T 3.1.1 põhjal, sest ühepoolsed tuletised on erinevad. Kahaneb vahemikus $(-\infty, -1)$; monotoonselt kasvab vahemikus $(-1, \infty)$, olles seejuures konstantne lõigus $[-1, 1]$.

541. Kogu määramispiirkonnas $X=(-\pi, \pi)$ on $y' \geqslant 0$. Seega monotoonselt kasvab piirkonnas X, kusjuures vahemikes $(-\pi, -\pi/2)$ ja $(\pi/2, \pi)$ on konstantne. **542.** $y'=0$, kui $x \in (0, 1)$; $y'=\sin 1$, kui $x \in (1, \pi/2)$; $y'(1)$ ei eksisteeri. Monotoonselt kasvab määramispiirkonnas X, kusjuures vahemikus $(0, 1)$ on konstantne. **545.** Võrdle ülesandega 536. **546.** Kasutada võrratust eelmisest ülesandest 545. **547.** Kasutada võrratust eelmisest ülesandest 546. **549.** Punktis $x=-1$ on lokaalne maksimum $y(-1)=2$; punktis $x=1$ on lokaalne miinimum $y(1)=-2$. **550.** Punktis $x=-2$ on lokaalne maksimum $y(-2)=16$; punktis $x=0$ on lokaalne miinimum $y(0)=0$; punktis $x=2$ on lokaalne maksimum $y(2)=16$. **551.** Punktis $x=e^{-1}$ on lokaalne miinimum $y(e^{-1})=-e^{-1}$. **552.** Punktis $x=0$ on lokaalne miinimum $y(0)=0$; punktis $x=2$ on lokaalne maksimum $y(2)=4e^{-2}$. **553.** Punktides $x=-1$ ja $x=1$ on lokaalsed miinimumid $y(-1)=$ $=y(1)=0$; punktis $x=0$ on lokaalne maksimum $y(0)=1$. **554.** Punktis $x=2$ on lokaalne miinimum $f(2)=0$. **555.** Punktis $x=1$ on lokaalne miinimum $f(1)=\ln^2 1$; punktis $x=e^{-2}$ on lokaalne maksimum $f(e^{-2})=4e^{-2}$. **556.** Punktis $x=1$ on lokaalne miinimum $f(1)=-27$; punktis $x=4$ lokaalset ekstreemumit ei ole. **557.** Punktis $x=1$ on lokaalne miinimum $f(1)=-1$; punktis $x=0$ on lokaalne maksimum $f(0)=0$. **558.** Kriitilisteks punktideks on statsionaarsed punktid $x=k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Punktides $x=2k\pi$ on lokaalsed miinimumid $f(2k\pi)=$ $=-e^{2k\pi}$ ja punktides $x=(2k+1)\pi$ on lokaalsed maksimumid $f[(2k+1)\pi]=$ $=e^{(2k+1)\pi}$. **559.** Punktis $x=0$ on lokaalne miinimum $y(0)=0$; statsionaarses punktis $x=-1$ lokaalset ekstreemumit ei ole. **560.** Punktis $x=1$ on lokaalne miinimum $y(1)=1$; punktis $x=0$ on lokaalne miinimum $y(0)=0$. Punktis $x=0$ funktsioon ei ole pidev ega oma tuletist ja seepärast tunnuseid PT 4.1.2—PT 4.1.4 kasutada ei saa. Lokaalse miinimumi olemasolu punktis $x=0$ näitab vahetu analüüs. **561.** Lokaalseid ekstreemumeid ei ole. **562.** Punktides $x=-1$ ja $x=1$ on lokaalsed maksimumid $f(-1)=f(1)=0$. **563.** Punktis $x=0$ on lokaalne maksimum ja punktis $x=2$ on lokaalne miinimum. Vaadelda funktsiooni f asemel abifunktsiooni $g(x)=x^3-3x^2+8$, millel on samad lokaalsed ekstreemumid. **564.** Punktis $x=-3$ on lokaalne miinimum. Vaadelda abifunktsiooni $g(x)=x^4+4x^3+30$ lokaalseid ekstreemumeid piirkonnas, kus $g(x)>0$. **565.** Punktis $x=0$ on lokaalne maksimum $f(0)=0$. Lahendada analoogiliselt näitele N 4.1.5. **566.** Punktis $x=0$ on lokaalne maksimum $f(0)=1$. **567.** Punktis $x=0$ on lokaalne miinimum $y(0)=0$. Selle leidmiseks piisab funktsiooni muutumiskäigu uurimisest punkti $x=0$ ümbruses: kui $x=0$, siis on $y=0$; kui $x<0$ või $x>0$, siis on $y>0$. **568.** Globaalne maksimum on $f(5)=18$; globaalne miinimum on $f(1)=2$. **569.** Globaalne maksimum on $f(3)=19$; globaalne miinimum on $f(-2)=f(1)=-1$. **570.** Globaalne maksimum on $f(e)=e-1$; globaalne miinimum on $f(1)=1$. **571.** Globaalne maksimum on $f(-\pi/2)=$ $=f(\pi/2)=1$; globaalne miinimum on $f(0)=f(-\pi)=f(\pi)=0$. **572.** Globaalne maksimum on $f(-1)=\pi$; globaalne miinimum on $f(1)=0$. **573.** Punktis $x=0$ on lokaalne maksimum, mis PT 4.1.5 põhjal on ka globaalne maksimum $f(0)=1$. Globaalset miinimumi ei ole. **574.** Punktis $x=1$ on lokaalne maksimum, mis on ka globaalne maksimum $f(1)=1/2$; punktis $x=-1$ on lokaalne miinimum, mis on ka globaalne miinimum $f(-1)=-1/2$. Tunnuse PT 4.1.5 rakendamiseks vaadelda eraldi piirkondi $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$, kus mõlemas on üks lokaalne ekstreemum. **575.** Globaalset maksimumi ei ole; globaalne miinimum on $f(1/2)=4$. **580.** 6 ja 6. **581.** 3 cm, 6 cm, 4 cm. **582.** $(6+3^{1/2})/11$ m. **583.** $9/(8+$ $+2\pi)m$. **584.** $20/3^{1/2}$ cm. **585.** Silindri kõrgus on $2R/3^{1/2}$ ja põhja raadius on $R(2/3)^{1/2}$. **586.** Punkt on (1,1). Kasutada analüütilisest geomeetriast tuntud valemit punkti kauguse kohta antud sirgest. **587.** 70/43 tunni pärast. **588.** Sellise kruusi kõrguse ja läbimõõdu suhe tuleb 1 : 2, mistõttu kruusi on ebamugav kasutada. Arvutuste lihtsustamiseks võtta kruusi maht võrdseks arvuga π.

§ 4.2

589. Kumer vahemikus $(-\infty, 2)$, nõgus vahemikus $(2, \infty)$. Punkt (2, 12) on käänupunkt. **590.** Kumer vahemikus $(-\infty, 4)$, nõgus vahemikus $(4, \infty)$. Käänupunkte ei ole (punkt $x=4$ ei kuulu määramispiirkonda). **591.** Nõgus vahemikus $(-\infty, 0)$, kumer vahemikus $(0, \infty)$. Punkt $(0, 0)$ on käänupunkt. **592.** Kumer vahemikus $(0, e)$, nõgus vahemikus (e, ∞). Punkt (e, e^2) on käänupunkt. **593.** Nõgus vahemikes $(-\infty, -2^{-1/2})$ ja $(2^{-1/2}, \infty)$, kumer vahemikus $(-2^{-1/2}, 2^{-1/2})$. Punktid $(-2^{-1/2}, e^{-1/2})$ ja $(2^{-1/2}, e^{-1/2})$ on käänupunktid. **594.** $(2, -16)$. **595.** $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$. **596.** $(1, -9)$, $(-2, -48)$.

§ 4.3

597. $x=2$ on püstasümptoot punkti $a=2$ parem- ja vasakpoolses ümbruses; $y=0$ on parem- ja vasakpoolne rõhtasümptoot. **598.** $x=2$ ja $x=-2$ on püstasümptoodid punktide $a=2$ ja $a=-2$ vasak- ja parempoolses ümbruses; $y=1$ on parem- ja vasakpoolne rõhtasümptoot. **599.** $x=1$ on püstasümptoot punkti $a=1$ parem- ja vasakpoolses ümbruses; kaldasümptoote ei ole. **600.** $x=-1$ on püstasümptoot punkti $a=-1$ parem- ja vasakpoolses ümbruses; $y=2x-2$ on parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot. **601.** $x=-e^{-1}$ on püstasümptoot punkti $a=-1/e$ parempoolses ümbruses; $y=x+e^{-1}$ on parempoolne kaldasümptoot. **602.** $x=0$ on püstasümptoot punkti $a=0$ parem- ja vasakpoolses ümbruses; $y=0$ on parempoolne ja $y=1$ on vasakpoolne kaldasümptoot. **603.** $x=0$ on püstasümptoot punkti $a=0$ parem- ja vasakpoolses ümbruses; $y=2x$ on parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot.

§ 4.4

604. $X=(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, paaritu, $x=0$ on püstasümptoot vasak- ja parempoolses punkti $a=0$ ümbruses. Kasvab vahemikes $(-\infty, -1)$ ja $(1, \infty)$, kahaneb vahemikes $(-1, 0)$ ja $(0, 1)$. Punktis $E_1=(-1, -4/3)$ on lokaalne maksimum, punktis $E_2=(1, 4/3)$ on lokaalne miinimum. Kumer vahemikus $(-\infty, 0)$, nõgus vahemikus $(0, \infty)$. Käänupunkte ei ole, nullkohti ei ole. **605.** $X=(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $x=0$ on püstasümptoot vasak- ja parempoolses punkti $a=0$ ümbruses, $y=0$ on parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot. $y'=-4(x+2)/x^3$. Kasvab vahemikus $(-2, 0)$, kahaneb vahemikes $(-\infty, -2)$ ja $(0, \infty)$. Punktis $E=(-2, -1)$ on lokaalne miinimum. $y''=8(x+3)/x^4$. Kumer vahemikus $(-\infty, -3)$, nõgus vahemikes $(-3, 0)$ ja $(0, \infty)$. Käänupunkt on $K=(-3, -8/9)$. Lõikepunkt x-teljega on $a=-1$. **606.** $X=(-\infty, \infty)$. paarisfunktsioon. $y=0$ on vasak- ja parempoolne rõhtasümptoot. Kasvab vahemikus $(-\infty, 0)$, kahaneb vahemikus $(0, \infty)$. Punktis $E=(0, e^{1/2})$ on globaalne maksimum. Kumer vahemikus $(-1, 1)$, nõgus vahemikes $(-\infty, -1)$ ja $(1, \infty)$. Käänupunktid on $K_1=(-1, 1)$ ja $K_2=(1, 1)$. **607.** $X=(0, \infty)$. $x=0$ on püstasümptoot punkti $a=0$ parempoolses ümbruses. $y'=(1+\ln x)/x$. Kahaneb vahemikus $(0, 1/e)$, kasvab vahemikus $(1/e, \infty)$. Punktis $E=(1/e, 0)$ on lokaalne (globaalne) miinimum. $y''=-\ln x/x^2$. Nõgus vahemikus $(0, 1)$, kumer vahemikus $(1, \infty)$. Käänupunkt on $K=(1, 1/2)$. **608.** $X=(-\infty, 0) \cup [2, \infty)$. $y=x-1$ on parempoolne kaldasümptoot, $y=-x+1$ on vasakpoolne kaldasümptoot. $y'=(x-1)/[(x(x-2)]^{1/2}$. Kahaneb vahemikus $(-\infty, 0)$, kasvab vahemikus $(2, \infty)$, punktides $x=0$ ja $x=2$ on globaalsed miinimumid $y(0)=y(2)=0$. $y''=-1/(x^2-2x)^{3/2}$. Kumer vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(2, \infty)$. Käänupunkte ei ole. **609.** $X=(-\infty, \infty)$. $y=x-1$ on parempoolne kaldasümptoot, $y=-x+1$ on vasakpoolne kaldasümptoot. $y'=(x-1)/(x^2-2x)^{1/2}$, kui $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $y'=(1-x)/(x^2-2x)^{1/2}$, kui $x \in (0, 2)$. Kahaneb vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(1, 2)$, kasvab vahemikes $(0, 1)$ ja $(2, \infty)$. Punktides $E_1=(0, 0)$ ja $E_2=(2, 0)$ on lokaalne (globaalne) miinimum, punktis $E_3=(1, 1)$ on lokaalne maksimum. $y''=-1/(x^2-2x)^{3/2}$, kui $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $y''=-1/(2x-x^2)^{3/2}$, kui $x \in (0, 2)$. Kumer vahemikes $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ ja $(2, \infty)$. Käänupunkte ei ole. **610.** $X=(0, \infty)$. $x=0$ on püstasümptoot punkti $a=0$ parempoolses ümbruses, $y=0$ on parempoolne kaldasümptoot. Kasvab vahemikus $(0, 1)$, kahaneb vahemikus $(1, \infty)$. Punktis $E=(1, 1)$ on lokaalne (globaalne) maksimum. Kumer vahemikus $(0, e^{1/2})$, nõgus vahemikus $(e^{1/2}, \infty)$. Käänupunkt on $K=(e^{1/2}, 3/2e^{-1/2})$. **611.** Punktis $x=1$ on esimest liiki katkevus: $y(1-)=1$, $y(1+)=1/e$. $x=0$ on püstasümptoot punkti $a=0$

vasak- ja parempoolses ümbruses, $y=0$ on parempoolne kaldasümptoot. $y'=1/x$, kui $x\in(-\infty, 0)\cup(0, 1)$, $y'=-e^{-x}$, kui $x\in(1, \infty)$. Kahaneb vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(1, \infty)$, kasvab vahemikus $(0, 1)$. Punktis $E=(1, 1)$ on lokaalne maksimum. $y''=-1/x^2$, kui $x\in(-\infty, 0)\cup(0, 1)$, $y''=e^{-x}$, kui $x\in(1, \infty)$. Kumer vahemikes $(-\infty, 0)$ ja $(0, 1)$, nõgus vahemikus $(1, \infty)$. Käänupunkte ei ole (Punktis $x=1$ ei ole käänupunkti, sest funktsioon ei ole pidev seal). **612.** $X=(-\infty, \infty)$. Punktis $x=-1$ on esimest liiki katkevus: $y(-1-)=e-1$, $y(-1+)=-4$. Püstasümptoote ei ole, $y=-1$ on vasakpoolne kaldasümptoot. $y'=e^{x+2}$, kui $x<-1$, $y'=3x^2-6x$, kui $x>-1$. Kasvab vahemikes $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ ja $(2, \infty)$, kahaneb vahemikus $(0, 2)$. Punktis $E_1=(0, 0)$ on lokaalne maksimum, punktides $E_2=(-1, -4)$ ja $E_3=(2, -4)$ on lokaalsed miinimumid. $y''=e^{x+2}$, kui $x<-1$; $y''=6(x-1)$, kui $x>-1$. Kumer vahemikus $(-1, 1)$, nõgus vahemikes $(-\infty, -1)$ ja $(1, \infty)$. Käänupunkt on $K=(1, -2)$.

§ 5.1

613. $y=2(x+1)$, $2y=-(x+1)$. **614.** $ey=x$, $y-1=e(x-e)$. **615.** $y=-x+2^{1/2}$, $y=x$. **616.** $x=0$, $y=0$. **617.** $\pi/4$. **618.** $a=1/(2e)$. Puutepunkt on $x=e^{1/2}$. **619.** $b^2-4ac=0$.

§ 5.2

620. 1,010. **621.** 4,950. **622.** 0,8104. **623.** 0,486. Arvestada, et $1°=0{,}017$ rad ja $3^{1/2}=1{,}732$. **630.** $|a_4|\leqslant 1/3840$. **631.** $|a_4|<2\cdot 10^{-6}$. **632.** $|a_2|<1/16$. **633.** $-1/12$.

§ 5.3

634. $-2{,}602$; 0,340; 2,262. **635.** $-0{,}724$; 1,221. **636.** 2,087. **637.** 0,472; 9,999. **638.** 2,506, **639.** $-0{,}567$.

§ 5.4

640. $x-x^3/3!$. **642.** $y=-3x+3$. **643.** $a=e^h/2$, $b=e^h(1-h)$, $c=e^h(1-h+h^2/2)$. **645.** 1/6. **646.** $2/(\pi a)$. **647.** $2(2ar)^{1/2}/3$. **648.** $2/(3\cdot 3^{1/2})$. **649.** $1/a$. **650.** Kui $a>b$, siis a/b^2. **651.** $3a/4$. **652.** $\xi=4x^3$, $\eta=1/2+3x^2$. **653.** $\xi=\pm 4(3y+a)y^{1/2}/(3a^{1/2})$, $\eta=-(9y^2+2ay)/(2a)$. **654.** $r=mae^{m(\varphi-\pi/2)}$. **655.** $\xi-\pi a=a(\tau-\sin\tau)$, $\eta+2a=a(1-\cos\tau)$, kus $\tau=t-x$. **656.** $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

§ 6.1

657. $\tan x$. **658.** 2^{x+1}. **659.** $\arctan x$. **660.** $\cos x\,dx$. **661.** $(3+e^x)\,dx$. **662.** $\ln x+C$. **663.** $7\tan x+C$. Arv 6 on ühendatud konstandiga C. **664.** $x^5/5+C$. **665.** $2x^{3/2}-4x+C$. **666.** $2x^{5/2}+C$. **667.** $-1/x-x^{1/2}+C$. **668.** $x^7/7-x^4/2+x+C$. **669.** $10^x/\ln 10+C$. **670.** $e^{5x}/5+C$. **671.** $5^x e^x/(1+\ln 5)+C$. **672.** $x+2e^x+e^{2x}/2+C$. **673.** $4^x/\ln 4-2\cdot 6^x/\ln 6+9^x/\ln 9+C$. **674.** $(2e)^x/(1+\ln 2)+x\ln 2+C$. **675.** $x\sin\alpha+C$. Arvestades, et $\sin\alpha=\mathrm{const}$. **676.** $\sin x+3\cos x+C$. **677.** $(\sin x-\cos x)/2^{1/2}+C=-\cos(\pi/4+x)+C$. Kasutada valemit $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. **678.** $x+\sin x+C$. Kasutada valemit $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$. **679.** $x-\sin x-x\sin^2 2+C$. **680.** $-\cot x-\tan x+C$. Kasutada valemit $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. **681.** $\tan x+C$. **682.** $(x+\tan x)/2+C$. **683.** $\tan x-x+C$. Teha teisendus $\tan^2 x=(1-\cos^2 x)/\cos^2 x=1/\cos^2 x-1$. **684.** $-\cot x-x+C$. Teha teisendus $\cot^2 x=(1-\sin^2 x)/\sin^2 x$. **685.** $\tan x-\cot x-4x+C$. **686.** $\pi x/2+C$. Kasutada valemit $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$. **687.** $\pi/2\arcsin x+C$. Kasutada valemit $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\pi/2$. **688.** $\arcsin x+C$. **689.** $x-\arctan x+C$. Kirjutada lugeja kujul $x^2=(x^2+1)-1$. **690.** $\ln|x|+2\arctan x+C$. Kirjutada lugeja kujul $(1+x)^2=(1+x^2)+2x$. **691.** $x^3/3-x+\arctan x+C$. Lahutada ja lisada lugejasse arv 1, s. t. võtta $x^4=(x^4-1)+1=(x^2+1)(x^2-1)+1$, või $x^4=x^2(x^2+1)-$

$-(x^2+1)+1$. **692.** $x-2\arctan x+C$. **693.** $x\,\mathrm{sh}\,2-\mathrm{ch}\,x+C$. **694.** $\mathrm{sh}\,x+C$. Kasutada valemit $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$. **695.** $x+\mathrm{sh}\,x+C$. Kasutada valemit $2\,\mathrm{ch}^2(x/2)=1+\mathrm{ch}\,x$. **696.** $x-\mathrm{th}\,x+C$. Teha teisendus $\mathrm{th}^2 x=\mathrm{sh}^2 x/\mathrm{ch}^2 x=(\mathrm{ch}^2 x-1)/\mathrm{ch}^2 x=1-1/\mathrm{ch}^2 x$. **697.** $-\mathrm{cth}\,x-\mathrm{th}\,x+C$. Võtta lugeja kujul $1=\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x$. **698.** $\mathrm{th}\,x+C$. Kasutada valemit $\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{sh}^2 x+\mathrm{ch}^2 x$. **699.** $\mathrm{th}\,x-\mathrm{cth}\,x+C$.

§ 6.2

700. $-1/2\cos 2x+C$. **701.** $\tan 4x+C$. **702.** $1/6(x-3)^6+C$. **703.** $1/15(3x+4)^5+C$. **704.** $\ln|x+1|+C$. **705.** $1/2\ln|2x-7|+C$. **706.** $-1/7(4-x)^7+C$. **707.** $-3/8(7-2x)^{4/3}+C$. **708.** $-\cos(x-4)+C$. **709.** $-1/2\sin(1-2x)+C$. **710.** $-1/2\,e^{-2x+3}+C$. **711.** $\arcsin 4x+C$. **712.** $1/2\arcsin^2(x/3)+C$. **713.** $1/6\arctan(2x/3)+C$. **714.** $\arctan(5x+1)+C$. **715.** $\ln|\ln x|+C$. **716.** $1/3\ln|x^3+1|+C$. **717.** $1/2(x^4+1)^{1/2}+C$. **718.** $-1/3(1-x^2)^{3/2}+C$. **719.** $\ln|x^2-5x+2|+C$. **720.** $\ln(e^x+\ln 3)+C$. **721.** $\sin e^x+C$. **722.** $\arcsin\ln x+C$. **723.** $x+\ln(x^2+1)+C$. Kirjutada lugeja kujul $(1+x)^2=(1+x^2)+2x$. **724.** $2\arctan x^{1/2}+C$. Teha teisendus $dx/\sqrt{x}=2d\sqrt{x}$ ja $x=(\sqrt{x})^2$. **725.** $(x-1)^2/2+\ln|x+1|+C$. Teha teisendus $x^2=(x^2-1)+1=(x+1)(x-1)+1$. **726** $\arcsin x-(1-x^2)^{1/2}+C$. **727.** $\arctan e^x+C$. **728.** $\ln|\ln\ln x|+C$. **729.** $2(7+\mathrm{ch}\,x)^{1/2}+C$. **730.** $1/4(1+\mathrm{th}\,x)^4+C$. **731.** $\ln|f(x)|+C$. **732.** $1/2\tan^2 x+C$. **733.** $-\ln|1+\cot x|+C$. **734.** $2/9(2+3\tan x)^{3/2}+C$. **735.** $-1/\sin x+C$. **736.** $\sin^2 x+C$. Teha teisendus $\sin 2x\,dx=2\sin x\cos x\,dx=2\sin x\,d\sin x$. **737.** $-\arctan\cos x+C$. **738.** $-\ln|\cos x|+C$. **739.** $\ln|\sin x|+C$. **740.** $-1/2\cos^4 x+C$. **741.** $1/4\arctan^4 x+C$. **742.** $\ln|\arcsin x|+C$. **743.** $x/2-1/4\sin 2x+C$. Kasutada valemit $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$. **744.** $x/2+1/4\sin 2x+C$. Kasutada valemit $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$. **745.** $-\cos x+1/3\cos^3 x+C$. Teha teisendus $\sin^3 x\,dx=\sin^2 x\sin x\,dx=-(1-\cos^2 x)\,d\cos x$. **746.** $\sin x-1/3\sin^3 x+C$. **747.** $-\cot(x/2)+C$. Kasutada valemit $2\sin^2 x=1-\cos 2x$. **748.** $\tan x-1/\cos x+C$. Teha teisendus $1/(1+\sin x)=(1-\sin x)/(1-\sin^2 x)=(1-\sin x)/\cos^2 x$. **749.** $\ln(2+\sin 2x)+C$. Arvestada, et $\cos 2x\,dx=1/2\,d\sin 2x$. **750.** $\tan x+C$, kui $\cos x>0$, ja $-\tan x+C$, kui $\cos x<0$. Kasutada valemit $1/\cos^2 x=1+\tan^2 x$, kust $1/|\cos x|=(1+\tan^2 x)^{1/2}$. **751.** $1/3\tan^3 x+C$. Valemi $1/\cos^2 x=1+\tan^2 x$ abil teha teisendus $\tan^2 x+\tan^4 x=\tan^2 x(1+\tan^2 x)=\tan^2 x/\cos^2 x$. **752.** $\tan x+1/3\tan^3 x+C$. Valemi $1/\cos^2 x=1+\tan^2 x$ abil teha teisendus $1/\cos^4 x=(1+\tan^2 x)/\cos^2 x$. **753.** $-\cot x-1/3\cot^3 x+C$. Valemi $1/\sin^2 x=1+\cot^2 x$ abil teha teisendus $1/\sin^4 x=(1+\cot^2 x)/\sin^2 x$. **754.** $1/2\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$. Valemi $1/\cos^2 x=1+\tan^2 x$ abil teha teisendus $\tan^3 x=\tan x(\tan^2 x+1-1)=\tan x/\cos^2 x-\tan x$ ja võtta integraalide vahe. **755.** $1/3\tan^3 x-\tan x+x+C$. Teha teisendus $\tan^4 x=(\tan^4 x-1)+1=(\tan^2 x-1)(\tan^2 x+1)+1=(\tan^2 x-1)/\cos^2 x+1$. **756.** $x-1/2\cos 2x+C$. Teha teisendus $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x$. **757.** $\arctan(x+1)+C$. **758.** $2/5t^5+2/3t^3+C$, kus $t=(1-x)^{1/2}$. **759.** $t^5/5-t^3/3+C$, kus $t=(1-x^2)^{1/2}$. **760.** $2\arcsin x^{1/2}+C$. Et juur eksisteeriks, peab olema $x\in(0,1)$, mis on täidetud, kui $t\in(0,\pi/2)$. Siis $|\sin t|=\sin t$, $|\cos t|=\cos t$. **761.** $-\arcsin(1/|x|)+C$. Pärast muutujate vahetust saame $J=t\,\mathrm{sgn}\cos t\,\mathrm{sgn}\sin t+C$. Peab olema $|x|>1$. Kui $x\in(1,\infty)$, siis $t\in(0,\pi/2)$ ja $J=t+C=\arccos(1/x)+C=-\arcsin(1/x)+C$. Kui $x\in(-\infty,-1)$, siis $t\in(\pi/2,\pi)$ ja $J=-t+C=\arcsin(1/x)+C=-\arcsin(-1/x)+C$. **762.** $2^{-1/2}\arctan[2^{-1/2}(x-1/x)]+C$. **763.** $2\exp x^{1/2}+C$. Võtta $x=t^2$ $(t\geqslant 0)$, siis $dx=2t\,dt$. **764.** $2(e^x-1)^{1/2}+C$. Võtta $t^2=e^x-1$ $(t>0)$, kust $2t\,dt=e^x\,dx$. **765.** $1/2(\arcsin x+x(1-x^2)^{1/2})+C$. Võtta $x=\sin t$, $t\in[-\pi/2,\pi/2]$, siis $\cos t\geqslant 0$. **766.** $(x^2-1)^{1/2}-\arctan(x^2-1)^{1/2}+C$. Võtta $t^2=x^2-1$ $(t\geqslant 0)$. **767.** $-(x^2+a^2)^{1/2}/(a^2x)+C$. Võtta $t=1/x$. **768.** $-\mathrm{sgn}\,x\,a^{-1}\times\arcsin(a/x)+C=-a^{-1}\arcsin(a/|x|)+C$. Võtta $t=1/x$. **769.** $4(x^{3/4}-\ln|1+x^{3/4}|)+C$. Võtta $t=x^{3/4}$, siis $t^4=x^3$, $4t^3\,dt=3x^2\,dx$ ja $3dx=4t^{1/3}\,dt$. **770.** $1/2\ln^2\tan x+C$. Võtta $t=\ln\tan x$, siis $dx=\sin x\cos x\,dt$. **771.** $-1/2\arcsin^2(1/x)+C$. Võtta $t=\arcsin(1/x)$, siis $dx=-|x|(x^2-1)^{1/2}\,dt$. **772.** $-1/2\,\mathrm{sgn}\,x\arcsin^2(1/x)+C$. Võtta $t=\arcsin(1/x)$. **773.** $1/2\ln(x^4+1)-$

$-\ln|x|+C$. Võtta $t=x+1/x$, siis $t^2-2=x^2+1/x^2$ ja $dx=x^2\,dt/(x^2-1)$, $x^4+1=x^2(x^2+1/x^2)=x^2(t^2-2)$. **774.** $2^{1/2}J=\ln|x^2-1|-\ln|2^{1/2}x+(x^4+1)^{1/2}|+C$. Võtta $t=x-1/x$, siis $x^4+1=x^2(t^2+2)$.

§ 6.3

775. $-x\cos x+\sin x+C$. Võtta $u=x$, $dv=\sin x\,dx$. **776.** $x\sin x+\cos x+C$. Võtta $u=x$, $dv=\cos x\,dx$. **777.** $-(x+1)e^{-x}+C$. Võtta $u=x$, $dv=e^{-x}\,dx$. **778.** $a^x(x\ln a-1)/\ln^2 a+C$. **779.** $x\ln x-x+C$. Võtta $u=\ln x$, $dv=dx$. **780.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+C$. Võtta $u=\ln(x^2+1)$, $dv=dx$. **781.** $x\tan x-x^2/2+\ln|\cos x|+C$. Võtta $u=x$, $dv=\tan^2 x\,dx$ ja kasutada ülesande 683 lahendust. **782.** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. Kasutada valemit (23), võttes $u=x^2$ ja $n=3$. **783.** $-e^{-2x}(2x^2+2x+1)/4+C$. Kasutada valemit (23), võttes $u=x^2$ ja $n=3$. **784.** $x^3\operatorname{ch}x-3x^2\operatorname{sh}x+6x\operatorname{ch}x-6\operatorname{sh}x+C$. **785.** $x^4\sin x+4x^3\cos x-12x^2\sin x-24x\cos x+24\sin x+C$. **786.** $e^x(\sin x-\cos x)/2+C$. Võtta $u=e^x$, $v=\sin x$ ja kasutada valemit (22). **787.** $e^x(\sin x+\cos x)/2+C$. Võtta $u=e^x$, $v=\cos x$ ja kasutada valemit (22). **788.** $x(\sin\ln x-\cos\ln x)/2+C$. Võtta $u=\sin\ln x$, $dv=dx$ ja kasutada valemit (19) kaks korda. **789.** $x(\cos\ln x+\sin\ln x)/2+C$. Võtta $u=\cos\ln x$, $dv=dx$ ja kasutada valemit (19) kaks korda. **790.** $(-\operatorname{ch}x\cos x+\operatorname{sh}x\sin x)/2+C$. Võtta $u=\operatorname{ch}x$, $v=\sin x$ ja kasutada valemit (22). **791.** $1/3\,x^3\ln x-1/9x^3+C$. Võtta $u=\ln x$, $dv=x^2\,dx$ või $u=x^2\ln x$, $dv=dx$. **792.** $e^x/(1+x)+C$. Võtta $u=xe^x$ ja kasutada valemit (19) ning arvestada, et $dx=d(1+x)$. **793.** $2x^{1/2}\sin x^{1/2}+2\cos x^{1/2}+C$. Teha muutuja vahetus $t^2=x$ $(t\geqslant0)$, kust $dx=2t\,dt$, ja integreerida ositi. **794.** $1/3(x^3-1)\ln(x+1)-x^3/9-x^2/6-x/3+C$. Võtta $u=\ln(x-1)$, $dv=x^2\,dx$ ja leitavale funktsioonile v lisada konstant $-1/3$, s. o. võtta $v=(x^3-1)/3$. **795.** $x^2/4+x/4\sin 2x+1/8\cos 2x+C$. Integreerida ositi, võttes $u=x$, $dv=\cos^2 x$. Kasutada ülesande 744 vastust. **796.** $2e^{\sin x}\times(\sin x-1)+C$. Kasutada valemit $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Teha muutuja vahetus $t=\sin x$. **797.** $x\arctan x-1/2\ln(1+x^2)+C$. Integreerida ositi, võttes $u=\arctan x$, $dv=dx$. **798.** $x\arcsin x+(1-x^2)^{1/2}+C$. Integreerida ositi, võttes $u=\arcsin x$, $dv=dx$ ja saadud integraalis teha teisendus $x\,dx=-d(1-x^2)/2$. **799.** $(x^2+1)/2\arctan^2 x-x\arctan x+1/2\ln(x^2+1)+C$. Integreerida ositi, võttes $u=\arctan^2 x$, $dv=x\,dx$, kust v määrata kujul $v=x^2/2+1/2$, s. o. võtta koos konstandiga $1/2$. Kasutada ülesande 797 vastust. **800.** $6(x-2)\sin x^{1/2}+2x^{1/2}(6-x)\cos x^{1/2}+C$. Teha muutuja vahetus $t^2=x$ $(t\geqslant0)$, kust $dx=2t\,dt$, ja kasutada valemit (23), võttes $u=t^3$, $v=\sin t$ ja $n=4$. **801.** $x^2(2\sin\ln x-\cos\ln x)/5+C$. Võtta $u=\sin\ln x$, $dv=x\,dx$ ja kasutada valemit (19) kaks korda. Saadud võrrandist määrata integraal. **802.** $x^3(3\cos\ln x+\sin\ln x)/10+C$. Võtta $u=\cos\ln x$, $dv=x^2\,dx$ ja kasutada valemit (19) kaks korda. Saadud võrrandist määrata integraal. **803.** $(x-1)e^{\arctan x}/[2(1+x^2)^{1/2}]+C$. Teha muutuja vahetus $t=\arctan x$, siis $x=\tan t$, kus $t\in(-\pi/2,\pi/2)$, mille tõttu $\cos t>0$. Kasutada valemit $1/\cos^2 t=1+\tan^2 t$.

§ 6.4

805. $A/(x+1)+B/(x+2)$. **806.** $A/x+B/(x+1)+C/(x+1)^2$. **807.** $A/(x-1)+B/(x-1)^2+C/(x-1)^3+(Dx+E)/(x^2+1)$. **808.** $A/x+B/(x+2)+C/(x+2)^2+(Dx+E)/(x^2+x+1)+(Fx+G)/(x^2+x+1)^2$. **809.** $A/(x-2)+B/(x-3)$. **810.** $x^2+2+A/(x-1)+B/(x+2)$. Et tegemist on liigmurruga, siis valemi (26) rakendamiseks tuleb eelnevalt lugeja jagada nimetajaga täisosa eraldamiseks. **811.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. Osamurdudes kordajate määramiseks võtta $x=2$ ja $x=-5$. **812.** $\ln|x+1|-1/2\ln|2x+1|+C$. Kordajate määramiseks võtta $x=-1$, $x=-1/2$. **813.** $x^2/2-x+\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$. Liigmurd. Lugeja jagamisel nimetajaga saame $x-1+3x/[(x-1)(x+2)]$. **814.** $4\ln|x|-3\ln|x-1|-9/(x-1)+C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$, $x=1$ ja võrdustada x^2 kordajad. **815.** $x-\ln|x|+1/x+2\ln|x-1|+C$. Liigmurd! **816.** $-3\ln|x|-2/x+3\ln|x+1|-1/(x+1)+C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$, $x=-1$ ja võrdustada x^2 ja x^3 kordajad. **817.** $2J=2\ln|x|-$

$-\ln(x^2+1)+2C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$ ning võrdsustada x ja x^2 kordajad. **818.** $4J=2\ln|x+1|-\ln(x^2+1)+2\arctan x+4C$. Kordajate määramiseks võtta $x=-1$, $x=0$ ja võrdsustada x^2 kordajad. **819.** $2J=2\ln|x|-$ $-\ln(x^2+1)+1/(x^2+1)+x/(x^2+1)+\arctan x+2C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$, $x=i$ ning võrdsustada x^3 ja x^4 kordajad. Kasutada rekurrentset valemit (28). **820.** $\ln|x|-\ln(x^2+2x+2)/2-\arctan(x+1)+C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$ ja võrdsustada x^2 ja x kordajad. **821.** $8J=2x/(x^2+1)^2+3x/(x^2+1)+$ $+3\arctan x+8C$. Integraal on kujul (27), kus $n=3$ ja $b^2=1$, seepärast kohe kasutada rekurrentset valemit (28) kaks korda järjest. **822.** $2J=(x+1)/(x^2+$ $+2x+2)+\arctan(x+1)+2C$. Teha muutuja vahetus $x=t-1$ ja kasutada rekurrentset valemit (28). **823.** $2J=\arctan(x/2+1)+2C$. Teha muutuja vahetus $x=t-2$ ja kasutada diferentsiaali märgi alla viimise võtet. **824.** $2J=$ $=x/(x^2+1)+\arctan x+2C$. Kordajate määramiseks võtta $x=i$, $x=0$ ja võrdsustada x^3 kordajad. **825.** $2J=-(3x^2+2)/(x^3+x)-3\arctan x+2C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$, $x=i$ ja võrdsustada x^4, x ja x^5 kordajad. **826.** $x/(x^2+2x+2)-2\ln|x+1|+\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+C$; Kordajate määramiseks võtta $x=i-1$ (polünoomi x^2+2x+2 nullkoht), $x=-1$, $x=0$ ja võrdsustada x^4 kordajad. **827.** $16J=-2(x^2+x+2)/[(x+1)^2(x-1)]+$ $+\ln|x+1|-\ln|x-1|+16C$. Kordajate määramiseks võtta $x=0$, $x=1$, $x=$ $=-1$ ja võrdsustada x^4 a x^3 kordajad. Saadud võrrandisüsteemist määrata kordajad. **828.** $a+2b+3c=0$. **829.** $pc+ra=2qb$. **831.** $(-1/(2t^2)+6/t+15\ln|t|-$ $-20t+15t^2/2-2t^3+t^4/4)/3^7+C$, kus $t=(x+1)/(x+4)$. **832.** $(-1/t+3t-$ $-t^2/2-3\ln|t|)/5^4+C$, kus $t=(x-2)/(x+3)$. **833.** $-t^3/3+3t^2-15t+$ $+20\ln|t|+15/t-3/t^2+1/(3t^3)+C$, kus $t=(x-2)/(x-3)$.

§ 6.5

834. $\tan(x/2)+C$. Teha asendus (42). **835.** $2/[1-\tan(x/2)]+C$. Teha asendus (42). **836.** $\ln|1+\tan(x/2)|+C$. **837.** $1/5\cos^5 x-1/3\cos^3 x+C$. Teha asendus (44). **838.** $-1/8\cos^4 2x+C$. Teha asendus $\cos 2x=t$. Võib teha ka asendused $\sin 2x=t$ ja $\tan 2x=t$. **839.** $(\ln|t-1|-\ln|t+1|)/2+C$, kus $t=\cos x$. Teha asendus (44). **840.** $(\ln|t+1|-\ln|t-1|)/2+C$, kus $t=\sin x$. Teha asendus (45). **841.** $\tan x+1/4\sin 2x-3x/2+C$. Teha asendus (46). **842.** $1/2\sin x-1/10\sin 5x+C$. **843.** $-1/4\cos 2x-1/8\cos 4x+C$. **844.** $3\sin(x/6)+3/5\sin(5x/6)+C$. **845.** $-1/8\cos 2x-1/16\cos 4x+1/24\cos 6x+C$. **846.** $-1/2\cos x-1/20\cos 5x+1/28\cos 7x+C$. **847.** $x\cos(2b)/2+\sin(2ax)/$ $/(4a)+C$. **850.** $-x/5-3/5\ln|\sin x+2\cos x|+C$. **851.** $12x/13-$ $-5/13\ln|2\sin x+3\cos x|+C$. **852.** $34J=3x+5\ln|3\cos x+5\sin x|+34C$. **853.** $\ln|\cos x-1|+2/\tan(x/2)+C$. **854.** $x-\tan(x/2)+C$. **855.** $5J=-3x+$ $+4\ln|\sin x-2\cos x+3|-6\arctan[(5\tan(x/2)+1)/2]+C$.

§ 6.6

856. $2x^{1/2}-4\ln|2+x^{1/2}|+C$. **857.** $2\arctan x^{1/2}+C$. **858.** $2t^3/3+2t-$ $-2\arctan t+C$, kus $t=(x-1)^{1/2}$. **859.** $2t/(t^2+1)+2\arctan t+C$, kus $t=$ $=[(1+x)/(1-x)]^{1/2}$. Viimase võrduse abil teha muutuja vahetus ja kasutada rekurrentset valemit (28). **860.** $4\arctan t+2t/(t^2+1)+C$, kus $t=(2x-1)^{1/2}$. Viimase võrduse abil teha muutuja vahetus ja kasutada rekurrentset valemit (28). **861.** $-t/[2(2t^2+1)]+\arctan(2^{1/2}t)/2^{3/2}+C$, kus $t=[x/(1-x)]^{1/2}$. **862.** $3J=x^3+(x^2-1)^{3/2}+3C$. Teha Euleri esimene asendus plussmärgiga. **863.** $4J=2\ln t-1/t^2+4C$, kus $t=(1+x^2)^{1/2}-x$. Teha Euleri esimene asendus plussmärgiga. **864.** $2J=1/t-t+2C$, kus $xt=(1-x^2)^{1/2}+1$. Teha Euleri kolmas asendus miinusmärgiga. **865.** $2J=4\ln|t|-3\ln|1+2t|+3/(1+2t)+2C$, kus $t=x+(x^2+x+1)^{1/2}$. Teha Euleri esimene asendus miinusmärgiga. **866.** $27J=$ $=-2\ln|t-1|+6/(t-1)+2\ln|t+2|-12/(t+2)+27C$, kus $xt=(x+2x^2)^{1/2}$. Teha Euleri kolmas või teine asendus $(x+2x^2)^{1/2}=xt$. **868.** $\ln|x+1+$ $+(x^2+2x-1)^{1/2}|+C$. **869.** $3^{-1/2}\arcsin(3x/4+1/4)+C$. **870.** $2t^9/3+12t^{11}/11+$ $+6t^{13}/13+C$, kus $t=x^{1/6}$. Et $\gamma=$täisarv, siis teha asendus $x^{1/6}=t$, kust $x=t^6$

ja $dx=6t^5\,dt$. **871.** $3t^5/10-3t^2/4+C$, kus $t=(x^2+1)^{1/3}$. Et $(\alpha+1)/\beta$ on täisarv, siis teha asendus $x^2+1=t^3$. **872.** $\ln|t+1|-\ln|t-1|+C$, kus $t=(x^2+1)^{1/2}/x$. Et $(\alpha+1)/\beta+\gamma=$ täisarv, siis teha asendus $(x^2+1)/x^2=1+x^{-2}=t^2$. Saame $dx=-x^3t\,dt$ ja $(x^2+1)^{1/2}=xt\operatorname{sgn}(xt)=xt$. **873.** $5t^4/4-5t^9/9+C$, kus $t=(1+1/x)^{1/5}$. **874.** $3\ln|t+1|+3/(t+1)+C$, kus $t=x^{1/3}$. **875.** $(t^3/3-t)/4+C$, kus $t=(1+2x^2)^{1/2}$. **876.** $1/6\ln(t^2+t+1)-1/3\ln|t-1|-3^{-1/2}\arctan[(2t+1)/3^{1/2}]+C$, kus $t=(x^3+1)^{1/3}/x$. **877.** $t/(t^2+1)-\arctan t+C$, kus $t=(x^{-3}-1)^{1/2}$. **882.** $r=2/k$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 0$. **883.** $r=k/3$, kus k on iga kolmega mittejaguv täisarv. **884.** Iga r korral, sest $\gamma=2=$ täisarv. **885.** $r=k$ või $r=2/3-k$, kus $k\in\mathbf{Z}$.

§ 7.1

886. PT 7.1.1. **887.** PT 7.1.2, PT 7.1.3. **888.** PT 7.1.3. **889.** PT 7.1.4. Katkevuspunktid moodustavad jada (1, 1/2, 1/3, ...). **890.** PT 7.1.5. Funktsioon on ülesandeis 886 ja 888 olevate integreeruvate funktsioonide korrutis. **894.** 2. **895.** 19/3. **896.** e^3-1. **897.** $\ln 2$. **898.** Positiivsed, teine. **899.** Positiivsed, esimene. **900.** Positiivsed, teine. Vt. ülesanne 545. **901.** Negatiivsed, teine. **902.** Positiivsed, teine. **903.** Esimene positiivne ja teine negatiivne, esimene. **904.** $\xi=1$. **905.** $\xi=(19/3)^{1/2}$. **906.** $\xi=\ln[(e^3-1)/3]$. **907.** $\xi=1/\ln 2$. **908.** $1/(1+x)$. **909.** $\sin x$. **910.** $x^{-1}\sin 2x$. Kasutada liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit M 3.1.1, võttes $u=2x$, ja valemit (13). **911.** xe^{-x}. **912.** $-(1+x^2)^{1/2}$. Kasutada võrdust (4). **913.** $-x/\ln x$. **914.** $y'=0$. Kasutada võrdust (5). **915.** $-\ln^2 x+2\ln^2(2x)=2\ln^2 2+\ln x\ln 16$. **916.** $-\cos x\exp\sin^2 x-\sin x\exp\cos^2 x$. **917.** $e^x\sin x$.

§ 7.2

918. 15/4. **919.** 1. **920.** $3-e$. **921.** 17. **922.** $-\ln 5$. **923.** $1-3^{-1/2}$. **924.** $3/4+\ln 4$. **925.** $15/\ln 4+4$. **926.** π. **927.** 1. **928.** $\pi/4-\arctan(\pi/4)$. **929.** $(\pi/4)^3+\arctan(\pi/4)$. **930.** 1/12. **931.** 2. **932.** $17/3-e$. **933.** 5/2. Jaotada integreerimislõik osadeks $[-1, 0]$ ja $[0, 2]$ ning kõrvaldada absoluutväärtus D 1.2.1 põhjal. **934.** 4. Jaotada integreerimislõik osadeks $[0, 2]$ ja $[2, 4]$ ja kõrvaldada absoluutväärtus. **935.** 2. Jaotada integreerimislõik osadeks $[0, \pi/2]$ ja $[\pi/2, \pi]$ ja kõrvaldada absoluutväärtus. **936.** 4. Antud funktsiooni nullkohad on 0 ja 2. Vastavalt sellele jaotada integreerimislõik kolmeks osaks $[-1, 0]$, $[0, 2]$ ja $[2, 3]$ ning igal osal kõrvaldada absoluutväärtus. **937.** $-1/4$. Antud juhul on $f(x)=0$, kui $x\geqslant 0$ ja $f(x)=\operatorname{sh} x$, kui $x<0$. **938.** 0. Paaritu funktsioon. Kasutada valemit (21). **939.** $\pi/2$. Paarisfunktsioon. Kasutada valemit (22). **940.** π. Paarisfunktsioon. **941.** 0. Paaritu funktsioon. Vt. ülesanne 146. **942.** 0; osa $\cos x$ on paarisfunktsioon, osa $\tan(x/3)$ on paaritu. **943.** 28,8; osa x^5+15x^3 on paaritu ja osa x^4+4 on paarisfunktsioon. **944.** $e^{\pi}-e^{-\pi}$; osa $\sin x$ on paaritu funktsioon, osa e^x ei ole ei paaritu ega paarisfunktsioon. **945.** 8; paarisfunktsioon, lõigul $[0, \pi]$ on $\sin|x|+\sin x=2\sin x$. **946.** 1. **947.** $\ln 2$. **948.** 10. **949.** 0. **950.** 16/3. **951.** 4/3. **952.** e^7-1. **953.** π. **954.** $\pi/24$. **955.** $\pi/6$. **956.** $\pi/30$. **957.** 1/2. **958.** $\ln 2$. **959.** 98/3. **960.** $(e-1)^5/5$. **961.** 1/3. **962.** 2/3. Vt. märkust ülesande 745 vastuses. **963.** 4/3. Teisendada integraalialune avaldis kujule $|\sin x|\cos^{1/2}x\,dx$ ja kasutada valemit (22), viies $\sin x$ diferentsiaalimärgi alla. **964.** $\arctan\operatorname{sh} 1$. **965.** $4-2\ln 3$. Võtta $x=t^2$ $(t\geqslant 0)$, siis $dx=2t\,dt$. Võib võtta ka $1+x^{1/2}=t$, siis $x=(t-1)^2$ ja $dx=2(t-1)\,dt$. **966.** $2(3^{1/2}-\pi/3)$. **967.** $2-\ln 2$. Võtta $t^2=1+2x$ $(t\geqslant 0)$, siis $dx=t\,dt$; või $t=1+(1+2x)^{1/2}$, siis $(t-1)^2=1+2x$ ja $dx=(t-1)\,dt$. **968.** $\arctan 3-\arctan 2$. Võtta $x=t-2$. **969.** $\pi/2$. Võtta $x=t+2$ ja seejärel $t=3s$. **970.** $\pi/6$. Võtta $x=t+1$ ja seejärel $t=3s$. **971.** 1. Võtta $t=\tan(x/2)$. **972.** $2\arctan(5^{-1/2})$. Võtta $t=\tan(x/2)$. **973.** -2. **974.** $1-2/e$. **975.** 2π. Kasutada algul valemit (22), sest integraali all on paarisfunktsioon. **976.** $\pi/4-1/2$. Võtta $u=\arctan x$ ja $dv=x\,dx$. Viimasest saadud v võtta konstandiga 1/2, s.o. $v=(x^2+1)/2$. **977.** $3(\ln 12-1)$. Võtta $u=\ln(x+3)$ ja $dv=dx$. Viimasest saadud v võtta konstandiga 3, s.o. $v=x+3$. **978.** -2π Kasutada valemit (29), võttes $n=3$,

$u=x^2$, $v=\cos x$. **979.** $6-2e$. Kasutada valemit (29), võttes $n=4$, $u=x^3$, $v=e^x$. **980.** $(e^{\pi/2}+1)/2$. Kasutada valemit (31), võttes $u=e^x$, $v=\sin x$. **981.** $(e^{\pi}+1)/2$. Võtta $u=\sin \ln x$, $dv=dx$ ja kasutada valemit (27) kaks korda. Kahekordse ositi integreerimise valem (31) toob kaasa komplitseeritud arvutusi. **982.** $8/3 \ln 2-7/9$. Võtta $u=x^2 \ln x$, $dv=dx$ ja kasutada valemit (27). Saadud võrrandist avaldada integraal. **983.** $\pi/4$. **984.** $\pi-2$. **985.** $\pi/12+3^{1/2}/2-1$. **986.** $(2^7-2^3)/\ln 2$. **987.** $(6^2 \ln 3-16)/\ln^2 3$. **988.** $2^{1/2}$. **989.** $4(2^{1/2}-1)/3$. Viia irratsionaalsus nimetajast lugejasse. **990.** $3(\ln 2-1/2)$. Võtta $1+x=t^3$, siis $dx=3t^2\,dt$, ja arvestada, et $t^2=t^2-1+1=(t+1)(t-1)+1$. **991.** $2-\pi/2$. **992.** $1/2$. **993.** 0. Kasutada valemit (21), sest integraalimärgi all on paaritu funktsioon. **994.** 0. Võtta $x-3=t$, siis integreerimislõik muutub sümmeetriliseks ja integraalimärgi alla tekib paaritu funktsioon, mille tõttu saab kasutada valemit (21). **995.** $\ln(1+e)-\ln 2$. **996.** $\ln 3-\ln 4$. Teisendada lugeja kujule $1-e^x=(1+e^x)-2e^x$. **997.** $3(e^{2\pi}+1)/13$. Kasutada valemit (31). **998.** $3(\pi^2/2-4)$. Võtta $x=t^2$ $(t\geqslant 0)$ ja kasutada valemit (29). **999.** $17/6$. Vaadelda kui diferentsiaalbinoomi, kus $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-1/2$. **1000.** $(e^{\pi}-2)/5$. Võtta $u=\cos \ln x$, $dv=x\,dx$ ja kasutada valemit (27) kaks korda. Saadud võrrandist avaldada integraal. **1001.** $33/8$. On diferentsiaalbinoom, kus $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=-2/3$. **1002.** $\pi/16$. **1003.** $1/2$. **1004.** $8/21$. Võtta $\cos x=t^2$. **1005.** $1/2$. Teisendada $\sin x\,dx=-d\cos x$ ja arvestada, et $|\cos^3 x|=\cos^3 x$, kui $0\leqslant x\leqslant \pi/2$, ja $|\cos^3 x|=-\cos^3 x$, kui $\pi/2<x<\pi$. **1006.** $4(3^{1/2}-1)-\pi/3$.

§ 7.3

1007. 2. Kasutada valemit (38), sest algfunktsioon on pidev integreerimislõigus. **1008.** 3. **1009.** Hajub KT 7.3.3 põhjal. **1010.** $\pi/2$. Kasutada valemit (38). **1011.** π. **1012.** Hajub KT 7.3.5 põhjal. **1013.** Hajub KT 7.3.4 põhjal. **1014.** $1/\ln 2$. **1015.** $3\pi^2/8$. **1016.** $3(\pi/4)^{1/3}$. **1017.** Hajub. **1018.** $3/2$. **1019.** Koondub. Võrrelda funktsiooniga $1/(x-1)^{1/2}$ ja kasutada tunnust KT 7.3.1 või KT 7.3.2. **1020.** Hajub. Võrrelda funktsiooniga $-1/[2(x-1)]$, kasutada tunnust KT 7.3.2. **1021.** Koondub. Kasutada tunnust KT 7.3.2, vaadeldes piirprotsesse $x\to 2+$ ja $x\to 3-$. **1022.** Koondub. **1023.** Koondub absoluutselt. **1024.** Koondub absoluutselt. **1025.** Koondub absoluutselt. **1026.** Hajub. **1027.** Koondub. **1028.** Hajub.

§ 7.4

1029. 1. Kasutada valemit (48). **1030.** Hajub KT 7.4.3 põhjal. **1031.** 1. Kasutada valemit (49). **1032.** $1/(k-1)$, kui $k>1$; kui $k\leqslant 1$, siis hajub KT 7.4.3 põhjal. **1033.** π. Kasutada valemit (50). **1034.** Hajub KT 7.4.3 põhjal. **1035.** $1/2$. **1036.** π. Teha muutuja vahetus $x=t-1$ ja kasutada valemit (50). **1037.** $1/\ln 2$. **1038.** 1. **1039.** Hajub KT 7.4.5 põhjal. **1040.** $\pi/5^{1/2}$. Teha muutuja vahetus $x=t-2$. **1041.** Hajub KT 7.4.4 põhjal. **1042.** $1/2$. Kasutada valemit (31). **1043.** Koondub. Et $(1+x^3)^{-1/2}\leqslant(1+x^2)^{-1/2}$, siis koondub I võrdluslause KT 7.4.1 põhjal. Et $(1+x^3)^{-1/2}\sim 1/x^3$, siis koondub II võrdluslause KT 7.4.2 põhjal. Koonduvus järeldub ka tunnusest KT 7.4.6. **1044.** Koondub KT 7.4.6 põhjal, sest $x/(x^3+1)\sim 1/x^2$, kui $x\to\infty$. **1045.** Koondub KT 7.4.6 põhjal. **1046.** Hajub KT 7.4.6 põhjal, sest $x/(1+x)^2\sim 1/x$, kui $x\to\infty$. **1047.** Koondub. **1048.** Koondub. **1049.** Hajub KT 7.4.6 põhjal. **1050.** Hajub. **1051.** Koondub tingimisi. Võttes $f(x)=\sin x$ ja $g(x)=1/x$, saame koonduvuse tunnusest KT 7.4.7. Et $|\sin x|/x\geqslant x^{-1}\sin^2 x=1/(2x)-(4x)^{-1}\cos 2x$ ja integraal funktsioonist $1/(2x)$ hajub (integraal funktsioonist $(4x)^{-1}\cos 2x$ koondub KT 7.4.7 põhjal), siis I võrdluslause KT 7.4.1 põhjal integraal funktsioonist $|\sin x|/x$ hajub, s. t. vaadeldav integraal ei koondu absoluutselt. **1052.** Koondub tingimisi. Koondub KT 7.4.7 põhjal. Selleks et näidata, et integraal absoluutselt ei koondu, kasutame võrratust $|\cos x|\geqslant\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$ analoogiliselt ülesandega 1051. **1053.** Koondub absoluutselt I võrdluslause KT 7.4.1 põhjal, sest $|\cos x^2|/(1+x^4)\leqslant 1/(1+x^4)\leqslant 1/x^4$. **1054.** Koondub tingimisi. Koonduvuse näitamiseks teha muutuja vahetus $x^2=t$ ja kasutada tunnust KT 7.4.7. Et integraal absoluutselt ei koondu, järeldub võrratusest $|\sin x|\geqslant\sin^2 x=$

$=(1-\cos 2x)/2$. **1055.** Hajub. Jaotada integreerimispiirkond osadeks $[0, \pi]$ ja $[\pi, \infty)$. Esimeses neist integraal hajub ja teises koondub KT 7.4.7 põhjal. **1056.** Hajub.

§ 7.5

1057. Täpne vastus on $-6,2832\ldots$ **1058.** Täpne vastus on $0,69315\ldots$. **1059.** Täpne vastus on $0,83566\ldots$. **1060.** Täpne vastus on $17,333\ldots$. **1061.** Täpne vastus on $5,4024\ldots$. **1062.** $1,\overline{463}$. **1063.** 3,14159.

§ 8.1

1064. 8/3. Kasutada valemit (2). **1065.** $e-1$. Kasutada valemit (1). **1066.** 4,5. **1067.** 1/12. **1068.** 2. **1069.** 4. **1070.** $2(1-1/e)$. **1071.** πab. Minna üle parameetrilisele kujule $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0, 2\pi]$ ja kasutada valemit (1), tehes muutuja vahetuse $x=a\cos t$, siis $dx=-a\sin t\, dt$ ja $y=y(x)=$ $=b\sin t$. Sümmeetrilisuse tõttu võtta neljakordselt integraal lõigus $[0, \pi/2]$. **1072.** $4a^3/3$. Sümmeetria tõttu arvutada 1/4 pindalast. **1073.** 1/9. Tekkinud päratut integraali integreerida ositi, võttes $u=x^2\ln x$, $dv=dx$. Saadud võrrandist määrata integraal. **1074.** $3\pi a^2/2$. Kasutada valemit (6). **1075.** $\pi a^2/4$. **1076.** $18\pi a^2$. **1077.** $\pi(a^2+b^2)/2$. **1078.** a^2. **1079.** $(e^2+1)/2$. Kasutada valemit (1), tehes muutuja vahetuse $x=\ln t$, siis $y=e^2-t^2$. **1080.** $3\pi a^2$. Kasutada valemit (1), tehes muutuja vahetuse $x=a(t-\sin t)$, $t\in[0, 2\pi]$, siis $y=a(1-\cos t)$. **1081.** $8(\xi-\arctan\xi)$, kus $\xi=(1+2/3^{1/2})^{1/2}$. **1082.** $5\cdot 2^{1/2}/3$. **1083.** π. Vaadeldav kujund on tõkestamata ja sümmeetriline y-telje suhtes. Seepärast tuleb algul leida kujundi selle osa pindala, kus $0\leqslant x\leqslant h$, ning minna siis piirile $h\to\infty$. Sellega tõkestamata kujundi pindala leidmine taandub päratu integraali arvutamisele. **1084.** 2. **1085.** 4π. **2086.** $3\pi a^2$.

§ 8.2

1087. 1/3. Kasutada valemit (7). **1088.** $2abc/3$. Kasutada valemit (7). **1089.** $4\pi abc/3$. Kasutada valemit (7). **1090.** $8a^3/3$. Kasutada valemit (7). **1091.** $\pi^2/2$. Kasutada valemit (8). **1092.** 12π. Kasutada valemit (8). **1093.** $3\pi/10$. Kasutada valemit (9). **1094.** $\pi/2$. Tõkestamata keha. Vt. märkust ülesande 1083 vastuses. **1095.** $\pi h^2(r-h/3)$. **1096.** $2\pi r^2(r-h)/3$. **1097.** $\pi(1-e^{-1})$. Kasutada valemit (10). **1098.** $\pi(e^2+1)/2$. Kasutada valemit (10). **1099.** $2^9\pi/15$. Kasutada valemit (8), võttes x-telje asemele y-telje. **1100.** $8\pi a^2b/3$. Kasutada valemit (8), võttes x-telje asemele y-telje. **1101.** $\pi a^3/15$. **1102.** $32\pi a^2b/105$. **1103.** $6\pi^3a^3$.

§ 8.3

1104. 14/3. Joone võrrand on kujul (11), seepärast kasutada valemit (12). **1105.** $(\ln|\sin a-1|-\ln|\sin a+1|)/2$. **1106.** $a(2+a)/2$. **1107.** $2a\,\mathrm{sh}\,1$. **1108.** $8a$. Joone võrrand on kujul (13), seepärast kasutada valemit (14). **1109.** $6a$. Minna üle parameetrilisele kujule $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0, 2\pi]$. Kujundi sümmeetrilisuse tõttu võib võtta neljakordse integraali lõigus $[0, \pi/2]$. Siis $\sin t>0$ ja $\cos t>0$. **1110.** 19/3. **1111.** $8a$. Kasutada valemit (16). **1112.** $5^{1/2}/2+$ $+\ln(1,5+5^{1/2}/2)$. **1113.** $a(1+m^2)^{1/2}/m$. **1114.** $\ln(\pi/2)$.

§ 8.4

1116. $\pi[(1+a^4)^{3/2}-1]/19$. Kasutada valemit (19). **1117.** $14\pi/3$. Kasutada valemit (19). **1118.** $\pi a^2(\mathrm{sh}\,2+2)/2$. **1119.** $12\pi a^2/5$. Minna parameetrilisele kujule $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Võtta veerand kõverast $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$, siis saame pool pinda, ja kasutada valemit (21), **1120.** $2\pi 2^{1/2}(e^\pi-2)/5$. **1121.** $16\pi^2a^2$. Kasutada valemit (22). **1122.** $29{,}6\pi$. **1123.** $32\pi a^2/5$. **1124.** $8\pi a^2(\pi-4/3)$. Kasutada valemit (17), võttes $h(t)=x-\pi a$ ja $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$. **1125.** $3\pi a^2(4\cdot 2^{1/2}-$ $-1)/5$. **1126.** $\pi[2^{1/2}+\ln(1+2^{1/2})]$. Vt. märkust ülesande 1083 vastuses. **1127.** 4π.

1128. $M_x=M_y=\varrho 2^{1/2}/2$. Kasutada valemeid (28). **1129.** $M_x=M_y=a^3/6$. **1130.** $M_x=\varrho ab^2/6$, $M_y=\varrho a^2b/6$. **1131.** $\pi/2+4/5$. **1132.** $21\cdot 2^{1/2}$. **1133.** $2\,\mathrm{sh}\,a+2\,\mathrm{sh}^3\,a/3$. Kasutada valemit (33). Arvestada, et $1+\mathrm{sh}^2\,x=\mathrm{ch}^2\,x$, teisendada integraalialust avaldist järgmiselt: $\mathrm{ch}^3\,x\,dx=(1+\mathrm{sh}^2\,x)\,d\,\mathrm{sh}\,x$. **1134.** $\varrho 0{,}5r^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$. **1135.** $\pi r^3+2\pi rb^2$, kus r on ringjoone raadius ja b on keskpunkti kaugus teljest. **1136.** $I_a=ab^3/3$, $I_b=a^3b/3$. **1137.** $4\varrho ab^2(ab)^{1/2}/15$. **1138.** $I_a=\pi ab^3/4$, $I_b=\pi a^3b/4$. **1139.** $\xi=0$, $4\eta=a(2+\mathrm{sh}\,2)/\mathrm{sh}\,1$. Joone pikkus võtta ülesandest 1107. **1140.** $\xi=\pi a$, $\eta=4a/3$. **1141.** $64a^2/3$. Tsükloidi kaare pikkus võtta ülesandest 1108 ja masskeskme koordinaadid ülesandest 1140. **1142.** $\xi=\eta=2a/5$. Minna üle parameetrilisele kujule $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0,\pi/2]$. **1143.** $12\pi a^2/5$. Astroidi pikkus võtta ülesandest 1109 ja masskeskme koordinaadid ülesandest 1142. **1144.** $3\pi\xi=4a$, $3\pi\eta=4b$. Ellipsi pindala võtta ülesandest 1071. **1145.** $4\pi ab^2/3$. Ellipsi pindala võtta ülesandest 1071 ja massikeskme koordinaadid ülesandest 1144. **1146.** $\xi=\pi a$, $\eta=5a/6$. **1147.** $8\pi a^3$. Kujundi pindala võtta ülesandest 1080 ja massikeskme koordinaadid ülesandest 1146. **1148.** $s=v_0t-gt^2/2$. **1149.** $T=c/g\arctan(v_0/c)$. $H=-c^2/g\cdot\ln\cos\arctan(v_0/c)=c^2\ln(1+v_0/c^2)/(2g)$. **1150.** $s=10^4$ m. **1151.** $x=v_0\omega^{-1}\sin\omega t$, $v_{\mathrm{keskmine}}=2v_0/\pi$. **1152.** $W=\pi\varrho r^2h^2/12$, kus ϱ on vee ruumala ühiku kaal. **1153.** $W=\pi\varrho r^4/4$, kus ϱ on vee ruumala ühiku kaal. **1154.** $4\pi r^4/3$. **1155.** Anum peab olema piiratud pinnaga, mis tekib kõvera $y=Cx^4$ pöörlemisel ümber y-telje ($C=\mathrm{const}$).

REGISTER

SISUKORD

VI. Määramata integraal

VII. Määratud integraal

VIII. Integraalarvutuse rakendusi

Учебное пособие
Эльмар Реймерс
Практикум по математическому анализу. I Часть
На эстонском языке
Художник-оформитель Т. Ару
Таллин, «Валгус»
Toimetaja U. Alas
Kunstiline toimetaja M. Henno
Tehniline toimetaja R. Nisametdinov
Korrektorid E. Martoja, S. Uustare
ИБ № 6467
Laduda antud 17. 03. 87
Trükkida antud 14. 04. 88
Formaat 60×90/16
Trükipaber nr. 1
Kiri Literaturnaja
Kõrgtrükk.
Tingtrükipoognaid 14,75
Tingvärvitõmmiseid 14,75
Arvestuspoognaid 13,77
Trükiarv 2500
Tellimuse nr. 1249
Hind 80 kop.
Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10.
H. Heidemanni nim. Trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17 II

INTEGREERIMISE PÕHIVALEMID

1) $\int 0\, dx = C$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

9) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

10) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$

14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$

15) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$

16) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

17) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2x}} = -\operatorname{cth} x + C$

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2x}} = \operatorname{th} x + C$

DIFERENTSEERIMISE PÕHIVALEMID

1. $c'=0$ ($c=$const)
2. $x'=1$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
4. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(x^a)'=ax^{a-1}$
6. $(a^x)'=a^x\ln a$
7. $(e^x)'=e^x$
8. $(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}$
9. $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$
10. $(\sin x)'=\cos x$
11. $(\cos x)'=-\sin x$
12. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
18. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$
19. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$
20. $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
21. $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
22. $(\operatorname{arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
23. $(\operatorname{arch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
24. $(\operatorname{arth} x)'=\frac{1}{1-x^2}$
25. $(\operatorname{arcth} x)'=\frac{1}{1-x^2}$

80 kop.