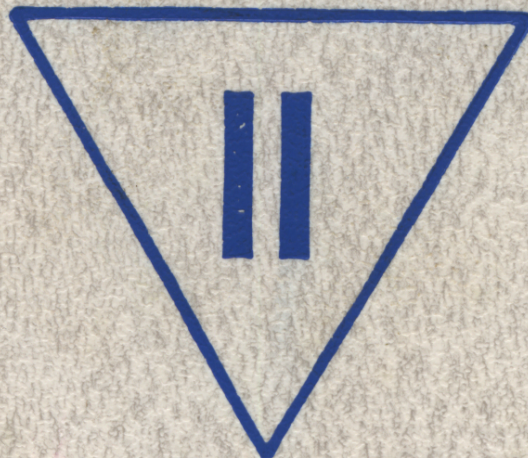


ELMAR REIMERS

**MATEMAATILISE
ANALÜÜSI
PRAKTIKUM**



ALGEBRA VALEMID

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

$$a^m a^n = a^{m+n}, a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

HÜPERBOOLSE TRIGONOMETRIA VALEMID

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

$$\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

$$\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha$$

$$\operatorname{ch} 2\alpha = \operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 \alpha$$

$$2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta)$$

$$2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta = \operatorname{sh}(\alpha + \beta) + \operatorname{sh}(\alpha - \beta)$$

$$2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) + \operatorname{ch}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{th} \alpha \operatorname{cth} \alpha = 1$$

$$2 \operatorname{sh}^2 \alpha = \operatorname{ch} 2\alpha - 1$$

$$2 \operatorname{ch}^2 \alpha = \operatorname{ch} 2\alpha + 1$$

TRIGONOMETRIA VALEMID

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^{-2} \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\cos^{-2} \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$4 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha$$

$$4 \cos^3 \alpha = 3 \cos \alpha + \cos 3\alpha$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arccot} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ELMAR REIMERS

**MATEMAATILISE
ANALÜÜSI
PRAKTIKUM**

II

Eesti NSV Kõrg- ja Keskerihariduse Ministerium
lubab kasutada kõrgkoolis õppevahendina matemaatika,
rakendusmatemaatika ja füüsika erialadel

TALLINN «VALGUS» 1988

517.2-

R 35

Revisseeritud Eesti matemaatikakalender ja J. Lamp
Kaane kujundanud T. Aru

R 1702050000—198 TL 7—1—88
902 (15)—88

ISBN 5—440—0230—8

© Kirjastus «Valgus» 1988

EESSÕNA

Käesolev raamat annab ülevaate ridade teooria ning mitme muutuja funktsiooni diferentsiaal- ja integraalarvutuse meetoditest. Raamat sisaldab näiteid nende meetodite kasutamise kohta ja ülesandeid. Väljaanne on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi läbiviimiseks G. Kangro õpiku «Matemaatiline analüüs. II» (Tallinn, Valgus, 1968) järgi Eesti NSV kõrgkoolides, eeskätt TRÜ matemaatikateaduskonnas ja füüsikaosakonnas. Aine teoreetilise osa ulatusliku esituse tõttu sobib raamat ka käsiraamatuks paljude erialade spetsialistidele, kes puutuvad kokku mitme muutuja funktsiooni diferentsiaal- ja integraalarvutusega.

Praktikumi materjal on jaotatud kaheksasse peatükki ja katab ülikooli matemaatika ja rakendusmatemaatika eriala üliõpilastele ettenähtud programmi. Vaatluse all on 38 teemat, mis on esitatud paragrahvidena.

Iga paragrahv jaotub kolmeks osaks: teoreetiline osa, näited ja ülesanded. Teoreetilises osas defineeritakse kõik vajalikud põhimõisted, antakse ülesannete lahendusmeetodid ning tuuakse põhilised teoreemid ja tunnused, mis on vajalikud lahenduste põhjendamiseks. Kõigi põhiliste lahendusvõtete kohta on toodud näited, mis on tüüpilised antud ülesannete lahendamisel. Ülesanded on varustatud vastustega ja suurele osale neist on lisatud ka juhised lahendamiseks.

Üldiselt on raamatu ülesehitus analoogiline raamatu I osa ülesehitusega. Seepärast tuleb raamatu kasutamisel juhinduda raamatu I osa eessõnas antud soovitustest.

Viited raamatu I osale on märgitud lühendiga MAP I.

Tartu, 1986. a.

Autor

Lühendid

D — definitsioon
T — teoreem
KT — koonduvustunnus
TT — tarvilik tunnus

PT — piisav tunnus
M — meetod
N — näide
Mott — tõestuse lõpp

Matemaatilised sümbolid

\forall — iga, mis tahes
 \exists — on olemas, eksisteerib, eksisteerivad
 \Leftrightarrow — siis ja ainult siis, parajasti siis
 \Rightarrow (\Leftarrow) — järgeldub (noole suunas)
 \wedge — ja
 \vee — või

Arvu- ja punkti hulkade tähistused

\mathbb{N} — naturaalarvude hulk
 \mathbb{Z} — täisarvude hulk
 \mathbb{Q} — ratsionaalarvude hulk
 \mathbb{R} — reaalarvude hulk
 \emptyset — tühihulk

$[a, b] \times [c, d]$ — ristkülik (punktide (x, y) hulk, kus $a \leq x \leq b$,

$c \leq y \leq d$)
 $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ — risttahukas (punktide (x, y, z) hulk, kus
 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$)

I. READ

§ 1.1. ARVREA KOONDUVUS

Lõpmatu arvrea all mõeldakse avaldist

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

kus u_0, u_1, \dots on arvud, mida nimetatakse rea liikmeteks. Suvalise indeksiga rea liiget u_n nimetatakse rea (1) üldliikmeks.

Allpool kirjutame mõni kord valemi (1) asemel lühemalt $\sum u_n$ ja kõneleme lihtsalt reast (1).

D 1.1.1. Jada (S_n) , kus

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad (2)$$

nimetatakse rea (1) osasummade jadaks.

Igale reale (1) võib koostada tema osasummade jada (2) ja vastupidi, kui on antud rea osasummade jada (2), siis võrduste

$$u_0 = S_0, \quad u_n = S_n - S_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3)$$

abil võime saada rea (1). Seega võime realt alati üle minna tema osasummade jadale ja vastupidi.

D 1.1.2. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (4)$$

siis seda piirväärtust S nimetatakse rea (1) summaks ja kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S. \quad (5)$$

D 1.1.3. Kui rea (1) summa S on lõplik, s.o. kui tema osasummade jada (2) koondub summaks S , siis öeldakse, et rida (1) koondub summaks S . Kui piirväärtus (4) ei eksisteeri või on lõpmatu, s.o. kui osasummade jada (2) ei koondu, siis öeldakse, et rida (1) hajub.

Järgmine tunnus annab tarviliku tingimuse rea (1) koonduvuseks.

TT 1.1.1. Kui rida (1) koondub, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (6)$$

s. t. koonduva rea üldliige läheneb nullile, s. o. jada (u_n) on nulljada.

Rea koonduvuse uurimisel tulebki kõigepealt kontrollida, kas selle rea korral, tarvilik tunnus TT 1.1.1 on täidetud. Sellega saame lihtsal viisil eraldada read, mis ilmselt hajuvad. Kuid tunnus TT 1.1.1 ei ole piisav, s. t. tingimust (6) täitvate ridade seas on peale koonduvate ridade ka hajuvaid ridu.

Järgmine tunnus annab tarviliku ja piisava tingimuse rea koonduvuseks.

KT 1.1.1 (Cauchy kriteerium). Rida (1) koondub siis ja ainult siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N = N(\varepsilon)$, et

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \text{ kui } n > N, \quad (7)$$

iga $p = 1, 2, \dots$ korral, s. o. sõltumata p valikust.

Näitena koonduvast reast võib võtta tuntud geomeetrilise rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

mis koondub parajasti siis, kui $|q| < 1$. Tema summa avaldub sel korral valemiga

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Järgmine, nn. harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

aga hajub (vt. näide N 1.1.3), kuigi rea üldliige $u_n = 1/n$ täidab koonduvuse tarvilikku tingimust (6).

Rea (1) korral võime kirjutada

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \quad (8)$$

Viimases võrduses rida

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad (9)$$

nimetatakse rea (1) jääkliikmeks. Kui rida (1) koondub summaks S , siis võime võrduse (8) kirjutada (võrduse (5) põhjal) kujul

$$S = S_n + R_n,$$

kus R_n on rea (9) summa. Viimast võrdusest näeme, et koonduva rea (1) korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

s. t. koonduva rea (1) jääkliige on koonduv rida ja tema summa R_n on lõpmata väike suurus piirprotsessis $n \rightarrow \infty$.

Koonduvatel ridadel on järgmised omadused.

1. Kui reas (1) ära jätta või juurde lisada lõplik arv liikmeid, siis see ei mõjuta rea koonduvust, s.o. koonduv rida jääb koonduvaks ja hajuv rida hajuvaks.

2. Kui rida $\sum u_n$ koondub, siis iga arvu c korral koondub ka rida $\sum cu_n$ ja summade vahel kehtib võrdus

$$\sum_{n=0}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

3. Kui read $\sum u_n$ ja $\sum v_n$ koonduvad, siis koonduvad ka read $\sum (u_n + v_n)$ ja $\sum (u_n - v_n)$ ja summade vahel kehtib võrdus

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

4. Koonduva rea $\sum u_n$ liikmed u_n moodustavad tõkestatud jada, s. t. leidub arv M , et $|u_n| \leq M$ iga $n=0, 1, \dots$ korral.

Näited

N 1.1.1. Leida rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$$

osasummade jada ja summa.

Lahendus. Määrame kordajad A ja B nii, et kehtiks võrdus

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2}.$$

Kasutame määramata kordajate meetodit. Selleks viime viimase võrduse järgmisele kujule:

$$2 = A(n+2) - Bn.$$

Võttes näiteks $n=1$ ja $n=2$, saame kaks tingimust, mis annavad $A \Leftrightarrow B=1$.

Seega võrduse (2) põhjal

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Pärast koondamist saame

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

kust (4) põhjal rea summa on

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Seega (5) põhjal võime kirjutada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}.$$

N 1.1.2. Uurida rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+5}$$

koonduvust.

Lahendus. Kontrollime kõigepealt tingimust (6). Saame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+5} = 1.$$

Seega koonduvuseks tarvilik tingimus (6) pole täidetud. Tunnuse TT 1.1.1 põhjal vaadeldav rida hajub.

N 1.1.3. Näidata, et harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajub.

Lahendus. Harmoonilise rea üldliige $u_n = 1/n$ täidab koonduvuseks tarvilikku tingimust (6). Seega tunnuse TT 1.1.1 põhjal rea hajuvuse üle otsustada ei saa. Kasutame Cauchy kriteeriumi KT 1.1.1. Iga n ja p korral võime kirjutada

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \\ &\geq p \cdot \frac{1}{n+p}. \end{aligned}$$

Võttes näiteks $p=n$, saame $\varepsilon_n \geq 1/2$. Seega tingimus (7) ei saa olla täidetud iga p korral. Cauchy kriteeriumi KT 1.1.1 põhjal harmooniline rida hajub.

Et harmoonilise rea $\sum 1/n$ liikmed on positiivsed, siis tema osasummade jada rangelt kasvab ja rea hajuvuse tõttu on siis ainuke võimalus, et rea summa $S = \infty$, s. t.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Ülesanded

Leida järgmiste ridade osasummade jadad S_n ja summad S (vt. näide N 1.1.1).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right)$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$

Leida read, mille osasummad on järgmised ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$13. S_n = \ln(n+2)$$

$$16. S_n = n+1$$

$$14. S_n = \frac{n+3}{n+1}$$

$$17. S_n = \frac{n^2}{n^2+2}$$

$$15. S_n = \frac{1}{n+1}$$

$$18. S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Näidata järgmiste ridade hajuvust tarviliku tunnuse TT 1.1.1 ja Cauchy kriteeriumi KT 1.1.1 abil (vt. näited N 1.1.2 ja N 1.1.3).

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n+1}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[10]{n}}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-1/n}$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

§ 1.2. POSITIIVSED ARVREAD

Positiivse rea all mõeldakse lõpmatut rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (10)$$

kus $u_n \geq 0$ iga $n=0, 1, \dots$ korral.

T 1.2.1. Positiivne rida (10) koondub siis ja ainult siis, kui tema osasummade jada on tõkestatud, s. t. kui leidub arv $M > 0$, et

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq M \text{ iga } n=0, 1, \dots \text{ korral.} \quad (11)$$

Teoreemi T 1.2.1 tõttu võib positiivsete ridade korral kirjutada

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \quad \text{või} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$$

vastavalt sellele, kas rida (10) koondub või hajub.

Olgu antud kaks positiivset rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (12)$$

ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad (13)$$

Järgmiste võrdluskäsitluste abil saab ühe rea põhjal otsustada teise rea koonduvuse või hajuvuse üle.

KT 1.2.1 (I võrdluskäsitluse). Kui mingist indeksist n alates kehtib võrratus

$$u_n \leq v_n, \quad (14)$$

siis rea (13) koonduvusest järeldub rea (12) koonduvus ja rea (12) hajuvusest järeldub rea (13) hajuvus.

KT 1.2.2 (II võrdluskäsitluse). Kui protsessis $n \rightarrow \infty$ on

$$u_n \sim c v_n \quad (15)$$

mingi konstandi $c > 0$ korral, siis read (12) ja (13) kas koonduvad või hajuvad ühteaegu.

Nende võrdluskäsitluste kasutamisel kõige sagedamini võrreldakse uuritavat rida geomeetrilise reaga $\sum q^n$ (vt. § 1.1) ja üldise harmoonilise reaga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha},$$

mis koondub, kui $\alpha > 1$, ja hajub, kui $\alpha \leq 1$ (vt. näide N 1.2.5).

Positiivsete ridade jaoks on olemas palju mitmesuguseid koonduvustunnuseid. Neist enam rakendamist on leidnud järgmised.

KT 1.2.3 (D'Alembert'i tunnus). Kui

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} < 1, \text{ siis rida (10) koondub} \\ > 1, \text{ siis rida (10) hajub} \\ = 1, \text{ siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

KT 1.2.4 (Cauchy tunnus). Kui

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \begin{cases} < 1, \text{ siis rida (10) koondub} \\ > 1, \text{ siis rida (10) hajub} \\ = 1, \text{ siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

KT 1.2.5 (Raabe tunnus). Kui

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \begin{cases} > 1, \text{ siis rida (10) koondub} \\ < 1, \text{ siis rida (10) hajub} \\ = 1, \text{ siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

KT 1.2.6 (Logaritmiline tunnus). Kui

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \begin{cases} > 1, \text{ siis rida (10) koondub} \\ < 1, \text{ siis rida (10) hajub} \\ = 1, \text{ siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

KT 1.2.7 (Integraaltunnus). Olgu funktsioon $f(x)$ monotoonselt kahanev piirkonnas $[a, \infty)$ ja olgu

$$u_n = f(n).$$

Rida (10) koondub siis ja ainult siis, kui

$$\int_a^{\infty} f(x) dx < \infty,$$

s. t. kui see päratu integraal koondub.

Kui rida (10) koondub integraaltunnuse KT 1.2.7 põhjal, siis tema jääkliikme R_n jaoks kehtib hinnang

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (16)$$

Cauchy tunnus on võimsam kui D'Alembert'i tunnus, s. t. kui D'Alembert'i tunnus võimaldab otsustada rea koonduvust või hajuvust, siis võimaldab seda ka Cauchy tunnus, kuid mitte vastupidi. Raabe tunnus on võimsam kui D'Alembert'i tunnus. Logaritmiline tunnus omakorda on võimsam Cauchy ja Raabe tunnusest.

Rea koonduvuse uurimist alustatakse tavaliselt nõrgemate koonduvustunnuste rakendamisega, sest nad on lihtsamad. Võimsamaid tunnuseid kasutatakse, kui nõrgemad ei anna vastust.

Järgnevates näidetes ja ülesannetes lahendamisel läheb vaja valemuid

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{Stirlingi valem}) \quad (17)$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a. \quad (18)$$

Näited**N 1.2.1. Uurida rea**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$$

koonduvust võrdluslausetega abil.

Lahendus. Rea üldliikme kohta kehtib järgmine hinnang:

$$\frac{2^n}{1+3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Paremale tekkis geomeetrilise rea $\sum q^n$ üldliige, kus $q=2/3$. Et geomeetriline rida selle q korral koondub, siis I võrdlusega KT 1.2.1 põhjal antud rida koondub.

N 1.2.2. Uurida rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}$$

koonduvust võrdluslause KT 1.2.2 abil.

Lahendus. Rea üldliikme kohta kehtib järgmine hinnang, kui $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{n\sqrt{3+o(1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Paremale tekkis harmoonilise rea üldliige $1/n$, Et harmooniline rida $\sum 1/n$ hajub, siis II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal antud rida samuti hajub.

N 1.2.3. Milliste parameetri $a > 0$ väärtuste korral koondub ja milliste puhul hajub rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n.$$

Lahendus. Rea üldliikmest on näha, et lihtne on kasutada Cauchy tunnust KT 1.2.4, saame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a.$$

Seega Cauchy tunnuse KT 1.2.4 põhjal antud rida koondub, kui $a < 1$, ja hajub, kui $a > 1$. Kui $a = 1$, siis Cauchy tunnus KT 1.2.4 vastust ei anna. Kuid sel korral rida hajub, sest rea üldliige ei rahulda koonduvuse tarvilikku tingimust TT 1.1.1, kuna $n \rightarrow \infty$ korral

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0.$$

Kui $a = 1$, siis rea hajuvust on lihtne näidata ka logaritmilise tunnuse KT 1.2.6 abil:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n} = 0.$$

N 1.2.4. Uurida rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln p} \quad (p > 0)$$

koonduvust Raabe tunnuse KT 1.2.5 abil.

Lahendus. Valemi (18) põhjal saame

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{(n+1)^{\ln p}}{n^{\ln p}}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1+1/n)^{\ln p}}{1/n} = -\ln p. \end{aligned}$$

Raabe tunnuse järgi vaadeldav rida koondub, kui $-\ln p > 1$, s. t. kui $p < 1/e$, ja hajub, kui $-\ln p < 1$, s. t. kui $p > 1/e$. Kui $-\ln p = 1$, s. t. kui $p = 1/e$, siis vahetu kontroll näitab, et rida hajub.

N 1.2.5. Näidata, et harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

koondub, kui $\alpha > 1$, ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

Lahendus. Kui $\alpha \leq 0$, siis rea üldliige ei lähene nullile ja tunnuse TT 1.1.1 põhjal rida hajub. Seepärast eeldame, et $\alpha > 0$.

Kasutame integraaltunnust KT 1.2.7. Vaadeldava rea liikmed saame funktsioonist

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}},$$

kui $x = 1, 2, \dots$, kusjuures funktsioon on monotoonselt kahanev. Integraaltunnuse KT 1.2.7 põhjal vaadeldav rida koondub siis ja ainult siis kui koondub integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Integraalialusel funktsioonil $1/x^{\alpha}$ on olemas algfunktsioon

$$F(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Tunnuse KT 7.4.3 (MAP I) põhjal see päratu integraal koondub siis ja ainult siis, kui

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \pm \infty,$$

s. o. kui $\alpha > 1$.

Seega koondub vaadeldav rida siis ja ainult siis, kui $\alpha > 1$. Järelikult ülejäänud α -de korral, s. o. kui $\alpha \leq 1$, rida on hajuv.

Kui $\alpha > 1$, s. t. kui vaadeldav rida koondub, siis saame hinnata ka selle rea jääkliiget R_n . Selleks arvutame integraali

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_n^{\infty} = \frac{\alpha-1}{n^{\alpha-1}}$$

ja valemi (16) põhjal saame, et

$$R_n \leq \frac{\alpha-1}{n^{\alpha-1}}.$$

Ülesanded

Võrdluslausete KT 1.2.1 ja KT 1.2.2 abil teha kindlaks, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad (vt. näited N 1.2.1 ja N 1.2.2).

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)3^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2(n+1)^2}$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$$

$$33. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$34. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \tan \frac{\pi}{3^n}$$

$$35. \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right)$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi}{\sqrt[n]{n}}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n 2^n}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^3 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

$$41. \sum_{n=3}^{\infty} \ln \cos \frac{\pi}{n}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

$$43. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^\alpha n}$$

$$44. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$$

D'Alembert'i tunnuse KT 1.2.3 või Cauchy tunnuse KT 1.2.4 abil otsustada, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad (vt. näide N 1.2.3).

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$46. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$$

$$47. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,1^n}{n}$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$57. \sum_{n=2}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{n} \quad (a > 0)$$

$$58. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+1)^{n/2}}$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Raabe tunnuse K 1.2.5 abil uurida järgmiste ridade koonduvust (vt. näide N 1.2.4).

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \dots (2+\sqrt{n})}$$

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{b(b+1) \dots (b+n)}$$

$$63. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{6}-2) \dots (\sqrt{n+3}-2)}$$

$$64. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! n^{-a}}{b(b+1) \dots (b+n)} \quad (b > 0)$$

Uurida integraaltunnuse K 1.2.7 abil järgmiste ridade koonduvust. Koonduvuse korral hinnata ka jääkliiget (vt. näide N 1.2.5).

$$65. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

$$69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$70. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$$

$$67. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$71. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+e^n}$$

$$68. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Mitu liiget N tuleb võtta järgmistes ridades, et saada rea summa veaga alla 0,001.

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$74. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^4(n+1)} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^3(n+1)} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Rea koonduvuse tarviliku tunnuse TT 1.1.1 abil näidata, et järgmised piirväärtused on võrdsed nulliga.

$$76. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$78. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$77. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$79. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

Uurida järgmiste ridade koonduvust.

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2}$$

$$86. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n} \sin \frac{\pi}{4n}$$

$$81. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$$

$$87. \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{e} \cos \frac{\pi}{n}$$

$$82. \sum_{n=0}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^n}$$

$$88. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e}{e^n}$$

$$83. \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$89. \sum_{n=2}^{\infty} \ln^\alpha \cos^{-1} (\pi/n)$$

$$84. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n \sqrt[n]{n}}$$

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$$

$$85. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! n^{-2}}{b(b+1) \dots (b+n)} \quad (b > 0)$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^p \quad (p \neq 2)$$

§ 1.3. SUVALISED ARVREAD

Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{kus } a_n > 0. \quad (19)$$

Rea (19) koonduvuse uurimiseks kasutatakse järgmist tunnust.

KT 1.3.1 (Leibnizi tunnus). Kui

a) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots,$

b) $\lim a_n = 0,$

siis rida (19) koondub ja tema jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jaoks kehtib hinnang

$$|R_n| < a_{n+1}. \quad (20)$$

Vaatleme suvalist rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n. \quad (21)$$

D 1.3.1. Rida (21) nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \quad (22)$$

on koonduv.

T 1.3.1. Kui rida (22) koondub, siis ka rida (21) koondub, s. t. iga absoluutselt koonduv rida on koonduv.

Kui rea (21) summa on S ja rida ise koondub absoluutselt, siis öeldakse, et rida (21) koondub absoluutselt summaks S .

D 1.3.2. Kui rida (21) koondub, aga rida (22) hajub, siis rida (21) nimetatakse tingimisi koonduvaks, s. t. koonduvat rida, mis ei koonu absoluutselt, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Absoluutselt koonduva rea liikmed võib reas ümber paigutada mis tahes järjekorda — see ei mõjosta rea koonduvust ega summat. Kuid tingimisi koonduva rea korral pole see nii — rea liikmeid ümber tõstes võib rea summa võrdsustada mis tahes arvuga ja muuta rida hajuvaks.

Rea (21) absoluutse koonduvuse näitamiseks võime kasutada positiivsete ridade koonduvustunnuseid, sest neid tuleb rakendada reale (22), mis on positiivne rida. Kui rida (22) osutub koonduvaks, siis sellest järeldub teoreemi T 1.3.1 põhjal, et ka rida (21) koondub ja seejuures koguni absoluutselt. Kui aga rida (22) osutub hajuvaks, siis sellest ei saa veel järeldada, et ka rida (21) hajub, sest ta võib olla tingimisi koonduv. Seepärast rea (21) hajuvuse näitamiseks ei saa kasutada positiivsete ridade koonduvustunnuseid. Küll aga kehtivad suvalistele ridadele D'Alembert'i ja Cauchy tunnused järgmisel kujul.

KT 1.3.2 (D'Alembert'i tunnus suvalistele ridadele). Kui

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \begin{cases} < 1, \text{ siis rida (21) koondub ja koguni absoluutselt} \\ > 1, \text{ siis rida (21) hajub} \\ = 1, \text{ siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

KT 1.3.3 (Cauchy tunnus suvalistele ridadele). Kui

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \begin{cases} < 1, \text{ siis rida (21) koondub ja koguni absoluutselt} \\ > 1, \text{ siis rida (21) hajub} \\ = 1, \text{ siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Vaatleme koonduvustunnuseid ridade korral, millele saab anda kuju

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n. \quad (23)$$

Vahelduvate märkidega rida (19) on rea (23) erijuhtum, kui $\varepsilon_n = (-1)^n$ ja $a_n > 0$.

KT 1.3.4 (Abeli tunnus). Rida (23) koondub, kui

1° rida $\sum a_k$ koondub,

2° arvud ε_n moodustavad monotoonse tõkestatud jada.

KT 1.3.5 (Dirichlet' tunnus). Rida (23) koondub, kui

1° rea $\sum a_k$ osasummade jada on tõkestatud,

2° arvud ε_n moodustavad monotoonse nulljada.

Olgu antud read

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (24)$$

ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n. \quad (25)$$

D 1.3.3. Ridade (24) ja (25) Cauchy korrutiseks nimetatakse rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad (26)$$

kus

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}, \quad (27)$$

ja kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Kui read (24) ja (25) on absoluutselt koonduvad vastavalt summadeks U ja V , siis nende korrutisrida (26) on absoluutselt koonduv summaks

$$W = UV. \quad (28)$$

Kui ridadest (24) ja (25) üks koondub tingimisi ja teine absoluutselt, siis korrutisrida (26) on koonduv ja samuti summaks (28). Kui aga mõlemad read (24) ja (25) koonduvad tingimisi, siis korrutisrida (26) võib osutada hajuvaks (vt. ülesanne 116).

Näited

N 1.3.1. Uurida rea

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

koonduvust

Lahendus. Vaadeldav rida on vahelduvate märkidega rida (19), kus

$$a_n = \frac{1}{n \ln n}$$

on monotoonselt kahanev ja $\lim a_n = 0$. Seega Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 põhjal rida koondub.

Valemi (20) abil saame rea jääkliikme jaoks hinnangu

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k} \right| \leq \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

Vaadeldav rida aga ei koondunud absoluutselt integraaltunnuse KT 1.2.7 põhjal, sest rea

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

jaoks saame

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Kokkuvõttes võib seida, et vaadeldav rida on tingimisi koonduv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \frac{1}{n}$$

koonduvust.

Lahendus. Kirjutame välja selle rea esimesed liikmed

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$$

Võttes

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = (-1)^{[n/2]},$$

näeme, et rida on kujul (23), mis täidab Dirichlet' tunnuse KT 1.3.5 tingimusi. Järelikult vaadeldav rida on koonduv selle tunnuse KT 1.3.5 põhjal.

Ülesanded

Millised järgmistest ridadest on absoluutselt koonduvad, millised on tingimisi koonduvad ja millised on hajuvad (vt. näide N 1.3.1)?

93. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

102. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

94. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n 3^n}$

95. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$

104. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \cos n\pi}{n}$

96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

105. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{e^n}$

97. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a^n}{n!}$

98. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

107. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$

99. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n \sqrt[n]{n}}$

108. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[n]{n}}$

109. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$

101. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$

Näidata järgmiste ridade koonduvust Abeli tunnuse KT 1.3.4 või Dirichlet' tunnuse KT 1.3.5 abil (vt. näide N 1.3.2).

$$110. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/3]} \frac{1}{n}$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/4]} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$111. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(1/n)}{\ln n}$$

$$113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \sin(\pi \sqrt{n^2+k^2})$$

Näidata, et kehtivad järgmised võrdused.

$$114. \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1)$$

$$115. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$$

116. Näidata, et rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

on tingimisi koonduv ja tema Cauchy ruut, s. o. Cauchy korrutis iseendaga, on hajuv rida.

117. Näidata, et read

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \quad (\beta > 0)$$

koonduvad ja et nende Cauchy korrutis on koonduv rida, kui $\alpha + \beta > 1$, ja hajuv rida, kui $\alpha + \beta < 1$.

118. Veenduda, et read

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

on hajuvad, ja näidata, et nende Cauchy korrutis on absoluutselt koonduv rida.

§ 1.4. FUNKTSIONAALREAD

Funktsionaaljada all mõeldakse jada

$$\{f_n(x)\}, \quad (29)$$

mille liikmed on mingil hulgal määratud funktsioonid $f_n(x)$. Fikseeritud x korral funktsionaaljada (29) kujutab endast arvjada.

D 1.4.1. Kui punktis x eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

siis öeldakse, et funktsionaaljada (29) koondub selles punktis x summaks $f(x)$. Muudel juhtudel öeldakse, et ta hajub punktis x .

Punktide x hulka X , milles funktsionaaljada (29) koondub, nimetatakse funktsionaaljada koonduvuspiirkonnaks. Funktsiooni $y=f(x)$, $x \in X$, nimetatakse jada (29) piirfunktsiooniks.

D 1.4.2. Öeldakse, et funktsionaaljada (29) koondub ühtlaselt piirkonnas X funktsiooniks $f(x)$, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N=N(\varepsilon)$, et kehtib võrratus

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ iga } n > N \text{ korral} \quad (30)$$

sõltumata punkti $x \in X$ valikust.

Funktsionaaljada ühtlase koonduvuse uurimiseks kasutatakse definitsiooni D 1.4.2, kuid sageli viib kiiremini sihile järgmine koonduvustunnus.

KT 1.4.1. Funktsionaaljada (29) koondub ühtlaselt piirkonnas X funktsiooniks $f(x)$ siis ja ainult siis, kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (31)$$

Funktsionaalrea all mõeldakse rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (32)$$

kus rea liikmed $u_n(x)$ on mingil hulgal X määratud funktsioonid. Suvalise indeksiga rea liiget $u_n(x)$ nimetatakse rea (32) üldliikmeks. Järgnevas mõnikord (32) asemel kirjutame lihtsalt $\sum u_n(x)$.

Funktsionaaljada $\{S_n(x)\}$, kus

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), \quad (33)$$

nimetatakse funktsionaalrea (32) osasummade jadaks.

Igale funktsionaalreale (32) võime koostada tema osasummade jada (33) ja, vastupidi, kui rea osasummade jada (33) on antud, siis võrduste

$$u_0 = S_0(x), \quad u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (34)$$

abil võime saada rea (32). Seega nagu arvridade korralgi võime ka funktsionaalrealt alati üle minna tema osasummade jadale ja vastupidi.

Iga $x \in X$ korral funktsionaalrida (32) kujutab arvrida.

D 1.4.3. Kui punktis x rea (32) osasummade jadal (33) on olemas (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), \quad (35)$$

siis seda piirväärtust $S(x)$ nimetatakse funktsionaalrea (32) summaks punktis x ja kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = S(x). \quad (36)$$

D 1.4.4. Kui punktis x funktsionaalrea (32) summa $S(x)$ on lõplik, s. o. kui tema osasummade jada (33) koondub summaks $S(x)$, siis öeldakse, et funktsionaalrida (32) koondub punktis x summaks $S(x)$. Muudel juhtudel (s. o. kui piirväärtus (35) ei eksisteeri või on lõpmatu) öeldakse, et funktsionaalrida (32) hajub punktis x .

Punktide x hulka X , milles funktsionaalrida (32) koondub, nimetatakse selle rea koonduvuspiirkonnaks ja loetakse rea summa $S(x)$ määramispiirkonnaks.

D 1.4.5. Öeldakse, et funktsionaalrida (32) koondub ühtlaselt piirkonnas X summaks $S(x)$, kui tema osasummade jada (33) koondub ühtlaselt summaks $S(x)$ piirkonnas X , s. o. kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N = N(\varepsilon)$, et kehtib võrratus

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (37)$$

iga $n > N$ korral sõltumata punkti $x \in X$ valikust.

Funktsionaalrea (32) ühtlase koonduvuse uurimiseks sageli saab kasutada järgmist tunnust.

KT 1.4.2 (Weierstrassi tunnus). Kui leiduvad arvud c_n , et

1° $|u_n(x)| \leq c_n$ iga $x \in X$ korral,

2° rida $\sum c_n$ koondub,

siis funktsionaalrida (32) koondub ühtlaselt (ja absoluutselt) piirkonnas X .

Praktikas osutub sageli sobivaks võtta

$$c_n = \sup_{x \in X} |u_n(x)|.$$

Funktsionaalrea (32) summa $S(x)$ ei tarvitse olla pidev funktsioon isegi siis, kui rea liikmed on pidevad funktsioonid (vt. näide N 1.4.1). Kuid kehtib järgmine teoreem.

T 1.4.1. Kui piirkonnas X funktsioonid $u_n(x)$ on pidevad ja funktsionaalrida (32) koondub ühtlaselt selles piirkonnas X , siis tema summa $S(x)$ on pidev funktsioon piirkonnas X .

T 1.4.2. Kui vahemikus (α, β) funktsionaalrida (32) koondub ühtlaselt ja on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = u_n, \quad a \in (\alpha, \beta),$$

siis arvurida $\sum u_n$ koondub ja kehtib võrdus

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x), \quad (38)$$

s. t. teoreemi eeldustel võib funktsionaalreas (32) piirile minna summa märgi all.

T 1.4.3. Kui $u_n(x)$ on integreeruvad funktsioonid lõigus $[a, b]$ ja funktsionaalrida (32) koondub ühtlaselt selles lõigus $[a, b]$ summaks $S(x)$, siis kehtib võrdus

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (39)$$

ehk

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx,$$

s. t. teoreemi eeldustel võib funktsionaalrida liikmeti integreerida.

T 1.4.4. Kui funktsionaalrida (32) koondub lõigus $[a, b]$ summaks $S(x)$ ja tema liikmetel $u_n(x)$ on olemas pidevad tuletised $u'_n(x)$, kusjuures tuletiste rida $\sum u'_n(x)$ koondub ühtlaselt lõigus $[a, b]$, siis selles lõigus kehtib võrdus

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) \quad (40)$$

ehk

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x),$$

s. t. teoreemi eeldustel võib funktsionaalrida liikmeti diferentseerida.

Funktsionaalrea (32) koonduvuse uurimiseks võime iga $x \in X$ korral kasutada arvridade koonduvustunnuseid (vt. näide N 1.4.2).

Näited

N.1.4.1. Leida funktsionaalrea

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$$

koonduvuspiirkond X ja summa $S(x)$.

L a h e n d u s. Leiame rea osasummade jada, saame $S_n(x) = x^n$. Võrduse (35) põhjal on siis

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{kui } |x| < 1 \\ 1, & \text{kui } x = 1 \\ \text{ei eksisteeri ülejäänud punktides.} \end{cases}$$

Seega vaadeldava rea koonduvuspiirkond on poollõik $X = (-1, 1]$. Näeme ka, et selles piirkonnas X summa $S(x)$ ei ole pidev funktsioon (tal on katkevus punktis $x = 1$), kuigi rea liikmed on pidevad funktsioonid piirkonnas X . Teoreemi T 1.4.1 põhjal võib öelda, et vaadeldav rida piirkonnas X ei koandu ühtlaselt.

N 1.4.2. Leida funktsionaalrea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(1+x^2)^n}$$

koonduvuspiirkond X , absoluutse koonduvuse piirkond A ja rea summa $S(x)$.

L a h e n d u s. Vaadeldav rida on geomeetriline rida teguriga

$$q = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Seega on ta koondav ja koguni absoluutselt siis ja ainult siis, kui

$$\frac{2|x|}{1+x^2} < 1.$$

(vt. § 1.1). Viimane võrratus annab, et

$$X=A=(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Vastavalt geomeetrilise rea summa valemile saame rea summaks (arvestades, et reas puudub liige indeksiga $n=0$)

$$S(x) = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} = \frac{2x}{(1-x)^2}.$$

N 1.4.3. Leida rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}$$

koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

L a h e n d u s. Rakendame D'Alembert'i tunnust KT 1.3.2. Saame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx^n}{(n+1)x^{n+1}} \right| = \frac{1}{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{|x|}.$$

Seega, kui $|x| > 1$, siis rida koondub ja koguni absoluutselt, ja kui $|x| < 1$, siis rida hajub. Vaatame eraldi juhtu $|x| = 1$. Kui $x = 1$, siis saame harmoonilise rea $\sum 1/n$, mis hajub. Kui $x = -1$, siis saame vahelduvate märkidega rea, mis koondub Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 põhjal. Seega

$$X = (-\infty, -1] \cup (1, \infty), \quad A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

N 1.4.4. Leida piirkond U , kus funktsionaaljada

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

koondub ühtlaselt.

L a h e n d u s. Antud jada piirfunktsioon on

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + n^{-2}} = |x|.$$

Kontrollime tingimuse (31) kehtivust. Viies irratsionaalsuse lugejast nimetajasse, saame

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \sqrt{x^2 + n^{-2}} - |x| = \frac{n^{-2}}{\sqrt{x^2 + n^{-2}} + |x|} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 x^2 + 1} + n|x|} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

mis kehtib iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Seega

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Järelikult tingimus (31) on täidetud. Tunnuse KT 1.4.1 põhjal $U = (-\infty, \infty)$.

N 1.4.5. Kas funktsionaaljada

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

koondub ühtlaselt lõigus $X = [0, 1]$?

L a h e n d u s. Antud jada piirfunktsioon on

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Et antud jada koonduks ühtlaselt lõigus X , peab definitsiooni D 1.4.2 põhjal iga $\varepsilon > 0$ korral leiduma arv $N = N(\varepsilon)$, et kehtiks võrratus

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon$$

iga $n > N$ korral sõltumata punkti $x \in X$ valikust.

Viimane võrratus kujutab endast n suhtes ruutvõrratust

$$\varepsilon x^2 n^2 - 2xn + \varepsilon > 0,$$

mille lahendamine $\varepsilon \leq 1$ korral annab

$$n > \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon x} \quad \text{või} \quad n < \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon x}.$$

Seega sobivaks arvuks N on esimene arv

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon x}.$$

Saadud arv N ei ole aga tõkestatud punkti $x = 0$ ümbruses, sest

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} N = \infty.$$

Seega arv N sõltub punkti x valikust ja kõikidele $x \in X$ ühesugust arvu N ei leidu. Järelikult vaadeldav jada ei koondu ühtlaselt lõigus X .

Sama tulemuse saame hõlpsasti ka tunnuse KT 1.4.1 põhjal. Selleks leiame meetodi M 4.1.1 (MAP I) abil avaldise $f_n(x) - f(x) = f_n(x)$ globaalsed ekstreemumid lõigus X , millised on tal olemas teoreemi T 2.5.8 (MAP I) põhjal. Võrdsustades tuletise nulliga, saame

$$f'_n(x) = \frac{2n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = 0,$$

kust näeme, et funktsioonil $f_n(x)$ on lõigu X sisepunktides üks kriitiline (stationaarne) punkt $x = 1/n$, kus $f_n(1/n) = 1$ (mis on funktsiooni $f_n(x)$ suurim väärtus lõigus X tunnuse PT 4.1.5 (MAP I) põhjal).

Seega iga n korral leidub lõigus X selline punkt x , kus $f_n(x) - f(x) = 1$. Järelikult tingimus (31) kehtida ei saa.

N 1.4.6. Leida funktsionaalrea

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 + \pi + \arcsin(x/n)}$$

absoluutse koonduvuse piirkond A ja ühtlase koonduvuse piirkond U .

Lahendus. Iga x korral, kus on määratud $\arcsin(x/n)$, võime kirjutada

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3 + \pi + \arcsin(x/n)} \right| \leq \frac{1}{n^3 + \pi/2} < \frac{1}{n^3}.$$

Et rida $\sum 1/n^3$ koondub (näide N 1.2.5), siis Weierstrassi tunnuse KT 1.4.2 põhjal antud rida koondub ühtlaselt piirkonnas, kus $\arcsin(x/n)$ on määratud, s. o. piirkonnas, kus $|x/n| \leq 1$. Et antud reas on $n \geq 3$, siis saame, et peab olema $|x| \leq 3$. Seega $A = U = [-3, 3]$.

N 1.4.7. Leida funktsionaalrea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2 + \sin 2x}$$

absoluutse koonduvuse piirkond A ja ühtlase koonduvuse piirkond U .

Leibniz' reas. Piirkonna U leidmiseks hindame rea (ilmselt absoluutväärtust) seame iga x korral

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+x^2+\sin 2x} \right| \leftarrow \frac{1}{n\left(1+\frac{x^2}{n}+\frac{\sin 2x}{n}\right)} \sim \frac{1}{n}, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Et harmooniline rida $\sum 1/n$ hajub, siis II võrdluse lause KT 1.2.2 põhjal antud rida ei koonu absoluutselt ühegi x korral, s.t. $A = \emptyset$.

Tulemusest näeme, et piirkonna U leidmiseks ei saa selle rea korral kasutada Weierstrassi tunnust KT 1.4.2. Vaadeldav rida on aga vahelduvate märkidega rida ja iga $x \in X = (-\infty, \infty)$ korral koondub Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 põhjal, seepärast kehtib võrratus (20), mis annab

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2+\sin 2x} \right| < \frac{1}{n+1+x^2+\sin 2x} \leq \\ &\leq \frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

kui $n > N = 1/\varepsilon$. Et N ei sõltu muutujast $x \in X$, siis vaadeldav rida koondub ühtlaselt definitsiooni D 1.4.5 põhjal kogu arvteljel X .

Ülesanded

Leida järgmiste funktsionaalridade koonduvuspiirkonnad X , absoluutse koonduvuse piirkonnad A ja summad $S(x)$, lugedes $0^0 = 1$ (vt. näide N 1.4.2).

119. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$

123. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

120. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

124. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

121. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$

125. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x$

122. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$

Leida järgmiste funktsionaalridade koonduvuspiirkonnad X ja absoluutse koonduvuse piirkonnad A (vt. näide N 1.4.3).

126. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

128. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

127. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

129. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^n}$

$$130. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$131. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n$$

$$132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+1)^n}$$

$$133. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$$

$$134. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

$$135. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$$

$$136. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{3+x} n}$$

$$137. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^x n}$$

$$138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$$

Kas järgmised funktsionaaljadad koonduvad ühtlaselt antud piirkonnas X (vt. näide N 1.4.4)?

$$139. f_n(x) = x^n, X = \left[0, \frac{4}{5} \right]$$

$$140. f_n(x) = x^n, X = [0, 1]$$

$$141. f_n(x) = x^n - x^{n+1}, X = [0, 1]$$

$$142. f_n(x) = \frac{1}{x+n}, X = (0, \infty)$$

$$143. f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, X = [0, 1]$$

$$144. f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), X = (0, \infty)$$

$$145. f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, X = (-\infty, \infty)$$

$$146. f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, X = (-\infty, \infty)$$

Leida järgmiste funktsionaaljadade absoluutse koonduvuse piirkonnad A ja ühtlase koonduvuse piirkonnad U (vt. näited N 1.4.6 ja N 1.4.7).

$$147. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$$

$$148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$149. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan nx}{2^n}$$

$$150. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + \arccos x}$$

$$151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + g^2(x)}$$

$$152. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n \sqrt{n}}$$

$$153. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$$

$$157. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$$

$$154. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\operatorname{arccot} x}$$

$$158. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$$

$$155. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\left|\arcsin \frac{x}{n}\right|}$$

$$159. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\arccos \frac{x}{n}}}$$

$$156. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n-\ln n}$$

$$160. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$161. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}$$

$$163. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(x/n)}{n(n+1)}$$

$$162. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^2+1}$$

$$164. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \arccos \frac{x}{n+1}$$

Leida järgmised piirväärtused.

$$165. \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

$$167. \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \arctan \frac{n}{x}$$

$$166. \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$$

$$168. \lim_{x \rightarrow 1+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \arctan \frac{2+\ln n}{1-x}$$

Arvutada järgmised integraalid.

$$169. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} dx$$

$$171. \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n \cos nx}{5^n} dx$$

$$170. \int_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1+n)x^n dx$$

$$172. \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2x)^{n+1}} dx$$

Näidata, et järgmiste funktsioonide tuletised on pidevad kogu määramispiirkonnas.

$$173. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \operatorname{arccot} \frac{x}{n}$$

$$174. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+|x|}$$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised punktis $x=0$.

$$175. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \arccos \frac{x}{n+1}$$

$$176. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \arcsin \frac{x}{n}$$

§ 1.5. ASTMEREAD

Funktsionaalrida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (41)$$

ehk üldisemalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1 (x - a) + \dots + a_n (x - a)^n + \dots, \quad (42)$$

kus a on mingi arv, nimetatakse astmerekaks. Arve a_n nimetatakse astmerea kordajaks.

Muutujate vahetusega $x - a = t$ võib alati reall (42) üle minna reale (41) ja vastupidi.

Iga astmerea korral leidub selline R , kus $0 \leq R < \infty$, et astmerida (41) (või (42)) koondub absoluutselt, kui $|x| < R$ (vastavalt $|x - a| < R$), ja hajub, kui $|x| > R$ (vastavalt $|x - a| > R$).

Vahemikke $(-R, R)$ ja $(a - R, a + R)$ nimetatakse vastavalt astmeridade (41) ja (42) koonduvusvahemikeks ja suurus R koonduvusraadiuseks. Koonduvusvahemike otspunktides võib astmerida koonduda (tingimisi, absoluutselt) või hajuda.

Astmerea koonduvusraadiuse R leidmiseks kasutatakse järgmist Cauchy - Hadamard'i valemit:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (43)$$

Võib kasutada ka lihtsamaid valemeid

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (44)$$

ja

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad (45)$$

kui $a_n \neq 0$ ja need piirväärtused eksisteerivad.

Olgu astmerea (41) summa $f(x)$ ja koonduvusvahemik $(-R, R)$. Kehtivad järgmised teoreemid.

T 1.5.1. Astmerida (41) koondub ühtlaselt igas lõigus $[-r, r] \subset (-R, R)$ ja tema summa $f(x)$ on pidev funktsioon koonduvusvahemikus $(-R, R)$.

T 1.5.2. Astmerida (41) võib igas lõigus $[0, x]$, kus $x \in (-R, R)$, integreerida liikmeti, kusjuures

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \quad (46)$$

T 1.5.3. Astmerida (41) võib igas punktis $x \in (-R, R)$ liikmeti diferentseerida, kusjuures

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (47)$$

Astmeridade (41), (46) ja (47) koonduvusraadiused on võrdsed.

Samasugused teoreemid kehtivad ka astmerea (42) korral.

Abeli lemma. Kui astmerida (41) koondub koonduvusvahemiku $(-R, R)$ parempoolses otspunktis R , siis selle astmerea summa $f(x)$ on vasakult pidev punktis R , s. t. $f(R-) = f(R)$ ehk teisiti kirjutades

$$\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Samasugune lemma kehtib ka koonduvusvahemiku vasakpoolse otspunkti $-R$ kohta.

Vaatame küsimust, kuidas arendada antud funktsioon $f(x)$ astmerekaks, s. o. kuidas leida niisugune astmerida, mille summa on antud funktsioon $f(x)$.

D 1.5.1. Kui iga $x \in X = (a-R, a+R)$ korral on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

siis öeldakse, et funktsioon f on vahemikus X arendatud astmerekaks ehk on esitatud astmerekana.

Osutub, et kui funktsioon f on arendatav astmerekaks (42), siis rea kordajad a_n avalduvad kujul

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad n=0, 1, \dots, \quad (48)$$

kus loetakse $0! = 1$. Valemist (48) on näha, et astmerekaks saab arendada ainult piiramata diferentseeruvaid funktsioone.

D 1.5.2. Astmerida (42), mille kordajad avalduvad kujul (48), s. o. astmerida

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \\ &+ \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

nimetatakse funktsiooni f Taylori reaks ja kordajaid (48) Taylori kordajateks.

Kui $a=0$, siis reast (49) saame rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots, \quad (50)$$

mida nimetatakse Maclaurini reaks.

T 1.5.4. Vahemikus $X = (a-R, a+R)$ piiramata diferentseeruv funktsioon f on arendatav Taylori reaks (49) selles vahemikus parajasti siis, kui funktsiooni f Taylori valemil a_n rühuldas vahemikus X tingimust

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Kokkuvõttes võime jelda, et kui funktsioon f on arendatav astmereaks (42) (või (41)) vahemikus X , siis see astmerida on funktsiooni f Taylori rida (vastavalt Maclaurini rida).

Paljude funktsioonide arendised astmereaks saame tuntud astmeridadest aritmeetiliste tehete, rea liikmeti integreerimise ja liikmeti diferentseerimise teel, tuginedes teoreemidele T 1.5.1—T 1.5.3.

Tuntuimad astmereal on järgmised:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (51)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (52)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n = \\ &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad x \in (-1, 1), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots, \quad x \in (-1, 1), \quad (55)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad x \in (-1, 1], \quad (56)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad x \in [-1, 1]. \quad (57)$$

Näited

N 1.5.1. Leida astmereal

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

koonduvusraadius R , koondvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

Lahendus. Koonduvusraadiuse R leidmiseks kasutame valemil (44), saame

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Seega $R=1$ ja koonduvusvahemik on $(-1, 1)$. Selles vahemikus astmerida koondub absoluutselt.

Uurime koonduvust vahemiku otspunktides. Kui $x=-1$, siis saame rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

mis hajub näite N 1.2.5 järgi. Kui $x=1$, siis saame rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

mis koondub Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 põhjal, kuid ei koondu absoluutselt. Kokkuvõttes oleme saanud, et $R=1$, $X=(-1, 1]$ ja $A=(-1, 1)$.

N 1.5.2. Leida astmerea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$$

summa $S(x)$.

Lahendus. Tuleb leida selline funktsioon $S(x)$, et astmerea koonduvuspiirkonnas oleks

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Antud astmerea koonduvusraadius $R=1$ ja seega koonduvusvahemik on $(-1, 1)$.

Näeme, et kui diferentseerime funktsiooni $S(x)$ koonduvusvahemikus, siis saame teoreemi T 1.5.3 ja valemi (55) põhjal:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n}}{2n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^{n-1} = \frac{x}{1-x^2}.$$

Järelikult funktsiooni $S(x)$ saame, kui integreerime saadud võrdust lõigus $[0, x] \subset (-1, 1)$. Siis (arvestades, et $S(0)=0$)

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2).$$

Koonduvusvahemiku otspunktides -1 ja 1 antud astmerida hajub, sest

$$S(-1) = S(1) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Seega oleme saanud vastuseks

$$S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2), \quad x \in (-1, 1).$$

N 1.5.3. Leida funktsiooni $f(x) = \arcsin x$ Maclaurini rida kuni astmeni x^3 kaasa arvatud.

Lahendus. Tuleb leida rea (50) esimesed liikmed kuni astmeni x^3 . Selleks arvutame funktsiooni ja vajalike tuletiste väärtused punktis $x=0$, paigutades arvutustulemused järgmisel viisil:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x, & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (1-x^2)^{-1/2}, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= x(1-x^2)^{-3/2}, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}, & f'''(0) &= 1 \end{aligned}$$

Seega valemi (50) põhjal funktsiooni $\arcsin x$ Maclaurini rea nõutavad liikmed on

$$x + \frac{x^3}{3!}.$$

N 1.5.4. Arendada funktsioon $1/(1-2x)$ Maclaurini reaks, kasutades valemit (55), ja määrata rea koonduvusraadius R .

Lahendus. Asendame valemis (55) suuruse x suurusega $2x$ ja me saamegi vajaliku rea:

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Et rida (55) koondub parajasti siis, kui $|x| < 1$, siis saadud rea korral see tingimus omandab kuju $|2x| < 1$, kust $|x| < 1/2$. Seega saadud rea koonduvusraadius on $R=1/2$.

N 1.5.5. Arendada funktsioon $f(x) = \operatorname{arsh} x$ Maclaurini reaks, integreerides tema tuletise astmerida, ja määrata selle rea koonduvusraadius R .

Lahendus. Valemi (54) abil saame

$$(\operatorname{arsh} x)' = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}.$$

Ja nüüd valemi (46) põhjal

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} x &= \int_0^x (\operatorname{arsh} x)' dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \int_0^x x^{2n} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \end{aligned}$$

kus $(-1)!! = 1$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ ja $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)$.

Ülesanded

Leida järgmiste astmeridade koonduvusraadius R , koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A (vt. näide N 1.5.1).

$$177. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

$$184. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} (x-3)^n$$

$$178. \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$185. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! x^n$$

$$179. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$$

$$186. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$180. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$$

$$187. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$181. \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$$

$$188. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

$$182. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

$$189. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$$

$$183. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+2)^n$$

$$190. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

$$191. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$193. \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$$

$$192. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$$

$$194. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$$

Leida järgmiste astmeridade summad $S(x)$ (vt. näide N 1.5.2).

$$195. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$199. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$$

$$196. \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$200. \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$197. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$

$$201. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$$

$$198. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$$

$$202. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Leida järgmiste funktsioonide Maclaurini rida (50) kuni astmeni x^4 kaasa arvatud (vt. näide N 1.5.3).

$$203. f(x) = \ln(1+e^x)$$

$$207. f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$204. f(x) = \tan x$$

$$208. f(x) = \arctan^2 x$$

$$205. f(x) = \operatorname{th} x$$

$$209. f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$206. f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Arendada järgmised funktsioonid Taylori reaks antud punkti a ümbruses.

$$210. f(x) = \frac{1}{x}, \quad a=2$$

$$212. f(x) = e^x \sin x, \quad a=0$$

$$211. f(x) = \ln x, \quad a=1$$

$$213. f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad a=2$$

Arendada järgmised funktsioonid Maclaurini reaks, kasutades valemeid (51)–(57), ja määrata nende ridade koonduvusraadiused R (vt. näide N 1.5.4).

$$214. f(x) = e^{2x}$$

$$217. f(x) = \cos 2x$$

$$215. f(x) = e^{-x^2}$$

$$218. f(x) = \sin^2 x$$

$$216. f(x) = \sin \frac{x}{2}$$

$$219. f(x) = \cos^2 x$$

$$220. f(x) = a^x$$

221. $f(x) = (x - \tan x) \cos x$
222. $f(x) = \operatorname{sh} x$
223. $f(x) = \operatorname{ch} x$
224. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
225. $f(x) = \frac{x^9}{1-x}$
226. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$
227. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
228. $f(x) = \frac{1}{3-x}$
229. $f(x) = \frac{5-2x}{6-5x+x^2}$
230. $f(x) = x \ln(1+x)$
231. $f(x) = \ln(8+x)$
232. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}}$
233. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
234. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{kui } x \neq 0 \\ 1, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$
235. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & \text{kui } x \neq 0 \\ 1, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

Arendada järgmised funktsioonid Maclaurini reaks, integreerides nende tuletiste astmeridu, ja määrata koonduvusraadiused R (vt. näide N 1.5.5).

236. $f(x) = \operatorname{arth} x$
237. $f(x) = x \arctan x - \ln(1+x^2)$
238. $f(x) = \arccos x$
239. $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

Arendada järgmised funktsioonid Tayloriga reaks Tayloriga kordajaid arvutamata ja määrata koonduvusraadius R .

240. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$
241. $f(x) = \ln(2-x)$
242. $f(x) = \cos(x-3)$
243. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + 2 \arctan x$
244. $f(x) = \sin(1-x^3)$
245. $f(x) = \frac{3x}{x^2-3x+2}$
246. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
247. $f(x) = \ln|x| - \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$

Leida järgmiste astmeridade summad $S(x)$.

$$248. \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

$$251. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$249. \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$252. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$250. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)x^n$$

$$253. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$$

Kasutades Taylori rida, leida järgmised piirväärtused.

$$254. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$256. \lim_{x \rightarrow 0-} \ln \frac{\ln(1+x) - x}{\sin x}$$

$$255. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{\arcsin x}$$

$$257. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$$

Arvutada ligikaudu järgmised integraalid märgitud täpsusega α .

$$258. \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \alpha = 10^{-3}$$

$$261. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha = 10^{-3}$$

$$259. \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx, \quad \alpha = 10^{-5}$$

$$262. \int_0^{1/2} e^{\sin x} dx, \quad \alpha = 10^{-4}$$

$$260. \int_2^4 e^{1/x} dx, \quad \alpha = 10^{-3}$$

$$263. \int_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x}) dx, \quad \alpha = 10^{-3}$$

§ 1.6. FOURIER' REAKS

Funktsionaalrida

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \\ & = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \end{aligned} \quad (58)$$

nimetatakse trigonomeetriliseks reaks.

Trigonomeetrilise rea summa $S(x)$, kui ta eksisteerib, on perioodiline funktsioon perioodiga 2π piirkonnas $(-\infty, \infty)$.

Olgu funktsioon $f(x)$ antud lõigus $[-\pi, \pi]$ või olgu perioodiline funktsioon perioodiga 2π piirkonnas $(-\infty, \infty)$.

D 1.6.1. *Trigonomeetrilist rida (58) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ trigonomeetriliseks Fourier' reaks lõigus $[-\pi, \pi]$ ja kirjutatakse*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (59)$$

kui kordajad a_n ja b_n on määratud valemitega

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n=0, 1, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (60)$$

Kordajaid (60) nimetatakse Fourier' kordajaiks.

Fourier' ridu vaadeldakse ka lõikudes $[a, a+2\pi]$. Siis kordajate a_n ja b_n jaoks kehtivad samad valemid (60), kuid integreerimislõik on $[a, a+2\pi]$.

Kui funktsioon f on paarisfunktsioon lõigus $[-\pi, \pi]$, siis $b_n=0$ ja tema Fourier' rida (59) avaldub kujul

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (61)$$

mida nimetatakse funktsiooni f koosinusreaks.

Kui funktsioon f on paaritu funktsioon lõigus $[-\pi, \pi]$, siis $a_n=0$ ja tema Fourier' rida (59) avaldub kujul

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (62)$$

mida nimetatakse funktsiooni f siinusreaks.

Kui funktsioon f on antud vaid lõigul $[0, \pi]$, siis alati võime teda kujutada kas paaris- või paaritu funktsioonina lõigus $[-\pi, \pi]$ ja seetõttu valemite (61) ja (62) abil arendada selle funktsiooni f kas koosinus- või siinusreaks või mõlemaks.

Valemities (59), (61) ja (62) kirjutatakse tilde (\sim) asemele võrdusmärk ($=$) siis, kui on teada, et Fourier' rida koondub ja koondub just funktsiooniks $f(x)$. Piisavad tingimused Fourier' rea koonduvuseks annab järgmine tunnus.

PT 1.6.1. Olgu funktsioon f absoluutselt integreeruv ja perioodiline perioodiga 2π .

a. Kui punktis x eksisteerivad lõplikud piirväärtused

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x+)}{\Delta x},$$

siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x summaks

$$S(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}. \quad (63)$$

b. Kui punktis x on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x-)$ ja $f'(x+)$, siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x summaks $S(x) = f(x)$.

Märkus 1.6.1. Tunnus PT 1.6.1 kehtib ka juhul, kui f pole perioodiline, aga on määratud lõigul $[-\pi, \pi]$. Sel korral lõigu otspunktides $x = -\pi$ ja $x = \pi$ on

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}. \quad (64)$$

D 1.6.2. Funktsiooni f nimetatakse integreeruva ruuduga funktsiooniks lõigus $[a, b]$, kui korraga eksisteerivad (harilikud või päratud) integraalid

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b f^2(x) dx.$$

Kui f on integreeruva ruuduga funktsioon lõigus $[-\pi, \pi]$, siis Fourier' kordajate ruutude rida on koonduv, s.t.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

ning kehtib Parsevali võrdus

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Järgmine tunnus annab tingimuse Fourier' rea ühtlaseks koonduvuseks.

PT 1.6.2. Kui

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

siis Fourier' rida (59) koondub absoluutselt ja ühtlaselt kogu arvoteljel $(-\infty, \infty)$.

Järgmine tunnus võimaldab otsustada Fourier' rea ühtlase koonduvuse üle mitte Fourier' kordajate põhjal nagu tunnus PT 1.6.2, vaid funktsiooni f omaduste põhjal.

PT 1.6.3. Kui lõigus $[-\pi, \pi]$ pideval funktsioonil f on $f(-\pi) = f(\pi)$ ja eksisteerib integreeruva ruuduga tuletis $f'(x)$, siis funktsiooni f Fourier' rida (59) koondub lõigus $[-\pi, \pi]$ absoluutselt ja ühtlaselt funktsiooniks $f(x)$.

Funktsiooni f Fourier' rida (59) võib igas lõigus $[0, x] \subset \subset [-\pi, \pi]$ liikmeti integreerida (sõltumata sellest, kas ta koondub või hajub), kusjuures tulemus on ühtlaselt koonduv rida lõigus $[-\pi, \pi]$ ning kehtib võrdus

$$\int_0^x f(x) dx - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right), \quad (65)$$

kus võrduse paremal poolel on vasakul oleva funktsiooni Fourier' rida.

Kui funktsioon f on antud lõigus $[-T, T]$ või on perioodiline perioodiga $2T$, siis tema Fourier' rida avaldub sellel lõigul kujul

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T}, \quad (66)$$

kus

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx \quad (n=0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

Euleri valemi

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (i = \sqrt{-1})$$

abil võib Fourier' reas (59) avaldada $\cos kx$ ja $\sin kx$ eksponent-funktsiooni imaginaarsete astmete kaudu kujul

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = i \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2}$$

ja esitada Fourier' rida (59) nn. komplekskujul

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad (67)$$

kus

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (68)$$

Kordajad reas (59) ja (67) on seotud valemitega

$$a_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad a_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k=0, 1, \dots).$$

Näited

N 1.6.1. Arendada funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{kui } -\pi \leq x < 0 \\ x, & \text{kui } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Fourier' reaks lõigus $[-\pi, \pi]$ ja uurida selle koonduvust.

L a h e n d u s. On vaja leida Fourier' rida (59). Selleks arvutame kordajad a_n ja b_n valemite (60) järgi. Kordaja a_0 peame arvutama eraldi, sest $\cos 0x = 1$. Saame

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{3}{2} \pi.$$

Kui $n > 0$, siis valemite (60) põhjal

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{1}{n}.$$

Seega

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{\sin nx}{n}.$$

Uurime rea koonduvust. Funktsioon f on pidev piirkonnas $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ ja on selles piirkonnas absoluutselt integreeruv tunnuse PT 7.1.3 (MAP I) põhjal. Leiame funktsiooni f tuletise, saame

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{kui } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Määramispiirkonna ülejäänud punktides saame leida vaid ühepoolseid tuletisi. Teoreemi T 3.1.2. (MAP I) põhjal $f'(-\pi+) = 0$, $f'(\pi-) = 1$ ja $f'(0+) = 1$. Vahetu arvutamise teel definitsiooni D 3.1.1 (MAP I) põhjal saame, et $f'(0-) = -\infty$. Seega funktsioonil f on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised igas punktis peale punkti $x=0$. Tunnuse PT 1.6.1b) ja märkuse 1.6.1 põhjal võime öelda, et rida koondub piirkonnas $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ funktsiooniks $f(x)$. Vahetu kontroll näitab, et ka punktis $x=0$ rida koondub, kuid summaks $\pi/2 \neq f(0)$.

N 1.6.2. Arendada funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } 0 \leq x < h \\ x - h, & \text{kui } h \leq x < \pi \end{cases}$$

koosinusreaks ja uurida selle koonduvust.

L a h e n d u s. Kasutame valem (61), mis annab vajaliku rea. Võib ka nii arutleda. Loeme antud funktsiooni f paarisfunktsiooniks lõigus $[-\pi, \pi]$, defineerides mõttes juurde puuduva osa. Siis kehtibki valem (61) ja me saame $n=0$ korral

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi} (x - h) \, dx = \frac{(\pi - h)^2}{\pi}$$

ja $n=1, 2, \dots$ korral

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi} (x - h) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - \cos nh].$$

Seega võime rea (61) välja kirjutada, kuid uurime enne veel rea koonduvust.

Arvestades juurde defineeritud osa, võime öelda, et funktsioon f on pidev lõigus $[-\pi, \pi]$ ja kehtib võrdus $f(-\pi) = f(\pi)$. Leiame tuletise, saame $f'(x) = 0$, kui $0 < x < h$, ja $f'(x) = 1$, kui $h < x < \pi$. Võime öelda, et lõigus $[-\pi, \pi]$ on funktsioonil f olemas integreeruva ruuduga tuletis. Tunnuse PT 1.6.3 põhjal funktsiooni f Fourier' rida koondub lõigus $[-\pi, \pi]$ absoluutselt ja ühtlaselt funktsiooniks $f(x)$. Seega vastuseks võime kirjutada

$$f(x) = \frac{(\pi - h)^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos nh}{n^2} \cos nx,$$

kui $x \in [0, \pi]$.

N 1.6.3. Arendada funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } 0 \leq x < h \\ x - h, & \text{kui } h \leq x \leq \pi \end{cases}$$

siinusreaks ja uurida selle koonduvust.

L a h e n d u s. Kasutame valemit (62), mis annab vajaliku rea. Kuid arutleme nii nagu eelmises näites N 1.6.2. Nimelt loeme antud funktsiooni f paarituks funktsiooniks lõigus $[-\pi, \pi]$, defineerides mõttes juurde puuduva osa. Siis kehtibki valem (62), mille põhjal

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_h^\pi (x - h) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi - h}{n} - \frac{\sin nh}{n^2} \right]$$

ja me võime vajaliku rea (62) välja kirjutada, kuid uurime enne veel rea koonduvust.

Funktsioon f on pidev lõigus $[-\pi, \pi]$, kui arvestada juurde defineeritud osa. Leiame funktsiooni tuletise, saame $f'(x) = 0$, kui $0 \leq x < h$, ja $f'(x) = 1$, kui $h < x < \pi$, ning ühepoolsed tuletised $f'(h-) = 0$, $f'(h+) = 1$ ja $f'(\pi-) = 1$.

Näeme, et funktsioonil f on vahemiku $(-\pi, \pi)$ igas punktis olemas vähemalt lõplikud ühepoolsed tuletised. Tunnuse PT 1.6.1b) ja märkuse 1.6.1 põhjal funktsiooni f Fourier' rida koondub funktsiooniks $f(x)$ selles vahemikus $(-\pi, \pi)$. Seega vastuseks võime kirjutada

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi - h}{n} - \frac{\sin nh}{n^2} \right] \sin nx,$$

kui $x \in [0, \pi)$. Punktides $x = \pi$ ja $x = -\pi$ on (64) põhjal

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} = 0,$$

mis ei lähe kokku funktsiooni f väärtusega nendes punktides.

Märgime, et tunnust PT 1.6.3 ei saa selles näites kasutada, erinevalt eelmisele näitele N 1.6.2, sest eeldus $f(-\pi) = f(\pi)$ ei ole siin täidetud.

N 1.6.4. Leida rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

summa S .

L a h e n d u s. Võtame näites N 1.6.1 saadud Fourier' reas $x = \pi$, siis saame võrduse

$$f(\pi) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos n\pi.$$

Et $f(\pi) = \pi$ ja $\cos n\pi = (-1)^n$, siis viimasest võrdusest saame omakorda võrduse

$$\pi = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2S}{\pi},$$

kust $S = \pi^2/8$.

Ülesanded

Arendada järgmised funktsioonid Fourier' reaks lõigus $[-\pi, \pi]$ ja uurida rea koonduvust (vt. näide N 1.6.1).

264. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

266. $f(x) = x$, kui $-\pi < x \leq \pi$

265. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -\pi \leq x < 0 \\ 3, & \text{kui } 0 < x < \pi \end{cases}$

267. $f(x) = |x|$, kui $-\pi \leq x \leq \pi$

268. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, kui $-\pi < x < \pi$

269. $f(x) = e^x$, kui $-\pi < x < \pi$

270. $f(x) = \sin \pi x$, kui $-\pi < x < \pi$

271. $f(x) = x^2$, kui $-\pi \leq x \leq \pi$

Arendada järgmised funktsioonid Fourier' reaks märgitud piirkonnas.

272. $f(x) = x$, kui $0 \leq x \leq 2\pi$

273. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, kui $0 < x < 2\pi$

274. $f(x) = |x|$, kui $-T < x < T$

275. $f(x) = x^2$, kui $0 \leq x < 2\pi$

Arendada järgmised funktsioonid koosinusreaks lõigus $[0, \pi]$ ja uurida nende koonduvust (vt. näide N 1.6.2).

276. $f(x) = 1$

278. $f(x) = x$

277. $f(x) = \sin x$

279. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

Arendada järgmised funktsioonid siinusreaks lõigus $[0, \pi]$ ja uurida nende koonduvust (vt. näide N 1.6.3).

280. $f(x) = 1$

282. $f(x) = x(\pi - x)$

281. $f(x) = \cos x$

283. $f(x) = -x \cos x$

Leida järgmiste ridade summad (vt. näide N 1.6.4).

284. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

286. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

285. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

287. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

288. Lähtudes funktsiooni $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$ Fourier' reaks arendusest, s. o. võrdusest

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

leida selle liikmeti integreerimise teel valemi (65) järgi funktsioonide $f(x) = x^2$ ja $f(x) = x^3$ Fourier' reaks arendused vahemikus $(-\pi, \pi)$.

289. Koostada Parsevali võrdus funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| < a \\ 0, & \text{kui } a < |x| < \pi \end{cases}$$

jaoks ning leida selle abil ridade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$$

summad.

II. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

§ 2.1. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONID

Olgu D mingi arvupaaride (x, y) hulk. Geomeetriliselt kujutab hulk D endast punktide $P = (x, y)$ hulka xy -tasandil (joon. 2.1).

D 2.1.1. Kui igale arvupaarile (x, y) ehk punktile $P = (x, y)$ hulgast D on mingi eeskirja f abil seatud vastavusse üks reaalarv z , siis öeldakse, et hulgal D on määratud funktsioon $z = f(x, y)$ ja kirjutatakse

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

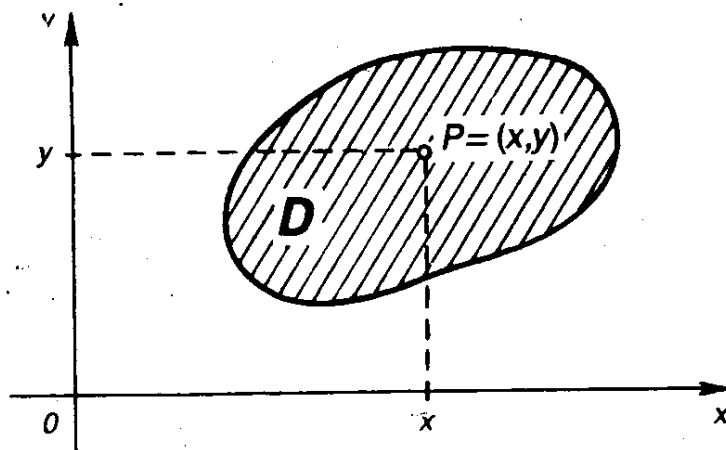
ehk

$$z = f(P), \quad P \in D.$$

Muutujaid x ja y nimetatakse funktsiooni (1) argumentideks ehk sõltumatuteks muutujateks ja muutujat z tema sõltuvaks muutujaks. Hulki D ja $Z = \{z\}$ nimetatakse vastavalt funktsiooni (1) määramis- ja muutumispiirkonnaks. Arvu $z \in Z$, mille määrab võrdus (1), nimetatakse funktsiooni (1) väärtuseks punktis $P = (x, y)$.

Kui muutujate x , y ja z märkimine ei ole oluline, siis (1) asemel kõneldakse lihtsalt funktsioonist f . Millal x , y , z ja $f(x, y)$ tähendavad muutujaid ja millal nende väärtusi, selgub alati tekstist.

Funktsiooni (1) märkimiseks kasutatakse ka tähistusi $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ ja $z = z(P)$, $P \in D$.



Joon. 2.1

Kasutatakse ka mitmeseid kahe muutuja funktsioone, mis defineeritakse analoogiliselt nagu ühe muutuja funktsioonide korral (vt. MAP I, § 1.8).

Vastavalt definitsioonile D 2.1.1 on funktsioon f määratud, kui on teada

- a) funktsiooni määramispiirkond D ,
- b) vastavuse eeskiri f .

Kui määramispiirkond D ei ole antud, siis selle all mõeldakse kõigi punktide $P=(x, y)$ hulka, mille korral vastavuse eeskiri f kehtib.

D 2.1.2. Arvukolmikute (x, y, z) ehk punktide $Q=(x, y, z)$ hulka, kus $z=f(P)$ ja $P=(x, y) \in D$, nimetatakse funktsiooni f graafikuks.

Geomeetriselt kujutab graafik endast pinda $z=f(x, y)$ xyz -ruumis (joon. 2.2).

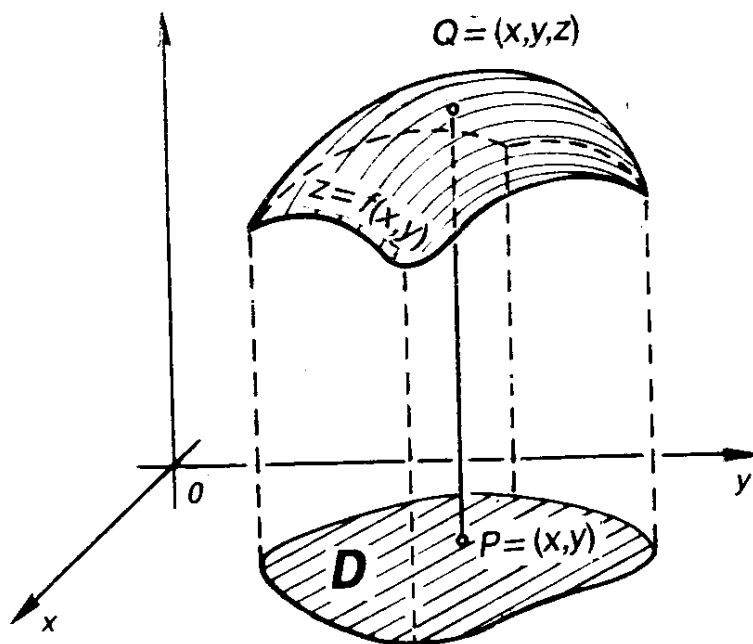
Kaks funktsiooni $z=f(x, y)$ ja $z=g(x, y)$ osutuvad samadeks funktsioonideks, kui neil mõlemal on üks ja seesama määramispiirkond D ning samad vastavuse eeskirjad, s. t. kui nende graafikud langevad kokku.

Olgu $\varepsilon > 0$ mingi arv. Punkti $P_0=(x_0, y_0)$ ε -ümbruseks nimetatakse kõigi selliste punktide $P=(x, y)$ hulka, mille kaugused punktist P_0 on väiksemad kui ε , s. o. mille korral

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Geomeetriselt punkti P_0 ε -ümbrus kujutab endast ringi raadiussega ε , mille keskpunkt on P_0 .

Punkti P_0 nimetatakse hulga D sisepunktiks, kui P_0 kuulub hulka D koos oma mingi ε -ümbrusega, ja rajapunktiks, kui P_0 igas ε -ümbruses leidub nii hulga D punkte kui ka punkte,



Joon. 2.2

mis ei kuulu hulka D . Kõigi hulga D rajapunktide hulka nimetatakse hulga D rajajooneks ehk rajaks. Punkti P_0 nimetatakse hulga D suhtes välispunktiks, kui punktil P_0 on olemas ε -ümbrus, mis ei sisalda hulga D punkte. Hulka D nimetatakse lahtiseks, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja kinniseks, kui hulka D kuuluvad ka kõik tema rajapunktid.

Näited

N 2.1.1. Leida ja joonistada funktsiooni

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \ln(y + 0,5)$$

määramispiirkond D .

Lahendus. Funktsiooni avaldisest näeme, et peavad kehtima tingimused

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{ja} \quad y + 0,5 > 0$$

ehk

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{ja} \quad y > -0,5.$$

Seega antud funktsiooni määramispiirkond on punktide $P = (x, y)$ hulk

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y > -0,5\}.$$

Selle piirkonna D joonistamiseks leiame tema rajajooned, mille moodustavad võrduse juhtumid, s. o. ringjoon $x^2 + y^2 = 1$ ja sirge $y = -0,5$. Esimene neist kuulub määramispiirkonda ja joonisel kujutame ta pideva joonena. Teine, s. o. sirge $y = -0,5$ ei kuulu määramispiirkonda, seepärast joonisel kujutame ta punktiirina (joon. 2.3).

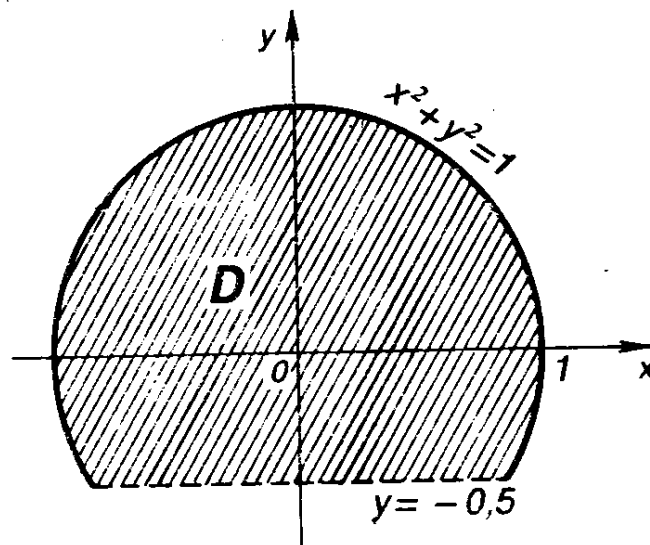
N 2.1.2. Leida ja joonistada funktsiooni

$$z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

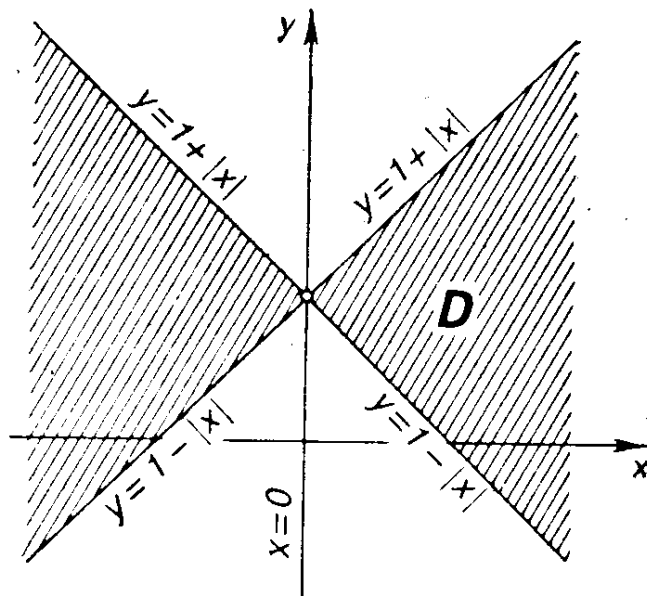
määramispiirkond D .

Lahendus. Funktsiooni avaldisest näeme, et peab kehtima tingimus

$$\left| \frac{y-1}{x} \right| \leq 1.$$



Joon. 2.3



Joon. 2.4

Järelikult määramispiirkond D on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} |y-1| \leq |x| \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Seega $D = \{(x, y) : |y-1| \leq |x| \wedge x \neq 0\}$.

Määramispiirkonna D joonistamiseks leiame piirkonna rajajooned, milleks on võrduse juhtumid $|y-1| = |x|$ ja $x=0$. Esimene neist annab jooned $y = 1 + |x|$ ja $y = 1 - |x|$, mis kuuluvad määramispiirkonda peale punkti $(0, 1)$. Teine, s. o. sirge $x=0$ annab vaid ühe rajapunkti, mis ei kuulu piirkonda D (joon. 2.4).

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad ja joonistada need. Leida nende rajajooned. Määrata, millised määramispiirkondadest on kinnised ja millised on lahtised hulgad (vt. näited N 2.1.1 ja N 2.1.2).

290. $z = x + \sqrt{y}$

296. $z = x + e + \arccos y$

291. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

297. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

292. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$

298. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

293. $z = \ln(x + y)$

299. $z = \ln(x^2 + y) + \sin x$

294. $z = \ln(x + y) + 1/\ln x$

300. $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

295. $z = 3 + \sqrt{-(x - y)^2}$

301. $z = \ln(1 + x) / \ln(1 + y)$

$$302. z = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

$$303. z = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$304. z = \sqrt{y} \sin x$$

$$306. z = \sqrt{\ln \cos(x^2 + y^2)}$$

$$305. z = \cos(x^2 + y^2 - 3)$$

$$307. z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$$

$$308. z = \arcsin \frac{y}{x}$$

$$309. z = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y} + \sqrt{4 - |x - 4|} + \sqrt{16 - (y - 4)^2}$$

Millistes järgmistes paarides on samad funktsioonid ja millistes erinevad?

$$310. f(x, y) = |xy|, g(x, y) = xy \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y$$

$$311. f(x, y) = \ln x + \ln y, g(x, y) = \ln(xy)$$

$$312. f(x, y) = \sqrt{x^2 y}, g(x, y) = x \sqrt{y}$$

$$313. f(x, y) = \frac{xy}{x^2 y^2}, g(x, y) = \frac{1}{xy}$$

$$314. f(x, y) = \ln(x^2 |y|), g(x, y) = 2 \ln |xy|$$

$$315. f(x, y) = \ln(x^2 y), g(x, y) = 2 \ln(|x| \sqrt{y})$$

$$316. f(x, y) = |xy|, g(x, y) = e^{\ln |xy|}$$

Määrata määramispiirkonnad D nii, et järgmistes paarides oleksid samad funktsioonid.

$$317. f(x, y) = \ln x^2 + \ln y, g(x, y) = 2 \ln x + \ln y$$

$$318. f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt{y}, g(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$319. f(x, y) = xy e^{xe^y}, g(x, y) = xy e^{xy}$$

Arvutada järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A , B ja C .

$$320. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, A = (2, 1)$$

$$321. f(x, y) = \frac{\arctan(x - y)}{\arctan(y - x)}, B = (2, 1)$$

$$322. f(x, y) = \ln(\sin x \cos y), C = (\pi/2, 0)$$

Joonistada järgmiste funktsioonide graafikud.

$$323. z = 1 - x - y, \text{ kus } 0 \leq y \leq x \leq 1$$

$$324. z = x^2 + y^2, \text{ kus } z \leq 4$$

$$325. z = x^2 - y^2, \text{ kus } |x| \leq 1, |y| \leq 1$$

$$326. z = 1 - |x| - |y|, \text{ kus } z \geq 0.$$

327. Leida $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f(1/x, 1/y)$ ja $1/f(x, y)$, kui

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

328. Leida $f(1, 1/y)$ ja $f(1/y, 1/x)$, kui

$$f(x, y) = x + 1/y$$

§ 2.2. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

Süsteemi $P = (x, y, z, \dots)$, mis koosneb m reaalarvust x, y, z, \dots nimetatakse m -mõõtmeliseks ehk m -dimensionaalseks punktiks. Arve x, y, z, \dots nimetatakse punkti P koordinaatideks, seejuures arvu x punkti P esimeseks koordinaadiks, arvu y teiseks jne.

Punkte P_1 ja P_2 nimetatakse võrdseiks ja kirjutatakse $P_1 = P_2$, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed. Punkti $0 = (0, 0, 0, \dots)$ nimetatakse nullpunktiks.

Kõigi punktide P hulka nimetatakse m -mõõtmeliseks (ehk m -dimensionaalseks) Eukleidiliseks ruumiks R^m , kui selles hulgas iga kahe punkti $P_1 = (x_1, y_1, \dots)$ ja $P_2 = (x_2, y_2, \dots)$ vaheline kaugus $d(P_1, P_2)$ on defineeritud võrdu-
sega

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots}$$

Viimasest võrdusest järeldub, et alati

$$|x_2 - x_1| \leq d(P_1, P_2), \quad |y_2 - y_1| \leq d(P_1, P_2), \quad \dots$$

Kaugus d täidab identsuse, sümmeetria ja kolmnurga aksioome, s.o. ruumi R^m iga punkti P_1, P_2 ja P_3 korral on

1. $d(P_1, P_2) = 0$, kui $P_1 = P_2$.
2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.
3. $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$.

Mitmesuguseid järeldusi neist aksioomidest on antud ülesandes 346—348.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Punkti $P_0 \in R^m$ ümbruseks ehk ε -ümbruseks nimetatakse kõigi punktide $P \in R^m$ hulka, mis täidavad tingimust $d(P_0, P) < \varepsilon$.

Olgu $E \subset R^m$ mingi punktide hulk ruumis R^m . Samal viisil nagu tasandilisel juhul paragrahvis 2.1 defineeritakse mõisted: hulga E sisepunkt, rajapunkt ja välispunkt, samuti kinnine ja lahtine hulk. Hulga E kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga E rajapinnaks ehk rajaks.

Hulka E nimetatakse tõkestatud hulgaks, kui leidub arv $M > 0$, et iga punkti $P \in E$ korral on $d(0, P) \leq M$.

Tõkestatud hulga E diameetrikks nimetatakse arvu

$$\text{diam } E = \sup_{P, Q \in E} d(P, Q).$$

Kinnise tõkestatud hulga E diameetriks on suurim kaugus tema kahe punkti vahel, s. o.

$$\text{diam } E = \max_{P, Q \in E} d(P, Q).$$

Ruumis R^m punktide $P = (x, y, z, \dots)$ hulka, kus koordinaadid x, y, z, \dots on ühe muutuja t funktsioonid, s. o.

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \dots, t \in [a, \beta], \quad (2)$$

nimetatakse jooneks ehk kõveraks,

Avaldisi (2) nimetatakse joone parameetrilisteks võrranditeks ja muutujat t parameetriks.

Kui funktsioonid (2) on pidevad, siis joont (2) nimetatakse pidevaks jooneks. Erijuhul, kui funktsioonid (2) on lineaarsed, s. o. kui

$$x = at + b, y = ct + d, \dots, t \in [a, \beta],$$

siis nimetatakse joont (2) sirglõiguks.

Joont (2) nimetatakse siledaks, kui ta on pidev ja funktsioonidel (2) on olemas pidevad tuletised, mis üheaegselt ei saa nulliks lõigus $[a, \beta]$.

Hulka E nimetatakse sidusaks, kui hulgas E iga kahte punkti saab ühendada hulka E kuuluva pideva joonega.

D 2.2.1. Kui igale punktile $P = (x, y, \dots)$ hulgast E on mingi eeskirja f abil seatud vastavusse üks reaalarv ω , siis öeldakse, et hulgal E on määratud funktsioon $\omega = f(x, y, \dots)$ ja kirjutatakse

$$\omega = f(x, y, \dots), \quad (x, y, \dots) \in E \quad (3)$$

ehk

$$\omega = f(P), \quad P \in E.$$

Muutujaid x, y, \dots nimetatakse funktsiooni argumentideks ehk sõltumatuteks muutujateks. Arvu ω nimetatakse funktsiooni (3) väärtuseks punktis $P = (x, y, \dots)$. Hulki E ja $W = \{\omega\}$ nimetatakse vastavalt funktsiooni (3) määramis- ja muutumispiirkonnaks.

Kui muutujate x, y, \dots märkimine ei ole oluline, siis (3) asemel kõneldakse lihtsalt funktsioonist f .

Kasutatakse ka mitmeseid mitme muutuja funktsioone, mis defineeritakse analoogiliselt nagu ühe muutuja funktsioonide korral (vt. MAP I, § 1.8).

Funktsioon on määratud, kui on teada tema määramispiirkond ja vastavuse eeskiri. Kui määramispiirkond ei ole antud, siis selle all mõeldakse kõigi punktide hulka, mille korral vastavuse eeskiri omab mõtet.

D 2.2.2. Funktsiooni f graafikuks nimetatakse punktide $Q = (x, y, \dots, t, \omega)$ hulka, kus $P = (x, y, \dots, t) \in E$ ja $\omega = f(P)$.

Seega m muutuja funktsiooni graafik on punktide hulk $(m+1)$ -mõõtmelises ruumis.

D 2.2.3. Kui m muutuja funktsiooni $w=f(u, v, \dots)$ korral u, v, \dots on k muutuja funktsioonid

$$u=g(x, y, \dots), v=h(x, y, \dots), \dots,$$

siis kirjutatakse

$$w=f[g(x, y, \dots), h(x, y, \dots), \dots]=F(x, y, \dots)$$

ja öeldakse, et w on liitfunktsioon muutujate x, y, \dots suhtes. Muutujaid u, v, \dots nimetatakse vahepealseteks muutujateks ja funktsioone f, g, h, \dots liitfunktsiooni F koostisosadeks.

Järgnevas sageli kirjutame mitme muutuja liitfunktsiooni ahela kujul, s.o. kujul

$$w=f(u, v, \dots), u=u(x, y, \dots), v=v(x, y, \dots), \dots$$

Mitme muutuja elementaarfunktsiooniks nimetatakse iga funktsiooni, mida võib saada põhielementaarfunktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, rakendades neid lõplik arv korda. Põhielementaarfunktsioonideks nimetatakse neid samu funktsioone, mis ühe muutuja funktsioonide korral, s.o. konstantset, eksponent-, logaritmi- ja astmefunktsiooni ning trigonomeetrilisi ja arkusfunktsioone, kusjuures argumentideks võib olla iga muutuja x, y, \dots .

Ülesanded

Leida järgmiste kolme muutuja funktsioonide määramispiirkonnad E .

329. $w=1+\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}$

330. $w=\sqrt{x(z^2+1)}-\sqrt{ye^z}$

331. $w=\ln(xy)+\ln z$

332. $w=\arcsin x-\arccos(yz)$

333. $w=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

334. $w=\frac{1}{3+\cos \pi x+\cos \pi y+\cos \pi z}$

Arvutada järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A, B ja C .

335. $f(x, y, z)=\frac{\arctan(x+y+z)}{\arctan(x-y-z)}, A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

336. $f(x, y)=u^w+\omega^{u+v}, u=x+y, v=x-y, w=xy, B=(-1, 2)$

337. $f(x, y, z)=\sin(uv)+\cos(vw), u=\arcsin x, v=\ln y, w=\arccos z, C=(1, e, -1)$.

Veenduda, et järgmised funktsioonid on elementaarfunktsioonid ja leida nende graafikud.

$$338. \quad w = z + \sqrt{xy}$$

$$340. \quad w = \frac{2+z}{x^2+y^2}$$

$$339. \quad w = \frac{\sqrt{x}}{y^2} + \ln(z+1)$$

$$341. \quad w = \frac{x^2+y^2}{z \ln(x^2+y^2+1)}$$

Leida funktsioon $f(x, y, z)$, kui

$$342. \quad f(x, y, z) = \ln x + y - z$$

$$343. \quad f(x+y, x-y, z) = xy + y^2 + z^2$$

Leida funktsioonid f ja w , kui

$$344. \quad w(x, y, z) = f(1 + \sqrt{x}, y) + \sqrt{2z} \quad \text{ja} \quad w(x, y, 1) = x - y$$

$$345. \quad w(x, y, z) = f(\sqrt{x}, e^y) + \sqrt{yz} \quad \text{ja} \quad w(x, y, 0) = 2x + y$$

346. Tõestada, et kauguse aksioomidest 1, 2 ja 3 järeldeb kauguse mittenegatiivsus, s. o. $d(P, Q) \geq 0$ iga kahe punkti P ja Q korral.

347. Tõestada, et kauguse aksioomidest 1, 2 ja 3 järeldeb võratus

$$|d(P_1, P_3) - d(P_2, P_3)| \leq d(P_1, P_2)$$

iga kolme punkti P_1, P_2 ja P_3 korral.

348. Tõestada, et kauguse kolm aksioomi 1, 2 ja 3 on samaväärsed kahe järgmise aksioomiga

1) identsuse aksioom 1°,

2) $d(P_1, P_2) \leq d(P_3, P_1) + d(P_3, P_2)$ iga kolme punkti P_1, P_2, P_3 korral.

§ 2.3. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Olgü ruumis R^m antud punktide P_n ($n=1, 2, \dots$) jada (P_n).

D 2.3.1. Öeldakse, et punktide jada (P_n) koondub punktiks P_0 , kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = 0, \quad (4)$$

ja kirjutatakse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \quad \text{või} \quad P_n \rightarrow P_0, \quad \text{kui} \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Kui tingimus (4) on täidetud, siis öeldakse ka, et punktid P_n lähenevad punktile P_0 . Punkti P_0 nimetatakse sel korral piirpunktiks. Punktide jada (P_n) nimetatakse ka lähenemisteeks punktile P_0 .

Kui $P_n = (x_n, y_n, \dots)$ ja $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$, siis tingimus (5) on samaväärne tingimustega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \quad \dots, \quad (6)$$

s.t. ruumis R^m leiab aset koonduvus koordinaatide järgi.

Punktide jada (P_n) nimetatakse tõkestatud jadaks, kui punktide hulk $\{P_n\}$ on tõkestatud hulk.

Iga koonduv jada (P_n) on tõkestatud jada.

Bolzano—Weierstrassi lemma. Ruumis R^m iga tõkestatud jadast (P_n) saab eraldada koonduva osajada (P_{k_n}) .

Olgu hulgal E antud m muutuja funktsioon f . Olgu P_0 hulga E sise- või rajapunkt.

D 2.3.2. Arvu A nimetatakse funktsiooni f piirväärtuseks punktis P_0 , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et

$$|f(P) - A| < \varepsilon, \text{ alati kui } 0 < d(P, P_0) < \delta \quad (7)$$

ja kirjutatakse

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \text{ ehk } f(P) \rightarrow A, \text{ kui } P \rightarrow P_0. \quad (8)$$

T 2.3.1. Arv A on funktsiooni f piirväärtuseks punktis P_0 parajasti siis, kui piirkonnas E

$$\text{iga jada } P_n \rightarrow P_0 \text{ korral } \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = A. \quad (9)$$

Kui $A = 0$, siis öeldakse, et funktsioon f on punkti P_0 ümbruses lõpmata väike suurus.

Et tingimused (5) ja (6) on samaväärsed, siis (8) asemel võib kirjutada ka

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ \dots}} f(x, y, \dots) = A.$$

Teoreemi T 2.3.1 järgi arv A on funktsiooni f piirväärtuseks punktis P_0 siis ja ainult siis, kui piirkonnas E piirprotsess iga lähenemisteed mööda punktile P_0 annab arvu A . Seda asjaolu saab hõlpsasti ära kasutada siis, kui on vaja näidata, et piirväärtus punktis P_0 ei eksisteeri. Selleks piisab leida piirkonnas E kaks lähenemisteed punktile P_0 , mida mööda piirprotsess annab erineva tulemuse. Sellega oleks näidatud, et piirprotsess sõltub lähenemisteedest piirpunktile.

D 2.3.3. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 on ∞ , kui iga arvu $M > 0$ korral leidub arv $\delta = \delta(M) > 0$, et $f(P) > M$, alati kui $0 < d(P, P_0) < \delta$, ja kirjutatakse

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \infty \text{ ehk } f(P) \rightarrow \infty, \text{ kui } P \rightarrow P_0.$$

Analoogiliselt võrratusega $f(P) < -M$ defineeritakse piirväärtus

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = -\infty \text{ ehk } f(P) \rightarrow -\infty, \text{ kui } P \rightarrow P_0.$$

Mõlemal juhul öeldakse, et funktsioon f on punkti P_0 ümbruses lõpmata suur suurus.

Teoreem 2.3.1 kehtib ka definitsiooniga D 2.3.3 antud lõpmatute piirväärtuste ∞ ja $-\infty$ korral.

D 2.3.4. Kui punkti $P_0 = (x_0, y_0)$ ümbruses on funktsiooni $f(x, y)$ olemas piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = g(y) \quad (10)$$

ja piirväärtus

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A,$$

siis arvu A nimetatakse funktsiooni f korduvaks piirväärtuseks punktis P_0 ja kirjutatakse

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A. \quad (11)$$

Analoogiliselt defineeritakse ka korduv piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = B \quad (12)$$

ja korduvad piirväärtused enam kui kahe muutuja funktsiooni korral.

Vaatleme piirväärtuse ja korduva piirväärtuse vahelist seost.

Korduv piirväärtus punktis P_0 tähendab piirväärtust teatavat lähenemisteed mööda. Seepärast korduvate piirväärtuste olemasolust ei järeldu piirväärtuse olemasolu selles punktis P_0 (vt. näide N 2.3.8).

Kui punkt P_0 on hulga E sisepunkt, siis saab talle läheneda iga teed mööda ja sel korral piirväärtuse olemasolust punktis P_0 järeldub kõigi korduvate piirväärtuste olemasolu selles punktis P_0 . Kui aga punkt P_0 on hulga E rajapunkt, siis ei saa talle läheneda iga teed mööda ja sel korral piirväärtuse olemasolust ei saa järeldada korduvate piirväärtuste olemasolu (vt. näide N 2.3.9). Kuid kehtib järgmine teoreem.

T 2.3.2. Kui funktsioonil $f(x, y)$ on punktis $P_0 = (x_0, y_0)$ olemas piirväärtus A ja punkti P_0 mingis ümbruses on olemas piirväärtus (10), siis eksisteerib korduv piirväärtus (11).

Analoogiline teoreem kehtib ka korduva piirväärtuse (12) korral.

Märgime, et piirpunkt P_0 ei saa olla hulga E suhtes välispunkt, sest siis ei saa talle läheneda piirprotsessis mööda piirkonda E .

D 2.3.5. Funktsiooni f nimetatakse pidevaks punktis P_0 , kui

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0), \quad (13)$$

ja pidevaks hulgal E , kui ta on pidev hulga E igas punktis. Pidevuse tingimuse (13) võib kirjutada ka kujul

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \dots}} \Delta f = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta f = 0, \quad (14)$$

kus $\Delta f = f(P) - f(P_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, ..., ja

$$\varrho = d(P, P_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \dots}$$

Suurust Δf nimetatakse funktsiooni f muuduks punktide P_0 ja P vahel ehk üleminekul punktist P_0 punkti P . Suurusi Δx , Δy , ... nimetatakse argumentide x , y , ... muutudeks üleminekul punktist $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$ punkti $P = (x, y, \dots)$.

Aritmeetilised tehted säilitavad funktsiooni pidevuse.

Liitfunktsioon $F(P) = f[g(P), h(P), \dots]$ on pidev oma määramispiirkonnas, kui tema koostisosad f, g, h, \dots on pidevad funktsioonid oma määramispiirkonnas. Sel korral liitfunktsiooni F määramispiirkonna igas punktis P_0 kehtib võrdus

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f[\lim_{P \rightarrow P_0} g(P), \lim_{P \rightarrow P_0} h(P), \dots]. \quad (15)$$

T 2.3.3. *Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.*

Piirväärtuse leidmisel võib esineda kaks juhtumit.

a. $P_0 \in E$, s. t. piirpunkt P_0 kuulub funktsiooni f määramispiirkonda. Sel korral, kui f on elementaarfunktsioon, kehtib teoreemi T 2.3.3 põhjal võrdus (13), s. t. elementaarfunktsiooni f piirväärtus määramispiirkonna punktis P_0 on võrdne funktsiooni väärtusega selles punktis P_0 .

b. $P_0 \notin E$, s. t. piirpunkt P_0 ei ole funktsiooni f määramispiirkonna E punkt. Sel korral kasutatakse funktsiooni piirväärtuse leidmiseks lõpmata väikeste ja lõpmata suurte suuruste omadusi ning määramatuste kõrvaldamise võtteid, mis on samasugused nagu ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse korral. Tuleb vaid jälgida, et kasutatav võte ei piira lähenemisteid piirpunktile.

Seega piirväärtuste leidmisel tuleb kõigepealt kindlaks teha, kumb juhtumitest a või b esineb.

D 2.3.6. *Õeldakse, et funktsioon f on pidev punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0, \dots)$ muutuja x järgi, kui*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0, z_0, \dots) = f(x_0, y_0, z_0, \dots). \quad (16)$$

Analoogiliselt defineeritakse pidevus teiste muutujate y, z, \dots järgi.

T 2.3.4. *Kui funktsioon f on pidev määramispiirkonna E sisepunktis P_0 , siis on ta pidev selles punktis P_0 ka iga muutuja järgi.*

Teoreemile T 2.3.4 vastupidine väide ei ole õige, s. t. pidevusest iga muutuja järgi ei järeldu funktsiooni pidevus vaadeldavas punktis. Ka ei ole teoreem T 2.3.4 kehtiv, kui P_0 on määramispiirkonna E rajapunkt.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis P_0 , siis öeldakse, et f on katkev punktis P_0 . Sel korral punkti P_0 nimetatakse funktsiooni f katkevuspunktiks.

D 2.3.7. *Funktsiooni f nimetatakse ühtlaselt pidevaks.*

piirkonnas E , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et

$$|f(P) - f(P')| < \varepsilon, \text{ alati kui } d(P, P') < \delta$$

sõltumata punktide P ja P' asukohast piirkonnas E .

Ühtlasest pidevusest antud piirkonnas järeldub funktsiooni pidevus selles piirkonnas. Vastupidine väide ei ole õige.

Pidevatel mitme muutuja funktsioonidel on järgmised omadused.

T 2.3.5. Tõkestatud kinnises piirkonnas pidev funktsioon on tõkestatud selles piirkonnas.

T 2.3.6. Tõkestatud kinnises piirkonnas pideval funktsioonil on olemas ekstremaalsed väärtused selles piirkonnas.

T 2.3.7. Tõkestatud kinnises sidusas piirkonnas pidev funktsioon omab iga väärtust ekstremaalsete väärtuste vahel.

T 2.3.8. Tõkestatud kinnises piirkonnas pidev funktsioon on ühtlaselt pidev selles piirkonnas.

Mitmesuguseid tingimusi funktsiooni pidevuseks on antud veel ülesandeis 408, 409 ja 410.

Näited

N 2.3.1. Leida piirväärtus

$$A = \lim_{x, y \rightarrow 0, 2} \frac{3x + 4y}{1 + \ln(x + y)}$$

Lahendus. Leida tuleb elementaarfunktsiooni piirväärtus, kus piirpunkt $(0, 2)$ on määramispiirkonna punkt. Seega kehtib võrdus (13), mis annab

$$A = \frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{1 + \ln(0 + 2)} = \frac{8}{1 + \ln 2}$$

N 2.3.2. Leida piirväärtus

$$A = \lim_{x, y \rightarrow 0, 3} \frac{\sin(xy)}{x}$$

Lahendus. Piirpunktis $(0, 3)$ esineb määramatus $0/0$, s. t. punkt $(0, 3)$ ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda. Korrutame ja jagame antud avaldist suurusega y ning teeme muutuja vahetuse $u = xy$, siis saame, arvestades, et antud piirprotsessis on $\sin u \sim u$,

$$A = \lim_{u, y \rightarrow 0, 3} \frac{y \sin u}{u} = \lim_{u, y \rightarrow 0, 3} y = 3.$$

N 2.3.3. Leida piirväärtus

$$A = \lim_{x, y \rightarrow 1, 2} \frac{2 - xy}{2 - \sqrt{6 - xy}}$$

Lahendus. Piirpunktis $(1, 2)$ esineb määramatus $0/0$. Viime irratsionaalsuse nimetajast lugejasse, saame

$$A = \lim_{x,y \rightarrow 1,2} \frac{(2-xy)(2+\sqrt{6-xy})}{4-6+xy} = -\lim_{x,y \rightarrow 1,2} (2+\sqrt{6-xy}) = -4.$$

Antud ülesande võib lahendada ka muutuja vahetusega, võttes

$$u = \sqrt{6-xy}.$$

Siis $xy = 6 - u^2$ ning $u \rightarrow 2$ ja me saame

$$A = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^2 - 4}{2 - u} = -\lim_{u \rightarrow 2} (u+2) = -4.$$

N 2.3.4. Leida piirväärtus

$$A = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lahendus. Piirpunktis esineb määramatus $0/0$. Teeme muutuja vahetuse, minnes üle polaarkoordinaatidele $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, saame

$$A = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot 0(1) = 0.$$

N 2.5.3. Leida piirväärtus

$$A = \lim_{x,y \rightarrow 0} (1+xy^2)^{1/(x^2+y^2)}.$$

Lahendus. Olgu

$$U = (1+xy^2)^{1/(x^2+y^2)}.$$

Leiame algul $\ln U$ piirväärtuse, saame

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \ln U = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+y^2} \ln(1+xy^2) = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{\ln(1+xy^2)}{xy^2}.$$

Kasutades valemit

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1,$$

saame (minnes üle polaarkoordinaatidele)

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \ln U = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2} = 0.$$

Valemi (15) põhjal

$$A = \lim_{x,y \rightarrow 0} e^{\ln U} = e^{\lim_{x,y \rightarrow 0} \ln U} = e^0 = 1.$$

N 2.3.6. Näidata, et piirväärtus

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ei eksisteeri.

Lahendus. Tähistame

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Läheneleme piirpunktile $(0, 0)$ mööda sirget $y = x$, siis

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0.$$

Aga lähenedes piirpunktile mööda sirget $y = 2x$, saame

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) = -3/5.$$

Seega piirprotsess sõltub lähenemisteest piirpunktile. Teoreemi T 2.3.1 põhjal vaadeldav piirväärtus ei eksisteeri.

Sama tulemuse saame ka minnes üle polaarkoordinaatidele, siis

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \cos 2\varphi = \cos 2\varphi,$$

kust on näha, et piirprotsess sõltub φ valikust, s. o. lähenemisteest piirpunktile.

N 2.3.7. Näidata, et piirväärtus

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{2x+3y}{5x+4y^2}$$

ei eksisteeri.

L a h e n d u s. Olgu

$$f(x, y) = \frac{2x+3y}{5x+4y^2}.$$

Minnes lõpmatusse ∞ mööda suvalist sirget $y=kx$, kus $k>0$, saame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3k}{5+4k^2x} = 0.$$

Sama tulemuse saame, kui läheme piirile mööda sirgeid $y=kx+b$, kus $k \neq 0$. Seega sirgeid mööda piirile minnes ei ole võimalik näidata piirprotsessi sõltuvust lähenemisteest. Järelikult ülesande lahendamiseks tuleb otsida komplitseeritumaid lähenemisteid piirpunktile.

Läheme piirile mööda parabooli ~~$y=\sqrt{x}$~~ , siis saame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3\sqrt{x}}{5x+4x} = \frac{2}{9}.$$

Seega piirprotsess sõltub lähenemisteest. Teoreemi T 2.3.1 põhjal piirväärtus ei eksisteeri.

N 2.3.8. Näidata, et funktsioonil

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

piirväärtust punktis $(0, 0)$ ei ole, kuid korduvad piirväärtused eksisteerivad.

L a h e n d u s. Minnes üle polaarkoordinaatidele, saame

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \cos \varphi \sin \varphi,$$

kust näeme, et piirprotsess sõltub lähenemisteest piirpunktile. Teoreemi T 2.3.1 põhjal piirväärtust funktsioonil punktis $(0, 0)$ ei ole.

Korduvad piirväärtused saame vahetu arvutamisega:

$$A = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

N 2.3.9. Näidata, et funktsioonil

$$f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$$

piirväärtus punktis $(0, 0)$ on olemas, kuid üks korduv piirväärtus selles punktis ei eksisteeri.

Lahendus. Arvestades, et $\sin(1/x) = O(1)$, saame

$$A = \lim_{x,y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{x,y \rightarrow 0} y O(1) = 0.$$

Leiame korduvad piirväärtused, saame

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \text{ei eksisteeri.}$$

N 2.3.10. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas D .

Lahendus. Funktsiooni f määramispiirkond D on kogu xy -tasand. Igas piirkonnas, kus $x^2+y^2 \neq 0$, on f elementaarfunktsioon ja seega teoreemi T 2.3.3 põhjal pidev. Järelikult tuleb kontrollida funktsiooni f pidevust vaid punktis $(0, 0)$. Et

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

siis f on pidev ka punktis $(0, 0)$. Seega funktsioon f on pidev oma määramispiirkonnas D .

N 2.3.11. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = \frac{1 + e^{xy}}{1 + \operatorname{ch} x}$$

on ühtlaselt pidev piirkonnas $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$.

Lahendus. Funktsioon f on elementaarfunktsioon ja teoreemi T 2.3.3 põhjal pidev oma määramispiirkonnas D . Piirkond D on kinnine ja tõkestatud. Teoreemi T 2.3.8 põhjal f on ühtlaselt pidev piirkonnas D .

N 2.3.12. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

on ühtlaselt pidev piirkonnas $D = \{(x, y) : |x| \geq 6, |y| \leq 2\}$.

Lahendus. Funktsioon f on elementaarfunktsioon ja teoreemi T 2.3.3 põhjal pidev oma määramispiirkonnas D . Kasutada teoreemi T 2.3.8 ei saa, sest piirkond D on tõkestamata. Seepärast kasutame ühtlase pidevuse definitsiooni D 2.3.7.

Olgu $P = (x, y)$ ja $P' = (x', y')$ suvalised punktid piirkonnas D . Siis

$$|f(P) - f(P')| = \left| \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x' - y'} \right| \leq \frac{|x - x'| + |y - y'|}{|x - y| |x' - y'|}.$$

Et alati on (§ 2.2) $|x - x'| \leq d(P, P')$ ja $|y - y'| \leq d(P, P')$, siis

$$|f(P) - f(P')| \leq \frac{2d(P, P')}{|x - y| |x' - y'|}.$$

Aga piirkonnas D on $|x - y| \geq |x| - |y| \geq 6 - 2 = 4$, siis

$$\frac{1}{|x - y| |x' - y'|} \leq \frac{1}{16}.$$

$$|f(P) - f(P')| \leq \frac{d(P, P')}{8}.$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Näeme, et võrratus $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$ hakkab kehtima iga $P, P' \in D$ korral, kui $d(P, P')/8 < \varepsilon$ ehk $d(P, P') < 8\varepsilon$. Seega võime võtta $\delta = 8\varepsilon$. Et δ ei sõltu punktide P ja P' asukohast piirkonnas D , siis definitsiooni D 2.3.7 põhjal on funktsioon f ühtlaselt pidev piirkonnas D .

N 2.3.13. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = \sin(y - 2x)$$

on ühtlaselt pidev piirkonnas $D = \mathbb{R}^2$.

Lahendus. Olgu $P = (x, y)$ ja $P' = (x', y')$ suvalised punktid piirkonnas D . Siis

$$\begin{aligned} |f(P) - f(P')| &= |\sin(y - 2x) - \sin(y' - 2x')| \leq \\ &\leq 2 \left| \cos \frac{y - 2x + (y' - 2x')}{2} \right| \left| \sin \frac{y - 2x - (y' - 2x')}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{y - y' - 2(x - x')}{2} \right| \leq |y - y' - 2(x - x')| \leq \\ &\leq |y - y'| + 2|x - x'| \leq 3d(P, P'). \end{aligned}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Näeme, et võrratus $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$ hakkab kehtima, kui $3d(P, P') < \varepsilon$ ehk $d(P, P') < \varepsilon/3$. Seega võime võtta $\delta = \varepsilon/3$. Definitsiooni D 2.3.7 põhjal on funktsioon f ühtlaselt pidev piirkonnas D .

Ülesanded

Leida järgmised piirväärtused (vt. näited N 2.3.1 — N 2.3.5).

- | | |
|--|---|
| 349. $\lim_{x, y \rightarrow -2, 1} x^2 y$ | 357. $\lim_{x, y \rightarrow 0+} \frac{x - \sqrt{y}}{x + \ln x}$ |
| 350. $\lim_{x, y \rightarrow 2, 4} (2x + 3y)$ | 358. $\lim_{x, y \rightarrow 0+} \frac{\ln(xy)}{x \sin y}$ |
| 351. $\lim_{x, y \rightarrow 2} \frac{x + \sin \pi x}{y}$ | 359. $\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ |
| 352. $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{y \sin x}{x}$ | 360. $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ |
| 353. $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{y}$ | 361. $\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$ |
| 354. $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{1 + xy} - 1}$ | 362. $\lim_{x, y \rightarrow 0} (x^2 + y^2) \sin \frac{3}{xy}$ |
| 355. $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$ | 363. $\lim_{x, y \rightarrow 2, 0} \frac{xy}{\tan xy}$ |
| 356. $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{2 + x^2 + y^2}$ | 364. $\lim_{x, y \rightarrow 0, 10} \frac{\sin 5x}{xy}$ |

$$365. \lim_{x,y \rightarrow \infty} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2+y^2}$$

$$368. \lim_{x,y \rightarrow 0} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$366. \lim_{x,y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2y^2} \right)^{x^2y^2}$$

$$369. \lim_{x,y \rightarrow 0} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

$$367. \lim_{x,y \rightarrow 3, \infty} \left(1 + \frac{x}{y} \right)^y$$

Näidata, et järgmised piirväärtused ei eksisteeri (vt. näited N 2.3.6 ja N 2.3.7).

$$370. \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x}{x+y}$$

$$372. \lim_{x,y \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x+y^2}$$

$$371. \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2+xy}$$

$$373. \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2}{y-x^2}$$

Leida korduvad piirväärtused (11) ja (12) järgmistest funktsioonidest märgitud punktis (vt. näide N 2.3.8).

$$374. f(x, y) = \frac{x+y^2}{x+y}, P_0 = (0, 0)$$

$$375. f(x, y) = \frac{\ln(1+x+y)}{x+\sin y}, P_0 = (0, 0)$$

$$376. f(x, y) = \sin \frac{x}{2x+y}, P_0 = (\infty, \infty)$$

Näidata, et järgmistel funktsioonidel piirväärtus punktis $(0, 0)$ on olemas, kuid korduvad piirväärtused selles punktis ei eksisteeri (vt. näide N 2.3.9).

$$377. f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

$$378. f(x, y) = (x-y) \cos \frac{1}{x} \sin \frac{\cos y}{2y}$$

Näidata, et järgmised punktide jadad (P_n) koonduvad märgitud punktiks P_0 .

$$379. P_n = \left(\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+1} \right), P_0 = (0, 0)$$

$$380. P_n = \left(\frac{\sin n}{\ln(n+2)}, \frac{\arctan n^2}{\cot \frac{2}{n+1}} \right), P_0 = (0, 0)$$

Näidata, et järgmised punktide jadad (P_n) on tõkestatud ja eraldada neist vähemalt üks koonduv osajada (P_{h_n}) ning leida selle osajada piirpunkt P_0 .

$$381. P_n = (2 + (-1)^n, (-1)^n)$$

$$382. P_n = \left(\sin \frac{(-1)^n \pi}{2}, \cos (-1)^n \pi \right)$$

$$383. P_n = \left(\arctan (-\pi)^n, \arcsin \frac{\pi}{4+n} \right)$$

Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas (vt. näide N 2.3.10).

$$384. f(x, y) = \frac{xy}{\sin x + e^y}$$

$$385. f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\ln z}$$

$$386. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$387. f(x, y) = \begin{cases} xy \sin(1/x), & \text{kui } x \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$$

Millised järgmistest funktsioonidest on punktis $P_0 = (0, 0)$ pidevad, pidevad muutuja x või muutuja y järgi.

$$388. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$$

$$389. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$390. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0 \\ 1, & \text{kui } |x| + |y| = 0 \end{cases}$$

$$391. f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$$

$$392. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\ln |xy|}, & \text{kui } xy \neq 0 \\ 0, & \text{kui } xy = 0 \end{cases}$$

Leida järgmiste funktsioonide katkevuspunktid.

$$393. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$$

$$394. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{kui } x+y \neq 0 \\ -1, & \text{kui } x+y = 0 \end{cases}$$

$$395. f(x, y) = \frac{x+y}{x^3 + y^3}$$

$$396. f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$$

$$397. f(x, y, z) = \frac{1}{xyz}$$

$$398. f(x, y) = \frac{1}{\ln |1 - x^2 - y^2|}$$

Järgmistel funktsioonidel kõrvaldada katkevus märgitud piirkonnas D , s.t. lisada funktsioonile f katkevuspunktides sellised väärtused, et f oleks pidev kogu piirkonnas D .

$$399. f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}, \quad D = \mathbf{R}^2$$

$$400. f(x, y) = \frac{\sin x + \cos y}{\ln |x+y|}, \quad D = \{(x, y): |x+y| < 1\}$$

$$401. f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{3 + \cot^2(x-y)}, \quad D = \mathbf{R}^2$$

$$402. f(x, y) = \frac{2 - \sqrt{12 - x - 2y}}{(x+2y)^2 - 64}, \quad D = \{(x, y): -7 \leq x+2y \leq 12\}$$

Näidata, et järgmised funktsioonid on ühtlaselt pidevad märgitud hulgal D (vt. näited N 2.3.11, N 2.3.12 ja N 2.3.13).

$$403. f(x, y) = x - 4y + \ln 2, \quad D = \mathbf{R}^2$$

$$404. f(x, y) = \cos \frac{x}{y}, \quad D = \{(x, y): 1 \leq |x| + |y| \leq 7\}$$

$$405. f(x, y) = \sin(4x - 8y + 1), \quad D = \mathbf{R}^2$$

$$406. f(x, y) = \frac{1}{2x - y}, \quad D = \{(x, y): |x| \geq 1, |y| \leq 1\}$$

$$407. f(x, y) = \frac{3}{x-y} + \frac{1}{5} \cos(x-y+2),$$

$$D = \{(x, y): |x| > 7, |y| < 2\}$$

408. Tõestada, et funktsioon $f(x, y)$ on pidev hulgal D , kui
 1° $g(x) = f(x, y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral,
 2° $h(y) = f(x, y)$ on ühtlaselt (x suhtes) pidev muutuja y funktsioon.

409. Tõestada, et funktsioon $f(x, y)$ on pidev hulgal D , kui
 1° $g(x) = f(x, y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral,
 2° $h(y) = f(x, y)$ rahuldab Lipschitzi tingimust, s. o. leidub konstant $L > 0$, et

$$|h(y) - h(y')| \leq L|y - y'|$$

suvaliste punktide $(x, y) \in D$ ja $(x, y') \in D$ korral.

410. Tõestada, et funktsioon $f(x, y)$ on pidev hulgal D , kui ta on pidev muutuja x ja muutuja y järgi ning on monotoonne kas muutuja x või muutuja y järgi.

III. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE DIFERENTSEERIMINE

§ 3.1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI OSATULETISED

Olgu antud mitme muutuja funktsioon

$$u = f(x, y, z, \dots), \quad (x, y, z, \dots) \in D$$

ja olgu punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0, \dots)$ piirkonna D sisepunkt. Fikseerime muutujad y, z, \dots , võttes $y = y_0, z = z_0, \dots$, siis saame ühe muutuja funktsiooni

$$g(x) = f(x, y_0, z_0, \dots).$$

D 3.1.1. Kui funktsioonil $g(x)$ on punktis x_0 olemas tuletis $g'(x_0)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f osatuletiseks muutuja x järgi punktis P_0 ja tähistatakse sümbolitega

$$f_x(P_0) = f_x(x_0, y_0, \dots) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(P_0).$$

Funktsiooni f osatuletis muutuja x järgi suvalises punktis $P = (x, y, \dots)$ on seega piirväärtus (funktsioon)

$$f_x(P) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni f osatuletised muutujate y, z, \dots järgi punktis P_0 , s.o. osatuletised $f_y(P_0), f_z(P_0), \dots$.

Funktsiooni osatuletisi arvutatakse ühe muutuja funktsiooni diferentseerimise reeglite järgi.

T 3.1.1. (Teoreem osatuletise piirväärtusest). Kui funktsioon f on pidev muutuja x järgi punktis $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$, siis

$$f_x(P_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_x(x, y_0, z_0, \dots)$$

eeldusel, et viimane piirväärtus eksisteerib (lõplik või lõpmatu).

Samasugune teoreem osatuletise piirväärtusest kehtib ka muutujate y, z, \dots korral.

Kui funktsioonil f_x on olemas osatuletis muutuja x järgi punktis P_0 , siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (ehk teiseks) osatuletiseks muutuja x järgi punktis P_0 ja tähistatakse sümbolitega

$$f_{xx}(P_0) = f_{xx}(x_0, y_0, \dots) = \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(P_0).$$

Analoogiliselt defineeritakse teist järku osatuletised muutujate y, z, \dots järgi punktis P_0 , s. o. osatuletised $f_{yy}(P_0), f_{zz}(P_0), \dots$.

Kui funktsioonil f_x on olemas osatuletis muutuja y järgi punktis P_0 , siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f segatuletiseks muutujate x ja y järgi punktis P_0 ning tähistatakse sümbolitega

$$f_{xy}(P_0) = f_{xy}(x_0, y_0, \dots) = \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(P_0).$$

Analoogiliselt defineeritakse punktis P_0 segatuletised $f_{yx}(P_0), f_{xz}(P_0), f_{zx}(P_0), f_{yz}(P_0), f_{zy}(P_0), \dots$.

Veel kõrgemat järku osatuletised ja segatuletised defineeritakse analoogiliselt.

T 3.1.2. (Teoreem segatuletisest). *Kui segatuletised f_{xy} ja f_{yx} on pidevad mingis punktis, siis selles punktis kehtib võrdus*

$$f_{xy} = f_{yx}. \quad (2)$$

Viimases teoreemis T 3.1.2 segatuletiste pidevuse eeldust ära jätta ei saa (vt. ülesanne 448), kuid saab asendada avarama eeldusega (vt. § 3.2).

Järgmised teoreemid T 3.1.3 ja T 3.1.4 annavad liitfunktsiooni tuletise ja osatuletise leidmise eeskirja.

T 3.1.3. *Kui funktsiooni $u = u(x, y, \dots)$ osatuletised on pidevad ja funktsioonide $x = x(t), y = y(t), \dots$ tuletised on lõplikud, siis liitfunktsioonil*

$$u = u(x, y, \dots), \quad x = x(t), \quad y = y(t), \dots$$

on olemas tuletis u'_t , mis avaldub valemiga

$$u'_t = u_x x'_t + u_y y'_t + \dots \quad (3)$$

T 3.1.4. *Kui funktsiooni $w = w(u, v, \dots)$ osatuletised on pidevad ja funktsioonide $u = u(x, y, \dots), v = v(x, y, \dots), \dots$ osatuletised on lõplikud, siis liitfunktsioonil*

$$w = w(u, v, \dots), \quad u = u(x, y, \dots), \quad v = v(x, y, \dots), \dots$$

on olemas osatuletised w_x, w_y, \dots , mis avalduvad valemitega

$$\begin{cases} w_x = w_u u_x + w_v v_x + \dots \\ w_y = w_u u_y + w_v v_y + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (4)$$

Teoreemid T 3.1.3 ja T 3.1.4 kehtivad ka avaramatel eeldustel (vt. § 3.2).

Näited

N 3.1.1. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + \sin(3x - y^2)$$

osatuletised z_x ja z_y .

Lahendus. Fikseerime muutuja y , siis z on ühe muutuja x funktsiooniks.

Võttes nüüd tuletise muutuja x järgi, saame

$$z_x = 2x + 3\cos(3x - y^2).$$

Fikseerime muutuja x , siis z on ühe muutuja y funktsiooniks. Võttes tuletise muutuja y järgi, saame

$$z_y = \cos(3x - y^2) (-2y) = -2y \cos(3x - y^2).$$

N 3.1.2. Leida funktsiooni

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(y/x), & \text{kui } x \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$$

osatuletised.

Lahendus. Kui $x \neq 0$, siis

$$f(x, y) = x^2 \sin \frac{y}{x}$$

ja me saame

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{y}{x} + x^2 \cos \frac{y}{x} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x},$$

$$f_y(x, y) = x^2 \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = x \cos \frac{y}{x}.$$

Kui $x=0$, siis on $f(0, y) = 0$, kust $f_y(0, y) = 0$ iga y korral. Osatuletise $f_x(0, y)$ leidmiseks kasutame teoreemi T 3.1.1. Et igas punktis $(0, y)$ funktsioon f on pidev muutuja x järgi, siis teoreemi T 3.1.1 põhjal

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} \right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{kui } y = 0 \\ \text{ei eksisteeri,} & \text{kui } y \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Viimasest võrdusest saame, et $y=0$ korral on

$$f_x(0, 0) = 0,$$

aga $y \neq 0$ korral, kui piirväärtus ei eksisteeri, teoreem T 3.1.1 vastust ei anna. Sel korral kasutame osatuletise f_x saamiseks vahetult definitsioonavaldist (1), mis annab

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin(y/\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot 0(1) = 0. \end{aligned}$$

Sellega on funktsiooni f osatuletised igas punktis leitud.

N 3.1.3. Leida liitfunktsiooni

$$z = e^{x-5y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos 2t$$

tuletis z'_t .

Lahendus. Funktsioonil $z = e^{x-5y}$ on olemas pidevad osatuletised z_x ja z_y . Funktsioonidel $x = \sin t$ ja $y = \cos 2t$ on olemas lõplikud tuletised x'_t ja y'_t .

Seega võime kasutada teoreemi T 3.1.3. Valemi (3) põhjal saame

$$\begin{aligned} z'_t &= z_x x'_t + z_y y'_t = e^{x-5y} \cos t + e^{x-5y} (-5) (-\sin 2t) 2 = \\ &= e^{x-5y} (\cos t + 10 \sin 2t) = \\ &= e^{\sin t - 5 \cos 2t} (\cos t + 10 \sin 2t). \end{aligned}$$

N 3.1.4. Leida liitfunktsiooni

$$z = u^2 - v^2, \quad u = x \sin y, \quad v = x \cos y$$

osatuletised z_x ja z_y .

Lahendus. Funktsioonil $z = u^2 - v^2$ on olemas pidevad osatuletised z_u ja z_v . Funktsioonidel $u = x \sin y$ ja $v = x \cos y$ eksisteerivad lõplikud osatuletised u_x ja u_y ning v_x ja v_y . Seega võime kasutada teoreemi T 3.1.4. Valemitest (4) põhjal saame

$$\begin{aligned} z_x &= z_u u_x + z_v v_x = 2u \sin y + (-2v) \cos y = \\ &= 2x \sin^2 y - 2x \cos^2 y = -2x \cos 2y, \\ z_y &= z_u u_y + z_v v_y = 2ux \cos y + (-2v)(-x \sin y) = \\ &= 2x^2 \sin y \cos y + 2x^2 \cos y \sin y = 2x^2 \sin 2y. \end{aligned}$$

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide osatuletised (vt. näide N 3.1.1).

411. $z = 3x - y^2$

412. $z = x^2 + y^2$

413. $z = e^{2x+3y}$

414. $z = x^3 y + 2x$

415. $u = x^3 y z^2 + 7y$

416. $u = \ln(xz) + \ln(yz)$

417. $z = (x+2y)^5$

418. $z = \frac{2x}{y} + 4$

419. $z = \sqrt{1+x^2 y^4}$

420. $z = \cos(4x - y)$

421. $z = x \sin y$

422. $z = \tan \frac{x}{y}$

423. $z = \arctan \frac{1}{xy}$

424. $z = x^y$

425. $z = (x+y)^y$

426. $z = (1+xy)^{xy}$

427. $z = x^{\sin y}$

428. $u = x^2 + y^z$

Leida järgmiste funktsioonide osatuletised (vt. näide N 3.1.2).

429. $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y}{x}, & \text{kui } x \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

430. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2), & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

431. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & \text{kui } |x| + |y| = 0 \end{cases}$

432. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x}, & \text{kui } x \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

$$433. f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x=0 \vee y=0 \end{cases}$$

$$434. f(x, y) = \begin{cases} x^3 y^3 \sin \frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0 \\ 0, & \text{kui } xy = 0 \end{cases}$$

$$435. f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \sin \frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0 \\ 0, & \text{kui } xy = 0 \end{cases}$$

Leida järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised.

$$436. z = x^2 + y$$

$$441. z = x^y$$

$$437. z = x^3 y - y^3 x$$

$$442. z = \ln(x + y^2)$$

$$438. z = xy + \frac{x}{y}$$

$$443. z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

$$439. z = x \sin(x+y)$$

$$444. u = xyz + \ln(x+y+z)$$

$$440. z = \frac{x-y}{x+y}$$

$$445. u = \sin(1+xyz)$$

446. Näidata, et funktsioonil

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x=0 \vee y=0 \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$

punktis $(0, 0)$ osatuletised on olemas, kuid ta on katkev selles punktis.

447. Näidata, et funktsioonil

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

punktis $(0, 0)$ osatuletised $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$ eksisteerivad, kuid ta on katkev selles punktis.

448. Näidata, et funktsioonil

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x = y = 0 \end{cases}$$

punktis $(0, 0)$ segatuletised f_{xy} ja f_{yx} eksisteerivad, kuid $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Olgu funktsiooni f teist järku osatuletised ja kolmandat järku segatuletised pidevad punktis P . Tõestada teoreemi T 3.1.2 abil, et punktis P kehtivad järgmised võrdused.

$$449. f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

$$450. f_{yyx} = f_{yxx} = f_{xyy}$$

Kui kasutada teoreemi T 3.1.2, siis milliste funktsiooni f osaja segatuletiste pidevust tuleb eeldada, et vaadeldavas punktis kehtiksid järgmised võrdused.

$$451. f_{xxyx} = f_{xxxy}$$

$$453. f_{xxyy} = f_{xyyx} = f_{yyxx} = f_{yxyx}$$

$$452. f_{yxxx} = f_{xyxx}$$

Leida järgmiste funktsioonide segatuletised z_{xy} .

$$454. z = x^x + y \sin x$$

$$456. z = y \cos y + e^{x+y}$$

$$455. z = x^{10} \cos x + y^2 \ln x$$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised.

$$457. u = x + x \ln(xy), \quad u_{xxy} = ?$$

$$458. u = e^{xy} + e^{xyz}, \quad u_{xyz} = ?$$

$$459. u = y^2 + x^3 \sin y + y^3 \sin x, \quad u_{xxxxyyy} = ?$$

Leida järgmiste liitfunktsioonide tuletised (vt. näide N 3.1.3).

$$460. z = e^{x-3y}, \quad x = \sin t, \quad y = \frac{1}{3} \cos t$$

$$461. z = \ln(1 - xy), \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

$$462. u = xyz, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = 2t$$

$$463. z = t^2 + x^2 + y^2, \quad x = t^2, \quad y = \sqrt{t}$$

$$464. z = \tan(t + x^2 - y), \quad x = t^2, \quad y = t^5$$

$$465. z = \arctan(xy), \quad y = e^x$$

$$466. u = e^x(y - z), \quad y = \sin x, \quad z = \cos x$$

$$467. u = u(x, y, z), \quad x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t + 1$$

$$468. z = f(x, y) x^2 \ln y, \quad x = 1 - t^2, \quad y = e^{\sin t}$$

Leida järgmiste liitfunktsioonide osatuletised (vt. näide N 3.1.4).

$$469. z = u^2 v, \quad u = x \cos y, \quad v = x \sin y$$

$$470. z = u \ln v, \quad u = 1/(x+y), \quad v = e^{x+y}$$

$$471. z = ue^v, \quad u = x^2, \quad v = x \ln y$$

$$472. z = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}, \quad u = x \sin y, \quad v = x \cos y$$

$$473. w = u^v, \quad u = x^2 + z^2, \quad v = yz$$

$$474. w = xy e^{uv}, \quad u = 1/(xyz), \quad v = \ln(xy)$$

Leida järgmiste liitfunktsioonide osatuletised, kui funktsioonil f on olemas pidevad osatuletised.

$$475. z = f(x - xy, e^{x-xy})$$

$$477. w = f(x/y, y/z)$$

$$476. z = x f(xy + y/x)$$

$$478. w = e^z f(x^2, y \ln z)$$

§ 3.2. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI TÄISDIFERENTSIAAL

Olgu

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \quad (5)$$

funktsiooni f muut punktide $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$ ja $P = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \dots)$ vahel.

D 3.2.1. Funktsiooni f nimetatakse diferentseeruvaks punktiks P_0 , kui tema muut (5) punkti P_0 ümbruses avaldub kujul

$$\Delta f = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + \dots + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \dots, \quad (6)$$

kus $\alpha, \beta, \dots \rightarrow 0$, kui $\Delta x, \Delta y, \dots \rightarrow 0$. Seejuures avaldist

$$df(P_0) = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + \dots \quad (7)$$

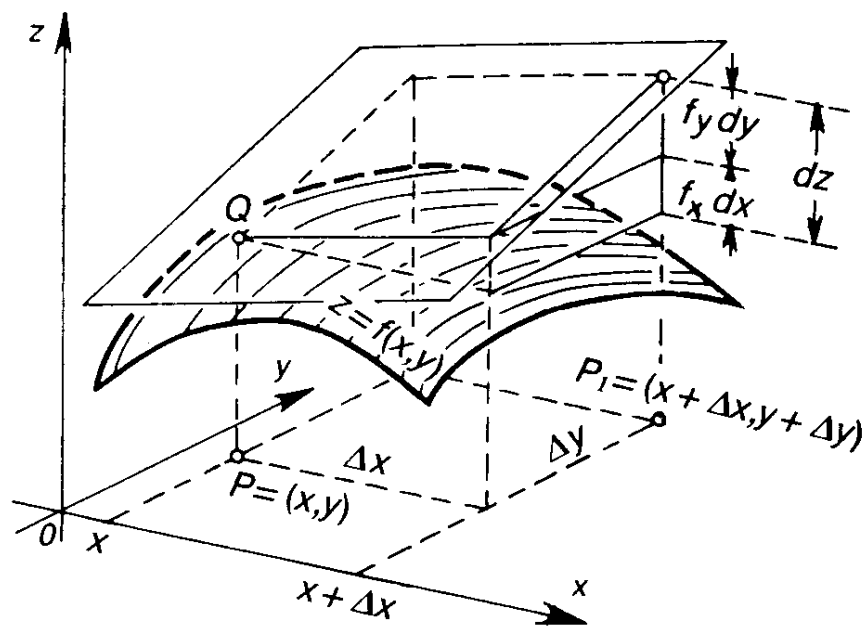
nimetatakse funktsiooni f (esimest järku ehk esimeseks) täisdiferentsiaaliks punktis P_0 .

Tähistades $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, ..., võime funktsiooni f täisdiferentsiaali (7) punktis $P = (x, y, \dots)$ esitada kujul

$$df = f_x dx + f_y dy + \dots \quad (8)$$

Avaldises (8) liidetavaid $f_x dx$, $f_y dy$, ... nimetatakse funktsiooni f osadiferentsiaalideks punktis P vastavalt muutujate x, y, \dots järgi ning suurusi dx, dy, \dots vastavalt argumentide x, y, \dots diferentsiaalideks.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal $dz = f_x dx + f_y dy$ tähendab geomeetriselt funktsiooni f graafiku puutujatasandi aplikaadi muutu üleminekul punktist $P = (x, y)$ punkti $P_1 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ (joon. 3.1).



Joon. 3.1

Diferentseeruva funktsiooni f muudu (5) võib esitada ka kujul

$$\Delta f = df + o(\rho), \quad (9)$$

kus

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \dots}$$

Funktsiooni f diferentseeruvuseks mingis punktis on tarvilik lõplike osatuletiste f_x, f_y, \dots olemasolu selles punktis, kuid see tingimus ei ole piisav (vt. ülesanded 510 ja 511, võrdle T 3.2.1 (MAP I)). Piisava tingimuse diferentseeruvuseks annab järgmine teoreem.

T 3.2.1. *Kui funktsioonil f on olemas pidevad osatuletised f_x, f_y, \dots punktis P , siis funktsioon f on diferentseeruv selles punktis P .*

Liitfunktsioon on diferentseeruv, kui tema koostisosad on diferentseeruvad.

Aritmeetiliste tehete seotud diferentseerimise reeglid on samasugused nagu ühe muutuja funktsioonide korral. Kui u ja v on diferentseeruvad mitme muutuja funktsioonid, siis

$$1) d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$2) d(uv) = v du + u dv,$$

$$3) d \frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

kust erijuhul saame

$$4) d(cv) = c dv \quad (c = \text{const}),$$

$$5) d \frac{1}{v} = - \frac{dv}{v^2}.$$

Eelmise paragrahvi teoreem T 3.1.3 kehtib ka juhul, kui funktsioon u on vaid diferentseeruv. Samuti kehtib teoreem T 3.1.4, kui funktsioon w on vaid diferentseeruv. Ka teoreem segatuletisest T 3.1.2 kehtib, kui osatuletised f_x ja f_y on vaid diferentseeruvad vaadeldavas punktis.

T 3.2.2. *Punktis P diferentseeruv funktsioon on pidev selles punktis P .*

Teoreemidest T 3.2.1 ja T 3.2.2 järeldub järgmine teoreem.

T 3.2.3. *Kui funktsioonil f on olemas pidevad osatuletised punktis P , siis on ta pidev selles punktis P .*

Viimases teoreemis T 3.2.3 osatuletiste pidevuse eeldust ära jätta ei saa (vt. ülesanded 446 ja 447).

Kui argumendi muudud dx, dy, \dots on fikseeritud, siis täisdiferentsiaal (8) on muutujate x, y, \dots funktsioon.

Kui funktsioon df on diferentseeruv punktis P , siis tema täisdiferentsiaali

$$d^2f = d(df) \quad (10)$$

nimetatakse funktsiooni f teist järku ehk teiseks täisdiferentsiaaliks punktis P .

Üldiselt funktsiooni f n -ndat järku ehk n -daks täisdiferentsiaaliks nimetatakse täisdiferentsiaali

$$d^n f = d(d^{n-1} f). \quad (11)$$

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ korral n -dat järku täisdiferentsiaal avaldub valemiga

$$d^n z = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k, \quad (12)$$

mida analoogia tõttu binoomvalemiga kirjutatakse sümboolselt kujul

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (13)$$

Valemist (12) või (13) erijuhtudel $n=1, 2, 3$ saame funktsiooni $z = f(x, y)$ jaoks järgmised valemid:

$$dz = z_x dx + z_y dy \quad (14)$$

$$d^2 z = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2 \quad (15)$$

$$d^3 z = z_{xxx} dx^3 + 3z_{xxy} dx^2 dy + 3z_{xyy} dx dy^2 + z_{yyy} dy^3. \quad (16)$$

Üldiselt mitme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, \dots)$ n -järku täisdiferentsiaali leidmiseks kasutatakse sümboolse valemi (13) üldistust

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \dots \right)^n u. \quad (17)$$

Näiteks valemist (17) saame kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ jaoks, et

$$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (18)$$

$$d^2 u = u_{xx} dx^2 + u_{yy} dy^2 + u_{zz} dz^2 + 2u_{xy} dx dy + 2u_{xz} dx dz + 2u_{yz} dy dz. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} d^3 u = & u_{xxx} dx^3 + u_{yyy} dy^3 + u_{zzz} dz^3 + 3u_{xxy} dx^2 dy + 3u_{xyy} dx dy^2 + \\ & + 3u_{xxz} dx^2 dz + 3u_{xzz} dx dz^2 + 3u_{yyz} dy^2 dz + 3u_{yzz} dy dz^2 + \\ & + 6u_{xyz} dx dy dz. \end{aligned} \quad (20)$$

Kui funktsiooni f argumendid x, y, \dots osutuvad mingite muutujate s, t, \dots funktsioonideks, siis see ei mõjуста funktsiooni f täisdiferentsiaali df kuju. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

T 3.2.4. (Täisdiferentsiaali kuju invarianttsuse lause). *Funktsiooni f täisdiferentsiaali df kuju säilib, kui funktsiooni f argumendid x, y, \dots osutuvad mingite muutujate s, t, \dots funktsioonideks, s. t. valem (8) on õige, kui dx, dy, \dots on argumentide x, y, \dots diferentsiaalid, ja on õige ka siis, kui nad on funktsioonide $x = x(s, t, \dots), y = y(s, t, \dots), \dots$ täisdiferentsiaalid.*

Teist ja veel kõrgemat järku täisdiferentsiaalide korral teoreem T 3.2.4 üldiselt enam ei kehti. Kuid juhul kui argumendid x, y, \dots

osutuvad muutujate s, t, \dots suhtes lineaarseteks funktsioonideks, s.o. kui

$$\begin{cases} x = as + bt + \dots + h \\ y = a_1s + b_1t + \dots + h_1 \\ \dots \end{cases} \quad (a, a_1, \dots = \text{const})$$

siis iga järku täisdiferentsiaali kuju säilib.

Täisdiferentsiaali kuju invarianttsust saab kasutada täisdiferentsiaali ja osatuletiste leidmisel. Näiteks kui funktsiooni F saab vaadelda liitfunktsioonina

$$F(x, y, \dots) = f(u, v, \dots), \quad (21)$$

kus

$$u = u(x, y, \dots), \quad v = v(x, y, \dots), \dots, \quad (22)$$

siis täisdiferentsiaali dF leidmiseks võime kõigepealt leida ta kujul

$$dF = f_u du + f_v dv + \dots, \quad (23)$$

ja seejärel leida täisdiferentsiaalid du, dv, \dots avaldistest (22). Võttes tulemuse kokku kujule

$$dF = a dx + b dy + \dots,$$

siis olemegi saanud funktsiooni F täisdiferentsiaali dF ja tema osatuletised $F_x = a, F_y = b, \dots$ (vt. näide 3.2.4).

Erijuhul, kui funktsiooni $F(x, y, \dots)$ saab vaadelda liitfunktsioonina

$$F(x, y, \dots) = f(u), \quad u = u(x, y, \dots), \quad (24)$$

kus on vaid üks vahepealne muutuja u , siis

$$dF = f'_u du. \quad (25)$$

Kui seejuures funktsioon $u = u(x, y, \dots)$ on lineaarne, s.o. $u = ax + by + \dots + h$, siis ka $n > 1$ korral on

$$d^n F = f_u^{(n)} du^n, \quad (26)$$

kus sümboliga $f_u^{(n)}$ on märgitud n -järku tuletis funktsioonist $f(u)$ muutuja u järgi.

Näited

N 3.2.1. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + \cos y$$

täisdiferentsiaal dz .

L a h e n d u s. Et vaadeldav funktsioon on kahe muutuja funktsioon, siis tuleb kasutada valemit (14), mille põhjal

$$dz = 2x dx - \sin y dy.$$

N 3.2.2. Leida funktsiooni

$$z = xe^y$$

teine täisdiferentsiaal d^2z .

L a h e n d u s. Vaadeldav funktsioon on kahe muutuja funktsioon, seepärast

tuleb kasutada valemit (15). Arvutame kõigepealt valemis olevad osatuletised, saame

$$z_x = e^y, \quad z_y = xe^y \\ z_{xx} = 0, \quad z_{yy} = xe^y, \quad z_{xy} = e^y.$$

Valemi (15) põhjal

$$d^2z = 2e^y dx dy + xe^y dy^2.$$

N 3.2.3. Leida funktsiooni

$$z = e^{x+3y+1}$$

kümnendat järku täisdiferentsiaal $d^{10}z$.

L a h e n d u s. Antud funktsiooni saab vaadelda liitfunktsioonina

$$z = e^u, \quad u = x + 3y + 1,$$

mis on kujuga (24), kusjuures funktsioon u on lineaarne. Järelikult otsitava täisdiferentsiaali leidmiseks võime kasutada valemit (26). Kõigepealt arvutame valemi (26) jaoks vajalikud suurused:

$$f_u^{(10)} = e^u = e^{x+3y+1}, \quad du = dx + 3dy.$$

Ja nüüd valemi (26) põhjal

$$d^{10}z = e^{x+3y+1} (dx + 3dy)^{10}.$$

N 3.2.4. Leida funktsiooni

$$z = ue^v, \quad u = 2x + 1, \quad v = 4x + 1$$

täisdiferentsiaal dz .

L a h e n d u s. Antud funktsioon on liitfunktsioon kujus (21), seepärast kasutame valemit (23), mille põhjal saame

$$dz = z_u du + z_v dv = e^v du + ue^v dv = \\ = e^{4x+1} 2dx + (2x+1)e^{4x+1} 4dx = 2e^{4x+1} (1 + 2(2x+1)) dx.$$

N 3.2.5. Leida funktsiooni

$$z = ue^v, \quad u = 2x + y, \quad v = x + 3y$$

täisdiferentsiaal dz .

L a h e n d u s. Antud funktsioon on liitfunktsioon kujul (21), (22); seepärast kasutame valemit (23), mille põhjal saame

$$dz = z_u du + z_v dv = e^v du + ue^v dv = \\ = e^{x+3y} (2dx + dy) + (2x+y)e^{x+3y} (dx + 3dy) = \\ = e^{x+3y} (2 + 2x + y) dx + e^{x+3y} (1 + 6x + 3y) dy.$$

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid (vt. näide N 3.2.1).

479. $z = x + 3y$

480. $z = 2x^2 - 4xy$

481. $z = xy$

482. $z = x/y$

483. $z = e^{1+xy}$

484. $z = -\cos(xy)$

485. $z = y^x$

486. $u = \tan(x - 2y + 3z)$

487. $u = \cos(x^2yz)$

488. $u = \exp(2x^2yz^2)$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud täisdiferentsiaalid (vt. näide N 3.2.2).

489. $z = x^3y^2, \quad d^2z = ?$

490. $z = x + xy, \quad d^2z = ?$

491. $z = x^2 + y^2, \quad d^2z = ?$

492. $z = x \sin^2 y, \quad d^2z = ?$

493. $z = 1 + x^3 + y^3, \quad d^3z = ?$

494. $z = x^4 + xy^2, \quad d^3z = ?$

495. $u = xy + yz^2$, $d^2u = ?$

496. $u = xy \sin z$, $d^2u = ?$

497. $u = xyz$, $d^3u = ?$

498. $u = x^3yz^2$, $d^3u = ?$

Leida järgmiste funktsioonide märgitud täisdiferentsiaalid (vt. näide N 3.2.3).

499. $z = (x + y + 1)^5$, $d^4z = ?$

500. $z = \ln(x + 2y - 3)$, $d^6z = ?$

501. $w = \cos(2x + 3y - 5z)$, $d^6w = ?$

502. $w = (2x + y - 3z^2)^3$, $d^9w = ?$

Leida järgmiste funktsioonide esimest järku täisdiferentsiaalid (vt. näited N 3.2.4 ja N 3.2.5).

503. $z = uv$, $u = e^{2x} + 1$, $v = 1 - x$

504. $z = u \sin v$, $u = \cos x$, $v = 2x + 1$

505. $z = u^2 \arctan v$, $u = x^2 + 1$, $v = x^3$

506. $z = u \ln v$, $u = 2x + 1$, $v = y + 1$

507. $z = u^2 + v^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$

508. $z = uvw$, $u = x + y$, $v = e^{2x - y}$, $w = x$

509. $z = (x + y)(2x - y)y$

510. Näidata, et punktis $(0, 0)$ funktsioon

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

on pidev ja omab osatuletisi $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$, kuid ei ole diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$.

511. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y / (x^2 + y^2), & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev ja ta osatuletised f_x ja f_y on lõplikud, kuid punktis $(0, 0)$ funktsioon ei ole diferentseeruv.

512. Näidata, et punkti $(0, 0)$ ümbruses funktsioonil

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(x^2 + y^2)^{-1/2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on olemas osatuletised f_x ja f_y , mis katkevad punktis $(0, 0)$, kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$.

513. Näidata, et punkti $(0, 0)$ ümbruses funktsiooni

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)^{-1}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

osatuletised f_x ja f_y eksisteerivad ja on tõkestamata (seega punkt $(0, 0)$ on nende katkevuspunkt), kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$.

§ 3.3. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL- ARVUTUSE RAKENDUSI

Olgu funktsioon f punkti $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$ ümbruses $n+1$ korda diferentseeruv, siis selle ümbruse punktis $P = (x, y, \dots)$, kus $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y, \dots$ kehtib järgmine Taylori valem

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2f(P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0) + \alpha_n. \quad (27)$$

Valemis liiget α_n nimetatakse Taylori valemi jääkliikmeks, mis Lagrange'i järgi avaldub kujul

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(Q), \quad (28)$$

kus Q on teatav punkt sirglõigul P_0P , s. o. punkt $Q = (x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, \dots)$, kus $0 < \theta < 1$.

Kui $x_0 = y_0 = \dots = 0$, s. o. punkt $P_0 = (0, 0, \dots)$ on koordinaatide alguspunkt, siis valemis (27) ja (28) on $\Delta x = x$, $\Delta y = y, \dots$

Jääkliige (28) täidab tingimust

$$\alpha_n = o(\rho^n), \quad \text{kus } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \dots},$$

s. o. α_n on ρ suhtes kõrgemat kui n järku lõpmata väike suurus. Seega, kui $|\Delta x|, |\Delta y|, \dots$ on küllalt väikesed, siis kehtib ligikaudne võrdus

$$f(P) \approx f(P_0) + df(P_0) + \dots + d^n f(P_0) n!. \quad (29)$$

Erijuhul, kui $n=1$, saame valemist (29) valemi

$$f(P) \approx f(P_0) + df(P_0), \quad (30)$$

mis kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ korral omandab kuju

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y. \quad (31)$$

Valemist (30) saame järgmise ligikaudse valemi funktsiooni muudu $\Delta f = f(P) - f(P_0)$ arvutamiseks:

$$\Delta f \approx df(P_0). \quad (32)$$

Vaatleme pinda

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (33)$$

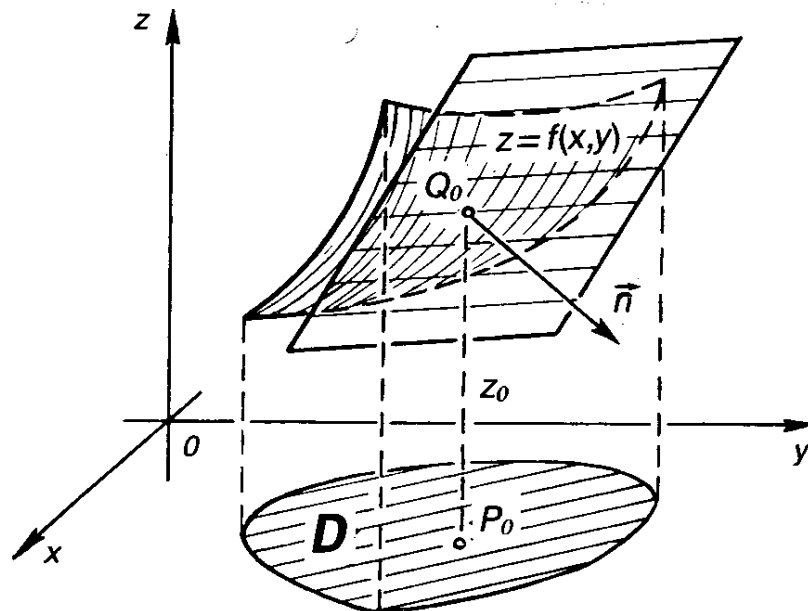
Punktide $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ vastav punkt pinnal olgu $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (joon. 3.2).

T 3.3.1. Pinnal (33) on olemas punktis Q_0 z -teljega mitteparalleelne puutujatasand parajasti siis, kui funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0 . Sel korral puutujatasand punktis Q_0 on esitatav võrrandiga

$$f_x(P_0)x + f_y(P_0)y - z - D = 0, \quad (34)$$

kus

$$D = f_x(P_0)x_0 + f_y(P_0)y_0 - z_0.$$



Joon. 3.2

D 3.3.1. Punktis Q_0 puutujatasandiga (34) ristiolevat vektorit (samuti ka sirget) nimetatakse pinna normaaliks punktis Q_0 . Pinna (33) normaaliks punktis Q_0 on vektor

$$\vec{n} = (f_x(P_0), f_y(P_0), -1). \quad (35)$$

Vaatleme funktsiooni

$$u = f(x, y, \dots), \quad (x, y, \dots) \in E \quad (36)$$

lahtises piirkonnas E .

D 3.3.2. Funktsiooni (36) nimetatakse α -astme homogeenseks funktsiooniks, kui ta rahuldab tingimust

$$f(tx, ty, \dots) = t^\alpha f(x, y, \dots)$$

iga punkti $(x, y, \dots) \in E$ korral $t=1$ ümbruses.

T 3.3.2. (Euleri teoreem homogeensest funktsioonist). Diferentseeruv funktsioon f on α -astme homogeenne funktsioon parajasti siis, kui ta rahuldab Euleri tingimust

$$f_x x + f_y y + \dots = \alpha f(x, y, \dots) \quad (37)$$

piirkonna E igas punktis.

Näited

N 3.3.1. Leida Taylorig valem funktsioonile

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

punktis $P_0 = (0, 0)$, kui $n=3$.

Lahendus. Taylorig valemis (27) võtame $n=3$, $P_0 = (0, 0)$ ja $P = (x, y)$, siis saame Taylorig valemi antud juhuks sobival kujul:

$$f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2} d^2 f(0, 0) + \frac{1}{6} d^3 f(0, 0) + \alpha_3.$$

Leiame valemis olevad suurused. Vahetult saame $f(0, 0) = 0$. Leiame esimest järku osatuletised

$$f_x(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2), \quad f_y(x, y) = 2y \cos(x^2 + y^2).$$

Valemi (14) järgi on siis

$$df(0, 0) = f_x(0, 0) dx + f_y(0, 0) dy = 0.$$

Leiame teist järku osatuletised

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -4x^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2) \\ f_{yy} &= -4y^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2) \\ f_{xy} &= -4xy \sin(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Valemi (15) järgi on siis

$$d^2f(0, 0) = f_{xx}(0, 0) dx^2 + 2f_{xy}(0, 0) dx dy + f_{yy}(0, 0) dy^2 = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Teist järku osatuletiste avaldistest on juba ette näha, et kõik kolmandat järku osatuletised punktis $(0, 0)$ tulevad võrdsed nulliga. Seega $d^3f(0, 0) = 0$.

Paigutades leitud suurused Tayloriga valemisse, saame

$$f(x, y) = dx^2 + dy^2 + \alpha_3.$$

Et punkt P_0 on koordinaatide alguspunkt, siis $\Delta x = x$, $\Delta y = y$ ja me saame viimase võrduse kirjutada ka kujul

$$\sin(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + \alpha_3.$$

N 3.3.2. Valemi (31) põhjal arvutada ligikaudu $1,04^{1,97}$.

L a h e n d u s. Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y) = x^y$$

ja olgu $P = (1,04; 1,97)$, siis tuleb meil arvutada funktsiooni väärtus $f(P)$.

Valemi (31) kasutamiseks valime $P_0 = (1, 2)$, siis $\Delta x = 0,04$ ja $\Delta y = -0,03$. Et $f_x = yx^{y-1}$ ja $f_y = x^y \ln x$, siis $f_x(1, 2) = 2$ ja $f_y(1, 2) = 0$. Valemi (31) põhjal

$$f(P) \approx f(1, 2) + f_x(1, 2) \Delta x + f_y(1, 2) \Delta y = 1 + 2 \cdot 0,04 + 0(-0,03) = 1,08.$$

Seega $1,04^{1,97} \approx 1,08$.

N 3.3.3. Leida puutujatasand ja normaal pinnale

$$z = xy + |x + y|$$

punktides $Q_0 = (0, 0, 0)$ ja $Q_1 = (1, 1, 3)$.

L a h e n d u s. Leiame puutujatasandi punktis $Q_0 = (0, 0, 0)$. Selleks arvutame kõigepealt funktsiooni osatuletised vastavas punktis $P_0 = (0, 0)$. Võttes $y = 0$, saame $z = |x|$, kust näeme, et osatuleti $z_x(0, 0)$ ei eksisteeri. Samuti ei eksisteeri ka osatuleti $z_y(0, 0)$. Seega punktis $Q_0 = (0, 0, 0)$ vaadeldaval pinnal puutujatasandit ei ole teoreemi T 3.3.1 põhjal.

Leiame puutujatasandi punktis $Q_1 = (1, 1, 3)$. Selleks võtame $x, y > 0$, sest punkt Q_1 asetseb xy -tasandi selles veerandis, siis

$$z = xy + x + y,$$

kust $z_x = y + 1$ ja $z_y = x + 1$. Arvutame valemi (34) jaoks vajalikud suurused $z_x(1, 1) = 2$, $z_y(1, 1) = 2$ ja $D = 1$. Valemi (34) põhjal puutujatasandi võrrand punktis $Q_1 = (1, 1, 3)$ on

$$2x + 2y - z - 1 = 0$$

ja valemi (35) põhjal normaaliks selles punktis on vektor $\vec{n} = (2, 2, -1)$.

N 3.3.4. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$$

on teise astme homogeenne funktsioon.

L a h e n d u s. Kontrollime Euleri tingimust (37), saame

$$f_{xx}x + f_{yy}y = (2x - 3y)x + (-3x + 8y)y = 2x^2 - 6xy + 8y^2 = 2f(x, y).$$

Seega Euleri tingimus (37) on täidetud $\alpha = 2$ korral. Vaadeldav funktsioon on teise astme homogeenne funktsioon teoreemi T 3.3.2 põhjal.

Ülesanded

Leida Taylori valem (27) punktis $P_0 = (0, 0)$, kui $n = 3$ (vt. näide N 3.3.1).

514. $f(x, y) = e^x \sin y$

517. $z = e^x \ln(1 + y)$

515. $f(x, y) = e^y \cos x$

518. $z = x \cos^2 y$

516. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$

519. $z = y \sin^2 x$

Leida Taylori valem (27) punktis $P_0 = (1, 1)$, kui $n = 3$.

520. $f(x, y) = x/y$

522. $f(x, y) = \ln(xy)$

521. $f(x, y) = e^{xy}$

523. $f(x, y) = \frac{\sin \pi x}{y}$

Valemi (31) põhjal arvutada ligikaudu (vt. näide N 3.3.2).

524. $1,03^{2,04}$

526. $\sqrt[3]{3,97} \cdot 2,03^2$

525. $\sqrt[4]{2,03 \cdot 1,98}$

527. $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$

Leida puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele määratud punktis Q_0 (vt. näide N 3.3.3).

528. $z = \frac{x^2}{2} - y^2, Q_0 = (2, -1, 1)$

529. $z = x^2 + y^2, Q_0 = (1, 2, 5)$

530. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, Q_0 = (0, 0, 0)$

531. $z = \arctan \frac{y}{x}, Q_0 = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

532. $z = |xy|, Q_0 = (0, 0, 0)$

533. $z = 1 - |x + y|, Q_0 = (0, 0, 0)$

Näidata, et järgmised funktsioonid on homogeensed ja leida homogeensuse aste α (vt. näide N 3.3.4).

534. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \frac{x}{y}$

535. $f(x, y) = 3xy^2 + \sqrt{x^6 - y^6}$

536. $f(x, y) = a = \text{const}$

537. $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$

538. $f(x, y, z) = x^5 \cos \frac{y^2 + z^2}{x^2}$

539. $f(x, y, z) = x^2y - 2y^2z + xyz$

§ 3.4. ILMUTAMATA FUNKTSIOONIDE OLEMASOLU JA DIFERENTSEERIMINE

Olgu kahe muutuja funktsioon $F(x, y)$ antud ristkülikus $D = X \times Y$, kus $X = (a, b)$ ja $Y = (c, d)$ on vahemikud. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y) = 0. \quad (38)$$

D 3.4.1. (vt. D 1.9.5 (MAP I)). Öeldakse, et funktsioon $y = y(x)$ on piirkonnas X antud ilmutamata kujul võrrandiga (38), kui iga $x \in X$ korral on võrrandil (38) olemas lahend $y \in Y$.

Iga võrrand (38) ei määra funktsiooni $y = y(x)$ ilmutamata kujul, näiteks võrrand $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Järgmine teoreem annab piisava tingimuse ilmutamata funktsiooni olemasoluks, tema ühesuseks, pidevuseks ja diferentseeruvuseks.

T 3.4.1. Kui võrrandis (38)

1° funktsioon F on pidev ja tal on olemas pidev osatuletis F_y punkti $P_0 = (x_0, y_0)$ mingis ümbruses,

2° $F(P_0) = 0$,

3° $F_y(P_0) \neq 0$,

siis võrrand (38) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses ühese pideva funktsiooni $y = y(x)$, kusjuures $y_0 = y(x_0)$.

Kui lisaks punkti P_0 ümbruses on olemas ka pidev osatuletis F_x , siis funktsioonil $y = y(x)$ on punkti x_0 teatavas ümbruses olemas pidev tuletis

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (39)$$

Ilmutamata funktsiooni $y = y(x)$ tuletise leidmiseks kasutatakse valemit (39) või järgmist võtet, mis on eelistatav, eriti kui on tarvis leida ka kõrgemat järku tuletisi.

M 3.4.1. Tuletise y' leidmiseks olgu teoreemi T 3.4.1 eeldused täidetud vaadeldavas piirkonnas. Diferentseerime võrrandi (38) mõlemat poolt muutuja x järgi, lugedes, et $y = y(x)$, s. t. on muutuja x funktsioon. Sisuliselt tähendab see nulliga võrduva liitfunktsiooni $F(u, v) = 0$, kus $u = x$, $v = y(x)$ diferentseerimist muutuja x järgi. Siis saame teoreemi T 3.1.3 valemi (3) põhjal

$$F_x + F_y y' = 0, \quad (40)$$

kust $F_y \neq 0$ tõttu saame avaldada tuletise y' kujul (39).

Teise tuletise y'' leidmiseks diferentseerime saadud võrdust (40) analoogiliselt muutuja x järgi, lugedes $y = y(x)$ ja $y' = y'(x)$, siis

$$F_{xx} + F_{xy} y' + F_{yx} y' + F_{yy} y'^2 + F_y y'' = 0, \quad (41)$$

kust $F_y \neq 0$ tõttu saame avaldada teise tuletise y'' . Veel kõrgemad tuletised leitakse analoogiliselt, lähtudes võrdusest (41).

Kahe muutuja ilmutamata funktsiooni defineerimiseks vaatleme võrrandit

$$F(x, y, z) = 0, \quad (42)$$

kus funktsioon $F(x, y, z)$ on määratud risttahukas $E = X \times Y \times Z$, kus $X = (a, b)$, $Y = (c, d)$ ja $Z = (e, f)$ on vahemikud.

D 3.4.2. Öeldakse, et funktsioon $z = z(x, y)$ on piirkonnas $D = X \times Y$ antud ilmutamata kujul võrrandiga (42), kui iga punkti $(x, y) \in D$ korral on võrrandil (42) olemas lahend $z \in Z$.

T 3.4.2. Kui võrrandis (42)

1° funktsioon F on pidev ja tal on olemas pidev osatuletis F_z punkti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mingis ümbruses,

$$2^\circ F(P_0) = 0,$$

$$3^\circ F_z(P_0) \neq 0,$$

siis võrrand (42) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses ühese pideva funktsiooni $z = z(x, y)$, kusjuures $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Kui lisaks punkti P_0 ümbruses on olemas ka pidevad osatuletised F_x ja F_y , siis funktsioonil $z = z(x, y)$ on punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}. \quad (43)$$

Ilmutamata funktsiooni $z = z(x, y)$ osatuletiste leidmiseks kasutatakse valemeid (43) või järgmist võtetle M 3.4.1 sarnast võtet, mis ka siin on eelistatav.

M 3.4.2. Osatuletiste z_x ja z_y leidmiseks olgu teoreemi T 3.4.2 eeldused täidetud vaadeldavas piirkonnas. Võtame osatuletised x ja y järgi võrrandi (42) mõlemalt poolt, lugedes, et $z = z(x, y)$. Sisuliselt vastab see toiming sellele, et me võtame osatuletised x ja y järgi nulliga võrduvast liitfunktsioonist $F(u, v, w) = 0$, kus $u = x$, $v = y$ ja $w = z(u, v)$. Siis saame teoreemi T 3.1.4 valemi (4) põhjal, et

$$F_x + F_z z_x = 0, \quad F_y + F_z z_y = 0, \quad (44)$$

kust $F_z \neq 0$ tõttu saame avaldada osatuletised z_x ja z_y kujul (43).

Teist ja veel kõrgemat järku osatuletiste saamiseks toimime analoogiliselt, leides osatuletised võrdustest (44).

Võrrandisüsteemide abil saab korraka määrata mitu ilmutamata funktsiooni. Olgu antud vahemikud $X = (a, b)$, $Y = (c, d)$ ja $Z = (e, f)$. Vaatleme kahest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (45)$$

kus funktsioonid $F = F(x, y, z)$ ja $G = G(x, y, z)$ on määratud risttahukas $E = X \times Y \times Z$.

D 3.4.3. Öeldakse, et funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on piirkonnas X antud ilmutamata kujul süsteemiga (45), kui iga $x \in X$ korral on süsteemil (45) olemas lahend $(y, z) \in Y \times Z$.

Analoogiliselt saab võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

määrata ilmutamata kujul kaks kahe muutuja funktsiooni

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Süsteemiga (45) ja (46) määratud ilmutamata funktsioonide olemasolu tingimuste leidmiseks tuleb vaadelda funktsioonide F ja G osatuletistest moodustatud teist järku determinante

$$J(x, y, z) = \frac{D(F, G)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \quad (47)$$

ja

$$J(x, y, u, v) = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Determinante (47) ja (48) nimetatakse vastavalt süsteemide (45) ja (46) funktsionaaldeterminantideks ehk jakobiaanideks.

T 3.4.3. Kui süsteemis (45)

1° funktsioonid F ja G on pidevad ja neil on olemas pidevad osatuletised y ja z järgi punkti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mingis ümbruses,

2° $F(P_0) = 0, \quad G(P_0) = 0,$

3° $J(P_0) \neq 0$, kus J on jakobiaan (47),

siis süsteem (45) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, kusjuures $y_0 = y(x_0)$ ja $z_0 = z(x_0)$.

Kui lisaks punkti P_0 ümbruses on olemas pidevad osatuletised F_x ja G_x , siis funktsioonidel $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on punkti x_0 teatavas ümbruses olemas pidevad tuletised

$$y' = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}, \quad z' = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}, \quad (49)$$

kus J on jakobiaan (47).

Tuletiste y' ja z' leidmiseks kasutatakse valemeid (49), kuid eelistatav on järgmine meetod.

M 3.4.3. Tuletiste y' ja z' leidmiseks olgu teoreemi T 3.4.3 eeldused täidetud vaadeldavas piirkonnas. Diferentseerime x järgi süsteemi (45) mõlemat võrrandit, lugedes $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, siis saame

$$\begin{cases} F_x + F_y y' + F_z z' = 0 \\ G_x + G_y y' + G_z z' = 0, \end{cases} \quad (50)$$

kust avaldame tuletised y' ja z' . Süsteem (50) on lahenduv punkti $P_0 = (x_0, y_0)$ ümbruses, sest süsteemi determinant $J(P_0) \neq 0$, mis osatuletiste pidevuse tõttu on täidetud ka punkti P_0 teatavas ümbruses.

Veel kõrgemat järku tuletised leiame analoogiliselt, lähtudes süsteemist (50).

T 3.4.4. Kui süsteemis (46)

1° funktsioonid F ja G on pidevad ja neil on olemas pidevad osatuletised u ja v järgi punkti $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ mingis ümbruses,

$$2^\circ F(P_0) = 0, \quad G(P_0) = 0,$$

$$3^\circ J(P_0) \neq 0, \text{ kus } J \text{ on jakobiaan (48),}$$

siis süsteem (46) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$, kusjuures

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0).$$

Kui lisaks punkti P_0 ümbruses on olemas pidevad osatuletised F_x ja F_y ning G_x ja G_y , siis funktsioonidel $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ on punkti P_0 teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised u_x, u_y, v_x ja v_y .

Osatuletised u_x, u_y, v_x ja v_y leitakse analoogiliselt meetodile M 3.4.3.

Teoreemi T 3.4.4 sageli esinevad erijuhud on antud ülesandeis 572 ja 573.

Üldiselt vaadeldakse n võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} F(x, y, \dots, u, v, \dots) = 0 \\ G(x, y, \dots, u, v, \dots) = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (51)$$

kus muutujaid x, y, \dots on m tükki ja muutujaid u, v, \dots on n tükki.

Süsteemi (51) jakobiaaniks nimetatakse n -järku determinanti

$$J = \frac{D(F, G, \dots)}{D(u, v, \dots)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v & \dots \\ G_u & G_v & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Järgmine teoreem annab piisavad tingimused selleks, et süsteem (51) määraks ilmutamata kujul n pidevat funktsiooni

$$\begin{cases} u = u(x, y, \dots) \\ v = v(x, y, \dots) \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (53)$$

T 3.4.5. Kui süsteemis (51)

1° funktsioonid F, G, \dots on pidevad ja neil on olemas pidevad osatuletised muutujate u, v, \dots järgi punkti $P_0 = (x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots)$ mingis ümbruses,

$$2^\circ F(P_0) = 0, \quad G(P_0) = 0, \quad \dots,$$

$$3^\circ J(P_0) \neq 0, \text{ kus } J \text{ on jakobiaan (52),}$$

siis süsteem (51) määrab punkti P_0 teatavas ümbruses n pidevat ühest funktsiooni (53), kusjuures

$$\begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0, \dots) \\ v_0 = v(x_0, y_0, \dots) \\ \dots \end{cases}$$

Kui lisaks punkti P_0 ümbruses on funktsioonidel F, G, \dots olemas pidevad osatuletised muutujate x, y, \dots järgi, siis funktsioonidel (53) on punkti P_0 teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised.

Funktsioonide (53) osatuletised leitakse meetodile M 3.4.3 analoogilisega.

Jakobiaanide abil saab lahendada järgmist funktsioonide sõltumatusprobleemi.

Olgu funktsioonid

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, \dots) \\ v = v(x, y, z, \dots) \\ w = w(x, y, z, \dots) \\ \dots \end{cases} \quad (54)$$

diferentseeruvad lahtises piirkonnas D .

D 3.4.4. Öeldakse, et funktsioon u süsteemist (54) on piirkonnas D sõltuv süsteemi (54) ülejäänud funktsioonidest v, w, \dots , kui leidub selline diferentseeruv funktsioon F , et kehtib võrdus

$$u = F(v, w, \dots)$$

piirkonna D igas punktis.

Analoogiliselt defineeritakse funktsioonide v, w, \dots sõltuvus ülejäänud funktsioonidest (54).

D 3.4.5. Öeldakse, et funktsioonid (54) on sõltuvad piirkonnas D , kui vähemalt üks nendest on sõltuv ülejäänutest. Vastasel juhul öeldakse, et funktsioonid (54) on sõltumatud piirkonnas D .

T 3.4.6. Olgu funktsioone (54) sama palju kui neil on muutujaid. Kui funktsioonid (54) on diferentseeruvad punkti $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$ mingis ümbruses ja punktis P_0 on

$$J = \frac{D(u, v, \dots)}{D(x, y, \dots)} \neq 0,$$

siis funktsioonid (54) on sõltumatud punkti P_0 teatavas ümbruses.

Olgu pind antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$F(x, y, z) = 0,$$

kus funktsiooni F osatuletised on pidevad. Pinna punktis $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, kus $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$, on pinnal olemas puutujatasand võrrandiga

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (55)$$

ja normaal

$$\vec{n} = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)).$$

Näited

N 3.4.1. Näidata, et võrrand

$$y + x \ln y = 3$$

määrab punkti $x=0$ ümbruses ühese pideva funktsiooni $y=y(x)$ ja et sel funktsioonil on olemas selle punkti ümbruses pidev tuletis. Leida see tuletis.

L a h e n d u s. Kasutame teoreemi T 3.4.1. Selleks tähistame

$$F(x, y) = y + x \ln y - 3.$$

Kui $x=0$, siis võrdus $F(0, y) = 0$ kehtib vaid juhul $y=3$. Seega tuleb kontrollida teoreemi T 3.4.1 tingimusi 1° – 3° punkti $P_0 = (0, 3)$ ümbruses.

Funktsioon F ja tema osatuletis $F_y = 1 + x/y$ on pidevad punkti P_0 ümbruses. Seega tingimus 1° on täidetud. Et $F(0, 3) = 0$ ja $F_y(0, 3) \neq 0$, siis ka tingimused 2° ja 3° on täidetud. Teoreemi T 3.4.1 põhjal võime järelikult öelda, et antud võrrand määrab punkti $P_0 = (0, 3)$ ehk punkti $x=0$ ümbruses ühese pideva funktsiooni $y=y(x)$, kusjuures $y(0) = 3$.

Et ka osatuletis $F_x = \ln y$ on pidev punkti P_0 ümbruses, siis teoreemi T 3.4.1 põhjal on sellel funktsioonil $y=y(x)$ olemas ka pidev tuletis y' punkti $x=0$ ümbruses, mis valemi (39) põhjal avaldub kujul

$$y' = -\frac{\ln y}{1 + x/y}.$$

Leiame vaadeldava tuletise veel teisiti meetodi M 3.4.1 abil. Selleks diferentseerime antud võrrandi mõlemat poolt muutuja x järgi, lugedes, et $y=y(x)$, saame

$$y' + \ln y + x \frac{1}{y} y' = 0,$$

kust

$$y' = -\frac{\ln y}{1 + x/y}.$$

Et antud ülesandes on võrrandist kerge avaldada muutujat x , siis tuletise leidmiseks saaks kasutada ka teoreemi T 3.1.4 (MAP I).

N 3.4.2. Kas võrrand

$$4x^2 - 3x^4 + y^2 - 2x^2y = 0$$

määrab punkti $P_0 = (0, 0)$ ümbruses ühese pideva funktsiooni $y=y(x)$?

L a h e n d u s. Kasutame teoreemi T 3.4.1. Selleks tähistame

$$F(x, y) = y^2 - 2x^2y + 4x^2 - 3x^4.$$

Funktsioon F ja tema osatuletis $F_y = 2y - 2x^2$ on pidevad punkti P_0 ümbruses. Seega teoreemi T 3.4.1 tingimus 1° on täidetud. Et $F(P_0) = 0$, siis ka tingimus 2° on täidetud. Kuid $F_y(P_0) = 0$ ja seega teoreemi T 3.4.1 tingimus 3° ei ole täidetud. Järelikult teoreem T 3.4.1 seatud küsimusele vastust ei anna.

Antud juhul saame võrrandist avaldada y , mis annab

$$y = x^2 \pm 2x \sqrt{x^2 - 1},$$

kust on näha, et funktsioon y ei ole määratud punkti $x=0$ ümbruses. Seega antud võrrand ei määra punkti $P_0 = (0, 0)$ ümbruses funktsiooni $y=y(x)$, järelikult ei saa tal olla seal ka tuletist. Kui lugeda, et imaginaarse ühiku i korral on $0i = 0$, siis funktsioon $y=y(x)$ on punktis $x=0$ määratud.

N 3.4.3. Leida võrrandiga

$$y + e^y = x$$

antud ilmutamata funktsiooni $y = y(x)$ tuletised y' ja y'' .

L a h e n d u s. Kasutame meetodit M 3.4.1. Tuletise y' leidmiseks diferentseerime antud võrrandi x järgi, lugedes, et $y = y(x)$, saame $y' + e^y y' = 1$ ehk

$$y'(1 + e^y) = 1.$$

Teise tuletise y'' leidmiseks diferentseerime saadud võrdust samal viisil veel kord x järgi, saame

$$y''(1 + e^y) + y'^2 e^y = 0.$$

Esimesest võrdusest avaldame tuletise

$$y' = 1/(1 + e^y)$$

ja teisest võrdusest tuletise

$$y'' = -y'^2 e^y / (1 + e^y) = -e^y / (1 + e^y)^3.$$

N 3.4.4. Leida võrrandiga

$$x^2 y + x y^2 + z = e^z$$

antud ilmutamata funktsiooni $z = z(x, y)$ osatuletised z_x ja z_y .

L a h e n d u s. Võib kasutada valmis valemeid (43), kuid eelistatav on meetod M 3.4.2. Selle meetodi kohaselt võtame antud võrrandi mõlemalt poolt osatuletise x järgi, lugedes, et $z = z(x, y)$, saame

$$2xy + y^2 + z_x = e^z z_x,$$

kust

$$z_x = \frac{2xy + y^2}{e^z - 1}.$$

Et x ja y paiknevad antud võrrandis sümmeetriliselt, siis vahetades kohtadega muutujad x ja y osatuletise z_x avaldises, saame

$$z_y = \frac{2xy + x^2}{e^z - 1}.$$

N 3.4.5. Leida võrrandiga

$$x^2 + z^2 = 2 - 2y$$

antud ilmutamata funktsiooni $z = z(x, y)$ osatuletised z_{xx} , z_{yy} ja z_{xy} .

L a h e n d u s. Kasutame meetodit M 3.4.2. Leiame osatuletise x järgi võrrandi mõlemalt poolt, lugedes $z = z(x, y)$, saame

$$x + z z_x = 0.$$

Leiame veel kord osatuletise x järgi viimase võrduse mõlemalt poolt, saame $1 + z_x^2 + z z_{xx} = 0$, kust

$$z_{xx} = -(1 + z_x^2) / z.$$

Et eelmine võrdus annab $z_x = -x/z$, siis lõplikult saame

$$z_{xx} = -(z^2 + x^2) / z^3.$$

Analoogiliselt leiame ka ülejäänud osatuletised $z_{yy} = -1/z^3$ ja $z_{xy} = -x/z^3$.

N 3.4.6. Näidata, et võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

määrab punkti $P_0 = (1, 0, -1)$ ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, millel on selle punkti ümbruses olemas pidevad tuletised. Leida need tuletised.

L a h e n d u s. Kontrollime teoreemi T 3.4.3 tingimuste 1°–3° täidetust. Funktsioonid $F=x+y+z$ ja $G=x^2+y^2+z^2-2$ ning nende osatuletised $F_y=1$, $F_z=1$, $G_y=2y$ ja $G_z=2z$ on pidevad punkti P_0 ümbruses. Seega tingimus 1° on täidetud. Et $F(P_0)=0$ ja $G(P_0)=0$ ning jakobiaan

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2(z-y)$$

punktis P_0 annab $J(P_0)=-2 \neq 0$, siis on täidetud ka ülejäänud tingimused 2° ja 3°. Seega teoreemi T 3.4.3 põhjal antud süsteem määrab punkti P_0 ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y=y(x)$ ja $z=z(x)$.

Et pidevad on ka osatuletised $F_x=1$ ja $F_y=1$ ning $G_x=2x$ ja $G_y=2y$, siis valemite (49) põhjal saame pidevad tuletised

$$y' = -\frac{z-x}{z-y}, \quad z' = -\frac{x-y}{z-y}.$$

Leiame tuletised veel teisiti meetodi M 3.4.3 põhjal. Selleks diferentseerime x järgi süsteemi võrrandeid, lugedes, et $y=y(x)$ ja $z=z(x)$, saame

$$1+y'+z'=0, \quad 2x+2yy'+2zz'=0,$$

kust saame avaldada y' ja z' samal kujul, mis eespool.

N 3.4.7. Näidata, et võrrandisüsteem

$$\begin{cases} u+v=y \\ u^2+v^2=x+y \end{cases}$$

määrab punkti $P_0=(2, 0, 1, -1)$ ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$, millel on selle punkti ümbruses olemas pidevad osatuletised. Leida need osatuletised.

L a h e n d u s. Kontrollime teoreemi T 3.4.4 tingimuste 1°–3° täidetust. Funktsioonid $F=u+v-y$ ja $G=u^2+v^2-x-y$ ning nende osatuletised $F_u=1$, $F_v=1$, $G_u=2u$ ja $G_v=2v$ on pidevad punkti P_0 ümbruses. Seega tingimus 1° on täidetud. Et $F(P_0)=0$ ja $G(P_0)=0$ ning jakobiaan

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2(v-u)$$

punktis P_0 annab $J(P_0)=-4 \neq 0$, siis on täidetud ka ülejäänud tingimused 2° ja 3°. Seega teoreemi T 3.4.4 põhjal antud süsteem määrab punkti P_0 ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$.

Et pidevad on ka osatuletised $F_x=0$ ja $F_y=-1$ ning $G_x=-1$ ja $G_y=-1$, siis funktsioonidel $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$ on teoreemi T 3.4.4 põhjal olemas pidevad osatuletised.

Osatuletiste leidmiseks diferentseerime antud süsteemi võrrandeid x ja y järgi, lugedes u ja v nende funktsioonideks, siis saame süsteemid

$$\begin{cases} u_x+v_x=0 \\ 2uu_x+2vv_x=1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_y+v_y=1 \\ 2uu_y+2vv_y=1. \end{cases}$$

Saadud süsteemidel on ühine determinant $J=2(v-u)$, mis oli eespool. Et $J(P_0)=-4$ on nullist erinev ja funktsioonide F ja G osatuletised on pidevad, siis punkti P_0 teatavas ümbruses on ka veel $J \neq 0$ ja seega punkti P_0 selles ümbruses on saadud süsteemid lahenduvad. Lahendades, saame

$$u_x = -\frac{1}{2(v-u)}, \quad v_x = \frac{1}{2(v-u)}, \quad u_y = -\frac{1-2v}{2(v-u)}, \quad v_y = \frac{1-2u}{2(v-u)}.$$

Ülesanded

Kas järgmised võrrandid määravad antud punkti P_0 ümbruses pideva ühese funktsiooni $y=y(x)$? Kas sel funktsioonil y on olemas pidev tuletis selle punkti P_0 ümbruses? Tuletise olemasolu korral leida see tuletis (vt. näited N 3.4.1 ja N 3.4.2).

540. $x^3+y^3-3xy=0$, $P_0=(3/2, 3/2)$

541. $xe^y+\ln(x+y+1)=0$, $P_0=(0, 0)$

542. $x^4-x^2-y^2+2y-1=0$, $P_0=(0, 1)$

543. $y^2x^{1/3}+\sin y=0$, $P_0=(0, 0)$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $y=y(x)$ tuletised y' ja y'' (vt. näide N 3.4.3).

544. $y+\sin y+e^x=0$

546. $y^2+2xy-2=0$

545. $x+y=e^{x-y}$

547. $1+\ln(x^2+y^2)=2\arctan\frac{y}{x}$

Kas järgmised võrrandid määravad antud punkti P_0 ümbruses pideva ühese funktsiooni $z=z(x, y)$? Kas sel funktsioonil on olemas pidevad osatuletised z_x ja z_y selle punkti P_0 ümbruses? Osatuletiste olemasolu korral leida need osatuletised.

548. $x^2+y^2+z^2+2xz=1$, $P_0=(1, 1, -1)$

549. $xz+y\sin z=0$, $P_0=(1, 0, 1)$

550. $z^2(x+y^2)^{1/3}+\arctan z=0$, $P_0=(-1, -1, 0)$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $z=z(x, y)$ osatuletised z_x ja z_y (vt. näide N 3.4.4).

551. $x+y+2z+\sin z=0$

553. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$

552. $1+xyz=e^{xyz}$

554. $z^2(x+z)=xy$

Leida järgmiste ilmutamata funktsioonide $z=z(x, y)$ teist järku osatuletised z_{xx} , z_{yy} ja z_{xy} (vt. näide N 3.4.5).

555. $x^2+y^2+z^2=2$

557. $e^{xyz}+xyz+1=0$

556. $x^2+y^2+z^2=2z$

558. Leida võrrandiga $z=x^2+2y^2+3z^2+xy-9$ antud ilmutamata funktsiooni $z=z(x, y)$ teine täisdiferentsiaal d^2z punktis $P_0=(1, -2, 1)$.

559. Leida võrrandiga $x-yz+e^z=0$ antud ilmutamata funktsiooni $z=z(x, y)$ teine täisdiferentsiaal d^2z punktis $P_0=(1, 2, 0)$.

560. Leida võrrandiga $e^x+e^y=e^z$ antud ilmutamata funktsiooni $z=z(x, y)$ kolmandat järku osatuletised.

561. Leida võrrandiga $u^2+2xy+z^2-2xyz+4=0$ antud ilmutamata funktsiooni $u=u(x, y, z)$ osatuletised u_x , u_y ja u_z .

Näidata, et järgmised süsteemid määravad antud punkti P_0 ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $y=y(x)$ ja $z=z(x)$, millel on olemas selle punkti P_0 ümbruses pidevad tuletised. Leida need tuletised (vt. näide N 3.4.6).

$$562. \begin{cases} 2x^2 - y - z = 0 \\ x^4 - yz - 1 = 0 \end{cases} \quad P_0 = (1, 0, 2)$$

$$563. \begin{cases} y + z = x^2 \\ e^y - e^z = x \end{cases} \quad P_0 = (0, 0, 0)$$

$$564. \begin{cases} yz = \sin x \\ y^2 - z^2 = 2 \cos x \end{cases} \quad P_0 = (\pi/2, 1, 1)$$

Leida järgmiste süsteemidega antud funktsioonide $y=y(x)$ ja $z=z(x)$ tuletised y' ja y'' ning z' ja z'' .

$$565. \begin{cases} y + z = x \\ y + z^3 = x^2 \end{cases}$$

$$566. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Näidata, et järgmised süsteemid määravad antud punkti P_0 ümbruses ühesed pidevad funktsioonid $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$, millel on olemas selle punkti P_0 ümbruses pidevad osatuletised. Leida need osatuletised (vt. näide N 3.4.7).

$$567. \begin{cases} u + v = y^2 \\ e^u - e^v = x - 1 \end{cases} \quad P_0 = (1, 0, 0, 0)$$

$$568. \begin{cases} uv = 1 \\ u/v = 2 \sin(x + y) \end{cases} \quad P_0 = (\pi/4, \pi/4, 1, 1)$$

569. Leida süsteemiga

$$\begin{cases} xu + yv = 4 \\ yu - v = 0 \end{cases}$$

määratud funktsioonide $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$ täisdiferentsiaalid du ja dv .

Leida järgmiste süsteemidega antud funktsioonide $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$ esimest ja teist järku osatuletised.

$$570. \begin{cases} u + v = xy \\ u^2 - v^2 = 0 \end{cases}$$

$$571. \begin{cases} xu + yv = 4 \\ yu - v = 0 \end{cases}$$

572. Näidata teoreemi T 3.4.4 põhjal, et kui
1° süsteemis

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

funktsioonid ja nende osatuletised on pidevad punkti (u_0, v_0) ümbruses,

2° $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$,

3° punktis (u_0, v_0) on jakobiaan

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

siis see süsteem määrab punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses pidevad ühesed funktsioonid

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

kusjuures $u_0 = u(x_0, y_0)$ ja $v_0 = v(x_0, y_0)$, ja et nendel funktsioonidel on punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised.

573. Näidata teoreemi T 3.4.4 põhjal, et kui 1° süsteemis

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

funktsioonid ja nende osatuletised on pidevad punkti (x_0, y_0) ümbruses,

2° $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$,

3° punktis (x_0, y_0) on jakobiaan

$$J = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

siis see süsteem määrab punkti (u_0, v_0) teatavas ümbruses pidevad ühesed funktsioonid

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

kusjuures $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, ja et nendel funktsioonidel on punkti (u_0, v_0) teatavas ümbruses olemas pidevad osatuletised.

Kas järgmised funktsioonid on sõltumatud piirkonnas $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$?

574. $u = x + y$, $v = y^2 + z^2$, $w = x^3 + z^3$

575. $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = xy + yz + zx$

Leida järgmiste pindade puutujatasandid ja normaaliid antud punktis P_0 .

576. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0 = (1, 1, 1)$

577. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$, $P_0 = (1, 2, 3)$

578. $xy - z + e^z = 3$, $P_0 = (2, 1, 0)$

579. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $P_0 = (-1, 1, 2)$

§ 3.5. PARAMEETRILISEL KUJUL ANTUD MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE DIFERENTSEERIMINE

Olgu kahe muutuja x ja y funktsioon z antud parameetrilisel kujul

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (56)$$

s. o. kujul, kus argumentide x ja y ning funktsiooni z väärtused määratakse võrranditega (56) kahe parameetri u ja v abil.

Funktsiooni (56) osatuletised z_x ja z_y leitakse järgmiste meetodite M 3.5.1 ja M 3.5.2 abil.

M 3.5.1. (Osatuletiste meetod). Olgu funktsioonidel (56) olemas pidevad osatuletised vaadeldavas piirkonnas ning selles piirkonnas olgu jakobiaan

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (57)$$

Siis otsitavad osatuletised z_x ja z_y avalduvad kujul

$$\begin{cases} z_x = z_u u_x + z_v v_x \\ z_y = z_u u_y + z_v v_y, \end{cases} \quad (58)$$

kus tundmatud osatuletised u_x ja v_x avaldatakse süsteemist

$$\begin{cases} 1 = x_u u_x + x_v v_x \\ 0 = y_u u_x + y_v v_x \end{cases} \quad (59)$$

ning osatuletised u_y ja v_y süsteemist

$$\begin{cases} 0 = x_u u_y + x_v v_y \\ 1 = y_u u_y + y_v v_y. \end{cases} \quad (60)$$

Süsteemid (59) ja (60) saame süsteemi (56) kahe esimese võrrandi diferentseerimisel vastavalt x ja y järgi. Süsteemid (59) ja (60) on alati lahenduvad, sest süsteemide determinandiks on nullist erinev jakobiaan (57) (vt. näide N 3.5.1).

Osatuletiste meetod põhineb asjaolul, et antud eeldustel süsteemi (56) kaks esimest võrrandit määravad teoreemi T 3.4.4 põhjal ilmutamata funktsioonid $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ (vt. ülesanne 572), mille tõttu muutujat z saab vaadelda liitfunktsioonina x ja y suhtes vahepealsete muutujate u ja v kaudu, s. o. $z = z(u, v)$, kus $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$. Võrdused (58) kujutavadki siis teoreemi T 3.1.4 põhjal selle liitfunktsiooni osatuletiste leidmise eeskirja.

M 3.5.2. (Diferentsiaalide meetod). Olgu (nagu meetodi M 3.5.1 korralgi) funktsioonidel (56) olemas pidevad osatuletised vaadeldavas piirkonnas ja kehtigu selles piirkonnas tingimus (57).

Osatuletiste z_x ja z_y saamiseks leiame funktsioonide (56) täisdiferentsiaalid

$$\begin{cases} dx = x_u du + x_v dv \\ dy = y_u du + y_v dv \\ dz = z_u du + z_v dv. \end{cases} \quad (61)$$

Tingimuse (57) tõttu saame kahest esimesest võrrandist avaldada du ja dv ning, paigutades need süsteemi (61) viimasesse võrrandisse, saame avaldada funktsiooni z täisdiferentsiaali dz

tema argumentide diferentsiaalide dx ja dy kaudu kujul $dz = a dx + b dy$, millega on leitud ka osatuletised $z_x = a$ ja $z_y = b$ parameetrilisel kujul (vt. näide N 3.5.2).

Funktsiooni (56) teist järku osatuletiste z_{xx} , z_{yy} ja z_{xy} leidmiseks leiame kõigepealt parameetrilisel kujul tema esimesed osatuletised

$$z_x = z_x(u, v), \quad z_y = z_y(u, v).$$

Seejärel koostame süsteemid

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z_x = z_x(u, v) \quad (62)$$

ja

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z_y = z_y(u, v). \quad (63)$$

Neid süsteeme (62) ja (63) vaatleme kui süsteeme, mis esitavad funktsioone z_x ja z_y parameetrilisel kujul. Leides nende funktsioonide z_x ja z_y osatuletised meetodi M 3.5.1 või M 3.5.2 abil, saamegi teist järku osatuletised z_{xx} , z_{yy} ja z_{xy} parameetrilisel kujul (vt. näide N 3.5.3).

Analoogiliselt leitakse funktsiooni z veel kõrgemat järku osatuletised (vt. näide N 3.5.4).

Peab silmas pidama, et konkreetsete ülesannete lahendamisel peale meetodite M 3.5.1 ja M 3.5.2 on mõnikord võimalik kasutada osatuletiste leidmiseks ka teatavaid spetsiifilisi võtteid (vt. näide N 3.5.1).

Näited

N 3.5.1. Leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 4uv$$

osatuletised z_x ja z_y osatuletiste meetodi M 3.5.1 abil.

Lahendus. Eeldused meetodi M 3.5.1 kasutamiseks on täidetud. Antud funktsioonide osatuletised on pidevad ja punktides, kus $uv \neq 0$, on $J = -8uv \neq 0$.

Moodustame süsteemi (58), saame

$$\begin{cases} z_x = 4vu_x + 4uv_x \\ z_y = 4vu_y + 4uv_y. \end{cases}$$

Selles süsteemis olevate osatuletiste u_x ja v_x ning u_y ja v_y leidmiseks moodustame süsteemid (59) ja (60), saame

$$\begin{cases} 1 = 2uu_x + 2vv_x \\ 0 = 2uu_x - 2vv_x \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 2uu_y + 2vv_y \\ 1 = 2uu_y - 2vv_y, \end{cases}$$

millest

$$u_x = \frac{1}{4u}, \quad v_x = \frac{1}{4v}, \quad u_y = \frac{1}{4u}, \quad v_y = -\frac{1}{4v}.$$

Paigutades leitud osatuletised esimesse süsteemi, saame vastuseks

$$\begin{aligned} z_x &= 4v \frac{1}{4u} + 4u \frac{1}{4v} = \frac{v}{u} + \frac{u}{v} \\ z_y &= 4v \frac{1}{4u} - 4u \frac{1}{4v} = \frac{v}{u} - \frac{u}{v}. \end{aligned}$$

Sellega on vajalikud osatuletised leitud parameetrilisel kujul. Arvestades lähtevõrrandeid, võime need osatuletised esitada ka kujul

$$z_x = 4x/z, \quad z_y = -4y/z.$$

Antud ülesande korral on võimalik osatuletisi u_x , u_y , v_x ja v_y ka järgmise erivõttega saada. Liites esimese ja teise võrrandi, saame $x+y=2u^2$. Diferentseerides viimast võrdust x järgi, saame $1=4uu_x$, kust $u_x=1/(4u)$. Analoogilisel viisil võib leida ka ülejäänud märgitud osatuletised.

N 3.5.2. Leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 4uv$$

osatuletised z_x ja z_y diferentsiaalide meetodi M 3.5.2 abil.

L a h e n d u s. Eelmise näite N 3.5.1 järgi on eeldused meetodi M 3.5.2 kasutamiseks täidetud punktides, kus $uv \neq 0$.

Moodustame süsteemi (61), saame

$$\begin{cases} dx = 2u du + 2v dv \\ dy = 2u du - 2v dv \\ dz = 4v du + 4u dv. \end{cases}$$

Süsteemi kahest esimesest võrrandist avaldame

$$du = \frac{dx + dy}{4u}, \quad dv = \frac{dx - dy}{4v}.$$

Paigutades need diferentsiaalid süsteemi kolmandasse võrrandisse, saame

$$dz = \frac{v^2 + u^2}{uv} dx + \frac{v^2 - u^2}{uv} dy,$$

kus dx ja dy kordajad ongi otsitud osatuletised

$$z_x = \frac{v^2 + u^2}{uv} = \frac{4x}{z}, \quad z_y = \frac{v^2 - u^2}{uv} = -\frac{4y}{z}.$$

N 3.5.3. Leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 4uv$$

teist järku osatuletised z_{xx} , z_{yy} ja z_{xy} .

L a h e n d u s. Selle funktsiooni esimest järku osatuletised parameetrilisel kujul näite N 3.5.1 järgi on

$$z_x = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}, \quad z_y = \frac{v}{u} - \frac{u}{v}.$$

Koostame süsteemi

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z_x = \frac{v}{u} + \frac{u}{v}.$$

Vaatleme seda süsteemi kui süsteemi, mis määrab funktsiooni z_x parameetrilisel kujul ja leiame tema osatuletised z_{xx} ja z_{xy} näiteks diferentsiaalide meetodi M 3.5.2 abil, saame

$$\begin{cases} dx = 2u du + 2v dv \\ dy = 2u du - 2v dv \\ dz_x = \left(\frac{1}{v} - \frac{v}{u^2} \right) du + \left(-\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u} \right) dv. \end{cases}$$

Süsteemi kahest esimesest võrrandist avaldame

$$du = \frac{1}{4u} (dx + dy), \quad dv = \frac{1}{4v} (dx - dy)$$

ja paigutame need süsteemi kolmandasse võrrandisse, saame

$$dz_x = -\frac{(u^2 - v^2)^2}{4u^3v^3} dx + \frac{u^4 - v^4}{4u^3v^3} dy,$$

kust

$$z_{xx} = -\frac{(u^2 - v^2)^2}{4u^3v^3} = -\frac{16y^2}{z^3}, \quad z_{xy} = \frac{u^4 - v^4}{4u^3v^3} = \frac{16xy}{z^3}.$$

Osatuletise z_{yy} saamiseks toimime analoogiliselt. Koostame süsteemi

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z_y = \frac{v}{u} - \frac{u}{v}$$

ja leiame näiteks diferentsiaalide meetodi M 3.5.2 abil selle kui parameetrilisel kujul antud funktsiooni z_y osatuletise z_{yy} , saame

$$z_{yy} = -\frac{(u^2 + v^2)^2}{4u^3v^3} = -\frac{16x^2}{z^3}.$$

N 3.5.4. Leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 4uv$$

osatuletis z_{xyx} .

Lahendus. Vaatleme näites N 3.5.3 leitud selle funktsiooni osatuletist z_{xy} kui järgmist parameetrilisel kujul antud funktsiooni

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z_{xy} = \frac{u^4 - v^4}{4u^3v^3} = \frac{u}{4v^3} - \frac{v}{4u^3}.$$

Leiame meetodi M 3.5.1 või M 3.5.2 abil selle funktsiooni z_{xy} osatuletise z_{xyx} , saame

$$\begin{aligned} z_{xyx} &= \frac{u^4v^2 + 3v^6 - 3u^6 - u^2v^4}{16u^5v^5} = \frac{(u^2 - v^2)(4u^2v^2 - 3(u^2 + v^2)^2)}{16u^5v^5} \\ &= \frac{16y(z^2 - 12x^2)}{z^5}. \end{aligned}$$

Ülesanded

Leida järgmiste parameetrilisel kujul antud funktsioonide osatuletised z_x ja z_y osatuletiste meetodi M 3.5.1 abil (vt. näide N 3.5.1).

580. $x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv$

581. $x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = u^2v^2$

582. $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = 8v$

583. $x = \sin u + \cos v, \quad y = \cos u - \sin v, \quad z = \sin(u - v)$

Leida järgmiste parameetrilisel kujul antud funktsioonide osatuletised z_x ja z_y diferentsiaalide meetodi M 3.5.2 abil (vt. näide N 3.5.2).

584. $x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 2uv$

$$585. x = \cos u \cos v, y = \cos u \sin v, z = \sin u$$

$$586. x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = 4u^3v^3$$

$$587. x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2$$

$$588. x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$$

Leida järgmiste parameetrilisel kujul antud funktsioonide teist järku osatuletised z_{xx} , z_{yy} ja z_{xy} (vt. näide N 3.5.3).

$$589. x = u \cos v, y = u \sin v, z = 8v$$

$$590. x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2$$

$$591. x = (u^2 + v^2)/4, y = (u^2 - v^2)/4, z = uv$$

Leida järgmiste parameetrilisel kujul antud funktsioonide märgitud osatuletised (vt. näide N 3.5.4).

$$592. x = u \cos v, y = u \sin v, z = 8v; z_{yxx} = ?$$

$$593. x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2; z_{yxy} = ?$$

$$594. x = (u^2 + v^2)/4, y = (u^2 - v^2)/4, z = uv; z_{yxx} = ?$$

Leida järgmiste pindade puutujatasand ja normaal antud punktis P_0 .

$$595. x = u \cos v, y = u \sin v, z = (2 - u^2)^{1/2}, P_0 = (-1, 0, 1)$$

$$596. x = u + v, y = u - v, z = 4uv, P_0 = (3, 1, 8)$$

$$597. x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3, P_0 = (2, 2, 2).$$

IV. MUUTUJATE VAHETUS DIFERENTSIAAL- AVALDISTES JA EKSTREEMUMID

§ 4.1. MUUTUJATE VAHETUS TULETISTEGA AVALDISTES

Vaatame muutujate vahetust avaldises

$$W = F(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots), \quad (1)$$

mis sisaldab sõltumatut muutujat x , funktsiooni $y = y(x)$ ja tema tuletisi y'_x, y''_{xx}, \dots .

4.1.1. Sõltumatu muutuja asendamine. Olgu asendus antud ilmutatud kujul

$$x = x(t), \quad (2)$$

kus t on uus sõltumatu muutuja.

Asendus (2) muudab funktsiooni y muutuja t funktsiooniks ja avaldises (1) tuleb tuletised y'_x, y''_{xx}, \dots avaldada uute tuletiste y'_t, y''_{tt}, \dots kaudu. Selleks saame kasutada parameetrilisel kujul antud ühe muutuja funktsiooni diferentseerimise eeskirja (vt. MAP I, § 3.5), sest muutuja vahetuse (2) tõttu on meil sisuliselt funktsioon y antud parameetrilisel kujul $x = x(t), y = y(t)$. Saame

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (3)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x \stackrel{(3)}{=} \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \stackrel{(3)}{=} \frac{(y'_t/x'_t)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt}}{x'^2_t} - \frac{y'_t x''_{tt}}{x'^3_t} \quad (4)$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x \stackrel{(3)}{=} \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \stackrel{(4)}{=} \dots \quad (5)$$

Avaldistes (3), (4), (5) asendame veel tuletised x'_t, x''_{tt}, \dots , lei-des need asendusest (2). Sellega on tuletised y'_x, y''_{xx}, \dots avaldatud uute tuletiste y'_t, y''_{tt}, \dots kaudu.

Asendades nüüd avaldises (1) suurused x, y'_x, y''_{xx}, \dots nende uute avaldistega, saame

$$W = F_1(t, y, y'_t, y''_{tt}, \dots),$$

millega oleme sõltumatu muutuja asendanud uuega (vt. näide N 4.1.1).

Kui asendus (2) on antud ilmutamata kujul

$$G(t, x) = 0, \quad (6)$$

siis tuletised x'_t, x''_{tt}, \dots võime leida ilmutamata funktsiooni diferentseerimise eeskirja M 3.4.1 põhjal (vt. näide N 4.1.2).

Kui asendus (2) on antud kujul $t = t(x)$, siis seda asendust võime ka vaadelda kui asendust ilmutamata kujul (6) või kasutada tuletiste x'_t, x''_{tt}, \dots saamiseks pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja (vt. MAP I, T 3.1.4).

4.1.2. Muutujate osade vahetus. Selleks, et avaldises (1) vahetada muutujate x ja y osad, s. o. võtta y sõltumatuks muutujaks ja x tema funktsiooniks, kasutatakse valemeid

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad y''_{xx} = -\frac{x''_{yy}}{x'^3_y}, \quad y'''_{xxx} = -\frac{x'''_{yyy}}{x'^4_y} + \frac{3x''^2_{yy}}{x'^5_y}, \dots \quad (7)$$

Valemite (7) saamiseks tuleb vaadeldav juhtum taandada juhtumile 4.1.1, võttes asenduseks (2) funktsiooni $y = y(x)$ pöördfunktsiooni $x = x(y)$, kus y on uus sõltumatu muutuja; siis valemities (3), (4), (5) on $t = y, y'_t = y'_y = 1, y''_{tt} = y''_{yy} = 0, \dots$, mille tõttu need valemid omandavad kuju (7).

Asendades avaldises (1) tuletised y'_x, y''_{xx}, \dots nende uute avaldistega (7), saame

$$W = F_2(y, x, x'_y, x''_{yy}, \dots),$$

kus y on juba sõltumatu muutuja, $x = x(y)$ on funktsioon ja x'_y, x''_{yy}, \dots on tema tuletised (vt. näide N 4.1.3).

4.1.3. Mõlema muutuja vahetus. Olgu asendus antud kujul

$$x = x(t, u), \quad y = y(t, u), \quad (8)$$

kus t on uus sõltumatu muutuja ja $u = u(t)$ on uus funktsioon.

Vaadeldaval juhul, kasutades asendust (8), avaldame tuletised y'_x, y''_{xx}, \dots uute tuletiste u'_t, u''_{tt}, \dots kaudu valemi (3) abil analoogiliselt nagu juhul 4.1.1, saame

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \stackrel{(8)}{=} \frac{y'_t + y_u u'_t}{x'_t + x_u u'_t} \quad (9)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x \stackrel{(9)}{=} \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dots \quad (10)$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x \stackrel{(9)}{=} \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \dots \quad (11)$$

Valemi (9) kasutamisel on oluline tähele panna, et y_t ja y_u ning x_t ja x_u on osatuletised, mis leitakse asendusest (8). Valemis (9) võib tuletised y'_t ja x'_t leida ka ilmutamata funktsiooni diferentseerimise eeskirja põhjal võrrandite (8) diferentseerimise teel t järgi, lugedes, et $u = u(t)$, s. t. u on t funktsioon.

Valemis (10) tuletise $(y'_x)'_t$ leidmisel kasutame juba saadud valmis avaldist y'_x jaoks. Valemis (11) analoogiliselt kasutame juba saadud valmis avaldist y''_{xx} jaoks, jne.

Asendades avaldises (1) suurused $x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots$ nende uute avaldistega, saame

$$W = F_3(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots)$$

(vt. näide N 4.1.4).

Kui asendus (8) on antud ilmutamata kujul

$$G(t, u, x, y) = 0, \quad H(t, u, x, y) = 0, \quad (12)$$

siis suurused x ja y ning nende osatuletised muutujate t ja u järgi valemite (9), (10), (11) leiame asendusest (12) ilmutamata funktsiooni diferentseerimise eeskirja järgi (vt. teoreem T 3.4.4 ja meetod M 3.4.3).

4.1.4. Funktsiooni vahetus. Olgu asendus antud kujul

$$y = y(x, u), \quad (13)$$

kus $u = u(x)$ on uus funktsioon.

Vaadeldaval juhtul tuletiste y'_x, y''_{xx}, \dots avaldamiseks uute tuletiste u'_x, u''_{xx}, \dots kaudu diferentseerime asendust (13) muutuja x järgi, võttes $u = u(x)$, s. t. u on muutuja x funktsioon, saame

$$y'_x = y_x + y_u u'_x \quad (14)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x \stackrel{(14)}{=} \dots \quad (15)$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x \stackrel{(15)}{=} \dots \quad (16)$$

Paneme tähele, et y_x ja y_u valemis (14) on osatuletised. Valemis (15) kasutame juba saadud valmis avaldist y'_x jaoks. Valemis (16) analoogiliselt kasutame juba saadud valmis avaldist y''_{xx} jaoks, jne.

Asendust (12) võib vaadelda ka kui järgmist erijuhtu asendusest (8): $x = x, y = y(x, u)$. Seepärast võime valemite (14), (15),

(16) saamiseks kasutada valemeid (9), (10), (11), võttes $t=x$, siis $x'_x=1$, $x_u=0$, ... ja me saame sama tulemuse.

Asendades avaldises (1) suurused y , y'_x , y''_{xx} , ... nende uute avaldistega, saame

$$W = F_4(x, u, u'_x, u''_{xx}, \dots)$$

(vt. näide N 4.1.5).

Näited

N 4.1.1. Asendada avaldises

$$W = (1 - x^2)y''_{xx} - xy'_x + y$$

muutuja x uue muutujaga t asenduse $x = \sin t$ abil.

Lahendus. Tegemist on juhtumiga 4.1.1. Tuletised y'_x ja y''_{xx} tuleb avaldada uute tuletiste y'_t ja y''_{tt} kaudu valemite (3) ja (4) põhjal. Selleks leiame kõigepealt antud asendusest tuletised $x'_t = \cos t$ ja $x''_{tt} = -\sin t$. Nüüd valemite (3) ja (4) põhjal saame

$$y'_x = \frac{y'_t}{\cos t}, \quad y''_{xx} = \frac{y''_{tt}}{\cos^2 t} - \frac{y'_t(-\sin t)}{\cos^3 t}.$$

Asendades avaldises W suurused x , y'_x ja y''_{xx} nende uute avaldistega, saame vastuseks

$$W = (1 - \sin^2 t) \left[\frac{y''_{tt}}{\cos^2 t} - \frac{y'_t(-\sin t)}{\cos^3 t} \right] - \sin t \frac{y'_t}{\cos t} + y = y''_{tt} + y.$$

N 4.1.2. Vahetada avaldises

$$W = \frac{x^4}{(1 - \ln x)^2} y''_{xx} + \frac{x^3(3 - 2 \ln x)}{(1 - \ln x)^3} y'_x + 1$$

muutuja x uue muutujaga t asenduse $\ln x = xt$ abil.

Lahendus. Tegemist on juhtumiga 4.1.1, kus asendus on antud ilmutamata kujul (6). Valemite (3) ja (4) kasutamiseks leiame kõigepealt tuletised x'_t ja x''_{tt} antud asendusest $\ln x = xt$ ilmutamata funktsiooni diferentseerimise eeskirja põhjal. Selleks diferentseerime asendust kaks korda muutuja t järgi, saame

$$x'_t/x = x'_t t + x, \quad (xx''_{tt} - x'^2_t)/x^2 = x''_{tt} + 2x'_t,$$

kust

$$x'_t = x^2/(1 - tx), \quad x''_{tt} = x^3(3 - 2tx)/(1 - tx)^3.$$

Valemite (3) ja (4) põhjal saame nüüd

$$y'_x = (1 - tx)y'_t/x^2, \quad y''_{xx} = (1 - tx)^2 y''_{tt}/x^4 - (3 - 2tx)y'_t/x^3.$$

Asendades avaldises W tuletised y'_x ja y''_{xx} nende uute avaldistega, saame vastuseks $W = y''_{tt} + 1$.

N 4.1.3. Vahetada võrrandis

$$y''_{xx} - (x - e^v)y'^3_x = 0$$

muutujate osad, võttes y sõltumatuks muutujaks ja x tema funktsiooniks.

Lahendus. Tegemist on juhtumiga 4.1.2. Seega antud võrrandis tuleb tuletised y'_x ja y''_{xx} asendada avaldistega (7), saame

$$-\frac{x''_{yy}}{x'^3_y} - (x - e^y) \frac{1}{x'^3_y} = 0$$

ehk

$$x''_{yy} + x = e^y.$$

N 4.1.4. Vahetada avaldises

$$W = (1+x^2)^2 y''_{xx} - y$$

sõltumatu muutuja x uue sõltumatu muutujaga t ja funktsioon y uue funktsiooniga u asenduse $x = \tan t$, $y = u/\cos t$ abil.

Lahendus. Tegemist on juhtumiga 4.1.3. Seepärast kasutame valemeid (9) ja (10), mis annavad

$$y'_x = u \sin t + u'_t \cos t$$

$$y''_{xx} = \frac{(u \cos t + u''_{tt} \cos t - u'_t \sin t) + \sin t u'_t}{\cos^{-2} t} = (u + u''_{tt}) \cos^3 t.$$

Asendades avaldises W suurused x , y ja y''_{xx} nende uute avaldistega, saame vastuseks $W = u''_{tt} / \cos t$.

N 4.1.5. Vahetada võrrandis $y'' - 2y' + y = 0$ funktsioon $y = y(x)$ uue funktsiooniga $u = u(x)$ asenduse $y = ue^x$ abil.

Lahendus. Tegemist on juhtumiga 4.1.4. Seepärast kasutame valemeid (14) ja (15), mille põhjal

$$y'_x = e^x (u + u'_x)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = [e^x (u + u'_x)]'_x = e^x (u''_{xx} + 2u'_x + u).$$

Asendades võrrandis suurused y , y' ja y'' nende uute avaldistega, saame vastuseks $u''_{xx} = 0$.

Ülesanded

Vahetada järgmistes võrrandites sõltumatu muutuja x uue sõltumatu muutujaga t antud asenduste abil (vt. näited N 4.1.1 ja N 4.1.2).

598. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, $x = \cos t$

599. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x = e^t$

600. $x^2y'' + 2xy' + x^{-2}y = 0$, $x = 1/t$

601. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$, $x = \tan t$

602. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$, $x = e^t$

603. $xy'' - y' + xy = 0$, $x^2 = 4t$

604. $x^2y'' + 2xy' = 2$, $2tx = \sin(tx)$

605. $x^4(1 - \ln x)y'' + x^3(3 - 2 \ln x)y' = 0$, $tx = \ln x$

606. $y''' - 3y'' + 2y' + e^{3x}y = 0$, $x = \ln t$

Vahetada järgmistes võrrandites muutujate osad, võttes y sõltumatuks muutujaks ja x tema funktsiooniks (vt. näide N 4.1.3).

607. $y' - 1/(xy) = 0$

608. $y'' + 2y'^2 = 0$
 609. $xy'' + y'^3 = y'$
 610. $y'y''' - 3y''^2 = 0$
 611. $y'y''' - 3y''^2 = x$

Vahetada järgmistes avaldistes sõltumatu muutuja x uue sõltumatu muutujaga t ja funktsioon y uue funktsiooniga u antud asenduste abil (vt. näide N 4.1.4).

612. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0, x = u+t, y = u-t$
 613. $(1+x^2)^2 y'' = y; x = \tan t, y = u/\cos t$
 614. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0; tx = 1, ty = u$
 615. $y' = (x+y)/(x-y), x = u \cos t, y = u \sin t$
 616. $(1-x^2)y'' + y = 0; x = \operatorname{th} t, y = u/\operatorname{ch} t$
 617. $y'' = \frac{y}{(x-1)^2(x-2)^2}; t = \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|, u = \frac{y}{x-2}$

Vahetada järgmistes avaldistes funktsioon y uue funktsiooniga u antud asenduste abil (vt. näide N 4.1.5).

618. $y'' - 2y' \cot x + 2y \cot^2 x = 0, y = u \sin x$
 619. $y'' + 2xy' + (x^2+1)y = 0, y = u \exp(-x^2)$
 620. $yy'' - y'^2 + y^2 = 0, y = e^{u+x}$
 621. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, y = ue^x$
 622. Teisendada polaarkoordinaatidesse $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ avaldis

$$W = \frac{x + yy'}{xy' - y}$$

623. Teisendada võrrandisüsteem

$$x' = y + x(x^2 + y^2), \quad y' = -x + y(x^2 + y^2),$$

kus $x = x(t), y = y(t)$, polaarkoordinaatidesse $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

624. Teisendada tasandilise joone $y = y(x)$ kõveruse avaldis

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

polaarkoordinaatidesse $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

§ 4.2. MUUTUJATE VAHETUS OSATULETISTEGA AVALDISTES

Vaatame muutujate vahetust avaldises

$$W = F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots), \quad (17)$$

mis sisaldab sõltumatuid muutujaid x, y, \dots , funktsiooni $u = u(x, y, \dots)$ ja tema osatuletisi $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots$.

4.2.1. Sõltumatute muutujate vahetus. Olgu asendus antud kujul

$$\begin{cases} x=x(s, t, \dots) \\ y=y(s, t, \dots) \\ \dots \end{cases} \quad (18)$$

kus s, t, \dots on uued sõltumatud muutujad.

Asendus (18) muudab funktsiooni u muutujate s, t, \dots funktsiooniks ja avaldises (17) tuleb osatuletised $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots$ avaldada uute osatuletiste $u_s, u_t, \dots, u_{ss}, u_{st}, \dots$ kaudu. Selleks avaldame kõigepealt uued osatuletised vanade kaudu, kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja (vt. teoreemi T 3.1.4), saame

$$\begin{cases} u_s = u_x x_s + u_y y_s + \dots \\ u_t = u_x x_t + u_y y_t + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (19)$$

kus osatuletised s, t, \dots järgi, s.o. osatuletised $x_s, x_t, y_s, y_t, \dots$, leiame süsteemist (18). Seejärel lahendame süsteemi (19) vanade osatuletiste suhtes. Saame

$$\begin{cases} u_x = A u_s + B u_t + \dots \\ u_y = C u_s + D u_t + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (20)$$

kus kordajad A, B, \dots sisaldavad funktsioonide (18) osatuletisi.

Teist järku vanade osatuletiste avaldamiseks uute osatuletiste kaudu kasutame valemeid (20). Võttes seal funktsiooni u asemele funktsioonid u_x, u_y, \dots , saame

$$\begin{cases} u_{xx} = (u_x)_x \stackrel{(20)}{=} A (u_x)_s + B (u_x)_t + \dots \\ u_{xy} = (u_x)_y \stackrel{(20)}{=} C (u_x)_s + D (u_x)_t + \dots \\ u_{yy} = (u_y)_y \stackrel{(20)}{=} C (u_y)_s + D (u_y)_t + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (21)$$

kus osatuletiste leidmisel s, t, \dots järgi kasutame juba saadud valmis avaldise (20) osatuletiste u_x, u_y, \dots jaoks.

Analoogiliselt avaldame veel kõrgemat järku vanad osatuletised uute osatuletiste kaudu:

$$\begin{cases} u_{xxx} = (u_{xx})_x \stackrel{(20)}{=} A (u_{xx})_s + B (u_{xx})_t + \dots \\ u_{xxy} = (u_{xx})_y \stackrel{(20)}{=} C (u_{xx})_s + D (u_{xx})_t + \dots \\ u_{xyx} = (u_{xy})_x \stackrel{(20)}{=} A (u_{xy})_s + B (u_{xy})_t + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (22)$$

kus osatuletiste leidmisel s, t, \dots järgi kasutame juba saadud valmis avaldise (21) osatuletiste u_{xx}, u_{xy}, \dots jaoks.

Asendades nüüd avaldises (17) muutujad x, y, \dots ja osatuletised nende uute avaldistega, saame

$$W = F_1(s, t, \dots, u, u_s, u_t, \dots, u_{ss}, u_{st}, \dots),$$

millega sõltumatud muutujad on uutega asendatud (vt. näide N 4.2.1).

Kui asendus on antud kujul

$$\begin{cases} s = s(x, y, \dots) \\ t = t(x, y, \dots) \\ \dots \end{cases} \quad (23)$$

siis vaatleme funktsiooni $u = u(x, y, \dots)$ kui liitfunktsiooni muutujate x, y, \dots suhtes vahepealsete muutujate s, t, \dots kaudu, mistõttu kohe saame asendamiseks vanad osatuletised, avaldatuna uute osatuletiste kaudu (vt. teoreem T 3.1.4):

$$\begin{cases} u_x = u_s s_x + u_t t_x + \dots \\ u_y = u_s s_y + u_t t_y + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (24)$$

kus osatuletised $s_x, s_y, t_x, t_y, \dots$ leiame süsteemist (23).

Teist järku vanad osatuletised avaldame samal viisil nagu ülalpool, asendades valemites (24) funktsiooni u juba saadud valmis avaldistega u_x, u_y, \dots , jaoks, saame

$$\begin{cases} u_{xx} = (u_x)_x \stackrel{(24)}{=} (u_x)_s s_x + (u_x)_t t_x + \dots \\ u_{xy} = (u_x)_y \stackrel{(24)}{=} (u_x)_s s_y + (u_x)_t t_y + \dots \\ u_{yy} = (u_y)_y \stackrel{(24)}{=} (u_y)_s s_y + (u_y)_t t_y + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (25)$$

kus osatuletised $s_x, s_y, t_x, t_y, \dots$ leiame süsteemist (23) (vt. näide N 4.2.2).

Analoogiliselt avaldame veel kõrgemad osatuletised:

$$\begin{cases} u_{xxx} = (u_{xx})_x \stackrel{(24)}{=} (u_{xx})_s s_x + (u_{xx})_t t_x + \dots \\ u_{xxy} = (u_{xx})_y \stackrel{(24)}{=} (u_{xx})_s s_y + (u_{xx})_t t_y + \dots \\ u_{xyx} = (u_{xy})_x \stackrel{(24)}{=} (u_{xy})_s s_x + (u_{xy})_t t_x + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (26)$$

Kui asendus (18) või (23) on antud ilmutamata kujul

$$\begin{cases} G(s, t, \dots, x, y, \dots) = 0 \\ H(s, t, \dots, x, y, \dots) = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (27)$$

siis osatuletised $x_s, x_t, y_s, y_t, \dots$ valemities (19) või osatuletised $s_x, s_y, t_x, t_y, \dots$ valemities (24) leiame süsteemist (27) ilmutamata funktsiooni diferentseerimise reegli järgi (vt. § 3.4, M 3.4.3).

4.2.2. Üldine muutujate vahetus. Olgu asendus antud kujul

$$\begin{cases} x = x(s, t, \dots, \omega) \\ y = y(s, t, \dots, \omega) \\ \dots \dots \dots \\ u = u(s, t, \dots, \omega), \end{cases} \quad (28)$$

kus s, t, \dots on uued sõltumatud muutujad ja $\omega = \omega(s, t, \dots)$ on uus funktsioon.

Vaadeldaval juhul avaldame algul uued osatuletised vanade kaudu liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja põhjal, nagu süsteemis (19) juhtumil 4.2.1, arvestades, et nüüd süsteemis (28) on $\omega = \omega(s, t, \dots)$, saame

$$\begin{cases} u_s + u_\omega \omega_s = u_x a + u_y b + \dots \\ u_t + u_\omega \omega_t = u_x m + u_y n + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}, \quad (29)$$

kus

$$\begin{aligned} a &= x_s + x_\omega \omega_s, & b &= y_s + y_\omega \omega_s, & \dots \\ m &= x_t + x_\omega \omega_t, & n &= y_t + y_\omega \omega_t, & \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ja osatuletised $x_s, x_t, x_\omega, y_s, y_t, y_\omega, u_s, u_t, u_\omega, \dots$ leiame asendusest (28).

Edasi lahendame süsteemi (29) vanade osatuletiste u_x, u_y, \dots suhtes, saame

$$\begin{cases} u_x = A(u_s + u_\omega \omega_s) + B(u_t + u_\omega \omega_t) + \dots \\ u_y = M(u_s + u_\omega \omega_s) + N(u_t + u_\omega \omega_t) + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}, \quad (30)$$

kus kordajad A, B, M, N, \dots ei sisalda funktsiooni u osatuletisi. Sellega oleme avaldanud esimest järku osatuletised uute kaudu.

Teist järku osatuletiste u_{xx}, u_{xy}, \dots avaldamiseks uute kaudu asendame süsteemis (28) viimase võrduse juba saadud avaldisega osatuletise u_x jaoks, s.o. lähtume süsteemist

$$\begin{cases} x = x(s, t, \dots, \omega) \\ y = y(s, t, \dots, \omega) \\ \dots \dots \dots \\ u_x = u_x(s, t, \dots, \omega, \omega_s, \omega_t, \dots). \end{cases} \quad (31)$$

Teist järku osatuletiste leidmiseks võime süsteemist (31) määrata funktsiooni u_x esimest järku osatuletised u_{xx}, u_{xy}, \dots samal viisil, nagu me saime võrduse (30), arvestades, et nüüd süsteemis (31) on $\omega = \omega(s, t, \dots)$, $\omega_s = \omega_s(s, t, \dots)$, $\omega_t = \omega_t(s, t, \dots)$, \dots , saame

Vaadeldaval juhul osatuletiste $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots$ avaldamiseks uute kaudu diferentseerime asendust (36) muutujate x, y, \dots järgi, lugedes, et $\omega = \omega(x, y, \dots)$ on muutujate x, y, \dots funktsioon. Saame

$$\begin{cases} u_x = f_x + f_\omega \omega_x \\ u_y = f_y + f_\omega \omega_y \\ \dots \end{cases} \quad (37)$$

Teist järku osatuletiste avaldamiseks uute osatuletiste kaudu kasutame juba saadud avaldise (37):

$$\begin{cases} u_{xx} = (u_x)_x \stackrel{(37)}{=} \dots \\ u_{xy} = (u_x)_y \stackrel{(37)}{=} \dots \\ \dots \end{cases} \quad (38)$$

Analoogiliselt avaldame veel kõrgemat järku osatuletised.

Asendust (36) võib vaadelda ka kui järgmist erijuhtu üldisest asendusest (28):

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ \dots \\ u = u(x, y, \dots, \omega). \end{cases} \quad (39)$$

Sel korral asendamiseks vajalikud osatuletised leiame valemitest (29)–(33), võttes $x = s, y = t, \dots$

Teatav üldisem asendus leidub ülesandes 649.

Näited

N 4.2.1. Vahetada võrrandis

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$$

muutujad x ja y uute muutujatega s ja t asenduse $x = \operatorname{sh} s, y = \operatorname{sh} t$ abil.

Lahendus. Tegemist on juhtumiga 4.2.1, kus asendus on antud kujul (18). Seepärast kasutame valemid (19) ja (21). Valemid (19) annavad

$$u_s = u_x \operatorname{ch} s, \quad u_t = u_y \operatorname{ch} t,$$

kust

$$u_x = \frac{1}{\operatorname{ch} s} u_s, \quad u_y = \frac{1}{\operatorname{ch} t} u_t.$$

Sellega on esimest järku osatuletised avaldatud uute osatuletiste kaudu.

Teist järku osatuletiste avaldamiseks uute kaudu kasutame valemid (21), asendades seal funktsiooni u juba leitud valmis avaldistega u_x ja u_y jaoks:

$$u_{xx}(u_x)_x = \frac{1}{\operatorname{ch} s} (u_x)_s = \frac{1}{\operatorname{ch} s} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} s} u_s \right)_s = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 s} (u_{ss} \operatorname{ch} s - u_s \operatorname{sh} s);$$

$$u_{yy}(u_y)_y = \frac{1}{\operatorname{ch} t} (u_y)_t = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t} u_t \right)_t = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t} (u_{tt} \operatorname{ch} t - u_t \operatorname{sh} t)$$

Asendades võrrandis suurused x, y, u_x, u_y, u_{xx} ja u_{yy} nende uute avaldistega, saame vastuseks $u_{ss} + u_{tt} = 0$.

N 4.2.2. Vahetada võrrandis $u_{xx} + u_{yy} + 2u_{xy} = 0$ muutujad x ja y uute muutujatega s ja t , kui $s = 2x + 3y, t = x - y$.

L a h e n d u s. Tegemist on juhtumiga 4.2.1, kus asendus on antud kujul (23). Seepärast kasutame valemeid (24) ja (25). Valemite (24) põhjal saame

$$\begin{aligned} u_x &= u_s 2 + u_t = 2u_s + u_t \\ u_y &= u_s 3 + u_t (-1) = 3u_s - u_t. \end{aligned}$$

Teist järku osatuletiste avaldamiseks uute kaudu kasutame valemeid (25), asendades seal funktsiooni u juba saadud valmis avaldistega u_x ja u_y jaoks:
 $u_{xx} = (u_x)_x = 2(u_x)_s + (u_x)_t = 2(2u_s + u_t)_s + (2u_s + u_t)_t = 4u_{ss} + 4u_{st} + u_{tt};$
 $u_{yy} = (u_y)_y = 3(u_y)_s - (u_y)_t = 3(3u_s - u_t)_s - (3u_s - u_t)_t = 9u_{ss} - 6u_{st} + u_{tt};$
 $u_{xy} = (u_x)_y = 3(u_x)_s - (u_x)_t = 3(2u_s + u_t)_s - (2u_s + u_t)_t = 6u_{ss} + u_{st} - u_{tt}.$

Asendades võrrandis osatuletised nende uute avaldistega, saame vastuseks $u_{ss} = 0$.

N 4.2.3. Vahetada võrrandis $xu_{xy} + yu_{yy} = 0$ muutujad x ja y uute muutujatega s ja t ning funktsioon $u = u(x, y)$ uue funktsiooniga $w = w(s, t)$, kui $x = s, y = st, u = sw$.

L a h e n d u s. Tegemist on juhtumiga 4.2.2, kus asendus on antud kujul (28). Seepärast kasutame valemit (29), kust määrame osatuletiste u_y , ja valemit (33), kust määrame osatuletised u_{yy} ja $u_{yx} = u_{xy}$. Nende valemite kasutamiseks leiame kõigepealt suurused

$$a = 1, \quad b = t, \quad m = 0, \quad n = s.$$

Valemite (29) põhjal saame

$$\begin{aligned} w + sw_s &= u_x 1 + u_y t \\ w + sw_s &= u_x 1 + u_y t \end{aligned}$$

kust $u_y = w_t$.

Valemite (33) põhjal saame

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 + w_{ts} &= u_{yx} 1 + u_{yy} t \\ 0 + 0 + 0 + w_{tt} &= u_{yx} 0 + u_{yy} s, \end{aligned}$$

kust

$$u_{yy} = \frac{1}{s} w_{tt}, \quad u_{yx} = w_{ts} - \frac{t}{s} w_{tt}.$$

Asendades võrrandis osatuletised nende uute avaldistega, saame vastuseks $w_{st} = 0$.

Ülesanded

Järgmistes võrrandites vahetada muutujad x ja y uute muutujatega s ja t antud asenduste abil (vt. näited N 4.2.1 ja N 4.2.2).

625. $u_x - u_y = 0; x = s + t; y = s - t$

626. $yu_x - xu_y = 0; s = x, t = x^2 + y^2$

627. $xu_x + \sqrt{1 + y^2} u_y = xy; x = e^s, y = \operatorname{sh} t$

628. $(x + y)u_x - (x - y)u_y = 0; x = e^s \cos t, y = e^s \sin t$

629. $u_{xx} - u_{yy} = 0; x = \frac{s - t}{2}, y = \frac{s + t}{2}$

630. $2u_{xx} - 2yu_{yy} = u_y; x = \frac{s + t}{2}, y = \frac{(s - t)^2}{16}$

$$631. x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0; s = \ln x, t = \ln y$$

$$632. u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0; s = x + y, t = x + \frac{y}{2}$$

$$633. x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0; s = xy, t = \frac{x}{y}$$

Järgmistes võrrandites vahetada muutujad x ja y uute muutujatega s ja t ning funktsioon $u = u(x, y)$ uue funktsiooniga $w = w(s, t)$ antud asenduste abil (vt. näide N 4.2.3).

$$634. xu_{xx} + 2u_x = \frac{2}{y}; x = \frac{t}{s}, y = t, u = \frac{w}{t} + \frac{1}{s}$$

$$635. u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0; x = s + t, y = s - t, u = s^2 - t^2 - 4w$$

$$636. yu_x - xu_y = (y - x)u; s = x^2 + y^2, t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

$$w = \ln u - x - y$$

$$637. u_{xx} + u_{xy} + u_x = u; s = \frac{x+y}{2}, t = \frac{x-y}{2}, w = ue^y$$

$$638. u_x(1+u_x)u_{yy} - (1+u_x+u_y+2u_xu_y)u_{xy} + u_y(1+u_y)u_{xx} = 0; \\ x = w - t, y = w - s, u = s + t - w$$

$$639. u_{xx} - 2u_{xy} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)u_{yy} = 0; s = x, t = x + y, w = x + y + u.$$

Järgmistes võrrandites vahetada funktsioon $u = u(x, y)$ uue funktsiooniga $w = w(x, y)$ antud asenduste abil.

$$640. u_{xy} - \frac{u_y}{x} = 0; u = xw$$

$$641. u(u_{xx} + u_{yy}) = u_x^2 + u_y^2; u = w^{1/2}$$

Teisendada järgmised avaldised polaarkoordinaatidesse $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

$$642. W = xu_y - yu_x$$

$$643. W = x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy}$$

$$644. W = y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} - xu_x - yu_y$$

$$645. u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$646. \text{Vahetada võrrandis } x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz} + 2xy u_{xy} + 2xz u_{xz} + 2yz u_{yz} = 0 \text{ muutujad } x, y \text{ ja } z \text{ uute muutujatega } s, t \text{ ja } v, \\ \text{kui } s = y/x, t = z/x, v = y - z.$$

$$647. \text{Näidata, et võrrand } u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ ei muuda kuju asendusel } s = x/(x^2 + y^2), t = -y/(x^2 + y^2).$$

$$648. \text{Näidata, et võrrand } u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \text{ ei muuda kuju asendusel } s = x + u, t = y + u.$$

$$649. \text{Näidata, et iga võrrand } u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, \text{ kus } a, b \text{ ja } c \text{ on konstandid, asendusel } u = we^{\alpha x + \beta y}, \text{ kus } \alpha \text{ ja } \beta \text{ on konstandid ja } w = w(x, y) \text{ on funktsioon, teisendub kujule } w_{xy} + \gamma w = 0, \text{ kus } \gamma \text{ on konstant.}$$

§ 4.3. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID

Olgu antud mitme muutuja funktsioon

$$u = f(x, y, \dots), \quad (x, y, \dots) \in D.$$

D 4.3.1. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $P_0 \in D$ lokaalne maksimum (miinimum), kui punktis P_0 on olemas selline ümbrus $U \subset D$, et iga punkti $P \in U$ korral kehtib võrratus

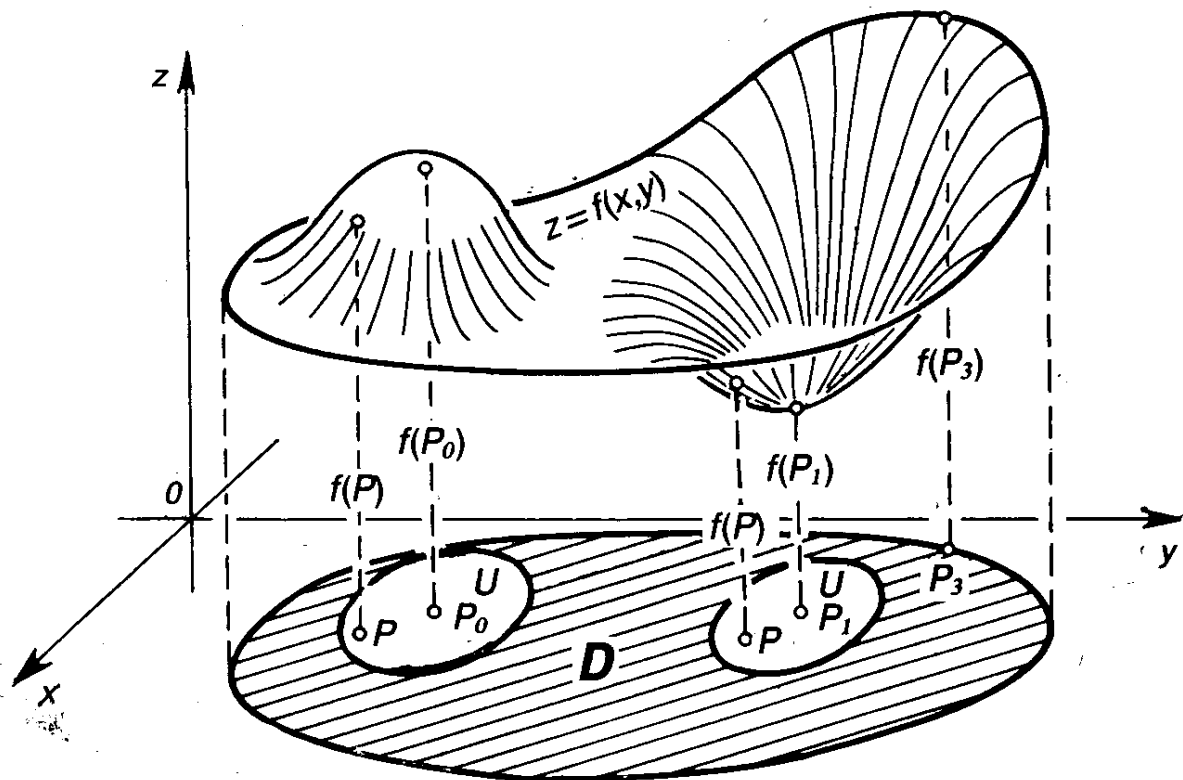
$$f(P) \leq f(P_0) \quad (f(P) \geq f(P_0)). \quad (40)$$

Lokaalse maksimumi ja miinimumi ühine nimetus on lokaalne ekstreemum. Kui võrratustes (40) võrduse juhtum esineb vaid juhul $P = P_0$, siis lokaalset ekstreemumit nimetatakse rangeks. Punkti P_0 , kus funktsioonil f esineb lokaalne ekstreemum, nimetatakse funktsiooni f lokaalseks ekstreemumpunktiks.

Definitsioonist D 4.3.1 on näha (eelduse $U \subset D$ tõttu), et lokaalne ekstreemumpunkt P_0 on alati piirkonna D sisepunkt.

Joonisel 4.1 on graafikuna esitatud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$, millel punktis P_0 on range lokaalne maksimum ja punktis P_1 range lokaalne miinimum.

Punkti $P \in D$ nimetatakse funktsiooni f statsionaarseks punktiks, kui selles punktis funktsiooni kõik esimest järku osatuletised on võrdsed nulliga. Punkti $P \in D$ nimetatakse funktsiooni



Joon. 4.1

f kriitiliseks punktiks, kui ta on kas statsionaarne punkt, või punkt, kus vähemalt üks esimest järku osatuletis on lõpmatu, või ei eksisteeri. Funktsiooni f kriitiline punkt võib asetseda ka määramispiirkonna D rajajoonel.

Järgmine tarvilik tunnus näitab, missugustes punktides võib funktsioonil olla lokaalne ekstreemum.

TT 4.3.1. Funktsioonil f võib lokaalne ekstreemum esineda vaid tema kriitilises punktis.

Kuid igas kriitilises punktis ei ole funktsioonil lokaalset ekstreemumit. Selleks et selgitada, millistes kriitilistes punktides on ja millistes ei ole lokaalset ekstreemumit, kasutatakse järgmisi piisavaid tunnuseid.

Tähistame

$$a_{11} = f_{xx}(P_0), \quad a_{12} = f_{xy}(P_0), \quad a_{21} = f_{yx}(P_0), \quad a_{22} = f_{yy}(P_0), \dots$$

ja vaatleme determinante

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots \quad (41)$$

PT 4.3.1. Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv statsionaarses punktis P_0 ;

a) kui vaheldumisi on $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$ siis punktis P_0 on range lokaalne maksimum;

b) kui $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \dots$, siis punktis P_0 on range lokaalne miinimum.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ korral kehtib järgmine tunnus.

PT 4.3.2. Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ kaks korda diferentseeruv statsionaarses punktis P_0 . Kui

a) $A_1 < 0, A_2 > 0$, siis punktis P_0 on range lokaalne maksimum;

b) $A_1 > 0, A_2 > 0$, siis punktis P_0 on range lokaalne miinimum;

c) $A_2 < 0$, siis punktis P_0 lokaalset ekstreemumit ei ole;

d) $A_2 = 0$, siis ekstreemumi olemasolu jääb lahtiseks.

D 4.3.2. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $P_0 \in D$ globaalne maksimum (miinimum), kui piirkonna D igas punktis P kehtib võrratus

$$f(P) \leq f(P_0) \quad (f(P) \geq f(P_0)). \quad (42)$$

Globaalse maksimumi ja globaalse miinimumi ühine nimetus on globaalne ekstreemum. Punkti P_0 , kus funktsioonil f on globaalne ekstreemum, nimetatakse funktsiooni f globaalseks ekstreemumpunktiks.

Definitsiooni D 4.3.2 põhjal on funktsiooni f globaalne maksimum ja miinimum vastavalt funktsiooni f suurim ja vähim väärtus piirkonnas D . Seepärast võime kirjutada, kui funktsioonil f

punktis P_0 ja P_1 on vastavalt globaalne maksimum ja globaalne miinimum, et

$$f(P_0) = \sup_{P \in D} f(P), \quad f(P_1) = \inf_{P \in D} f(P).$$

Joonisel 4.1 esitatud funktsioonil $z=f(x, y)$ on globaalne maksimum punktis P_3 ja globaalne miinimum punktis P_1 .

Funktsiooni globaalsete ekstreemumite leidmiseks kasutatakse järgmist meetodit.

M 4.3.1. Kui funktsioon f on pidev piirkonnas D ning piirkond D on kinnine ja tõkestatud, siis funktsioonil f on piirkonnas D globaalsed ekstreemumid olemas teoreemi T 2.3.6 põhjal ja nad võime leida järgmise eeskirja järgi.

1. Leiame funktsiooni f kõik kriitilised punktid piirkonna D sisepunktides ja arvutame neis funktsiooni väärtused.

2. Leiame funktsiooni f suurima ja vähima väärtuse piirkonna D rajapunktides.

3. Valime saadud arvudest suurima ja vähima. Esimene neist on funktsiooni f globaalne maksimum ja teine globaalne miinimum piirkonnas D .

Kui piirkond D ei ole kinnine või on tõkestamata, siis funktsioonil f võivad globaalsed ekstreemumid selles piirkonnas ka puududa. Sel korral tuleb nende olemasolu selgitada definitsiooni D 4.3.2 tingimuste (42) vahetu uurimise teel.

Ühe muutuja funktsiooni globaalse ekstreemumi tunnus PT 4.1.5 (MAP I) mitme muutuja funktsioonide korral ei kehti (vt. ülesanne 668).

Näited

N 4.3.1. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + (y - 1)^2$$

lokaalsed ekstreemumid.

L a h e n d u s. Antud funktsioon on määratud ja pidev kogu xy -tasandil.

Leiame funktsiooni kriitilised punktid. Selleks leiame funktsiooni osatuletised ja võrdsustame nad nulliga, saame

$$z_x = 2x = 0, \quad z_y = 2(y - 1) = 0.$$

Seega antud funktsioonil on üks statsionaarne punkt $P_0 = (0, 1)$. Teisi kriitilisi punkte ei ole. Tunnuse TT 4.3.1 põhjal antud funktsioonil võib lokaalne ekstreemum olla vaid punktis $P_0 = (0, 1)$.

Lokaalse ekstreemumi määramiseks selles punktis P_0 kasutame piisavat tunnust PT 4.3.2. Selleks leiame teist järku osatuletised $z_{xx} = 2$, $z_{yy} = 2$, $z_{xy} = 0$, kust saame, et $a_{11} = 2$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 2$. Järelikult

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Tunnuse PT 4.3.2 põhjal punktis $P_0 = (0, 1)$ on antud funktsioonil range lokaalne miinimum locmin $z = z(P_0) = 0$.

N 4.3.2. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + y^2 - x, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

globaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Antud funktsioon on pidev piirkonnas D ning piirkond D on kinnine ja tõkestatud. Seega antud funktsioonil selles piirkonnas D on olemas globaalsed ekstreemumid teoreemi T 2.3.6 põhjal. Nende leidmiseks kasutame meetodit M 4.3.1:

1. Leiame funktsiooni kriitilised punktid piirkonna D sisepunktides, saame

$$z_x = 2x - 1, \quad z_y = 2y,$$

kust näeme, et funktsioonil on üksainus kriitiline (statsionaarne) punkt $P_0 = (1/2, 0)$ ja funktsiooni väärtus selles punktis on $z(P_0) = -0,25$.

2. Leiame funktsiooni suurima ja vähima väärtuse piirkonna D rajajoonel $x^2 + y^2 = 1$. Et rajajoonel on $y^2 = 1 - x^2$, kus $x \in [-1, 1]$ siis funktsiooni väärtused rajajoonel on

$$z = x^2 + (1 - x^2) - x = 1 - x, \quad \text{kus } x \in [-1, 1].$$

Seega rajajoonel suurim väärtus on $z(-1) = 2$ ja vähim $z(1) = 0$.

3. Saadud arvudest $-0,25$, 2 ja 0 suurim on 2 ja vähim on $-0,25$.

Seega antud funktsioonil rajajoonel punktis $P_1 = (-1, 0)$ on globaalne maksimum $z(P_1) = 2$ ja sisepunktis P_0 on globaalne miinimum $z(P_0) = -0,25$.

Rajajoonel suurima ja vähima väärtuse võib leida ka üleminekuga polaarkoordinaatidele $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, kus $r = 1$, siis funktsiooni väärtused rajajoonel on

$$z = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos \varphi = 1 - \cos \varphi, \quad \text{kus } \varphi \in [0, 2\pi],$$

mille abil saame sama tulemuse.

Ülesanded

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid (vt. näide N 4.3.1).

650. $z = 1 - (x+1)^2 - y^2$

654. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

651. $z = x^3 + y^2 - 3x$

655. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

652. $z = x^2 - (y-1)^2$

656. $z = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}$

653. $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

657. $z = x^2 + y - 2 \ln(xy)$

658. $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$, $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq \pi\}$

659. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

660. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

661. $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$

662. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

Leida järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid $\max z$ ja $\min z$ (vt. näide N 4.3.2).

663. $z = x^2 + y^2 - y$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

664. $z = x^2 - y^2 + 2$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

665. $z = x - 2y - 1$, $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$

666. $z = x^2 - xy + y^2$, $(x, y) \in \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$

667. $z = (2x^3 + 3y^2) \exp(-x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

668. Näidata, et funktsioonil $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, $(x, y) \in \{(x, y) : -5 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 1\}$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

669. Näidata, et funktsioonil $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ on lõpmata palju lokaalseid maksimume ja mitte ühtegi lokaalset miinimumi.
670. Jaotada arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.
671. Esitada arv 81 nelja positiivse arvu korrutisena nii, et nende summa oleks minimaalne.
672. Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leida see, mille täispindala on minimaalne.
673. Missuguste mõõtmete korral on antud ruumalaga V risttahuka kujulisel vannil vähim pindala?
674. Antud kerasse raadiusega R joonestada suurima ruumalaga risttahukas.
675. Kõikidest ühe ja sama alusega ning tipunurgaga kolmnurkadest leida see, mille pindala on suurim.
676. Kõikidest antud perimeetriga kolmnurkadest leida see, millel on maksimaalne pindala.
677. Leida antud perimeetriga $2p$ riskülik, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.
678. Leida antud perimeetriga $2p$ kolmnurk, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.
679. Ellipsoidi $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ sisse joonestada maksimaalse ruumalaga risttahukas.
680. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste korrutis oleks maksimaalne?
681. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste summa oleks maksimaalne?
682. Näidata, et mittenegatiivsete arvude x_1, \dots, x_n geomeetriline keskmine ei ületa aritmeetilist keskmist.

§ 4.4. TINGLIKUD EKSTREEMUMID

Olgu antud mitme muutuja funktsioon

$$u = f(x, y, \dots), \quad (x, y, \dots) \in D.$$

Vaatleme funktsiooni f ekstreemumeid, mis on samal viisil defineeritud nagu D 4.3.1 ja D 4.3.2, kuid kus täiendavalt nõuame veel teatavate lisatingimuste

$$F(x, y, \dots) = 0, \quad G(x, y, \dots) = 0, \dots \quad (43)$$

kehtimist.

Olgu punkt P_0 piirkonnast D ja rahuldagu lisatingimusi (43).

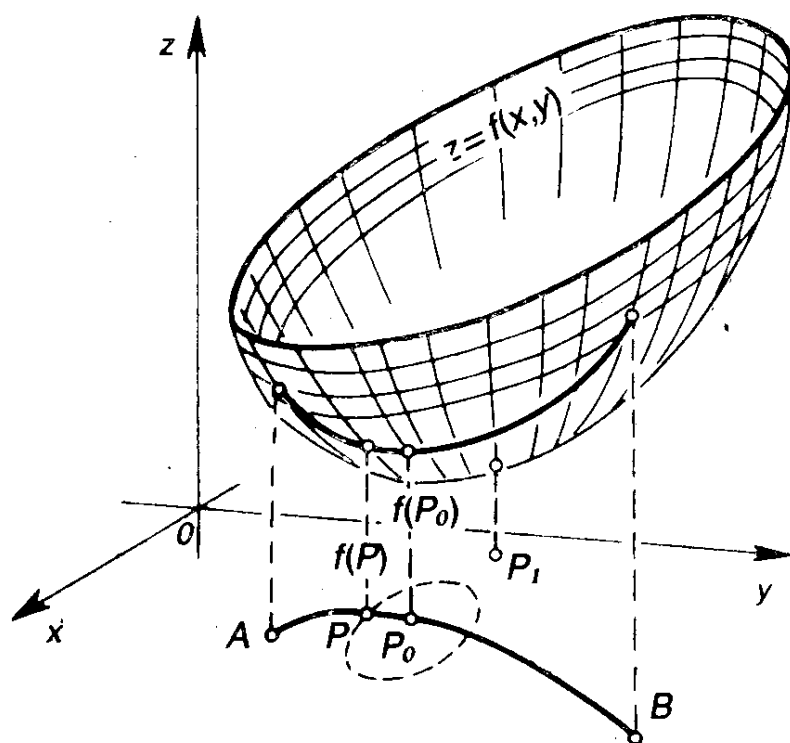
D 4.4.1. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $P_0 \in D$, tinglik lokaalne maksimum (miinimum), kui punktil P_0 on olemas ümbrus $U \subset D$, nii et ümbruse U selles osas, kus on täidetud lisatingimused (43), kehtib võrratus

$$f(P) \leq f(P_0) \quad (f(P) \geq f(P_0)). \quad (44)$$

Tingliku lokaalse maksimumi ja miinimumi ühine nimetus on tinglik lokaalne ekstreemum. Kui võrratustes (44) võrduse juhtum esineb vaid punktis $P=P_0$, siis tinglikku lokaalset ekstreemumit nimetatakse rangeks. Punkti P_0 , kus funktsioonil esineb tinglik lokaalne ekstreemum, nimetatakse tinglikuks lokaalseks ekstreemumpunktiks.

Definitsiooni D 4.4.1 põhjal (eelduse $U \subset D$ tõttu) on tinglik lokaalne ekstreemumpunkt P_0 piirkonna D sisepunkt.

Joonisel 4.2 on esitatud graafikuna kahe muutuja funktsioon $z=f(x,y)$, millel on punktis P_0 lisatingimusel $F(x,y)=0$ tinglik lokaalne miinimum. Vaadeldaval juhul lisatingimus $F(x,y)=0$ kujutab xy -tasandil joont AB . Seega võrratus $f(P) \geq f(P_0)$ peab olema täidetud mitte punkti P_0 kogu ümbruses U , vaid ainult joonel AB , mis seda ümbrust läbib. Nagu näeme jooniselt, ei lange selles näites tinglik lokaalne miinimum kokku funktsiooni lokaalse (ja globaalse) miinimumiga piirkonnas D , mis on punktis P_1 .



Joon. 4.2

D 4.4.2. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0 tinglik globaalne maksimum (miinimum), kui piirkonna D igas punktis P , mis rahuldab lisatingimusi (43), kehtib võrratus

$$f(P) \leq f(P_0) \quad (f(P) \geq f(P_0)).$$

Tingliku globaalse maksimumi ja miinimumi ühine nimetus on tinglik globaalne ekstreemum. Punkti P_0 , kus funktsioonil f on tinglik globaalne ekstreemum, nimetatakse funktsiooni f tinglikuks globaalseks ekstreemumpunktiks.

Definitsiooni D 4.4.2 põhjal on funktsiooni f tinglik globaalne maksimum ja miinimum vastavalt funktsiooni f suurim ja vähim

väärtus piirkonna D nendes punktides, mis rahuldavad lisatingimusi (43).

Joonisel 4.2 on kujutatud funktsioon $z=f(x, y)$, millel on joonel AB (s. o. lisatingimusel $F(x, y)=0$) punktis B suurim väärtus, s. o. tinglik globaalne maksimum, ja punktis P_0 vähim väärtus, s. o. tinglik globaalne miinimum.

Olenevalt lisatingimuste arvust võime sõnastada järgmised tingliku ekstreemumi leidmise ülesanded.

Ülesanne 1. Leida funktsiooni $u=f(x, y, \dots, \omega)$ tinglik (lokaalne või globaalne) ekstreemum lisatingimusel

$$F(x, y, \dots, \omega) = 0,$$

kus muutujaid x, y, \dots, ω on vähemalt 2 tükki.

Ülesanne 2. Leida funktsiooni $u=f(x, y, \dots, v, \omega)$ tinglik (lokaalne või globaalne) ekstreemum lisatingimustel

$$F(x, y, \dots, v, \omega) = 0, \quad G(x, y, \dots, v, \omega) = 0, \quad (46)$$

kus muutujaid x, y, \dots, ω on vähemalt 3 tükki.

Ülesanne 3. Leida funktsiooni $u=f(x, y, \dots, v, \omega, \dots)$ tinglik (lokaalne või globaalne) ekstreemum lisatingimustel

$$m \text{ tükki } \begin{cases} F(x, y, \dots, v, \omega, \dots) = 0 \\ G(x, y, \dots, v, \omega, \dots) = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (47)$$

kus muutujaid $x, y, \dots, v, \omega, \dots$ on vähemalt $m+1$.

Vaatleme tingliku ekstreemumi leidmise meetodeid.

M 4.4.1. Taandamine harilikule ekstreemumile. Vaatleme antud küsimust iga ülesande korral eraldi.

Ülesande 1 lahendamiseks avaldame lisatingimusest (45) ühe muutuja, näiteks viimase muutuja $\omega=\omega(x, y, \dots)$, ja asendame saadud avaldisega funktsioonis f muutuja ω . Saame

$$u=f(x, y, \dots, \omega(x, y, \dots)), \quad (48)$$

millega ülesanne taandus funktsiooni (48) hariliku ekstreemumi (kas lokaalse või globaalse) leidmisele (vt. näide N 4.4.1).

Ülesande 2 lahendamiseks toimime analoogiliselt. Avaldame lisatingimustest (46) kaks muutujat, näiteks viimased muutujad $v=v(x, y, \dots)$ ja $\omega=\omega(x, y, \dots)$, ning asendame saadud avaldistega funktsioonis f vastavad muutujad v ja ω . Saame

$$u=f(x, y, \dots, v(x, y, \dots), \omega(x, y, \dots)), \quad (49)$$

millega ülesanne taandus funktsiooni (49) hariliku ekstreemumi leidmisele.

Ülesande 3 lahendamiseks avaldame süsteemist (47) m muutujat, näiteks muutujad

$$\left. \begin{array}{l} v = v(x, y, \dots) \\ w = w(x, y, \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} m \text{ tükki}$$

ja asendame saadud avaldistega funktsiooni f vastavad muutujad v, w, \dots . Saame

$$u = f(x, y, \dots, v(x, y, \dots), w(x, y, \dots), \dots), \quad (50)$$

millega ülesanne taandus funktsiooni (50) harilikule ekstreemumileidmisele.

Meetodi M 4.4.1 puuduseks on see, et sageli ei saa lisatingimustest (45), (46) ja (47) avaldada vajalikke muutujaid või nende avaldamine osutub komplitseerituks. Selleks et kindlaks teha, kas vajalikud muutujad on avaldatavad ilmutatud kujul või millistel tingimustel nad on avaldatavad, kasutame vastavaid ilmutamata funktsioonide olemasolu teoreeme paragrahvist 3.4.

Meetodil M 4.4.1 on ka see puudus, et taandamisel harilikule ekstreemumile võivad mõned tingliku ekstreemumi punktid avastamata jääda (vt. ülesanne 709).

M 4.4.2. Lagrange'i meetod. Ülesande 1 lahendamiseks koostame järgmise Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi(x, y, \dots) = f(x, y, \dots) + \lambda F(x, y, \dots), \quad (51)$$

kus λ on mingi (esialgu veel määramata) kordaja, ja lahendame süsteemi

$$\Phi_x = 0, \quad \Phi_y = 0, \quad \dots, \quad \Phi_\lambda = F(x, y, \dots) = 0. \quad (52)$$

Seejuures eeldame, et nende punktide ümbrustes, mis on süsteemi (52) lahenditeks, on funktsioonide f ja F esimest järku osatuletised pidevad ja funktsiooni F esimest järku osatuletised nendes punktides ei ole korruga nullid.

Olgu punkt $(x_0, y_0, \dots, \lambda_0)$ süsteemi (52) lahend. Jättes ära λ_0 , saame punkti $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$, mida nimetatakse funktsiooni f tinglikuks statsionaarseks punktiks ülesandes 1. Seejuures öeldakse, et arv λ_0 vastab punktile P_0 .

Tinglikke statsionaarseid punkte ja neid punkte $P \in D$, mis rahuldavad lisatingimust (45) ja kus funktsioonide f ja F osatuletised ei ole pidevad või F osatuletised on korruga nullid, nimetatakse funktsiooni f tinglikeks kriitilisteks punktideks ülesandes 1.

Selleks et leida punkti, kus võib funktsioonil olla tinglik ekstreemum ülesandes 1, kasutatakse järgmist tarvilikku tunnust.

TT 4.4.1. Funktsioonil f tinglik lokaalne ekstreemum ülesandes 1 võib olla vaid tema tinglikus kriitilises punktis ülesandes 1.

Sageli ülesannete lahendamisel saame tunnuse TT 4.4.1 abil vaid ühe punkti, kus võib olla tinglik ekstreemum. Kui on ette

teada, et vaadeldav tinglik ekstreemum on olemas, siis ta ongi selles punktis.

Tingliku ekstreemumi olemasolu tinglikus statsionaarses punktis saab kindlaks teha ka järgmise piisava tunnuse abil.

PT 4.4.1. Kui Lagrange'i funktsioonil (51) on tinglikus statsionaarses punktis P_0 vastava $\lambda = \lambda_0$ korral lokaalne (globaalne) ekstreemum, siis ülesandes 1 on funktsioonil f selles punktis P_0 vastav tinglik lokaalne (globaalne) ekstreemum.

Kui funktsioonil (51) ei ole punktis P_0 lokaalset või globaalset ekstreemumit, siis tunnust PT 4.4.1 kasutada ei saa ja ülesande 1 lahendamiseks tuleb kasutada teisi võtteid.

Ülesande 2 lahendamiseks koostame järgmise Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi(x, y, \dots) = f(x, y, \dots) + \lambda F(x, y, \dots) + \mu G(x, y, \dots), \quad (53)$$

kus λ ja μ on mingid (esialgu veel määramata) kordajad, ja lahendame süsteemi

$$\Phi_x = 0, \quad \Phi_y = 0, \quad \dots, \quad \Phi_\lambda = F = 0, \quad \Phi_\mu = G = 0. \quad (54)$$

Seejuures eeldame, et nende punktide ümbrustes, mis on süsteemi (54) lahenditeks, on funktsioonide f , F ja G esimest järku osatuletised pidevad ja nendes punktides on nullist erinev vähemalt üks teist järku jakobiaanidest, mida saab koostada matriksi

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & \dots & F_w \\ G_x & G_y & \dots & G_w \end{pmatrix}, \quad (55)$$

veergudest.

Olgu punkt $(x_0, y_0, \dots, \lambda_0, \mu_0)$ süsteemi (54) lahend. Jättes ära λ_0 ja μ_0 , saame punkti $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$, mida nimetatakse funktsiooni f tinglikuks statsionaarseks punktiks ülesandes 2. Seejuures öeldakse, et arvud λ_0 ja μ_0 vastavad punktile P_0 .

Tinglikke statsionaarseid punkte ja neid punkte $P \in D$, mis rahuldavad lisatingimusi (46) ja kus funktsioonide f , F ja G osatuletised ei ole pidevad või matriksi (55) kõik teist järku jakobiaanid on korruga nullid, nimetatakse funktsiooni f tinglikeks kriitilisteks punktideks ülesandes 2.

TT 4.4.2. Funktsioonil f tinglik lokaalne ekstreemum ülesandes 2 võib olla vaid tema tinglikus kriitilises punktis ülesandes 2.

PT 4.4.2. Kui Lagrange'i funktsioonil (53) on tinglikus statsionaarses punktis P_0 vastavate $\lambda = \lambda_0$ ja $\mu = \mu_0$ korral lokaalne (globaalne) ekstreemum, siis ülesandes 2 on funktsioonil f selles punktis P_0 vastav tinglik lokaalne (globaalne) ekstreemum.

Kui funktsioonil (53) ei ole punktis P_0 lokaalset või globaalset ekstreemumit, siis tunnust PT 4.4.2 kasutada ei saa ja ülesande 2 lahendamiseks tuleb kasutada teisi võtteid.

Ülesande 3 lahendamine toimub analoogiliselt ülesande 1 ja 2 lahendamisele. Koostame järgmise Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi = f + \lambda F + \mu G + \dots, \quad (56)$$

kus λ, μ, \dots on mingid (esialgu veel määramata) kordajad, ja lahendame süsteemi

$$\Phi_x = 0, \Phi_y = 0, \dots, \Phi_\lambda = F = 0, \Phi_\mu = G = 0, \dots \quad (57)$$

Seejuures eeldame, et süsteemi (57) lahenditeks olevate punktide ümbruses on funktsioonide f, F, G, \dots esimest järku osatuletised pidevad ja nendes punktides on nullist erinev vähemalt üks m järku jakobiaanidest, mida saab koostada maatriksi

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & \dots \\ G_x & G_y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (58)$$

veergudest.

Olgu punkt $(x_0, y_0, \dots, \lambda_0, \mu_0, \dots)$ süsteemi (57) lahend. Jättes ära λ_0, μ_0, \dots , saame punkti $P_0 = (x_0, y_0, \dots)$, mida nimetatakse funktsiooni f tinglikuks statsionaarseks punktiks ülesandes 3. Seejuures öeldakse, et arvud λ_0, μ_0, \dots vastavad punktile P_0 .

Tinglikke statsionaarseid punkte ja neid punkte $P \in D$, mis rahuldavad lisatingimusi (47) ja kus funktsioonide f, F, G, \dots osatuletised ei ole pidevad või maatriksi (58) kõik m järku jakobiaanid on korraka nullid, nimetatakse funktsiooni f tinglikeks kriitilisteks punktideks ülesandes 3.

TT 4.4.3. Funktsioonil f tinglik lokaalne ekstreemum ülesandes 3 võib olla vaid tema tinglikus kriitilises punktis ülesandes 3.

PT 4.4.3. Kui Lagrange'i funktsioonil (56) on tinglikus statsionaarses punktis P_0 vastavate $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \dots$ korral lokaalne (globaalne) ekstreemum, siis ülesandes 3 on funktsioonil f selles punktis P_0 vastav tinglik lokaalne (globaalne) ekstreemum.

M 4.4.3. Smithi meetod. Ülesande 1 lahendamiseks kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ korral lisatingimusel $F(x, y) = 0$ leiame kõigepealt funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid ülesandes 1 analoogiliselt nagu Lagrange'i meetodi M 4.4.2 korral, s.o. lahendame süsteemi (52).

Olgu $P_0 = (x_0, y_0)$ tinglik statsionaarne punkt ülesandes 1. Koostame jakobiaani

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} z_x & z_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = z_x F_y - F_x z_y \quad (59)$$

ja seejärel jakobiaani

$$J_1(x, y) = \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}. \quad (60)$$

PT 4.4.4. Kui tinglikus statsionaarses punktis P_0 ülesandes 1 on $J_1(P_0) < 0$ ($J_1(P_0) > 0$), siis punktis P_0 on ülesandes 1 funktsioonil z range tinglik lokaalne maksimum (miinimum).

Juhul, kui punktis P_0 on

$$J_1(P_0) = J_2(P_0) = \dots = J_{n-1}(P_0) = 0, \quad J_n(P_0) \neq 0,$$

kus

$$J_n(x, y) = \begin{vmatrix} (J_{n-1})_x & (J_{n-1})_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}, \quad (61)$$

siis kasutame järgmist üldist tunnust.

PT 4.4.5. Kui n on paaritu arv ja tinglikus statsionaarses punktis P_0 ülesandes 1 on $J_n(P_0) < 0$ ($J_n(P_0) > 0$), siis punktis P_0 on ülesandes 1 funktsioonil z range tinglik lokaalne maksimum (miinimum).

Kui n on paarisarv, siis punktis P_0 tinglikku ekstreemumit ei ole.

Ülesande 2 lahendamiseks kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ korral lisatingimustel $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$ leiame funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid ülesandes 2 analoogiliselt nagu Lagrange'i meetodi M 4.4.2 korral, s. o. lahendame süsteemi (54).

Olgu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tinglik statsionaarne punkt ülesandes 2. Koostame jakobiaanid

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} \quad (62)$$

ja

$$J_1(x, y, z) = \begin{vmatrix} J_x & J_y & J_z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}. \quad (63)$$

PT 4.4.6. Kui tinglikus statsionaarses punktis P_0 ülesandes 2 on $J_1(P_0) < 0$ ($J_1(P_0) > 0$), siis punktis P_0 on ülesandes 2 funktsioonil u range tinglik lokaalne maksimum (miinimum).

Juhul, kui punktis P_0 on

$$J_1(P_0) = J_2(P_0) = \dots = J_{n-1}(P_0) = 0, \quad J_n(P_0) \neq 0,$$

kus

$$J_n(x, y, z) = \begin{vmatrix} (J_{n-1})_x & (J_{n-1})_y & (J_{n-1})_z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}, \quad (64)$$

siis kasutame järgmist üldist tunnust.

PT 4.4.7. Kui n on paaritu arv ja tinglikus statsionaarses punktis P_0 ülesandes 2 on $J_n(P_0) < 0$ ($J_n(P_0) > 0$), siis punktis P_0

on ülesandes 2 funktsioonil u range tinglik lokaalne maksimum (miinimum).

Kui n on paarisarv, siis punktis P_0 tinglikku ekstreemumit ei ole.

Näited

N 4.4.1. Leida harilikule ekstreemumile taandamise meetodiga M 4.4.1 funktsiooni $z=x^2-y^2$ tinglikud ekstreemumid lisatingimusel $x^2+y^2=4$.

L a h e n d u s. Tegemist on ülesandega 1. Vastavalt meetodile M 4.4.1 avaldame lisatingimusest ühe muutuja. Käesoleval juhul on asendamiseks otsustabekohasem avaldada $y^2=4-x^2$ ja asendada sellega funktsioonis muutuja y^2 , saame

$$z=x^2-(4-x^2)=2x^2-4.$$

Seega tuleb leida funktsiooni

$$z=2x^2-4, \quad x \in [-2, 2]$$

harilikud ekstreemumid. Kui $x \in (-2, 2)$, siis $z'_x=4x$, kust saame ühe statsionaarse punkti $x=0$, kus $z''(0)=4>0$ tõttu on lokaalne miinimum $z=-4$, mis tunnuse PT 4.1.5 (MAP I) põhjal on ka globaalne. Lõigu $[-2, 2]$ otspunktides on $z(-2)=z(2)=4$ ja seega globaalne maksimum.

Punktile $x=0$ saame lisatingimusest vastavad $y=\pm 2$ ja punktidele $x=\pm 2$ vastava $y=0$. Seega punktides $(0, 2)$ ja $(0, -2)$ on ranged tinglikud globaalsed miinimumid $z=-4$ ja punktides $(2, 0)$ ja $(-2, 0)$ on ranged tinglikud globaalsed maksimumid $z=4$.

Tinglikud ekstreemumid selles ülesandes võime leida ka sel teel, et lisatingimuse, mis kujutab ringjoont xy -tasandil, esitame polaarkoordinaatides $x=2 \cos \varphi$, $y=2 \sin \varphi$. Siis

$$z=4 \cos^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi = 4 \cos 2\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

millega tingliku ekstreemumi leidmine taandus jälle funktsiooni z hariliku ekstreemumi leidmisele.

N 4.4.2. Leida Lagrange'i meetodiga M 4.4.2 funktsiooni $z=x^2+y^2$ tinglik ekstreemum lisatingimusel $x+y=4$.

L a h e n d u s. Tegemist on ülesandega 1. Koostame ülesandele vastava Lagrange'i funktsiooni (51), saame

$$\Phi = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 4)$$

ja lahendame süsteemi

$$\Phi_x = 2x + \lambda = 0, \quad \Phi_y = 2y + \lambda = 0, \quad \Phi_\lambda = x + y - 4 = 0.$$

Sellel süsteemil on vaid üks lahend $(2, 2, -4)$, kust saame ühe tingliku statsionaarse punkti $P_0=(2, 2)$ ja temale vastava $\lambda_0=-4$. Teisi tinglikke kriitilisi punkte ei ole. Tunnuse TT 4.4.1 põhjal võib otsitav tinglik ekstreemum olla vaid punktis $P_0=(2, 2)$.

Tingliku ekstreemumi olemasolu määramiseks punktis P_0 kasutame tunnust PT 4.4.1. Selleks teeme kindlaks, milline ekstreemum on Lagrange'i funktsioonil Φ selles punktis P_0 . Et selles punktis $\lambda=-4$, siis

$$\Phi = x^2 + y^2 - 4(x + y - 4),$$

ja P_0 on funktsiooni Φ statsionaarne punkt.

Leides teised osatuletised

$$\Phi_{xx}=2, \quad \Phi_{xy}=0, \quad \Phi_{yy}=2,$$

näeme, et funktsioon Φ on kaks korda diferentseeruv punktis P_0 . Punktis P_0 on $a_{11}=2$, $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{22}=2$ ja seega $A_1>0$ ning $A_2>0$. Tunnuse PT 4.3.2 põhjal on funktsioonil Φ punktis $P_0=(2, 2)$ range lokaalne miinimum. Tun-

nuse PT 4.4.1 põhjal on siis antud ülesandes funktsioonil z selles punktis P_0 range tinglik lokaalne miinimum $z(P_0) = 8$.

Selleks et kindlaks teha, kas funktsioonil Φ punktis P_0 olev lokaalne ekstreemum on ka globaalne, uurime vahet

$\Phi(x, y) - \Phi(2, 2) = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$,
kust saame, et $\Phi(x, y) \geq \Phi(2, 2)$ iga punkti $P = (x, y)$ korral. Seega punktis $P_0 = (2, 2)$ funktsioonil Φ on globaalne miinimum. Järelikult tunnuse PT 4.4.1 põhjal punktis P_0 olev range tinglik lokaalne miinimum on ka range tinglik globaalne miinimum.

N 4.4.3. Leida Smithi meetodiga funktsiooni $z = x^2 - y^2$ tinglikud lokaalsed ekstreemumid lisatingimusel $x^2 + y^2 = 4$.

L a h e n d u s. Tegemist on ülesandega 1. Leiame selle ülesande tinglikud statsionaarsed punktid Lagrange'i meetodiga M 4.4.2. Selleks koostame Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

ja lahendame süsteemi

$$\begin{aligned}\Phi_x &= 2x(1 + \lambda) = 0 \\ \Phi_y &= 2y(\lambda - 1) = 0 \\ \Phi_\lambda &= x^2 + y^2 - 4 = 0.\end{aligned}$$

Sellel süsteemil on neli lahendit $(2, 0, -1)$, $(-2, 0, -1)$, $(0, 2, 1)$, $(0, -2, 1)$, kust saame tinglikud statsionaarsed punktid $P_1 = (2, 0)$ ja $P_2 = (-2, 0)$, millele vastab $\lambda = -1$, ning punktid $P_3 = (0, 2)$ ja $P_4 = (0, -2)$, millele vastab $\lambda = 1$.

Edasi koostame jakobiaani (59), s. o.

$$J = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8xy$$

ja seejärel jakobiaani (60), s. o.

$$J_1(x, y) = \begin{vmatrix} 8y & 8x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 16(y^2 - x^2)$$

ning rakendame tunnust PT 4.4.4. Et $J_1(P_1) = J_1(P_2) < 0$, siis punktides P_1 ja P_2 on range tinglik lokaalne maksimum $z = 4$. Et $J_1(P_3) = J_1(P_4) > 0$, siis punktides P_3 ja P_4 on range tinglik lokaalne miinimum $z = -4$.

Ülesanded

Leida harilikule ekstreemumile taandamise meetodiga M 4.4.1 järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid märgitud lisatingimusel (vt. näide N 4.4.1).

683. $z = 1 - xy, y - x = 0$

684. $z = xy, y = 2x^3 - 3x$

685. $z = x(y - 3), y = x^2$

686. $z = x^2 + \sin y^2, x^2 + y^2 = \pi$

Leida Lagrange'i meetodiga M 4.4.2 järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud lisatingimustel (vt. näide N 4.4.2).

687. $z = x^2 + y^2, x + y = 2$

688. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

689. $z = 6 - 4x - 3y, x^2 + y^2 = 1$

$$690. u = x + y + z, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (x, y, z > 0)$$

$$691. u = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$692. u = xyz, x + y + z = 15$$

$$693. u = x^2 + y^2 + z^2, x + y + 2z = 6, x - y = 0$$

$$694. u = xy + xz, x^2 + y^2 + z^2 = 3, y + z = 2$$

Leida Smithi meetodiga M 4.4.3 järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud lisatingimustel (vt. näide N 4.4.3).

$$695. z = xy, x - y = 0$$

$$696. z = x^2 - y^2 + 1, x^2 + y^2 = 1$$

$$697. z = 2x + y^2, y^2 = x$$

$$698. u = 2x + 2y + z^2, x + y + z = 3, x - y = 0$$

$$699. u = xy + yz + xz, x + y = 2, y + z = 2$$

Leida järgmiste funktsioonide tinglikud ekstreemumid antud lisatingimustel.

$$700. z = xy, x + y = 0$$

$$701. z = \cos^2 x + \sin^2 y, x - y = 0$$

$$702. z = e^{xy}, x + y = 2$$

$$703. z = xy, x^2 + y^2 = 2$$

$$704. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$705. z = \sqrt{xy}, x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

$$706. u = \sin x \sin y \sin z, x + y + z = \pi/2 \quad (x, y, z > 0)$$

$$707. u = xyz, xy + yz + xz = 8$$

$$708. u = xyz, x + y + z = 5, xy + yz + xz = 8$$

709. Leida funktsiooni $z = y \sin y - 4x$ tinglikud ekstreemumid lisatingimusel $y \sin y - x^3 - x = 0$ harilikule ekstreemumile taandamise meetodiga M 4.4.1 ja seejärel Smithi meetodiga M 4.4.3. Selgitada erinevate vastuste põhjus.

710. Tasandil $3x - 2z = 0$ leida punkt, mille kauguste ruutude summa punktidest $(1, 1, 1)$ ja $(2, 3, 4)$ on minimaalne.

711. Tasandil $x + y - 2z = 0$ leida punkt, mille kauguste ruutude summa tasanditest $x + 3z = 6$ ja $y + 3z = 2$ on minimaalne.

712. Leida pinna $x^2 + y^2 + z^2 + yz + xz = 1$ punktide suurim kaugus tasandist $z = 0$.

713. Leida maksimaalse ruumalaga risttahukas, kui tema pindala on S .

714. Antud ellipsi ümber joonestada minimaalse pindalaga kolmnurk, mille alus on paralleelne ellipsi suurema teljega.

715. Leida funktsiooni $u = x^2 y^2 z^2$ maksimaalne väärtus sfääril $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

V. PARAMEETRIST SÕLTUVAD INTEGRAALID

§ 5.1. PARAMEETRIST SÕLTUV MÄÄRATUD INTEGRAAL

Vaatleme funktsiooni

$$z=f(x, y), \quad (x, y) \in \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Seega funktsioon f on antud kinnises ristkülikus $D=X \times Y$, kus $X=[a, b]$ ja $Y=[c, d]$.

Eksisteerigu iga $y \in Y$ korral integraal

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1)$$

Integraal (1) defineerib funktsiooni $F(y)$, $y \in Y$, mida nimetatakse parameetrist y sõltuvaks integraaliks.

T 5.1.1. Kui funktsioon f on pidev kinnises ristkülikus D , siis funktsioon (1) eksisteerib ja on pidev lõigus Y .

Teoreemi T 5.1.1 eeldustel iga $y_0 \in Y$ korral kehtib seega võrdus

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = F(y_0)$$

ehk (1) abil

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx,$$

kust on näha, et teoreemi T 5.1.1 eeldustel võib integraalis (1) piirile minna parameetri y järgi integraali märgi all.

T 5.1.2. Kui funktsioon f ja tema osatuletis f_y on pidevad kinnises ristkülikus D , siis $y \in (c, d)$ korral funktsioon (1) on diferentseeruv ja kehtib Leibnizi valem

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (2)$$

Arvestades võrdust (1), võime valemi (2) kirjutada ka kujul

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx, \quad (3)$$

kust on näha, et teoreemi T 5.1.2 eeldustel võib integraali (1) diferentseerida parameetri y järgi integraali märgi all, s.o. muuta integreerimise ja diferentseerimise järjekorda.

T 5.1.3. Kui funktsioon f on pidev kinnises ristkülikus D , siis

$$\int_c^d F(y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (4)$$

Arvestades võrdust (1), võime valemi (4) kirjutada ka kujul

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (5)$$

kust on näha, et teoreemi T 5.1.3 eeldusel võib integraali (1) integreerida parameetri y järgi integraalimärgi all, s. o. muuta integreerimise järjekorda.

Parameetrist sõltuvas integraalis võib parameeter y olla ka rajades, s. o.

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx, \quad (6)$$

kus $a \leq \alpha(y) \leq b$ ja $a \leq \beta(y) \leq b$, kui $y \in Y$.

T 5.1.4. Kui funktsioon f on pidev kinnises ristkülikus D ning integraalis (6) rajad $\alpha(y)$ ja $\beta(y)$ on pidevad funktsioonid lõigus Y , siis funktsioon (6) eksisteerib ja on pidev lõigus Y .

T 5.1.5. Kui funktsioon f ja tema osatuletis f_y on pidevad kinnises ristkülikus D ning integraalis (6) rajad $\alpha(y)$ ja $\beta(y)$ on diferentseeruvad funktsioonid $y \in (c, d)$ korral, siis funktsiooni (6) jaoks kehtib võrdus

$$F'(y) = f(\beta(y), y) \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) dx, \quad (7)$$

kus $y \in (c, d)$.

Parameetrist sõltuvas integraalis võib olla ka mitu parameetrit. Sel korral kehtivad kõigile parameetritele teoreemid T 5.1.1—T 5.1.5, ainult tuletise asemel tuleb siis kõnelda vastavalt osatuletisest.

Näited

N 5.1.1. Näidata, et funktsioon

$$F(y) = \int_0^1 x \ln^{-1}(1+xy) dx$$

on pidev igas lõigus $Y = [c, d]$, kus $0 < c < d$.

L a h e n d u s. Integraalialune funktsioon

$$f(x, y) = x \ln^{-1}(1+xy)$$

on pidev ristkülikus $D = [0, 1] \times [c, d]$, peale sirge $x=0$, kus tal on kõrvaldatav katkevus, sest

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, y) = 1/y.$$

Lisades $x=0$ korral funktsioonile f väärtused $1/y$, saame funktsiooni f muuta pidevaks kogu kinnises ristkülikus D . Seejuures iga $y \in Y$ korral funktsioon f muutub vaid ühes punktis, mis ei muuda antud integraali (vt. MAP I, § 7.1). Teoreemi T 5.1.1 põhjal vaadeldav funktsioon F on pidev lõigus Y .

N 5.1.2. Leida piirväärtus

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} F(y), \text{ kus } F(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y \sin^2 x} \, dx.$$

Lahendus. Vaatleme seda piirprotsessi näiteks lõigus $[0, 1]$. Integraali-
alune funktsioon on pidev ristkülikus $D = X \times Y$, kus $X = [0, \pi/2]$ ja $Y = [0, 1]$.
Teoreemi T 5.1.1. põhjal funktsioon $F(y)$ eksisteerib ja on pidev lõigus Y .
Seega (vt. MAP I, § 2.3)

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} F(y) = F(1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 x} \, dx = 1.$$

N 5.1.3. Leida funktsiooni

$$F(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) \, dx, \quad y \in [1, 10]$$

tuletis $F'(y)$, kasutades Leibnizi valemit (2).

Lahendus. Teoreemi T 5.1.2 eeldused on täidetud, sest $f(x, y) =$
 $= \ln(x^2 + y^2)$ ja $f_y = 2y/(x^2 + y^2)$ on pidevad kinnises ristkülikus $D = [0, 1] \times$
 $\times [1, 10]$. Seega $y \in (1, 10)$ korral võime teoreemi T 5.1.2 põhjal kirjutada

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{2y \, dx}{x^2 + y^2} = 2 \int_0^1 \frac{d(x/y)}{(x/y)^2 + 1} = 2 \arctan(1/y).$$

N 5.1.4. Leida funktsiooni

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \cos(y \sin x) \, dx$$

integraal

$$J = \int_0^1 F(y) \, dy.$$

Lahendus. Integraali-
alune funktsioon on pidev ristkülikus $[0, \pi/2] \times$
 $\times [0, 1]$. Teoreemi T 5.1.3 põhjal võime kirjutada, arvestades, et $\sin x \, dy =$
 $= d(y \sin x)$,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 \cos x \sin x \cos(y \sin x) \, dy = \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \cos x \int_0^1 \cos(y \sin x) \, d(y \sin x) = \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \cos x \sin(y \sin x) \Big|_0^1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \sin \sin x \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \sin x \, d \sin x = 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

N 5.1.5. Leida integraal

$$J = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} \sin \ln x \, dx,$$

kasutades võrdust

$$\frac{x^2 - x}{\ln x} = \int_1^2 x^y \, dy.$$

Lahendus. Antud võrduse põhjal võime kirjutada

$$J = \int_0^1 dx \int_1^2 x^y \sin \ln x \, dy.$$

Vaatleme integraalimärgi all olevat funktsiooni

$$f(x, y) = x^y \sin \ln x$$

integraalide rajadega määratud ristkülikus $D = [0, 1] \times [1, 2]$. Funktsioon f on pidev selles ristkülikus D peale sirge $x=0$. Et aga

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

siis katkevus sirgel $x=0$ on kõrvaldatav. Seepärast võime lugeda, et funktsioon f on pidev kinnises ristkülikus D . Teoreemi T 5.1.3 põhjal võime siis integreerimise järjekorda muuta ja me saame

$$J = \int_1^2 F(y) dy, \quad \text{kus} \quad F(y) = \int_0^1 x^y \sin \ln x dx.$$

Teeme nüüd muutuja vahetuse $\ln x = -t$. Siis

$$F(y) = - \int_0^{\infty} e^{-(y+1)t} \sin t dt = - \frac{1}{1+(y+1)^2}.$$

Järelikult

$$J = - \int_1^2 \frac{dy}{1+(y+1)^2} = \arctan 2 - \arctan 3.$$

N 5.1.6. Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leida integraal

$$J(a) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \frac{dx}{\sin x},$$

kus $a^2 < 1$.

L a h e n d u s. Integraalialune funktsioon $f(x, a)$ on määratud ristkülikus $D = X \times A$, kus $X = [0, \pi/2]$ ja $A = (-1, 1)$. Et piirkond D oleks kinnine, võtame küllalt väikese $\varepsilon > 0$ korral osaristküliku $D_\varepsilon = X \times A_\varepsilon$, kus $A_\varepsilon = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ on juba lõik. Funktsioon $f(x, a)$ on pidev ristkülikus D_ε peale sirge $x=0$, kus tal on katkevus. Et aga

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, a) = 2a,$$

siis katkevus on kõrvaldatav. Võttes $f(0, a) = 2a$, muutub funktsioon f pidevaks kogu piirkonnas D_ε . Seega teoreemi T 5.1.1 põhjal funktsioon $J(a)$ eksisteerib ja on pidev $a \in A_\varepsilon$ korral.

Et kasutada teoreemi T 5.1.2 diferentseerimiseks parameetri a järgi integraalimärgi all, tuleb veel uurida osatuletise f_a pidevust. Leidnud selle osatuletise

$$f_a(x, a) = \begin{cases} \frac{2}{1-a^2 \sin^2 x}, & \text{kui } x \neq 0 \\ 2, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

näeme, et ta on pidev piirkonnas D_ε , sest sirgel $x=0$ saame

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_a(x, a) = 2 = f_a(0, a).$$

Seega teoreemi T 5.1.2 eeldused on kinnises piirkonnas D_ε täidetud ja valemi (2) põhjal saame

$$J'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2 dx}{1 - a^2 \sin^2 x},$$

kui $a \in (-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Saadud integraalis teeme muutuja vahetuse $\tan x = t$. Saame ratsionaalse funktsiooni integraali (vt. MAP I, § 6.5). Leidnud selle integraali, me saame

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Nüüd võime otsitava integraali $J(a)$ avaldada kujul

$$J(a) = \int J'(a) da = \int \frac{\pi da}{\sqrt{1 - a^2}} = \pi \arcsin a + C.$$

Integreerimiskonstandi C määramiseks võtame viimases avaldises $a = 0$, siis $J(0) = C$. Et lähteavaldise põhjal on

$$J(0) = \int_0^{\pi/2} 0 dx = 0,$$

siis $C = 0$ ja saame, et $a \in (-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ korral on

$$J(a) = \pi \arcsin a,$$

mis ε suvalisuse tõttu kehtib iga $a^2 < 1$ korral.

N 5.1.7. Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leida integraal

$$J(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx,$$

kus $a, b > 0$.

L a h e n d u s. Integraalilune funktsioon

$$f(x, a, b) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)$$

on pidev vaadeldavas piirkonnas, samuti ka osatuletis f_a . Teoreemi T 5.1.2 põhjal võime iga lõigu $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ korral diferentseerida parameetri $a \in (\alpha, \beta)$ järgi integraalimärgi all, saame

$$J_a = \int_0^{\pi/2} \frac{2a \cos^2 x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{2a dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x}.$$

Saadud integraalis teeme muutuja vahetuse $\tan x = t$ (vt. MAP I, § 6.5),

$$J_a = \int_0^{\infty} \frac{2a dt}{(1+t^2)(a^2 + b^2 t^2)}.$$

Saime integraali ratsionaalsest funktsioonist. Leides selle (vt. MAP I, § 6.4), saame

$$J_a = \frac{\pi}{a+b}.$$

Nüüd võime otsitava integraali avaldada kujul

$$J(a, b) = \int J_a da = \pi \ln(a+b) + C(b),$$

kus integreerimiskonstant $C(b)$ võib sõltuda parameetrist b . Konstandi $C(b)$ määramiseks võtame saadud avaldises $a = b$, siis

$$J(b, b) = \pi \ln 2b + C(b).$$

Et lähteavaldise põhjal on

$$J(b, b) = \int_0^{\pi/2} \ln b^2 dx = \pi \ln b,$$

siis oleme saanud võrduse

$$\pi \ln b = \pi \ln 2b + C(b),$$

kust $C(b) = -\pi \ln 2$.

Seega oleme saanud vastuseks, et

$$J(a, b) = \pi \ln(a+b) - \pi \ln 2.$$

Ülesanded

Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad (vt. näide N 5.1.1).

$$716. F(y) = \int_0^3 e^{-xy} dx, y \in [0, 1]$$

$$717. F(y) = \int_{-3}^7 \frac{\sin(xy)}{x} dx, y \in [-2, 10]$$

$$718. F(y) = \int_1^{\pi/2} \ln \sin(x+y) dx, y \in [0, \pi/4]$$

$$719. F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) dx, y \in [0, 1]$$

$$720. F(y) = \int_{2y}^{4y} \frac{\cos(x+y)}{x} dx, y \in [1, 4]$$

$$721. F(y) = \int_0^{y^2} \frac{\arcsin(x/y)}{x} dx, y \in [1, 2]$$

$$722. F(y) = \int_{-|y|}^0 \frac{\arctan(x/y)}{x} dx, y \in [-10, 10]$$

Leida järgmised piirväärtused (vt. näide N 5.1.2).

$$723. \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^3 x^2 \cos(xy) dx$$

$$724. \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \operatorname{sh}^2 y} dx$$

$$725. \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1+xy)^{1/y}}$$

$$726. \lim_{y \rightarrow 2+} \int_1^e \frac{1}{x} \arctan \frac{x}{y-2} dx$$

$$727. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + (1+x/n)^n}$$

$$728. \lim_{y \rightarrow 0} \int_1^{3-y} x^2 \cos^2(xy) dx$$

$$729. \lim_{y \rightarrow 0} \int_{y-2}^{1+y} \sqrt{x^2 + \operatorname{th}^2 y} dx$$

$$730. \lim_{y \rightarrow 1} \int_0^{\pi y/2} \sin(x + \arcsin y) dx$$

Leida järgmiste funktsioonide $F(y)$ tuletised $F'(y)$ teoreemi T 5.1.2 põhjal (vt. näide N 5.1.3).

$$731. F(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx$$

$$734. F(y) = \int_1^{y^2} \frac{\cos(xy)}{x} dx$$

$$732. F(y) = \int_1^{\pi} \frac{\cos(xy^2)}{x} dx$$

$$735. F(y) = \int_0^{2+y} \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$$

$$733. F(y) = \int_0^2 \frac{\arcsin(xy)}{x} dx$$

$$736. F(y) = \int_y^{2y} \frac{\sin(xy)}{x} dx$$

Leida järgmiste funktsioonide $F(y)$ integraalid

$$J = \int_0^1 F(y) dy$$

teoreemi T 5.1.3 põhjal (vt. näide N 5.1.4).

$$737. F(y) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \cos(y \cos x) dx$$

$$738. F(y) = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos \sin x \cos(y \sin x) dx$$

$$739. F(y) = \int_0^1 (x + e^x - x^y \ln x) dx$$

$$740. F(y) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{\sin x} - 2\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x} \right) dx$$

Leida järgmised integraalid J , kasutades märgitud valemeid (vt. näide N 5.1.5).

$$741. J = \int_0^1 \frac{x^3 - x^2}{\ln x} \sin \ln x dx, \quad \frac{x^3 - x^2}{\ln x} = \int_2^3 x^y dy$$

$$742. J = \int_0^1 \frac{x^6 - 1}{\ln x} dx, \quad \frac{x^6 - 1}{\ln x} = \int_0^6 x^y dy$$

$$743. J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a, b > 0), \quad \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

Leida järgmiste funktsioonide osatuletised.

$$744. F(y, z) = \int_0^{1+z} x^{-1} \ln(1+xy) dx$$

$$745. F(y, z) = \int_y^z x^{-1} e^{xyz} dx$$

Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leida järgmised integraalid $J(a)$ (vt. näide N 5.1.6).

$$746. J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx, \quad |a| < 1$$

$$747. J(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$$

$$748. J(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx, \quad |a| < 1$$

$$749. J(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx, \quad |a| > 1$$

Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leida järgmised integraalid $J(a, b)$, kus $a, b > 0$ (vt. näide N 5.1.7).

$$750. J(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

$$751. J(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos \ln x dx$$

$$752. J(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx$$

§ 5.2. PARAMEETRIST SÕLTUVAD PÄRATUD INTEGRAALID

Vaatleme parameetrist sõltuvat päratut integraali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (8)$$

kus ülemine raja b on kas lõplik ja funktsioon $f(x, y)$ on punkti $x=b$ ümbruses mõne y korral tõkestamata või $b=\infty$. Seejuures eeldame, et integraal (8) koondub iga $y \in Y$ korral, s. t. on ole-

mas lõplik piirväärtus

$$F(y) = \lim_{l \rightarrow b-} \int_a^l f(x, y) dx.$$

Kui $b = \infty$, siis $l \rightarrow b$ — tähendab piirprotsessi $l \rightarrow \infty$.

Vaatleme ülemise raja b vasakpoolseid ümbrusi $U_c = (c, b)$.

D 5.2.1. Koonduvat integraali (8) nimetatakse ühtlaselt koonduvaks piirkonnas Y , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub selline raja b vasakpoolne ümbrus U_c , et

$$\left| F(y) - \int_a^l f(x, y) dx \right| = \left| \int_l^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

kui $l \in U_c$, sõltumata parameetrist $y \in Y$.

Integraali (8) ühtlast koonduvust uuritakse järgmiste piisavate tunnuste PT 5.2.1 — 5.2.4 abil.

PT 5.2.1. (Weierstrassi tunnus). Integraal (8) koondub ühtlaselt (ja absoluutselt) piirkonnas Y , kui leidub selline funktsioon $g(x)$, et

1° $|f(x, y)| \leq g(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral, sõltumata parameetrist $y \in Y$,

2° $\int_a^b g(x) dx < \infty$, s. t. koondub.

PT 5.2.2. Integraal (8) koondub ühtlaselt piirkonnas Y , kui

1° $f(x, y) = g(x)h(x, y)$, kus funktsioonid g ja h on pidevad x järgi ning g on monotoonne ja omab pidevat tuletist,

2° $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$,

3° leidub konstant $K > 0$, et

$$\left| \int_a^l h(x, y) dx \right| \leq K$$

iga $l \in [a, b)$ ja $y \in Y$ korral.

PT 5.2.3. Integraal (8) koondub ühtlaselt piirkonnas Y , kui

1° $f(x, y) = g(x)h(x, y)$, kus funktsioonid g ja h on pidevad x järgi ning h on monotoonne x järgi ja omab pidevat tuletist x järgi,

2° integraal $\int_a^b g(x) dx$ koondub,

3° leidub konstant $K > 0$, et

$$|h(x, y)| \leq K$$

iga $x \in [a, b)$ ja $y \in Y$ korral.

Olgu funktsioon f antud ristkülikus $D = X \times Y$, kus $X = [a, b)$ ja $Y = [c, d]$.

PT 5.2.4. Integraal (8) koondub ühtlaselt lõigus Y , kui

1° $f(x, y) \geq 0$ iga $(x, y) \in D$ korral,

2° funktsioon f on pidev ristkülikus D ,

3° funktsioon (8) on pidev lõigus Y .

Järgmised teoreemid T 5.2.1 — T 5.2.3 annavad tingimused funktsiooni (8) pidevuseks ning diferentseerimiseks ja integreerimiseks parameetri järgi integraalimärgi all.

T 5.2.1. Kui

1° funktsioon f on pidev ristkülikus D ,

2° integraal (8) koondub ühtlaselt lõigus Y ,

siis funktsioon (8) on pidev lõigus Y .

Teoreemi T 5.2.1 eeldustel iga $y_0 \in Y$ korral kehtib seega võrdus

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = F(y_0)$$

ehk

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx,$$

kust on näha, et teoreemi T 5.2.1 eeldustel võib piirile minna integraalimärgi all.

T 5.2.2. Kui

1° funktsioon f ja tema osatuletis f_x on pidevad ristkülikus D ,

2° integraal (8) koondub lõigus Y ,

3° integraal $\int_a^b f_y(x, y) dx$ koondub ühtlaselt lõigus Y ,

siis iga $y \in (c, d)$ korral on funktsioon (8) diferentseeruv ja kehtib võrdus

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (9)$$

Arvestades võrdust (8), võime valemi (9) kirjutada ka kujul

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx, \quad (10)$$

kust on näha, et teoreemi T 5.2.2 eeldustel võib integraali (8) diferentseerida parameetri y järgi integraalimärgi all, s. o. muuta integreerimise ja diferentseerimise järjekorda.

T 5.2.3. Kui

1° funktsioon f on pidev ristkülikus D ,

2° integraal (8) koondub ühtlaselt lõigus Y ,

siis kehtib võrdus

$$\int_c^d F(y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (11)$$

Arvestades võrdust (8), võime valemi (11) kirjutada ka kujul

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (12)$$

kust on näha, et teoreemi T 5.2.3 eeldustel võib integraali (8) integreerida parameetri y järgi integraalimärgi all, s. o. muuta integreerimise järjekorda.

Näited

N 5.2.1. Näidata, et integraal

$$J(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos xy \, dx$$

koondub ühtlaselt ja absoluutselt piirkonnas $Y = (-\infty, \infty)$.

L a h e n d u s. Et

$$|e^{-x} \cos xy| \leq e^{-x}$$

iga $y \in (-\infty, \infty)$ korral, siis funktsioon $g(x) = e^{-x}$ täidab Weierstrassi tunnuse PT 5.2.1 tingimusi. Selle tunnuse põhjal integraal $J(y)$ koondub ühtlaselt ja absoluutselt piirkonnas $Y = (-\infty, \infty)$.

N 5.2.2. Näidata, et integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-vx} \frac{\sin zx}{x} \, dx$$

koondub ühtlaselt hulgas $Y = [0, \infty)$ iga $z \in (-\infty, \infty)$ korral.

L a h e n d u s. Saame kasutada tunnust PT 5.2.3. Fikseerime mingi z ja jaotame integraalialuse funktsiooni $f(x, y, z)$ kaheks teguriks

$$f(x, y, z) = g(x)h(x, y),$$

kus

$$g(x) = \frac{\sin zx}{x}, \quad h(x, y) = e^{-vx}.$$

Tunnuse PT 5.2.3 eeldused 1° ja 3° on täidetud. Eelduse 2° täidetus, s. o. integraali

$$\int_0^{\infty} g(x) \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin zx}{x} \, dx$$

koonduvus, järeldeb tunnusest KT 7.4.5 (MAP I).

Seega tunnuse PT 5.2.3 põhjal vaadeldav integraal koondub ühtlaselt hulgas $Y = [0, \infty)$ iga $z \in (-\infty, \infty)$ korral.

N 5.2.3. Näidata, et funktsioon

$$F(y) = \int_1^{\infty} \frac{x \cos(x+y)}{1+x^2} \, dx$$

on pidev piirkonnas $Y = (-\infty, \infty)$.

L a h e n d u s. Piisab sellest, kui näidata, et funktsioon $F(y)$ on pidev igas lõigus $[c, d] \subset (-\infty, \infty)$. Selleks vaatleme integraalialust funktsiooni $f(x, y)$ ristkülikus $D = [1, \infty) \times [c, d]$ ja kasutame teoreemi T 5.2.1.

Ristkülikus D funktsioon $f(x, y)$ on pidev. Jaotades funktsiooni $f(x, y)$ teguriteks

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad h(x, y) = \cos(x+y),$$

näeme, et tegurid g ja h rahuldavad ühtlase koonduvuse tunnuse PT 5.2.2 eel-

dusi. Järelikult selle tunnuse põhjal vaadeldav integraal koondub ühtlaselt lõigus $[c, d]$.

Teoreemi T 5.2.1 põhjal funktsioon $F(y)$ on pidev lõigus $[c, d]$. Mott.

N 5.2.4. Kasutades diferentseerimist parameetri a järgi, leida integraal

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2(1 - x^2)^{1/2}} dx, \quad |a| < 1.$$

L a h e n d u s. Diferentseerimiseks parameetri järgi kasutame teoreemi T 5.2.2. Selleks kontrollime kõigepealt, kas teoreemi eeldused on täidetud.

Valime suvalise kui tahes väikese arvu $\varepsilon > 0$ ja vaatleme integraalialust funktsiooni $f(x, a)$ riskülikus $D_\varepsilon = X \times A_\varepsilon$, kus $X = [0, 1)$ ja $A_\varepsilon = [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Arvu $\varepsilon > 0$ abil piirame parameetri a muutumisulatust, sest teoreemis T 5.2.2 peab parameeter muutuma lõigus.

Riskülikus D_ε on funktsioon f tõkestamata $x=1$ ümbruses iga $a \neq 0$ korral. Seega on tegemist päratu integraaliga. Rajasirgel $x=0$ on funktsioonil f kõrvaldatav katkevus, sest

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, a) = -a^2.$$

Lisame funktsioonile f väärtused

$$f(0, a) = -a^2,$$

siis muutub ta pidevaks kogu riskülikus D_ε .

Leiame osatuletise f_a :

$$f_a(x, a) = \begin{cases} \frac{-2a}{(1 - a^2 x^2)(1 - x^2)^{1/2}}, & \text{kui } 0 < x < 1 \\ -2a, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Näeme, et osatuletis f_a on pidev kogu riskülikus D_ε , sest ka sirgel $x=0$ on

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_a(x, a) = f_a(0, a).$$

Seega teoreemi T 5.2.2 eeldus 1° on täidetud.

Uurime integraali koonduvust. Iga $a \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ korral on

$$f(x, a) \sim \frac{M}{|1 - x|^{1/2}},$$

kui $x \rightarrow 1$, kus $M = \ln(1 - a^2)/2^{1/2}$. Tunnuse KT 7.3.1 (MAP I) põhjal antud integraal koondub. Seega teoreemi T 5.2.2 eeldus 2° on täidetud.

Leiame majorandi $g(x)$ osatuletisele f_a piirkonnas D_ε . Olgu $c = 1 - \varepsilon$, siis

$$|f_a(x, a)| \leq \frac{2a}{(1 - c^2 x^2)(1 - x^2)^{1/2}} \leq \frac{2c}{(1 - c^2)(1 - x^2)^{1/2}} = g(x).$$

Et

$$\int_0^1 g(x) dx < \infty,$$

siis Weierstrassi tunnuse PT 5.2.1 põhjal päratu integraal

$$\int_0^1 f_a(x, a) dx$$

koondub ühtlaselt lõigus A_ε . Seega ka teoreemi T 5.2.2 eeldus 3° on täidetud.

Tulemuseks oleme saanud, et teoreemi T 5.2.2 eeldused on täidetud ja seega iga $a \in A_\varepsilon$ korral kehtib valem (9), mille põhjal

$$F'(a) = \int_0^1 f_a(x, a) dx = \int_0^1 \frac{-2a dx}{(1 - a^2 x^2)(1 - x^2)^{1/2}}.$$

Viimase integraali arvutamiseks teeme muutuja vahetuse $x = \cos \varphi$, siis

$$F'(a) = - \int_0^{\pi/2} \frac{2a \, d\varphi}{1 - a^2 \cos^2 \varphi}.$$

Teeme nüüd muutuja vahetuse $\tan \varphi = t$. Siis $\cos^2 \varphi = 1/(1+t^2)$ ja me saame

$$F'(a) = - \int_0^{\infty} \frac{2a \, dt}{1 - a^2 + t^2} = - \frac{2a}{\sqrt{1 - a^2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{1 - a^2}} \Big|_0^{\infty} = - \frac{\pi a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Integreerime tulemust parameetri a järgi:

$$F(a) = \int F'(a) \, da = -\pi \int \frac{a \, da}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\pi}{2} \int \frac{d(1 - a^2)}{\sqrt{1 - a^2}} = \pi \sqrt{1 - a^2} + C.$$

Seega

$$F(a) = \pi \sqrt{1 - a^2} + C.$$

Konstandi C määramiseks võtame viimases võrduses $a = 0$. Siis

$$F(0) = \pi + C.$$

Et lähteintegraali põhjal on $F(0) = 0$, siis peab olema $C = -\pi$. Seega saame vastuseks

$$F(a) = \pi \sqrt{1 - a^2} - \pi,$$

kui $a \in A_\varepsilon = [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Et $\varepsilon > 0$ on suvaline kui tahes väike arv, siis saadud vastus kehtib iga a korral, mis täidab tingimust $|a| < 1$.

Ülesanded

Näidata, et järgmised integraalid koonduvad ühtlaselt ja absoluutselt antud piirkonnas Y (vt. näide N 5.2.1).

753. $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin xy \, dx$, $Y = (-\infty, \infty)$

754. $\int_0^1 \frac{\arctan(x-y)}{\sqrt{1-x}} \, dx$, $Y = (-\infty, \infty)$

755. $\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx$, $Y = [a, \infty)$, $a > 0$

756. $\int_0^2 \frac{x^y}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$, $Y = (-\ln 2, 8)$

757. $\int_0^1 \frac{\sin(x-y \cos x)}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx$, $Y = (-\infty, \infty)$

758. $\int_1^2 \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x-y}} \, dx$, $Y = [0, 1]$

$$759. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(xy)}{1+x^2} dx, Y = (-\infty, \infty)$$

$$760. \int_1^2 \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx, Y = (-\infty, \infty)$$

Näidata, et järgmised integraalid koonduvad ühtlaselt antud piirkonnas Y (vt. näide N 5.2.2).

$$761. \int_0^{\infty} \frac{x \sin(xy)}{1+x^2} dx, Y = [a, \infty), a > 0$$

$$762. \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx, Y = [0, \infty)$$

$$763. \int_0^1 \frac{\arctan(x+y)}{\sqrt{1-x^y}} dx, Y = (2, \infty)$$

$$764. \int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x^y} dx, Y = [0, e-1]$$

$$765. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} dx, Y = (-\infty, \infty)$$

Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas (vt. näide N 5.2.3).

$$766. F(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}(x-y)}{\sqrt{1-x}} dx, y \in (-\infty, \infty)$$

$$767. F(y) = \int_1^{\infty} \frac{x \sin(x+y)}{1+x^2} dx, y \in (-\infty, \infty)$$

$$768. F(y) = \int_1^{\infty} \frac{x dx}{2+x^{y+2}}, y \in [a, \infty), a > 0$$

$$769. F(y) = \int_0^3 \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{3-x}} dx, y \in (-\infty, \infty)$$

Leida järgmised piirväärtused.

$$770. \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\ln 3}^{\infty} x^y e^{-2x} dx$$

$$771. \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} dx$$

Kasutades diferentseerimist parameetri a järgi, leida järgmised integraalid (vt. näide N 5.2.4).

$$772. J(a) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x^2) - \exp(-ax^2)}{x} dx, a > 0$$

$$773. J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^x} dx, a > -1$$

$$774. J(a) = \int_0^1 \frac{\arctan ax}{x \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$775. J(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, a > 0, b > 0$$

$$776. J(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx, a > 0, b > 0$$

$$777. J(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a + b \tan^2 x) dx, b > a > 0$$

$$778. J(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx, a > 0, b \in \mathbf{R}.$$

779. Lähtudes integraalidest

$$J(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx, a \geq 0, b \in \mathbf{R},$$

leida piirprotsessi $a \rightarrow 0$ abil Dirichlet' integraal

$$J(b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx.$$

Leida järgmiste funktsioonide $F(y)$ integraalid

$$J = \int_0^1 F(y) dy$$

teoreemi T 5.2.3 põhjal.

$$780. F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^y \ln x \, dx \qquad 781. F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2y} \ln x \, dx$$

$$782. F(y) = \int_0^1 (-\ln x)^y \ln(-\ln x) \, dx$$

$$783. F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \, dx}{\sqrt{1-y^2 \sin^2 x}}$$

Leida järgmised integraalid J , kasutades märgitud valemeid.

$$784. J(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx, \quad \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} \, dy$$

$$785. J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} \, dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

$$786. J(a) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 \, dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

$$787. J = \int_0^1 \frac{\arctan x \, dx}{x(1-x^2)^{1/2}}, \quad \frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

$$788. J = \int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-xy^2) \, dy$$

$$789. J = \int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-xy^2) \, dy$$

790. Lähtudes seosest

$$J^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx \int_0^{\infty} x e^{-x^2y^2} \, dy,$$

arvutada Euler-Poisson'i integraal

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Leida järgmised integraalid, kasutades ülesande 790 vastust ja diferentseerimist parameetrite $a > 0$ ja $b > 0$ järgi.

$$791. F(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-ax^2) - \cos bx}{x^2} \, dx$$

$$792. F(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-ax^2) - \exp(-bx^2)}{x^2} \, dx.$$

793. Tõestada, et kui

1° funktsioon $f(x)$ on pidev $x \geq 0$ korral,

2° eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty)$,

3° integraal $\int_0^{\infty} f'(cx) dx$ koondub ühtlaselt $0 < a \leq c \leq b$ korral, siis

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(\infty) - f(0)] \ln \frac{a}{b}.$$

794. Tõestada, et kui

1° funktsioon $f(x)$ on pidev $x \geq 0$ korral,

2° integraal $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ koondub iga $c > 0$ korral,

siis $a > 0$ ja $b > 0$ korral

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

§ 5.3. EULERI INTEGRAALID

Euleri esimest liiki integraaliks ehk beeta-funktsiooniks nimetatakse kahest parameetrist sõltuvat päratut integraali

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad (13)$$

mis eksisteerib, kui $a > 0$ ja $b > 0$. Kui ühegi parameetri a või b väärtus on väiksem kui null või võrdub nulliga, siis integraal (13) hajub.

Beetafunktsioonil on järgmised omadused.

1. Beetafunktsioon on sümmeetriline oma argumentide suhtes, s. o. $B(a, b) = B(b, a)$.

2. Kui $a > 1$ ja $b > 0$, siis kehtib taandamisvalem

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \quad (14)$$

3. Kui $0 < a < 1$, siis kehtib täiendusvalem

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad (15)$$

Erijuhul, kui n on naturaalarv, saame taandamisvalemist (14) valem

$$B(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1) \dots (a+n-1)}. \quad (16)$$

Euleri teist liiki integraaliks ehk gamma-funktsiooniks nimetatakse parameetrist sõltuvat päratut integraali

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad (17)$$

mis eksisteerib, kui $a > 0$. Kui $a \leq 0$, siis integraal (17) hajub.

Gammafunktsioonil on järgmised omadused:

1) kui $a > 0$, siis kehtib taandamisvalem

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad (18)$$

2) kui $0 < a < 1$, siis kehtib täiendusvalem

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad (19)$$

Erijuhul, kui n on naturaalarv, saame taandamisvalemist (18) valemid

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (20)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (21)$$

Valemist (20) on näha, et võrdusega $x! = \Gamma(x+1)$ me võime faktoriaali mõiste üldistada mis tahes reaalarvule $x \geq 0$.

Beeta- ja gammafunktsioon on iga $a, b > 0$ korral omavahel seotud võrdusega

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (22)$$

Kehtib Euleri-Gaussi valem

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{a(a+1) \dots (a+n)}. \quad (23)$$

Valemis (23) piirväärtus eksisteerib ja on lõplik ka negatiivsete mittetäisarvude korral. Seetõttu seda valemit (23) saab kasutada Euleri integraalide mõiste laiendamiseks negatiivsetele mittetäisarvudele. Selleks saab kasutada ka täiendusvalemeid (19) ja (15).

Taandamisvalemid (14) ja (18) võimaldavad Euleri integraalide arvutamist viia väiksemate argumentide juurde.

Muutujate vahetusega saab Euleri integraalidele anda mitmesuguseid erinevaid kujusid. Näiteks kui võtta $x = t/(1+t)$, siis

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt. \quad (24)$$

Kui $x = -\ln t$, siis

$$\Gamma(a) = \int_0^1 (-\ln t)^{a-1} dt. \quad (25)$$

Euleri integraalide jaoks on koostatud üksikasjalikud väärtuste tabelid ja neid saab seetõttu kasutada mitmesuguste määratud integraalide arvutamiseks (vt. näited N 5.3.1 ja N 5.3.2). Euleri integraalid ei ole elementaarfunktsioonid.

Näited

N 5.3.1. Arvutada integraal

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x \, dx,$$

kasutades Euleri integraale.

L a h e n d u s. Teeme muutuja vahetuse $\sin^2 x = t$, siis vaadeldav integraal avaldub beetafunktsiooni kaudu:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{3/2} (1-t)^{1/2} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Valemi (22) põhjal avaldame selle integraali gammafunktsiooni kaudu:

$$J = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)}.$$

Rakendame nüüd integraalile $\Gamma(5/2)$ taandamisvalemit (18) ja integraalile $\Gamma(4)$ valemit (20), saame

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{3!} = \frac{1}{8} \Gamma^2(3/2).$$

Rakendame veel kord taandamisvalemit (18), saame

$$J = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{32} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Lõpuks täiendusvalemi (19) põhjal (võttes seal $a=1/2$), saame

$$J = \frac{1}{32} \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{32}.$$

N 5.3.2. Arvutada integraal

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

L a h e n d u s. Teeme muutuja vahetuse $x^3 = t$. Siis valemi (24) põhjal

$$J = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{t^{-2/3}}{1+t} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Rakendades täiendusvalemit (15), saame vastuseks

$$J = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3 \cdot 3^{1/2}}.$$

Ülesanded

Arvutada järgmised integraalid, kasutades Euleri integraale (vt. näited N 5.3.1 ja N 5.3.2).

795. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x \, dx$

796. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

797. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$

800. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

798. $\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{(1+x)^2} dx$

801. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$

799. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \cos^9 x dx$

802. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$

Avaldada järgmised integraalid Euleri integraalide kaudu.

803. $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx \quad (p > -1)$

804. $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x)^{n+1}} \quad (n > m > 1)$

805. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^m)^{1/n}} \quad (m > 0)$

806. $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx \quad (m, n > -1)$

Leida järgmised integraalid

807. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \ln x}{1+x} dx \quad (0 < a < 1)$

808. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \ln^2 x}{1+x} dx \quad (0 < a < 1)$

Kasutades võrdust

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt} dt,$$

kus $x > 0$, leida järgmised integraalid.

809. $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^n} dx \quad (0 < n < 1)$

811. $\int_0^\infty \sin x^2 dx$

810. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^n} dx \quad (0 < n < 2)$

812. $\int_0^\infty \cos x^2 dx$

§ 5.4. FOURIER' INTEGRAAL

Olgu funktsioon $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ integreeruv igas lõigus $[-c, c]$.

D 5.4.1. Päratu integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (26)$$

Cauchy peaväärtuseks nimetatakse piirväärtust

$$v. p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z f(x) dx. \quad (27)$$

Võrdusest (27) on näha, et kui funktsioon f on paarisfunktsioon, siis

$$v. p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (28)$$

ja kui f on paaritu funktsioon, siis

$$v. p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0. \quad (29)$$

T 5.4.1. Kui eksisteerib päratu integraal (26), siis kehtib võrdus

$$v. p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

s. t., kui integraal (26) eksisteerib, siis tema Cauchy peaväärtus on võrdne selle integraaliga (26).

Käesolevas paragrahvis tuleb kõikides valemities, kus esineb integraal (26), võtta tema Cauchy peaväärtus.

D 5.4.2. Funktsiooni f Fourier' integraaliks nimetatakse integraali

$$\int_0^{\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy, \quad (30)$$

kus

$$\begin{cases} a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos yx dx \\ b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin yx dx, \end{cases} \quad (31)$$

ja kirjutatakse

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy. \quad (32)$$

Avaldises (32) pannakse tilde \sim asemele võrdusmärk = vaid siis, kui on teada, et integraal (30) koondub väärtuseks $f(x)$.

Avaldistest (30) ja (31) on näha, et Fourier' integraalil on suur sarnasus Fourier' reaga. Ta erineb viimasest selle poolest, et summa on asendatud integraaliga ja funktsiooni f vaadeldakse piirkonnas $(-\infty, \infty)$.

Valemite (31) abil võib Fourier' integraalile (30) anda kuju

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos y(x-t) dt. \quad (33)$$

Euleri valemi (vt. § 1.6) abil võib integraalile (33) anda veel nn. komplekskuju

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt. \quad (34)$$

Kui f on paarisfunktsioon, siis $b(y) = 0$ ja valem (32) esitub kujul

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} a(y) \cos xy dy, \quad (35)$$

kus

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos yx dx. \quad (36)$$

Integraali (35) nimetatakse funktsiooni f Fourier' koosinus-integraaliks.

Kui f on paaritu funktsioon, siis $a(y) = 0$ ja valem (32) esitub kujul

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} b(y) \sin xy dy, \quad (37)$$

kus

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin yx dx. \quad (38)$$

Integraali (37) nimetatakse funktsiooni f Fourier' siinus-integraaliks.

Fourier' integraali (32) koonduvuse uurimiseks kasutatakse järgmist tunnust.

PT 5.4.1. Olgu funktsioon f absoluutselt integreeruv piirkonnas $X = (-\infty, \infty)$.

Kui punktis $x \in X$ on olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x+)}{\Delta x}, \quad (39)$$

siis funktsiooni f Fourier' integraal (32) koondub punktis x väärtuseks

$$S(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Kui punktis $x \in X$ on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x-)$ ja $f'(x+)$, siis funktsiooni f Fourier' integraal (32) koondub punktis x väärtuseks $S(x) = f(x)$.

Rahuldagu funktsioon f koonduvustunnuse PT 5.4.1 eeldusi. Siis valemi (34) võime kirjutada võrdusmärgiga, s. o. kujul

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt, \quad (40)$$

kus $S(x) = f(x)$ igas punktis x , kus funktsioon f on pidev.

Tähistame

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx. \quad (41)$$

Siis integraal (40) esitub kujul

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy. \quad (42)$$

D 5.4.3. Avaldist (41) nimetatakse funktsiooni f Fourier' teisenenduseks ja avaldist (42) tolle pöördteisenenduseks. Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f Fourier' teisenendiks.

Kui f on paarisfunktsioon, siis valemid (41) ja (42) esituvad kujul

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos yx dx \quad (43)$$

ja

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \cos xy dy. \quad (44)$$

Võrdust (43) nimetatakse funktsiooni f Fourier' koosinusteisenenduseks ja võrdust (44) tema pöördteisenenduseks. Funktsiooni F nimetatakse sel korral funktsiooni f Fourier' koosinusteisenendiks.

Kui f on paaritu funktsioon, siis valemid (41) ja (42) esituvad kujul

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin yx dx \quad (45)$$

ja

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \sin xy \, dy. \quad (46)$$

Võrdust (45) nimetatakse funktsiooni f Fourier' siinusteisenduseks ja võrdust (46) tolle pöördteisenduseks. Funktsiooni F nimetatakse sel korral funktsiooni f Fourier' siinusteisendiks.

Kui funktsioon f on pidev punktis x , siis valemite (42), (44) ja (46) on $S(x) = f(x)$.

Kui funktsioon f on antud vaid piirkonnas $[0, \infty)$, siis alati võime teda kujutada kas paaris- või paaritu funktsioonina piirkonnas $(-\infty, \infty)$ ja seega leida talle soovi kohaselt kas Fourier' koosinusteisenduse (43) või siinusteisenduse (45) või mõlemad.

Kui valemis (41) on funktsioon $F(y)$ antud, siis võib seda valemite (41) vaadelda kui võrrandit, kus otsitavaks on funktsioon $f(x)$. Sel korral valem (42) on võrrandi (41) lahendusvalem.

Et integraalid (31) ja (32) ning (41) ja (42), samuti nende erijuhud, on parameetrist sõltuvad, siis võime nende arvutamisel kasutada kõiki võtteid, mis on antud paragrahvides 5.1 ja 5.2.

Näited

N 5.4.1. Leida funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{kui } |x| > 1 \end{cases}$$

Fourier' integraal.

Lahendus. Et f on paarisfunktsioon, siis kasutame valemite (35) ja (36). Valemite (36) põhjal saame

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos yx \, dx = \frac{2}{y} \sin y$$

ja valemite (35) põhjal

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} \cos xy \, dy,$$

mis ongi antud funktsiooni f Fourier' integraal.

Uurime veel Fourier' integraali koonduvust. Funktsioon f rahuldab koonduvustunnuse PT 5.4.1 eeldusi. Seepärast tema Fourier' integraal koondub ja koondub selle tunnuse põhjal väärtusteks

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pidevuspunktides } |x| \neq 1 \\ 1/2 & \text{katkevuspunktides } |x| = 1. \end{cases}$$

Seega, kui $|x| \neq 1$, on

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} \cos xy \, dy.$$

N 5.4.2. Leida funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{kui } |x| > 1 \end{cases}$$

Fourier' integraal komplekskujul.

L a h e n d u s. Kasutame valemit (34). Arvutame kõigepealt sisemise integraali peaväärtuse, saame Euleri valemi (vt. § 1.6) põhjal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt = \int_{-1}^1 e^{iy(x-t)} dt = -\frac{1}{iy} e^{iy(x-t)} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{ixy}}{y} 2 \sin y.$$

Asendades valemis (34) sisemise integraali saadud avaldisega, saame vastuseks

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} e^{ixy} dy.$$

Kirjutasime võrdusmärgi märgi \sim asemele eelmise näite N 5.4.1 põhjal, kus on sama funktsioon f .

Ülesanded

Leida järgmiste integraalide Cauchy peaväärtused.

813. v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

815. v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$

814. v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} x \cos x dx$

816. v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2} dx$

Leida järgmiste funktsioonide Fourier' integraalid (vt. näide N 5.4.1).

817. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| < a \\ 1/2, & \text{kui } |x| = a \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

819. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } |x| < a \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

818. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{kui } |x| \leq a \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

820. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } |x| \leq a \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

821. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)$, kus $b > a$

822. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{kui } x \geq 0 \\ 0, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$

823. $f(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$, kus $a > 0$

824. $f(x) = \frac{x}{a^2+x^2}$, kus $a > 0$

825. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } |x| \leq \pi \\ 0, & \text{kui } |x| > \pi \end{cases}$

$$826. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } |x| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{kui } |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Leida järgmiste funktsioonide Fourier' integraalid komplekskujus (vt. näide N 5.4.2).

$$827. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| < a \\ 1/2, & \text{kui } |x| = a \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$$

$$828. f(x) = \exp(-x^2)$$

$$829. f(x) = x \exp(-x^2)$$

Leida järgmiste funktsioonide f Fourier' teisendid F .

$$830. f(x) = e^{-a|x|}, \text{ kus } a > 0$$

$$831. f(x) = xe^{-a|x|}, \text{ kus } a > 0$$

$$832. f(x) = \exp(-x^2/2) \cos ax$$

833. Leida funktsiooni $f(x) = e^{-ax}$, kus $a > 0$ ja $x \geq 0$, Fourier' koosinusteisend.

834. Leida funktsiooni $f(x) = e^{-ax}$, kus $a > 0$ ja $x \geq 0$, Fourier' siinusteisend.

835. Näidata, et funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

langeb kokku oma Fourier' teisendiga.

836. Leida funktsiooni $f(x) = e^{-x}$, kus $0 < x < \infty$, Fourier' koosinus-integraal.

837. Leida funktsiooni $f(x) = e^{-x}$, kus $0 < x < \infty$, Fourier' siinus-integraal.

838. Leida funktsioon f , kui

$$\frac{y}{1+y^2} = \int_0^{\infty} f(x) \cos yx \, dx.$$

839. Leida funktsioon f , kui

$$e^{-y} = \int_0^{\infty} f(x) \sin yx \, dx, \quad y > 0.$$

VI. KORDSED INTEGRAALID

§ 6.1. KAHEKORDNE INTEGRAAL

Olgu funktsioon $f(x, y)$ antud tõkestatud kinnises mõõtuvas piirkonnas D , mille pindala olgu S_D . Jaotame piirkonna D joontega, mille pindala on null, kinnisteks mõõtuvateks osapiirkondadeks D_1, D_2, \dots, D_n , mille pindalad olgu vastavalt S_1, S_2, \dots, S_n . Võtame igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_i \in D_i$ ja moodustame summa

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(P_i) S_i.$$

Summat $\sigma(f)$ nimetatakse funktsiooni f integraalsummaks piirkonnas D .

Olgu λ osapiirkondade D_i suurim diameeter.

D 6.1.1. Arvu J nimetatakse funktsiooni f kahekordseks integraaliks üle piirkonna D , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma(f)| < \varepsilon, \text{ kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata piirkonna D jaotamisviisist osadeks D_i ja punktide $P_i \in D_i$ valikust. Sel korral funktsiooni f nimetatakse integreeruvaks piirkonnas D ja kirjutatakse

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy \text{ ehk } J = \iint_D f dS. \quad (1)$$

Piirkonda D nimetatakse integreerimispiirkonnaks. Kõigi integreeruvate funktsioonide hulka hakkame märkima sümbooliga L_D .

TT 6.1.1. Funktsiooni integreeruvuseks mingis piirkonnas on tarvilik, et ta oleks tõkestatud selles piirkonnas.

Kuid iga tõkestatud funktsioon ei ole integreeruv. Funktsiooni integreeruvuse määramiseks kasutatakse järgmisi tunnuseid.

PT 6.1.1. Kinnises piirkonnas pidev funktsioon on integreeruv selles piirkonnas.

PT 6.1.2. Tõkestatud funktsioon, mis on antud piirkonnas katkev lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel, mille pindala on null, on integreeruv selles piirkonnas.

Kahekordses integraalis võib funktsiooni väärtusi muuta (kõrvaldada, lisada) lõplikus arvus punktides ja lõplikul arvul joontel,

mille pindala on null. See ei muuda integraali ega mõjusta tema olemasolu.

Kahekordsel integraalil on järgmised omadused.

I. Aditiivsus. Kui piirkond D jaotub kaheks mõõtuvaks osaks D_1 ja D_2 , millel pole ühiseid sisepunkte, siis kehtib võrdus

$$\iint_D f \, dS = \iint_{D_1} f \, dS + \iint_{D_2} f \, dS, \quad (2)$$

kus integraali olemasolust vasakul järeldub mõlema integraali olemasolu paremal ja vastupidi, integraalide olemasolust paremal järeldub integraali olemasolu vasakul.

Aditiivsuse omadusest järeldub, et piirkonnas D integreeruv funktsioon on integreeruv ka selle piirkonna D igal mõõtuval osal.

II. Lineaarsus. Kui $f, g \in L_D$ ja $\alpha, \beta \in R$, siis ka $\alpha f + \beta g \in L_D$ ja kehtib võrdus

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dS = \alpha \iint_D f \, dS + \beta \iint_D g \, dS.$$

Võttes $\beta=0$ või $\alpha=1$ ja $\beta=\pm 1$, saame võrdused

$$\iint_D \alpha f \, dS = \alpha \iint_D f \, dS,$$

$$\iint_D (f \pm g) \, dS = \iint_D f \, dS \pm \iint_D g \, dS,$$

kust on näha, et konstantset tegurit võib integraalimärgi alt välja tuua ja et summa (vahe) integraal võrdub integraalide summaga (vahega).

III. Monotoonsus. Kui $f, g \in L_D$ ja $f(P) \leq g(P)$ iga $P \in D$ korral, siis

$$\iint_D f \, dS \leq \iint_D g \, dS. \quad (3)$$

IV. Absoluutne integreeruvus. Kui $f \in L_D$, siis ka $|f| \in L_D$ ja kehtib võrratus

$$\left| \iint_D f \, dS \right| \leq \iint_D |f| \, dS. \quad (4)$$

V. Keskvaartusteoreem. Kui $f \in L_D$, siis leidub selline arv $\mu \in [m, M]$, kus m ja M on funktsiooni f väärtuste rajad piirkonnas D , et kehtib võrdus

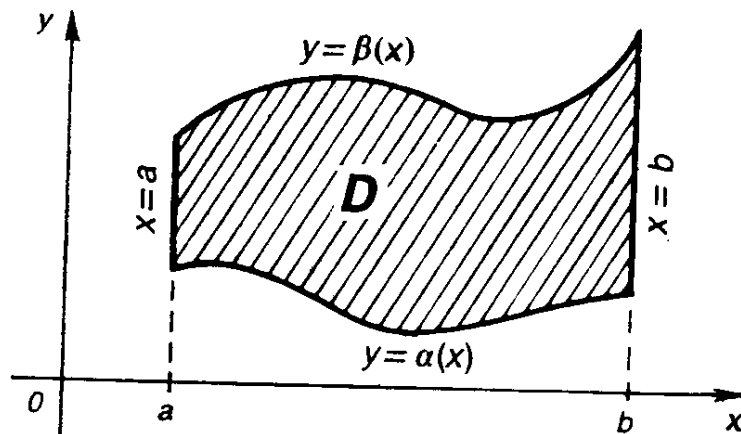
$$\iint_D f \, dS = \mu S_D. \quad (5)$$

Erijuhul, kui f on pidev piirkonnas D , siis leidub selline punkt $C \in D$, et $\mu = f(C)$, s. t.

$$\iint_D f \, dS = f(C) S_D. \quad (6)$$

Kahekordse integraali (1) arvutamiseks kasutatakse järgmisi võtteid.

M 6.1.1. Olgu piirkond D joontrapets (joon. 6.1), mis on piiratud vasakult sirgega $x=a$ ja paremalt sirgega $x=b$ ning alt pideva joonega $y=\alpha(x)$ ja ülalt pideva joonega $y=\beta(x)$.



Joon. 6.1

Kui $f \in L_D$ ja iga $x \in [a, b]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy,$$

siis integraali (1) korral kehtib arvutusvalem

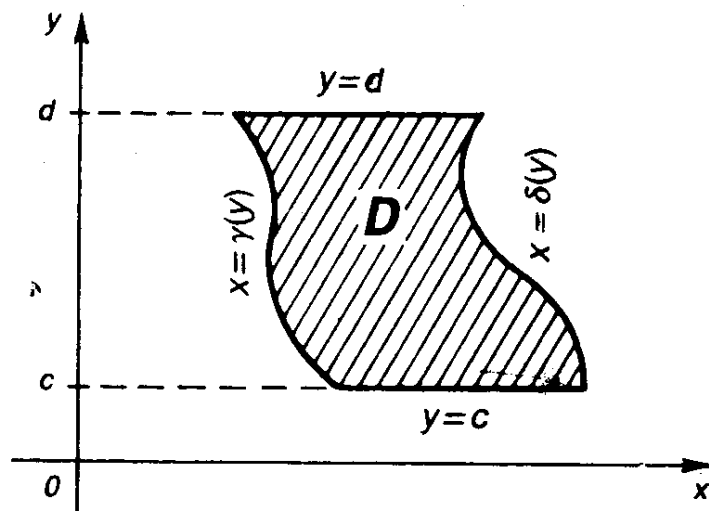
$$J = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \quad (7)$$

M 6.1.2. Olgu piirkond D joontrapets (joon. 6.2), mis on piiratud alt sirgega $y=c$ ja ülalt sirgega $y=d$ ning vasakult pideva joonega $x=\gamma(y)$ ja paremalt pideva joonega $x=\delta(y)$.

Kui $f \in L_D$ ja iga $y \in [c, d]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx,$$

siis integraali (1) korral kehtib arvutusvalem



Joon. 6.2

$$J = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx. \quad (8)$$

M 6.1.3. Olgu D suvaline tõkestatud kinnine mõõtuv piirkond. Jaotame ta osapiirkondadeks D_1, \dots, D_k nii, et osapiirkonnad D_1, \dots, D_k oleksid meetodites M 6.1.1 ja M 6.1.2 vaadeldud joontrapetsid. Siis aditiivsuse omaduse I põhjal saame

$$J = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f dS \quad (9)$$

eeldusel, et integraalid paremal eksisteerivad.

Näited

N 6.1.1. Joonistada integreerimispiirkond D ja asetada integreerimisrajad arvutusvalemite (7) ja (8) järgi integraalis

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

kus D on piiratud sirgetega $x+y=1$, $x-y=1$ ja $x=0$.

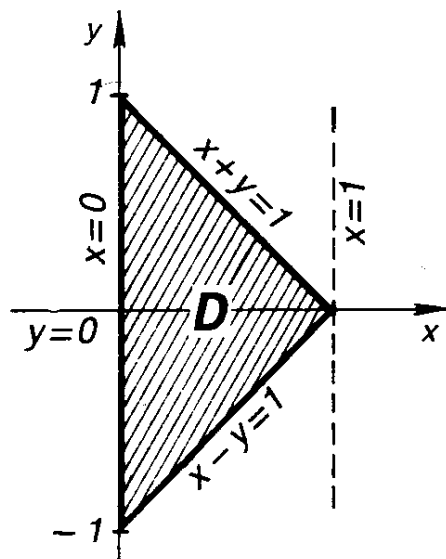
L a h e n d u s. Joonistame piirkonna D (joon. 6.3). Näeme, et piirkond D on joontrapets.

Asetame integreerimisrajad arvutusvalemi (7) järgi. Selleks leiame integreerimisrajad $x=a$, $x=b$, $y=\alpha(x)$ ja $y=\beta(x)$ vastavalt joonisele 6.1. Nagu jooniselt 6.3 näeme, piiravad antud juhul piirkonda D vasakult ja paremalt sirged $x=0$ ja $x=1$, seega $a=0$ ja $b=1$. Alt piirab piirkonda D sirge $y=x-1$ ja ülalt sirge $y=1-x$, seega $\alpha(x)=x-1$ ja $\beta(x)=1-x$. Valemi (7) põhjal saame nüüd

$$J = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy.$$

Asetame integreerimisrajad arvutusvalemi (8) järgi. Selleks leiame integreerimisrajad $y=c$, $y=d$, $x=\gamma(y)$ ja $x=\delta(y)$. Vastavalt joonisele 6.2 saame analoogiliselt nagu eelmisel juhul $c=-1$, $d=1$, $\gamma(y)=0$ ja

$$\delta(y) = \begin{cases} 1+y, & \text{kui } -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y, & \text{kui } 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$



Joon. 6.3

Et $\delta(y)$ on määratud kahe erineva avaldisega, siis arvutuslikust seisukohast on otstarbekohane rajade paigutamisel valemisse (8) jaotada piirkond D kaheks osaks sirgega $y=0$. Siis vastavalt aditiivsuse omadusele saame

$$J = \int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx.$$

N 6.1.2. Muuta integreerimisjärjekord integraalis

$$J = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

L a h e n d u s. Antud integraalis on rajad asetatud arvutusvalemi (7) järgi. Sellepärast sellele juhule vastava joonise 6.1 põhjal võime öelda, et integreerimispiirkond D on piiratud joontega $x=0$, $x=2$, $y=0$ ja $y=x^2$. Joonistame selle piirkonna D , saame joonise 6.4.

Ülesande lahendamiseks tuleb rajad asetada arvutusvalemi (8) järgi. Jooniselt 6.4 leiame vastavad rajad

$$c=0, \quad d=4, \quad x=\sqrt{y}, \quad x=2$$

ja me saame valemi (8) põhjal

$$J = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx.$$

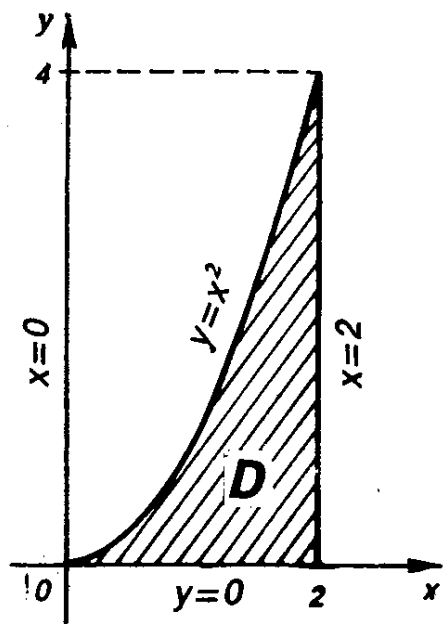
N 6.1.3. Leida integraal

$$J = \iint_D \frac{1}{x(x+y)} dx dy,$$

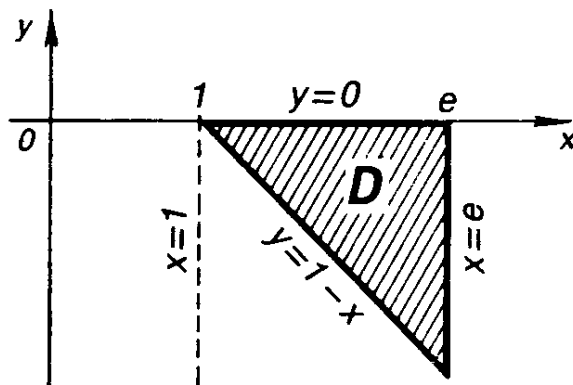
kus D on piiratud joontega $y=0$, $x+y=1$ ja $x=e$.

L a h e n d u s. Joonistame kõigepealt piirkonna D (joon. 6.5). Jooniselt näeme, et piirkond D on joontrapets, mis on vasakult piiratud sirgega $x=1$, paremalt sirgega $x=e$, alt sirgega $y=1-x$ ja ülalt sirgega $y=0$.

Integraalialune funktsioon on pidev piirkonnas D ja seega tunnuse PT 6.1.1 põhjal integreeruv piirkonnas D . Samuti on iga $x \in [1, e]$ korral antud funktsioon integreeruv y järgi. Seega eeldused meetodi M 6.1.1 kasutamiseks on täidetud. Arvutusvalemi (7) põhjal saame



Joon. 6.4



Joon. 6.5

$$J = \int_1^e dx \int_{1-x}^0 \frac{1}{x(x+y)} dy.$$

Algul peame leidma sisemise integraali, s. o. integraali muutuja y järgi. Et sel korral x on konstantne, siis on $dy = d(x+y)$ ja me saame

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e \frac{dx}{x} \int_{1-x}^0 \frac{d(x+y)}{x+y} = \int_1^e \frac{dx}{x} \ln(x+y) \Big|_{1-x}^0 = \\ &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ülesanded

Joonistada järgmised integreerimispiirkonnad D ning asetada integreerimisrajad integraalis (1) valemite (7) ja (8) järgi (vt. näide N 6.1.1).

840. D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$.

841. D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$.

842. D on ristkülik tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$.

843. D on ring $x^2 + y^2 \leq 1$.

844. D on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 1$.

845. D on piiratud joontega $y = x^2$, $y = x^3$.

Muuta integreerimisjärjekord järgmistes integraalides (vt. näide N 6.1.2).

846. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$

849. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$

847. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$

850. $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x, y) dy$

848. $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

851. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

852. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy$

853. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$

Leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.1.3).

854. $\iint_D x dx dy$, kus D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 1)$.

855. $\iint_D y dx dy$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $x=1$ ja $y=x^2$.

856. $\iint_D \sin(x+y) dx dy$, kus D on piiratud joontega $y=-x$, $y=0$ ja $x=\pi$.
857. $\iint_D \cos(x-y) dx dy$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $y=x$ ja $x=\pi$.
858. $\iint_D e^{x-y} dx dy$, kus $D=[0, \ln 4] \times [0, \ln 2]$.
859. $\iint_D \frac{\ln x}{xy} dx dy$, kus D on piiratud joontega $y=1$, $y=x$ ja $x=e$.
860. $\iint_D \frac{1}{x} dx dy$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $y=\ln x$ ja $x=e$.
861. $\iint_D \frac{\arctan x \operatorname{arccot} y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$, kus $D=[0, 1] \times [-1, 0]$.
862. $\iint_D (x^2+y) dx dy$, kus D on piiratud joontega $y=x^2$ ja $y^2=x$.
863. $\iint_D y^2 dx dy$, kus D on piiratud x -teljega ja tsükloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ kaarega, kui $0 \leq t \leq 2\pi$ ja $a > 0$.
864. Definitsiooni D 6.1.1 põhjal arvutada ligikaudu integraal

$$J = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

kus $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, jaotades ringi D osadeks kontsentriliste ringjoontega $x^2 + y^2 = (k/4)^2$, kus $k=1, 2, 3, 4$ ja võttes punktideks P_i kiire $y=x > 0$ lõikepunktid ringjoontega.

865. Keskväertusteoreemi abil hinnata integraal

$$J = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy,$$

kus $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, võttes arvudeks m ja M funktsiooni globaalsed ekstreemumid piirkonnas D .

§ 6.2. MUUTUJATE VAHETUS KAHEKORDSES INTEGRAALIS

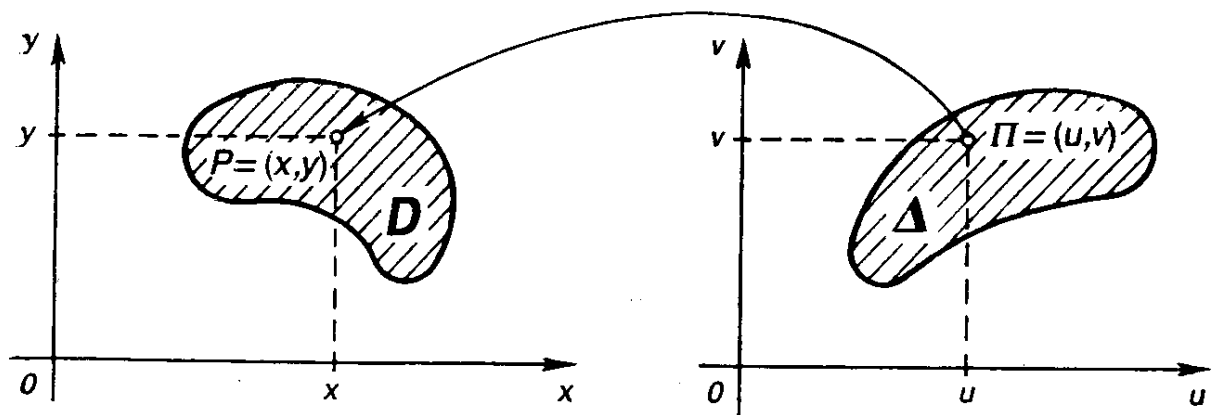
Olgu antud integraal

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Vaatleme teisendust

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \Delta, \quad (11)$$

mis teisendab uv -tasandil asetseva kinnise piirkonna Δ xy -tasandil asetsevaks piirkonnaks D (joon. 6.6).



Joon. 6.6

- D 6.2.1.** Teisendust (11) nimetatakse regulaarseks, kui
- 1) teisendus (11) on üksühene,
 - 2) funktsioonidel (11) on olemas pidevad esimest järku osatuletised piirkonnas Δ ,
 - 3) teisenduse (11) jakobiaan

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12)$$

kogu piirkonnas Δ .

Regulaarne teisendus (11) teisendab kinnise mõõtuva piirkonna Δ kinniseks mõõtuvaks piirkonnaks D , piirkonna Δ sisepunktid piirkonna D sisepunktideks, piirkonna Δ rajajoone piirkonna D rajajooneks ja sileda joone piirkonnas Δ siledaks jooneks piirkonnas D .

Regulaarse teisenduse (11) pöördteisendus

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D \quad (13)$$

on ka regulaarne teisendus.

Muutujate vahetuse eeskirja integraalile (10) annab järgmine teoreem.

T 6.2.1. Kui

- 1° funktsioon f on pidev kinnises mõõtuvas piirkonnas D ,
- 2° teisendus (11) on regulaarne ja teisendab piirkonna Δ piirkonnaks D , siis integraali (10) jaoks kehtib valem

$$J = \iint_{\Delta} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv. \quad (14)$$

Valemit (14) nimetatakse integraali (10) muutujate vahetuse valemiks. Muutujaid u ja v nimetatakse uuteks integreerimismuutujateks. Teisendust (11) nimetatakse asenduseks.

Valem (14) jääb kehtima ka juhul, kui asendus (11) ei ole regulaarne lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel, mille pindalad on null.

Olgu

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

pöördteisenduse (13) jakobiaan. Kehtib võrdus

$$J(u, v)J(x, y) = 1, \quad (15)$$

s. t. regulaarse teisenduse (11) ja tema pöördteisenduse (13) jakobiaanide korrutis on võrdne ühega.

Märkus 6.2.1. Kui asendus on antud pöördteisenduse (13) kujul, siis on lihtsam leida algul tema jakobiaan $J(x, y)$ ja võrdusest (15) avaldada valemi (14) jaoks vajalik jakobiaan $J(u, v)$ (näide N 6.2.4).

Tüüpilised asendused (11), mis esinevad praktikas, on järgmised.

1. Üleminek polaarkoordinaatidele. Sel korral asendus (11) antakse kujul

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (r, \varphi) \in \Delta, \quad (16)$$

kus $r \geq 0$ ja φ on punkti $P = (x, y)$ polaarkoordinaadid. Siis jakobiaan

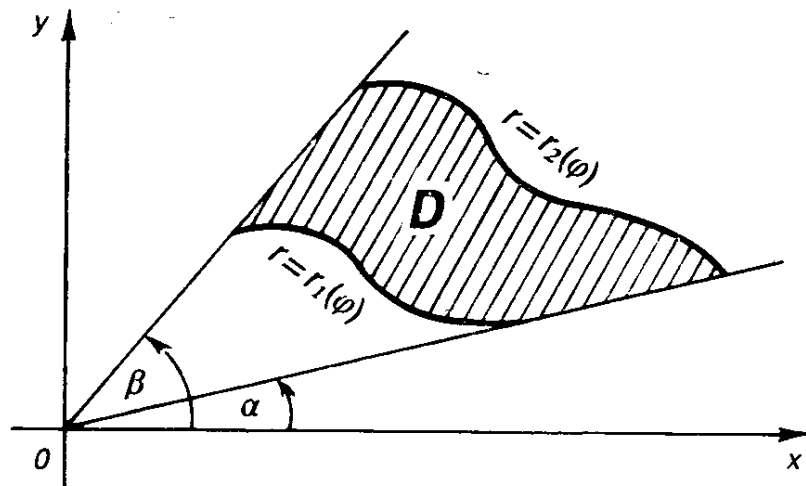
$$J(r, \varphi) = r.$$

Asendus (16) ei ole regulaarne $r\varphi$ -tasandil ainult sirgel $r=0$. Järelikult valem (14) kehtib asenduse (15) korral sõltumata sellest, kas sirge $r=0$ kuulub piirkonda Δ või ei kuulu sinna, ja omandab kuju

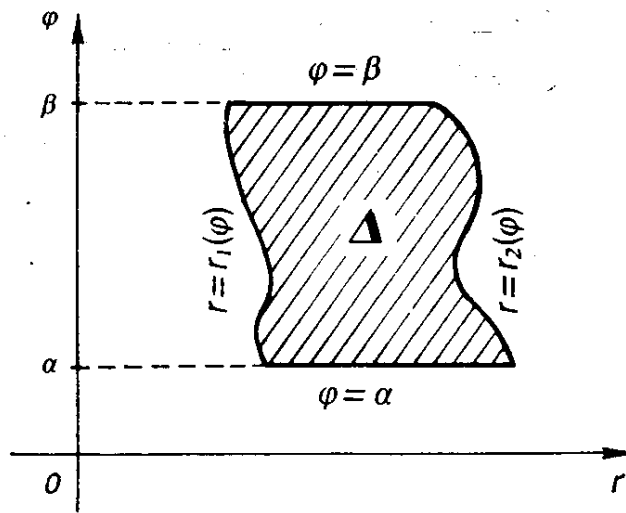
$$J = \iint_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (17)$$

Et $x^2 + y^2 = r^2$, siis avalduvad suurusi $x^2 + y^2$ sisaldavad avaldised polaarkoordinaatides väga lihtsalt uue muutuja r kaudu.

Kui piirkond D on polaarkoordinaatides (joon. 6.7 ja 6.8) pii-



Joon. 6.7



Joon. 6.8

ratud kiirtega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning kõveratega $r = r_1(\varphi)$ ja $r = r_2(\varphi)$, siis valem (17) esitub kujul

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (18)$$

Valemi (18) kasutamisel piisab tavaliselt sellest, kui teha joonis 6.7, s.o. joonis piirkonnast D , millele on kantud integraali (18) rajad polaarkoordinaatides. Joonis 6.8 tehakse komplitseerimatutel juhtudel, et saada paremat ülevaadet piirkonnast Δ .

2. Üleminek elliptilistele polaarkoordinaatidele. Sel korral minnakse uutele muutujatele $r \geq 0$ ja φ asendusega

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases} \quad (r, \varphi) \in \Delta, \quad (19)$$

kus $a > 0$ ja $b > 0$ on sobivalt valitud konstandid.

Asenduse (19) jakobiaan on

$$J(r, \varphi) = abr. \quad (20)$$

Asendus (19) pole regulaarne ainult sirgel $r = 0$. Seega kehtib asenduse (19) korral valem (14) ja omandab kuju

$$J = ab \iint_{\Delta} f(ar \cos \varphi, br \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (21)$$

Märkus 6.2.2. Sobivate arvude a ja b valikul tuleb arvestada, et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2,$$

mistõttu avaldisi, mis sisaldavad suurusi $x^2/a^2 + y^2/b^2$, saab väga lihtsalt avaldada uue muutuja r kaudu.

3. Üleminek üldistele elliptilistele polaarkoordinaatidele. Sel korral minnakse uutele muutujatele $r \geq 0$ ja φ asendusega

$$\begin{cases} x = ar \cos^s \varphi \\ y = br \sin^s \varphi \end{cases} \quad (r, \varphi) \in \Delta, \quad (22)$$

kus $a > 0$, $b > 0$ ja s on sobivalt valitud konstandid. Asenduse (22) jakobiaan on

$$J(r, \varphi) = sabr \cos^{s-1} \varphi \sin^{s-1} \varphi \quad (23)$$

ja valem (14) omandab kuju

$$J = ab |s| \iint_{\Delta} f(ar \cos^s \varphi, br \sin^s \varphi) r |\cos^{s-1} \varphi \sin^{s-1} \varphi| dr d\varphi. \quad (24)$$

Näited

N 6.2.1. Üleminekuga polaarkoordinaatidele leida integraal

$$J = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

kus $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

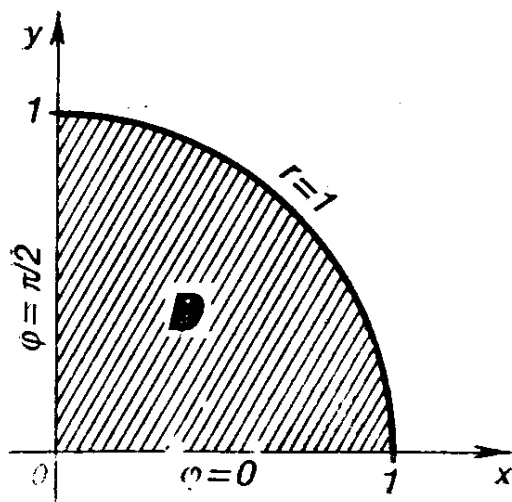
Lahendus. Tuleb teha asendus (16). Selleks joonistame piirkonna D (joon. 6.9). Jooniselt näeme, et piirkond D on selline nagu joonisel 6.7, kusjuures $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $r_1(\varphi) = 0$ ja $r_2(\varphi) = 1$. Seepärast võime kasutada valemit (18), mis annab

$$J = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

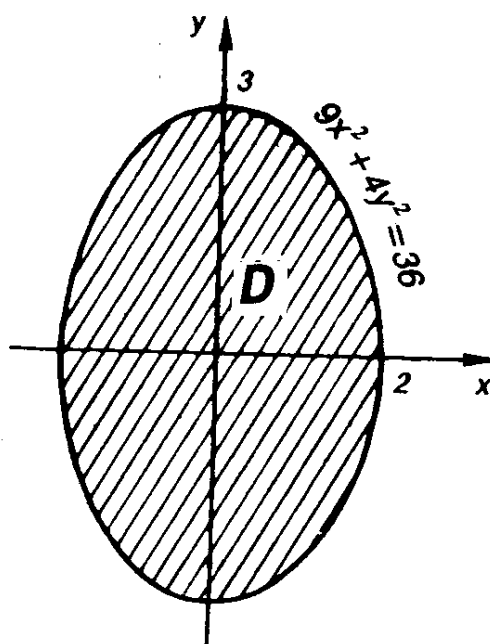
N 6.2.2. Üleminekuga elliptilistele polaarkoordinaatidele leida integraal

$$J = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)^2 dx dy, \dots$$

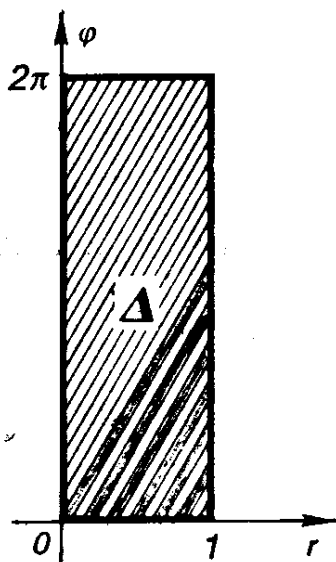
kus $D = \{(x, y) : 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}$.



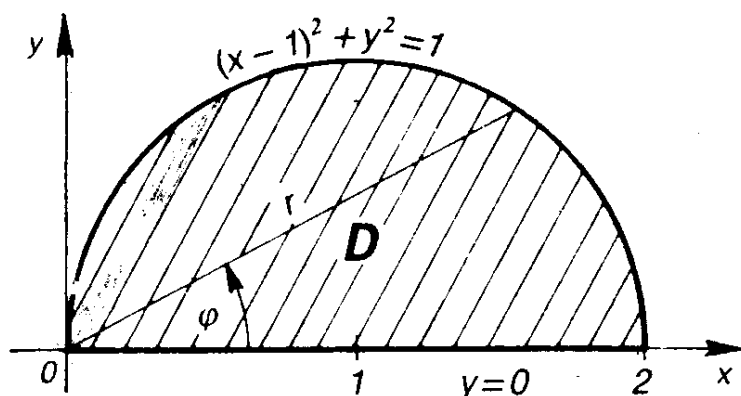
Joon. 6.9



Joon. 6.10



Joon. 6.11



Joon. 6.12

Lahendus. Märkuse 6.2.2 kohaselt võtame $a=2$ ja $b=3$, s.t. võtame asenduse (19) kujul

$$\begin{cases} x=2r \cos \varphi \\ y=3r \sin \varphi \end{cases} \quad (r, \varphi) \in \Delta.$$

Joonestame piirkonna D (joon. 6.10) ja leiame piirkonna Δ . Jooniselt 6.10 näeme, et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Et kindlaks teha r muutumisulatus, esitame piirkonna D rajajoone võrrandi $9x^2+4y^2=36$ samuti üldistatud polaarkoordinaatides:

$$9(2r \cos \varphi)^2 + 4(3r \sin \varphi)^2 = 36,$$

kust $r=1$. Järelikult iga φ korral piirkonnas Δ on $0 \leq r \leq 1$. Seega

$$\Delta = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

(joon. 6.11). Valemi (21) põhjal saame nüüd

$$J = 2 \cdot 3 \iint_{\Delta} (r^2)^2 r \, dr \, d\varphi = 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^5 \, dr = 2\pi.$$

N 6.2.3. Üleminekuga polaarkoordinaatidele leida integraal

$$J = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

kus $D = \{(x, y): (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Lahendus. Tuleb teha asendus (16). Selleks joonistame piirkonna D (joon. 6.12). Jooniselt 6.12 näeme, et $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Et kindlaks teha r muutumisulatus, esitame piirkonna D rajajoone võrrandi $(x-1)^2 + y^2 = 1$ polaarkoordinaatides, saame

$$(r \cos \varphi - 1)^2 + (r \sin \varphi)^2 = 1,$$

kust $r=2 \cos \varphi$. Järelikult iga φ korral on $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$.

Seega piirkond D on selline nagu joonisel 6.7 ja me võime kasutada valemit (18), mille põhjal

$$J = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \, dr = \frac{16}{9}.$$

N 6.2.4. Leida integraal

$$J = \iint_D (2x+y-2)^2 dx dy,$$

kus $D = \{(x, y) : -1 \leq x - y \leq 1, -1 \leq 2x + y \leq 2\}$.

L a h e n d u s. Joonestame piirkonna D (joon. 6.13). Näeme, et integraali arvutamisel valemi (7) või (8) järgi tuleks piirkond D jaotada kolmeks osaks. Arvutused lihtsustuvad, kui teha asendus

$$u = x - y, \quad v = 2x + y, \quad (u, v) \in \Delta,$$

sest siis piirkond D teisendub ristkülikuks

$$\Delta = \{(u, v) : -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 2\}$$

(joon. 6.14).

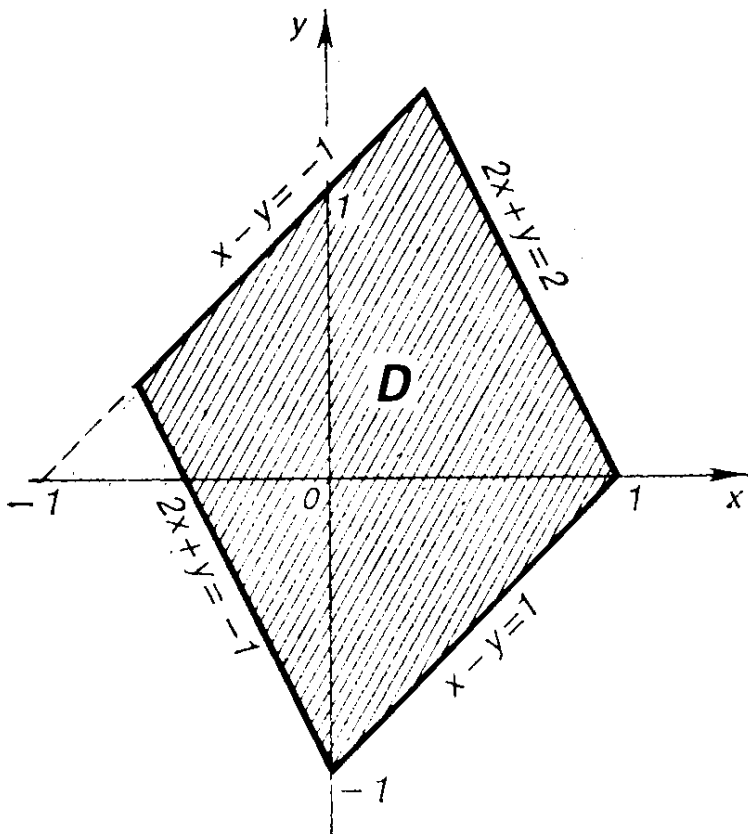
Muutujate vahetuse valemi (14) kasutamiseks tuleb leida veel jakobiaan (12). Et asendus on pöördteisenduse (13) kujul, siis vastavalt märkusele 6.2.1 leiame algul jakobiaani

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

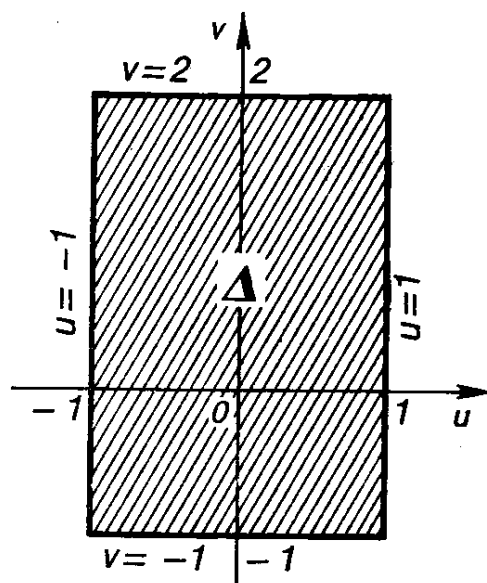
Wõrdusest (15) saame siis avaldada vajaliku jakobiaani $J(u, v) = 1/3$.

Valemi (14) põhjal saame nüüd

$$J = \iint_{\Delta} (v - 2)^2 \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^2 (v - 2)^2 dv = 6.$$



Joon. 6.13



Joon. 6.14

Ülesanded

Leida järgmised integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele (vt. näide N 6.2.1).

$$866. \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$867. \iint_D (x^2+y^2)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

$$868. \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$869. \iint_D \sin(x^2+y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y): \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$$

$$870. \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Leida järgmised integraalid, minnes üle elliptilistele polaarkoordinaatidele (vt. näide N 6.2.2).

$$871. \iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$$

$$872. \iint_D \sqrt{6-2x^2-3y^2} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$$

$$873. \iint_D \sqrt{x^2+9y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+9y^2 \leq 1\}.$$

Leida järgmised integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele (vt. näide N 6.2.3).

$$874. \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y): (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$$

$$875. \iint_D x dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+(y-1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

$$876. \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+(y-1)^2 \leq 1\}$$

$$877. \iint_D (x^2+y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+(y+2)^2 \leq 4\}$$

$$878. \iint_D y dx dy, \quad D = \{(x, y): 4x \leq x^2+y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$$

Leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.2.4).

$$879. \iint_D (3x+2y-4)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y): -1 \leq x-y \leq 3, -2 \leq 3x+2y \leq 8\}$$

$$880. \iint_D (2x-y) dx dy, \quad D = \{(x, y): 1 \leq x+y \leq 2, 1 \leq 2x-y \leq 3\}$$

$$881. \iint_D (x+y) dx dy, \quad D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq x+y\}$$

$$882. \iint_D (x^2+y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y): 0 \leq x^2+y^2+2x \leq 1\}$$

883. Leida integraal

$$J = \iint_D x \, dx \, dy$$

asendusega $x = r \cos^2 \varphi$, $y = r \sin^2 \varphi$, kui piirkond D asetseb xy -tasandil esimeses veerandis ja on piiratud joonega $(x+y)^3 = xy$.

884. Integraalis

$$J = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

teha muutujate vahetus $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$ ja asetada rajad saadud integraalis, kui piirkond D on piiratud astroidiga $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

885. Integraalis

$$J = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

minna üle polaarkoordinaatidele, kui D on lemniskaadi

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0$$

leht.

§ 6.3. KAHEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSI

Vaatleme, kuidas integraaliga

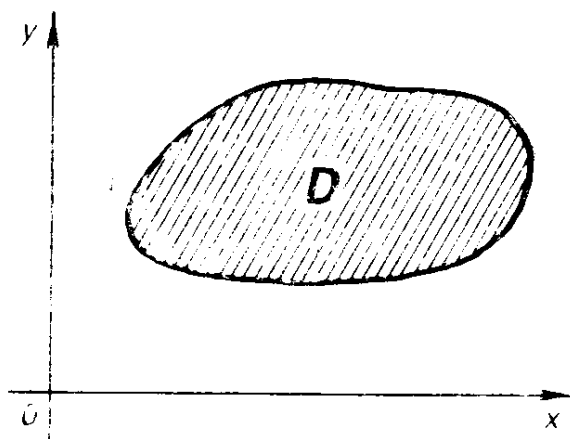
$$J = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \quad (24)$$

arvutada kujundi pindala ja ruumala ning tasandilise kujundi massi, massikeset ja inertsimomente.

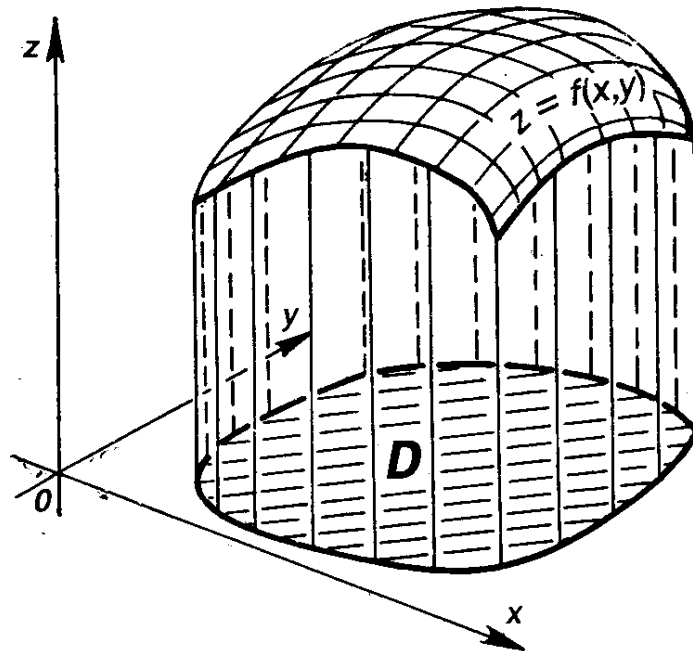
1. Tasandilise kujundi pindala. Olgu xy -tasandil asetsev kujund D kinnine ja mõõtv (joon. 6.15).

Selle kujundi D pindala S_D avaldub valemiga

$$S_D = \iint_D dx \, dy. \quad (25)$$



Joon. 6.15



Joon. 6.16

2. Kujundi ruumala. Olgu keha E (joon. 6.16) alt piiratud kinise mõotuva piirkonnaga D , ülalt pideva funktsiooni f graafikuga $z=f(x, y)$ ja külgedelt püstsilindrilise pinnaga, mis läbib piirkonna D rajajoont ja seega ka funktsiooni f graafiku rajajoont.

Selline keha E on mõotuv ja tema ruumala V_E avaldub valemiga

$$V_E = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (26)$$

Valem (26) annab kahekordse integraali (24) geomeetrilise tähenduse.

3. Ruumilise pinna pindala. Olgu ruumilise pinna Σ punktid (x, y, z) määratud võrranditega

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta, \quad (27)$$

kus Δ on mingi piirkond uv -tasandil.

Võrrandeid (27) nimetatakse pinna Σ parameetrilisteks võrranditeks ning muutujaid u ja v parameetreiks.

D 6.3.1. Pinda Σ nimetatakse siledaks, kui

1° funktsioonid (27) ja nende osatuletised on pidevad piirkonnas Δ ,

2° piirkonna Δ igas punktis

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

kus

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Siledal pinnal on igas punktis puutujatasand ja normaal.

Pinna võrrandit $z=f(x, y)$, $(x, y) \in D$, saab alati esitada para-

meetrilisel kujul (27), võttes näiteks $x=u$, $y=v$, $z=f(u, v)$, kus $(u, v) \in \Delta=D$. Vastupidine esitus ei ole alati teostatav.

Kuid piirkonnas, kus $C \neq 0$, on sileda pinna (27) võrrand esitatav kujul $z=f(x, y)$, $(x, y) \in D$, kus funktsioon f ja tema osatuletised on pidevad. Sama kehtib ka, kui $A \neq 0$ või $B \neq 0$. Siis on pinna võrrandid vastavalt $x=g(y, z)$ ja $y=h(x, z)$, kus jällegi funktsioonid g ja h ning nende osatuletised on pidevad.

Defineerime sileda pinna Σ pindala mõiste piirkonnas, kus $C \neq 0$. Pinna Σ selle tüki võrrand esitub kujul $z=f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (joon. 6.17). Jaotame piirkonna D osadeks D_1, \dots, D_n joontega, mille pindala on null. Igas piirkonna osas võtame suvalise punkti $P_i \in D_i$, millele pinnal Σ vastaku punkt Q_i . Punktis Q_i võtame puutujatasandi. Moodustame püstsilindri põhjaga D_i . See silinder lõikab puutujatasandist välja osa E_i pindalaga S_i . Summeerime kõik sellised pindalad S_i :

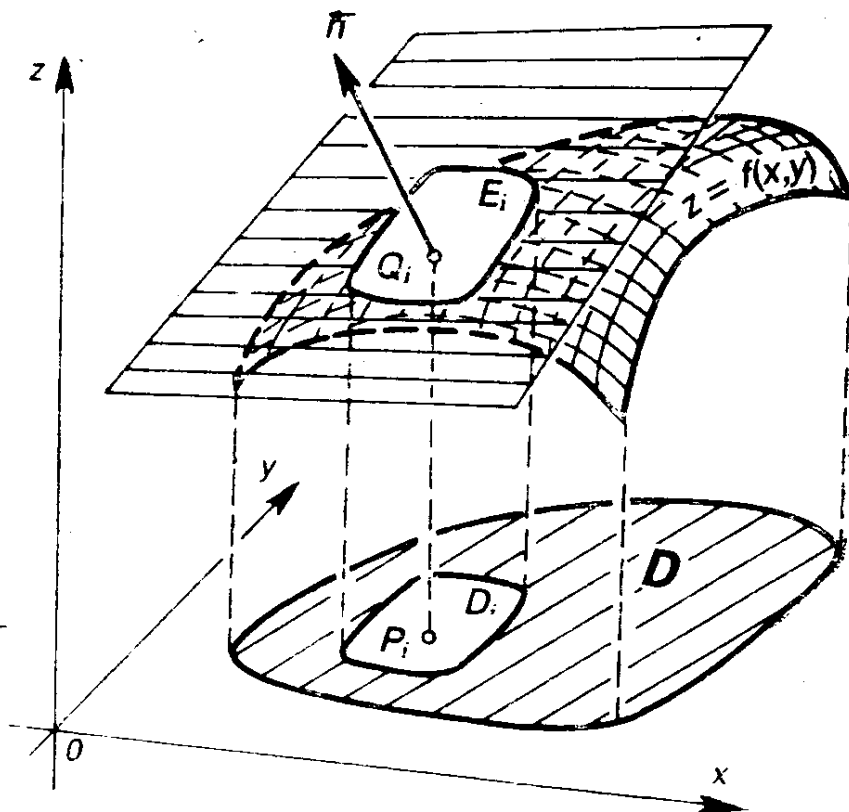
$$\sigma = \sum_{i=1}^n S_i.$$

Olgu λ piirkondade D_i suurim diameeter.

D 6.3.2. Sileda pinna Σ pindalaks nimetatakse piirväärtust

$$S_{\Sigma} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

Analoogiliselt defineeritakse pinna Σ pindala ka piirkondades, kus $A \neq 0$ või $B \neq 0$.



Joon. 6.17

Kui sile pind Σ on antud parameetriliste võrranditega (27), siis tema pindala S_{Σ} on leitav valemiga

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv. \quad (29)$$

Kui tähistada

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

siis kehtib võrdus

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

mistõttu valemi (29) võib kirjutada ka kujul

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (30)$$

Kui sile pind Σ on antud ilmutatud võrrandiga $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, siis tema pindala S_{Σ} on leitav valemiga

$$S_{\Sigma} = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (31)$$

4. Tasandilise kujundi mass, massikese ja inertsimomendid. Olgu xy -tasandil asetsev kujund D mõõtuv ja tema pindtihedus ρ igas punktis (x, y) olgu antud pideva funktsiooniga

$$\rho = \rho(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (32)$$

Siis selle kujundi D mass m_D avaldub valemiga

$$m_D = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (33)$$

Kujundi D massikeskme $C = (x_c, y_c)$ koordinaadid on leitavad valemitega

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m_D} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ y_c = \frac{1}{m_D} \iint_D y \rho(x, y) dx dy. \end{cases} \quad (34)$$

Kujundi D inertsimomendid I_x ja I_y vastavalt x - ja y -telje suhtes on leitavad valemitega

$$\begin{cases} I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy \\ I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy. \end{cases} \quad (35)$$

Kujundi D inertsimoment I_0 koordinaatide alguspunkti 0 suhtes on leitav valemiga

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy. \quad (36)$$

Näited

N 6.3.1. Leida xy -tasandil asetseva kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega $y=x$ ja $y=x^2$.

Lahendus. Joonistame piirkonna D (joon. 6.18) ja leiame integraali (25) üle selle piirkonna D . Saame

$$S_D = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy = \frac{1}{6}.$$

N 6.3.2. Leida kõveraga

$$r = 2a \cos 3\varphi \quad (a > 0)$$

piiratud kujundi D nn. kolmelehelise roosi pindala.

Lahendus. Joonistame kujundi D (joon. 6.19). Kujundi sümmeetrilisuse tõttu on piisav, kui leida kiirte $\varphi=0$ ja $\varphi=\pi/6$ vahele jääva osa pindala ja võtta see kuuekordselt. Seega võtame $0 \leq \varphi \leq \pi/6$. Siis iga φ korral on $0 \leq r \leq 2a \cos 3\varphi$ ja valemi (25) põhjal saame

$$S_D = \iint_D dx dy = 6 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^{2a \cos 3\varphi} r dr = \pi a^2.$$

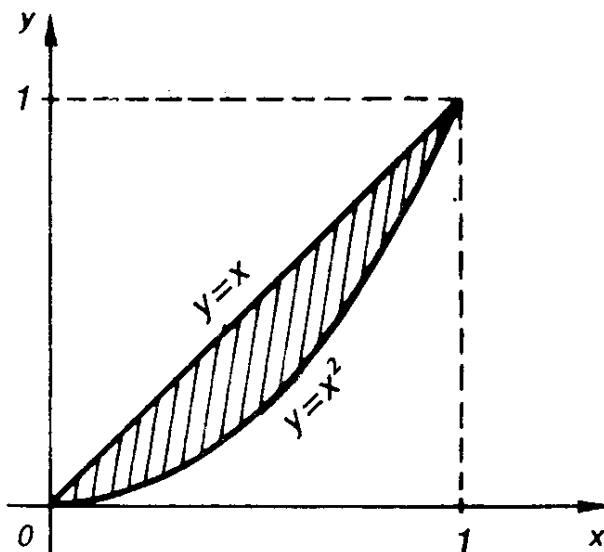
N 6.3.3. Leida keha E ruumala V_E , kui keha on piiratud silindriga $x^2+y^2=1$ ning tasanditega $z=0$ ja $x+z=1$, kasutades valemit (26).

Lahendus. Joonistame keha E (joon. 6.20). Keha E on alt piiratud ringiga $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, ülalt pinnaga $z=1-x$ ja külgedelt vertikaalse silindriga. Seega, keha E on selline nagu keha joonisel 6.16 ja me võime kasutada valemit (26). Saame

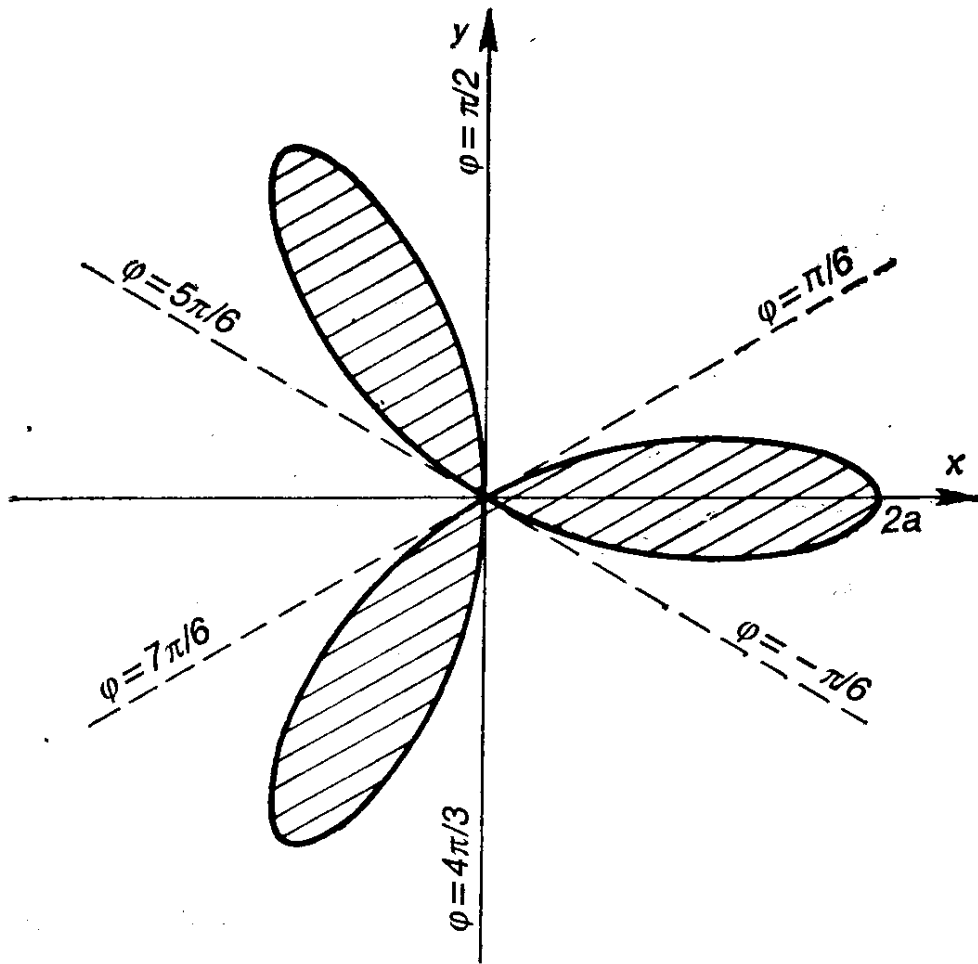
$$V_E = \iint_D (1-x) dx dy.$$

Integraali arvutamiseks teeme veel joonise piirkonnast D (joon. 6.21). Läänud üle polaarkoordinaatidele, saame

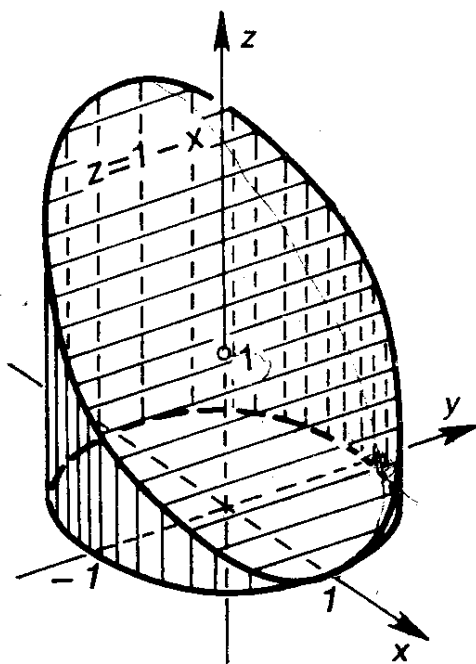
$$V_E = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r \cos \varphi) r dr = \pi.$$



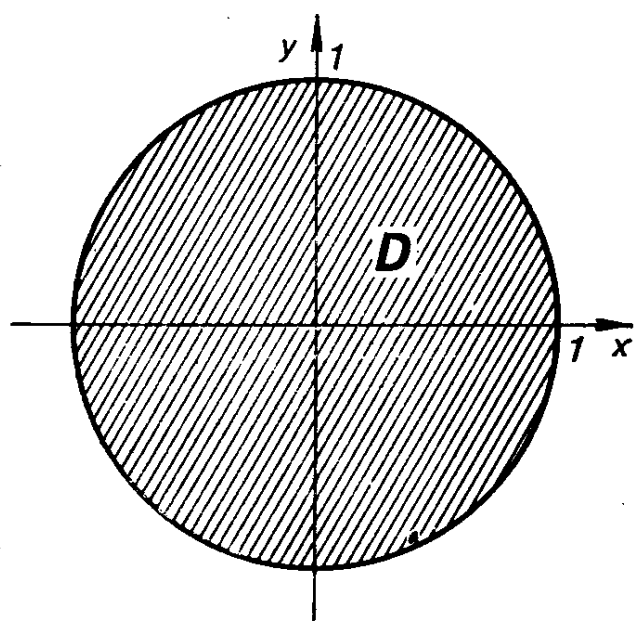
Joon. 6.18



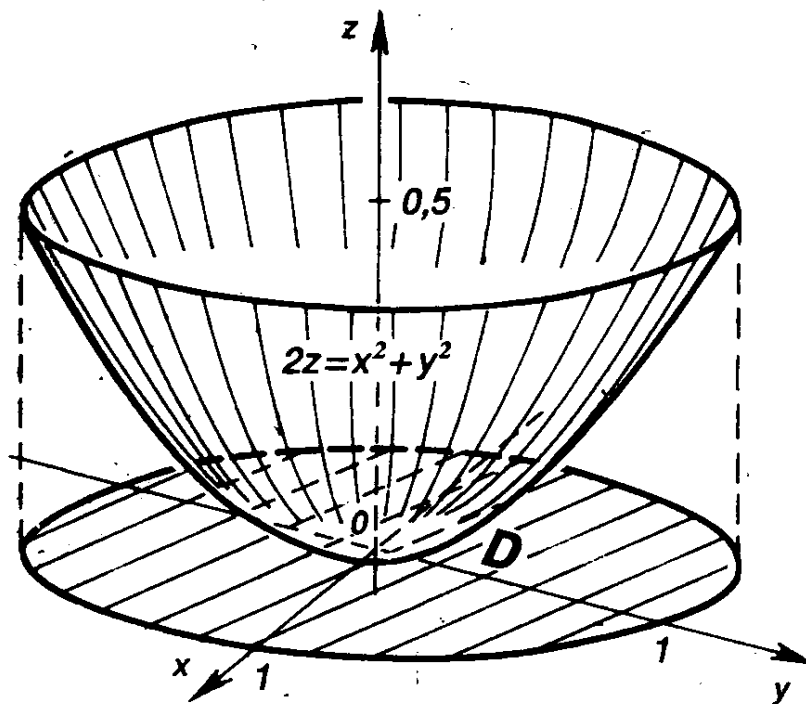
Joon. 6.19



Joon. 6.20



Joon. 6.21



Joon. 6.22

N 6.3.4. Leida silindris $x^2 + y^2 = 1$ asetseva pöördparaboloidi $2z = x^2 + y^2$ pindala.

L a h e n d u s. Joonistame antud pinna vaadeldava osa (joon. 6.22). Leiame osatuletised $z_x = x$ ja $z_y = y$ ning kasutame valemit (31). Saame

$$S_z = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

kus D on ring $x^2 + y^2 \leq 1$ (joon. 6.21). Läänud üle polaarkoordinaatidele, saame

$$S_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} r \, dr = \frac{3\pi(2\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Ülesanded

Leida xy -tasandil asetsevate kujundite pindalad, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega (vt. näited N 6.3.1 ja N 6.3.2). Arvud a, b, c, d on positiivsed.

886. $y = x^3, y = 1, x = 0$

889. $xy = 4, x + y = 5$

887. $y = e^x, y = e^{-x}, y = e$

890. $3x^2 = 25y, 5y^2 = 9x$

888. $y = 2^x, y = 2^{-x}, y = 4$

891. $x^2 + y^2 = a^2$

892. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

893. $r = a \cos \varphi, r = b \cos \varphi$ ($b > a$)

894. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioid)

895. $r = 2a \cos 4\varphi$ (neljaleheline roos)

896. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$
 897. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (Bernoulli lemniskaat)
 898. $(x^2+y^2)^2=2ax^3$
 899. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^2=\frac{xy}{4}$
 900. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{25}$
 901. $y=0, x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leq t\leq 2\pi$
 902. $x=0, y=0 \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$
 903. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{c}+\frac{y}{d}$

Leida järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E , kasutades valemit (26) (vt. näide N 6.3.3).

904. Tasandid $x=0, y=0, z=0$ ja $x+y+z=1$.
 905. Tasandid $x=0, y=0, z=0, x=4$ ja $y=4$ ning pöördparaboloid $z=x^2+y^2+1$.
 906. Tasandid $x=0, y=0, z=0$ ja $x+y=1$ ning elliptiline paraboloid $z=2x^2+y^2+1$.
 907. Tasandid $z=0$ ja $x+z=6$ ning silindrid $y=\sqrt{x}$ ja $y=2\sqrt{x}$.
 908. Tasand $z=0$, pöördparaboloid $z=x^2+y^2$ ja silinder $x^2+y^2=1$.
 909. Koordinaattasandid, silinder $x^2+y^2=1$ ja pind $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, kus $x^2+y^2\leq 1, x\geq 0$ ja $y\geq 0$.
 910. Tasandid $x=1, y=0$ ja $z=0$ ning hüperboolne paraboloid $z=x^2-y^2$.
 911. Tasandid $x=0, y=0, z=0$ ja $2x+3y=12$ ning silinder $y^2=2z$.
 912. Tasandid $z=1$ ja $z=12-3x-4y$ ning elliptiline silinder $x^2+4y^2=4$.
 913. Sfäär $x^2+y^2+z^2=3$ ja pöördparaboloid $2z=x^2+y^2$.
 914. Silindrid $x^2+y^2=1$ ja $x^2+z^2=1$.
 915. Pöördparaboloidid $z=4-x^2-y^2$ ja $2z=2+x^2+y^2$.
 916. Silinder $x^2+y^2=3$ ja kahekattene hüperboloid $z^2=x^2+y^2+3$.
 917. $z=\cos x \cos y, z=0, |x+y|\leq \pi/2$ ja $|x-y|\leq \pi/2$.
 918. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \quad (z>0)$

Leida järgmiste ruumiliste pindade märgitud osade pindalad (vt. näide N 6.3.4).

919. Tasandi $6x+3y+2z=12$ osa, kus $x\geq 0, y\geq 0$ ja $z\geq 0$.
 920. Pinna $z=xy$ osa, mis asub silindri $x^2+y^2=1$ sees.
 921. Sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ osa, mis on silindri $x^2+y^2=b^2$ ($b<a$) sees.

922. Koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ osa, mille eraldab temast silindriline pind $z^2 = 2y$.
923. Silindri $z^2 = 4x$ osa, mille eraldavad temast silinder $y^2 = 4x$ ja tasand $x = 1$.
924. Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mille lõikab temast välja silinder $x^2 + y^2 = ax$.
925. Koonuse $x^2 = y^2 + z^2$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 2$ sees.
926. Helikoidi $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h\varphi$ osa, kus $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.
927. Toori

$$\begin{cases} x = (b + a \sin \theta) \cos \varphi \\ y = (b + a \sin \theta) \sin \varphi \\ z = a \cos \theta \end{cases}$$

($0 < a \leq b$) osa, mis on piiratud meridiaanidega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning kahe paralleeliga $\theta = \gamma$ ja $\theta = \delta$.

928. Leida ringi mass, kui ringi raadius on a ja pindtihedus ρ . Ringjoonel on pindtihedus h ning see on võrdeline punkti kaugusega ringi keskpunktist.
929. Leida ruudukujulise plaadi mass, kui plaadi külje pikkus on $2a$. Plaadi materjali tihedus on igas punktis võrdeline punkti kauguse ruuduga diagonaalide lõikepunktist ning on ruudu tippudes 1.
930. Leida plaadi mass, kui plaadil on ellipsi kuju ja tema pindtihedus on igas punktis võrdeline punkti kaugusega r ellipsi vähimast poolteljest ning juhul $r = 1$ tihedus on k .

Leida xy -tasandil asetsevate homogeensete kujundite massikeskme $C = (x_c, y_c)$ koordinaadid, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega.

931. Ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($y > 0$) ja sirge $y = 0$.
932. Sinusoid $y = \sin x$ ning sirged $x = 0$, $x = \pi/4$ ja $y = 0$.
933. Jooned $ay = x^2$ ja $x + y = 2a$, kus $a > 0$.
934. Kardiid $r = a(1 + \cos \varphi)$ ja polaartelg $\varphi = 0$.
935. x -telg ja tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaar, kui $0 \leq t \leq 2\pi$.
936. Leida ringi $x^2 + y^2 \leq a^2$ massikeskme $C = (x_c, y_c)$ koordinaadid, kui pindtihedus ringi igas punktis (x, y) on võrdeline tema kaugusega punktist $(a, 0)$.
937. Leida poolringi $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($x \leq 0$), massikeskme $C = (x_c, y_c)$ koordinaadid, kui pindtihedus poolringi igas punktis (x, y) on võrdeline tema kauguse ruuduga punktist $(a, 0)$.

Leida homogeensete kujundite inertsimomendid I_x ja I_y , kui kujundid on piiratud järgmiste joontega.

938. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($0 \leq x \leq a$), $x = 0$, $y = 0$
939. $r = a(1 + \cos \varphi)$
940. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$

§ 6.4. KOLMEKORDNE INTEGRAAL

Olgu funktsioon $f(x, y, z)$ antud tõkestatud kinnises mõõtuvas piirkonnas E , mille ruumala on V_E . Jaotame piirkonna E pindadega, mille ruumala on null, kinnisteks mõõtuvateks osapiirkondadeks E_1, E_2, \dots, E_n , mille ruumalad olgu vastavalt V_1, V_2, \dots, V_n . Võtame igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_i \in E_i$ ja moodustame summa

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(P_i) V_i.$$

Summat $\sigma(f)$ nimetatakse funktsiooni f integraalsummaks piirkonnas E .

Olgu λ osapiirkondade E_i suurim diameeter.

D 6.4.1. Arvu J nimetatakse funktsiooni f kolmekordseks integraaliks üle piirkonna E , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma(f)| < \varepsilon, \text{ kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata piirkonna E jaotamisviisist ja punktide $P_i \in E_i$ valikust. Sel korral funktsiooni f nimetatakse integreeruvaks piirkonnas E ja kirjutatakse

$$J = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{ehk} \quad J = \iiint_E f dV. \quad (37)$$

Piirkonda E nimetatakse integreerimispiirkonnaks.

TT 6.4.1. Funktsiooni integreeruvuseks mingis piirkonnas on tarvilik, et ta oleks tõkestatud selles piirkonnas.

PT 6.4.1. Kinnises piirkonnas pidev funktsioon on integreeruv selles piirkonnas.

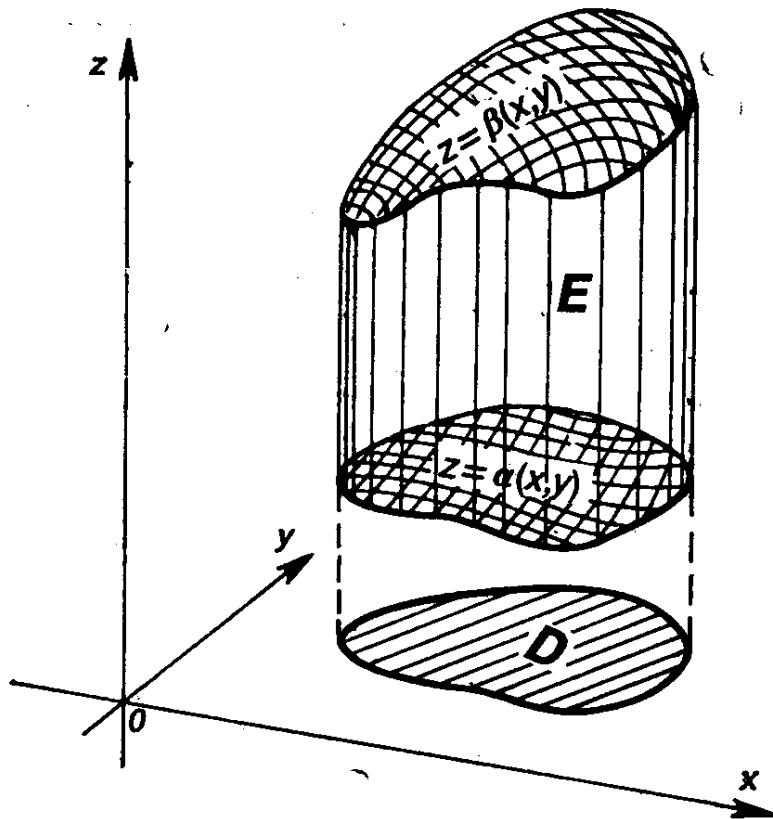
PT 6.4.2. Tõkestatud funktsioon, mis on antud piirkonnas katkev lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel ja pindadel, mille ruumala on null, on integreeruv selles piirkonnas.

Kolmekordse integraalis võib funktsiooni väärtusi muuta (kõrvaldada, lisada) lõplikus arvus punktides ning lõplikul arvul joontel ja pindadel, mille ruumala on null. See ei muuda integraali ega mõjusa tema olemasolu.

Kolmekordse integraali korral kehtivad aditiivsuse, lineaarsuse, monotoonsuse ja absoluutse integreeruvuse omadused ning keskväertusteoreem, mis on samasugused nagu kahekordse integraali korral.

Kolmekordse integraali (37) arvutamiseks kasutatakse järgmisi võtteid.

M 6.4.1. Olgu piirkond E keha (joon. 6.23), mis on piiratud alt sileda pinnaga $z = \alpha(x, y)$, $(x, y) \in D$ ja ülalt sileda pinnaga $z = \beta(x, y)$, $(x, y) \in D$ ning külgedelt sileda püstsilindrilise pinnaga, mis läbib piirkonna D rajajoont.



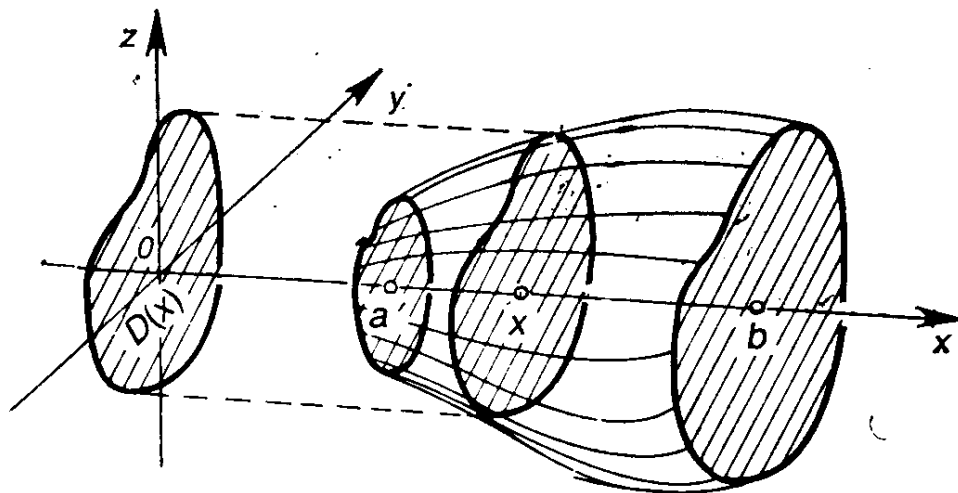
Joon. 6.23

Kui funktsioon f on integreeruv piirkonnas E ja iga punkti $(x, y) \in D$ korral eksisteerib integraal

$$\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

siis integraali (37) korral kehtib arvutusvalem

$$J = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (38)$$



Joon. 6.24

M 6.4.2. Olgu piirkond E keha, mis asetseb kahe tasandi $x=a$ ja $x=b$ vahel (joon. 6.24). Võtame keha lõike punktis x risti x -teljega. Lõike projektsioon yz -tasandil olgu mõõtu kujund $D(x)$.

Kui funktsioon f on integreeruv piirkonnas E ja iga $x \in [a, b]$ korral eksisteerib integraal

$$\iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

siis integraali (37) korral kehtib arvutusvalem

$$J = \int_a^b dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz. \quad (39)$$

Näited

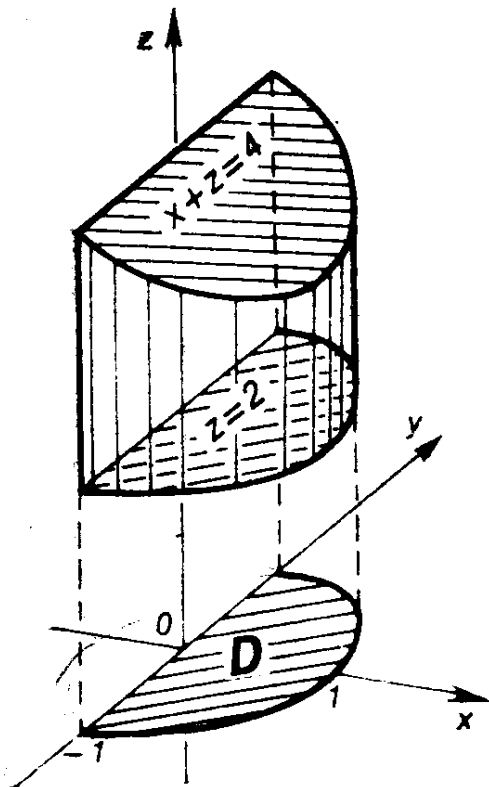
N 6.4.1. Integraalis (37) asetada rajad valemite (38) ja (39) järgi, kui piirkond E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$) ning tasanditega $z=2$, $x+z=4$ ja $x=0$.

Lahendus. Asetame algul rajad valemi (38) järgi. Selleks joonistame piirkonnad E ja D (joonised 6.25 ja 6.26).

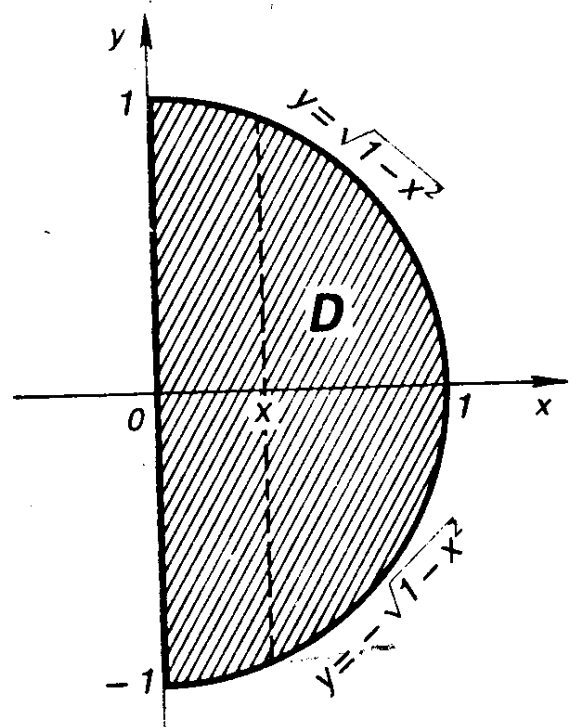
Jooniselt 6.25 näeme, et $z = \alpha(x, y) = 2$ ja $z = \beta(x, y) = 4 - x$ ning jooniselt 6.26 näeme, et $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Seega valemi (38) põhjal on

$$J = \iint_D dx dy \int_2^{4-x} f(x, y, z) dz.$$

Asetame nüüd rajad valemi (39) järgi. Selleks võtame piirkonnas E lõike kohal $x \in [0, 1]$. Et piirkonna D rajajoon on ringjoon $x^2 + y^2 = 1$, siis jooniselt



Joon. 6.25



Joon. 6.26

6.26 näeme, et iga $x \in [0, 1]$ korral on muutumisulatus y jaoks antud väärtustega

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Seega, kui $x \in [0, 1]$, siis jooniselt 6.25 näeme, et

$$D(x) = \{(y, z) : -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 2 \leq z \leq 4-x\}$$

Valemi (39) põhjal

$$J = \int_0^1 dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

N 6.4.2. Leida integraal

$$J = \iiint_E (z+x) dx dy dz,$$

kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x\}$.

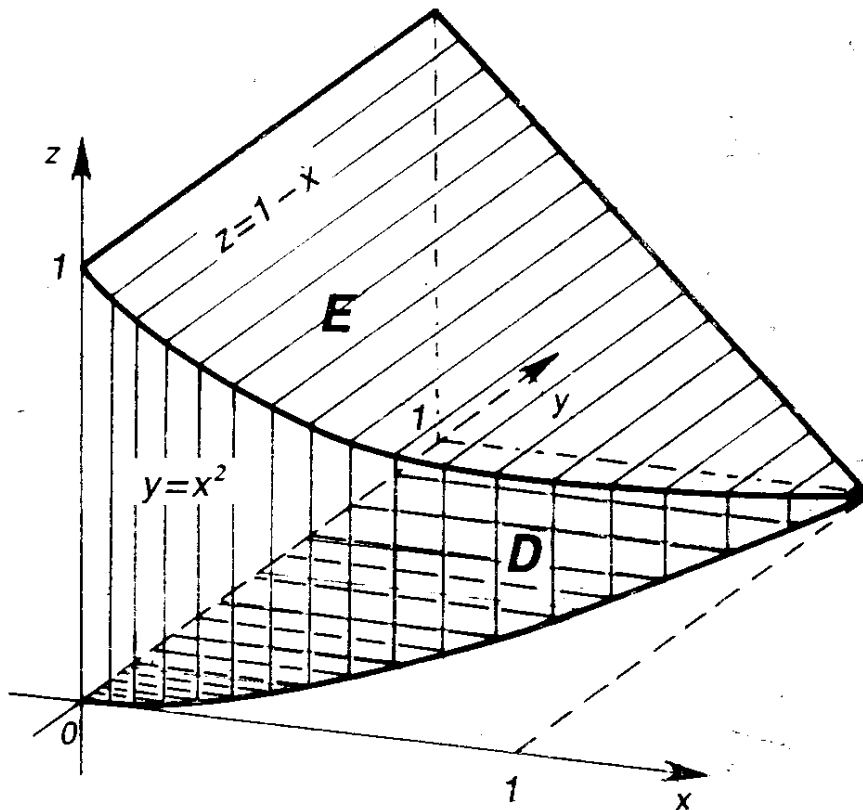
Lahendus. Kasutame valemit (38). Selleks joonistame piirkonnad E ja D (joonised 6.27 ja 6.28).

Joonise 6.27 põhjal näeme, et valem (38) antud juhul esitub kujul

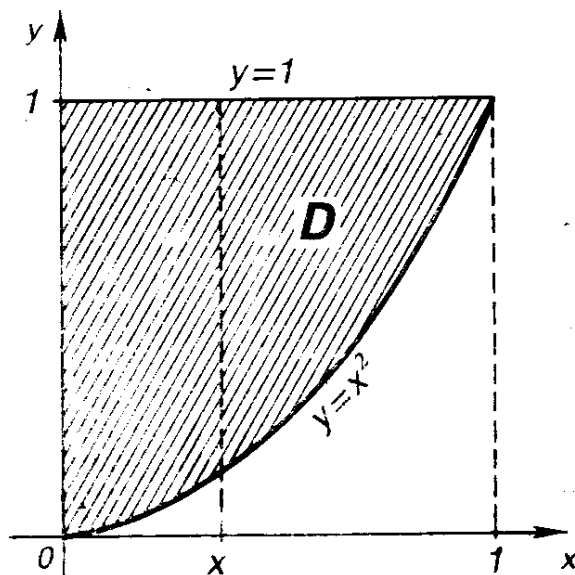
$$J = \iint_D dx dy \int_0^{1-x} (z+x) dz.$$

Leiame sisemise integraali, s. o. integraali z järgi. Et selles integraalis on $x = \text{const}$, siis $dz = d(z+x)$ ja me saame

$$\begin{aligned} J &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x} (z+x) d(z+x) = \\ &= \iint_D dx dy \left. \frac{(z+x)^2}{2} \right|_0^{1-x} = \frac{1}{2} \iint_D (1-x^2) dx dy = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$



Joon. 6.27



Joon. 6.28

Arvutame selle integraali veel valemi (39) järgi. Selleks võtame piirkonnas E lõike kohal x , siis jooniselt 6.27 ja 6.28 näeme, et iga $x \in [0, 1]$ korral on $x^2 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq z \leq 1 - x$. Seega

$$J = \int_0^1 dx \iint_{D(x)} (z+x) dy dz,$$

kus $D(x) = \{(y, z) : x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$. Asetame rajad sisemises, s. o. kahekordses integraalis:

$$J = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{1-x} (z+x) dz.$$

Edasine arvutus on sama mis eespool.

Ülesanded

Integraalis (37) asetada rajad valemite (38) ja (39) järgi, kui piirkond E on piiratud järgmiste pindadega (vt. näide N 6.4.1).

941. Silinder $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$) ning tasandid $z = 1$, $x + z = 3$ ja $x = 0$.
942. Silinder $x^2 + y^2 = 1$ ning tasandid $z = 2$ ja $z = 4$.
943. Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.
944. Pind $z = 1 - x^2 - y^2$ ja tasand $z = 0$.
945. Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.4.2).

946. $J = \iiint_E x^2 y z^2 dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$.
947. $J = \iiint_E y dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y\}$

948. $J = \iiint_E (z+4) dx dy dz$, kus

$$E = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}.$$

949. $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1-x-y}$, kus $E = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4\}$.

950. $\iiint_E (1-x^2) \sqrt{1-y^2} dx dy dz$, kus $E = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

951. $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1-x-y}$, kus E on piiratud tasanditega $x=0, y=0, z=0$ ja $x+y+z=1$.

952. $\iiint_E xy^2z^3 dx dy dz$, kus E on piiratud hüperboolse parabolooidiga $z=xy$ ja tasanditega $x=1, y=x$ ja $z=0$.

953. $\iiint_E (2x+3y-z) dx dy dz$, kus E on piiratud tasanditega $x=0, y=0, z=0, z=3$ ja $x+y=2$.

954. Tõestada, et iga lõigus $[0, a]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^a (a-z)^2 f(z) dz.$$

955. Tõestada, et iga lõigus $[0, 2]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz = \int_0^1 (2-z^2) f(z) dz + \int_1^2 (2-z)^2 f(z) dz.$$

§ 6.5. MUUTUJATE VAHETUS KOLMEKORDSES INTEGRAALIS

Olgu antud integraal

$$J = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz. \quad (40)$$

Vaatleme teisendust

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Delta, \quad (41)$$

mis teisendab uvw -ruumis asetseva kinnise piirkonna Δxyz -ruumis asetsevaks piirkonnaks E .

D 6.5.1. Teisendust (14) nimetatakse regulaarseks, kui
1) teisendus (41) on üksühene,

2) funktsioonidel (41) on olemas pidevad esimest järku osatuletised piirkonnas Δ ,

3) teisenduse (41) jakobiaan

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad (42)$$

kogu piirkonnas Δ .

Regulaarne teisendus (41) teisendab kinnise mõõtuva piirkonna Δ kinniseks mõõtuvaks piirkonnaks E , piirkonna Δ sise-punktid piirkonna E sisepunktideks, piirkonna Δ rajapinna piirkonna E rajapinnaks ja sileda pinna piirkonnas Δ siledaks pinnaks piirkonnas E .

Regulaarse teisenduse (41) pöördteisendus

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (x, y, z) \in E \quad (43)$$

on ka regulaarne teisendus.

Muutujate vahetuse eeskirja integraalile (40) annab järgmine teoreem.

T 6.5.1. Kui

1° funktsioon f on pidev kinnises mõõtuvas piirkonnas E ,

2° teisendus (41) on regulaarne ja teisendab piirkonna Δ piirkonnaks E , siis integraali (40) jaoks kehtib valem

$$J = \iiint_{\Delta} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (44)$$

Valemit (44) nimetatakse integraali (40) muutujate vahetuse valemiks. Muutujaid u, v ja w nimetatakse uuteks integreerimismuutujateks. Teisendust (41) nimetatakse asenduseks.

Valem (44) jääb kehtima ka juhul, kui asendus (41) ei ole regulaarne lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel ja pindadel, mille ruumala on null.

Olgu

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

pöördteisenduse (43) jakobiaan. Kehtib võrdus

$$J(u, v, w) J(x, y, z) = 1.$$

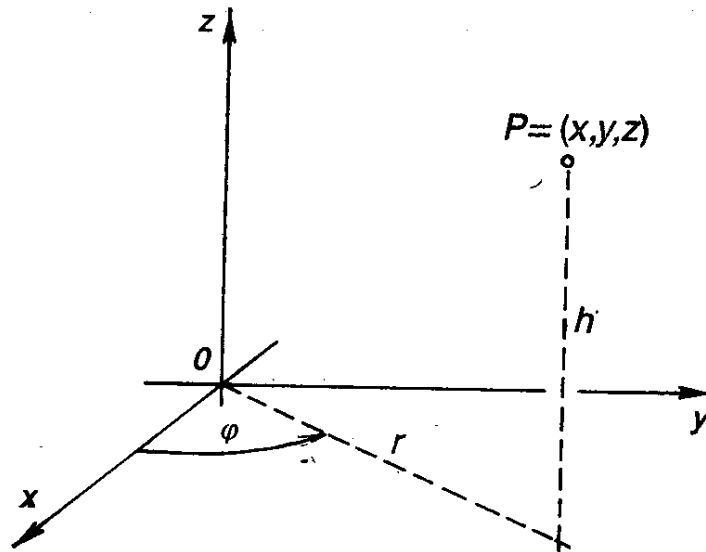
Kui asendus on antud pöördteisenduse (43) kujul, siis on lihtsam leida algul tema jakobiaan $J(x, y, z)$ ja viimasest võrdusest avaldada valemi (44) jaoks vajalik jakobiaan $J(u, v, w)$.

Tüüpilised asendused (41), mis esinevad praktikas, on järgmised.

1. Üleminek silinderkoordinaatidele. Sel korral asendus (41) antakse kujul

$$\begin{cases} x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi \\ z=h \end{cases} \quad (r, \varphi, h) \in \Delta, \quad (45)$$

kus uusi muutujaid $r \geq 0$, φ ja h nimetatakse punkti $P=(x, y, z)$ silinderkoordinaatideks (joon. 6.29).



Joon. 6.29

Asenduse (45) jakobiaan on

$$J(r, \varphi, h) = r.$$

Asendus (45) ei ole regulaarne $r\varphi h$ -ruumis ainult ühel tasandil $r=0$. Järelikult valem (44) kehtib asenduse (45) korral sõltumata sellest, kas tasand $r=0$ kuulub piirkonda Δ või ei kuulu sinna, ja omandab kuju

$$J = \iiint_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r \, dr \, d\varphi \, dh. \quad (46)$$

Asenduse (45) korral on $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Üleminek elliptilistele silinderkoordinaatidele. Sel korral minnakse uutele muutujatele $r \geq 0$, φ ja h asendusega

$$\begin{cases} x=ar \cos \varphi \\ y=br \sin \varphi \\ z=h \end{cases} \quad (r, \varphi, h) \in \Delta, \quad (47)$$

kus $a > 0$ ja $b > 0$ on sobivalt valitud konstandid.

Asenduse (47) jakobiaan on

$$J(r, \varphi, h) = abr \quad (48)$$

ja valem (44) omandab kuju

$$J = ab \int_{\Delta} \int \int f(ar \cos \varphi, br \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh. \quad (49)$$

Asendus (47) ei ole regulaarne $r\varphi h$ -ruumis ainult tasandil $r=0$, mis ei mõjosta valemi (49) kehtivust.

Asenduse (47) korral on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2.$$

3. Üleminek sfäärkoordinaatidele. Sel korral asendus (41) antakse kujul

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (r, \theta, \varphi) \in \Delta, \quad (50)$$

kus uusi muutujaid $r \geq 0$, θ ja φ nimetatakse punkti $P = (x, y, z)$ sfäärkoordinaatideks (joon. 6.30).

Asenduse (50) jakobiaan on $0 \leq \theta \leq \pi$ korral

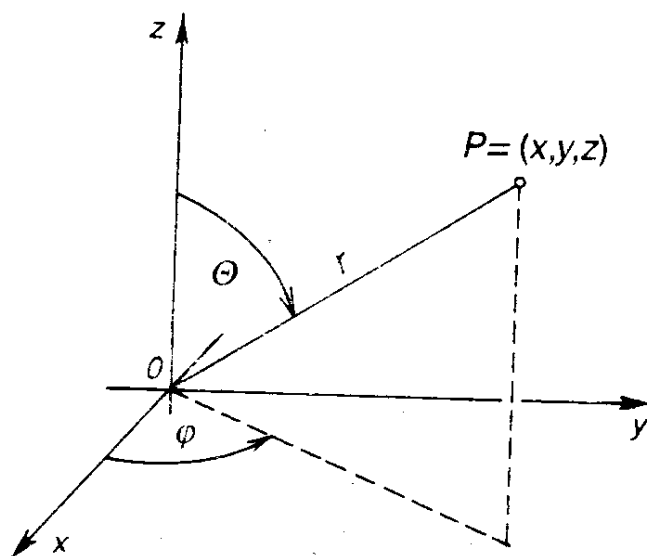
$$J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta \geq 0 \quad (51)$$

ja valem (44) omandab kuju

$$J = \int_{\Delta} \int \int f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (52)$$

Asendus (50) ei ole regulaarne $r\theta\varphi$ -ruumis tasanditel $r=0$, $\theta=0$ ja $\theta=\pi$, mis ei mõjosta valemi (52) kehtivust.

Asenduse (50) korral on $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, mistõttu suurusi $x^2 + y^2 + z^2$ sisaldavaid avaldisi on lihtne avaldada uue muutuja r kaudu. Samuti $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$.



Joon. 6.30

4. Üleminek ellipsoidkoordinaatidele. Sel korral minnakse uutele muutujatele $r \geq 0$, ϑ ja φ asendusega

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = br \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = cr \cos \vartheta \end{cases} \quad (r, \vartheta, \varphi) \in \Delta, \quad (53)$$

kus $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$ on sobivalt valitud konstandid.

Asenduse (53) jakobiaan on $0 \leq \vartheta \leq \pi$ korral

$$J(r, \vartheta, \varphi) = abc r^2 \sin \vartheta \geq 0 \quad (54)$$

ja valem (44) omandab kuju

$$J = abc \iiint_{\Delta} f(x, y, z) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad (55)$$

kus x , y ja z tuleb asendada avaldistega (53).

Asendus (53) ei ole regulaarne $r\vartheta\varphi$ -ruumis tasanditel $r=0$, $\vartheta=0$ ja $\vartheta=\pi$, mis ei mõjosta valemi (55) kehtivust.

Asenduse (53) korral on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \sin^2 \vartheta.$$

5. Üleminek üldistele ellipsoidkoordinaatidele. Sel korral asendus (41) antakse kujul

$$\begin{cases} x = ar \cos^s \varphi \sin^t \vartheta \\ y = br \sin^s \varphi \sin^t \vartheta \\ z = cr \cos^t \vartheta \end{cases} \quad (r, \vartheta, \varphi) \in \Delta, \quad (56)$$

kus $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ning s ja t on sobivalt valitud konstandid.

Asenduse (56) jakobiaan on

$$J(r, \vartheta, \varphi) = abcstr^2 \cos^{s-1} \varphi \sin^{s-1} \varphi \cos^{t-1} \vartheta \sin^{2t-1} \vartheta. \quad (57)$$

Üleminekut üldistele ellipsoidkoordinaatidele kasutatakse näites N 6.6.2.

Näited

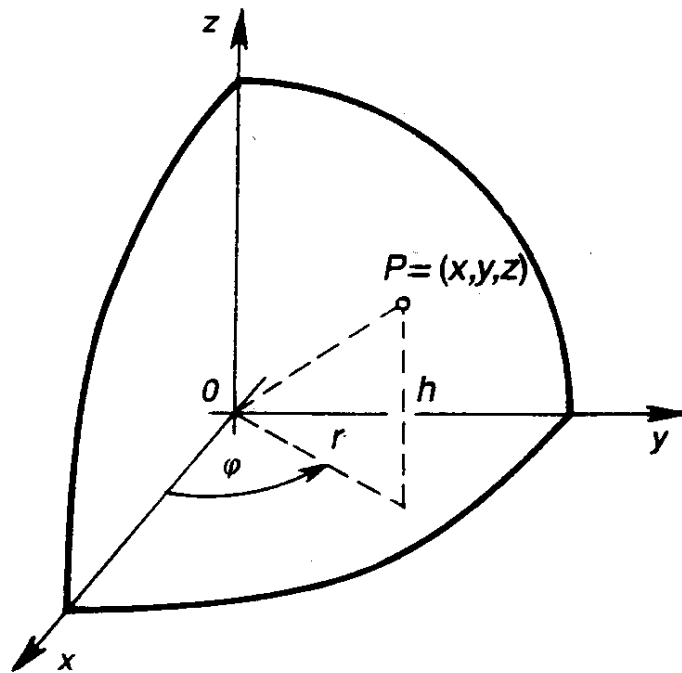
N 6.5.1. Üleminekuiga silinderkoordinaatidele leida integraal

$$J = \iiint_E xz \, dx \, dy \, dz,$$

kus piirkond E on piiratud sfääri osaga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) ning koordinaattasanditega $x=0$, $y=0$ ja $z=0$.

Lahendus. Tuleb teha asendus (45). Selleks joonistame piirkonna E (joon. 6.31).

Antud sfääri võrrand silinderkoordinaatides on $r^2 + h^2 = 1$. Joonistelt 6.29 ja 6.31 näeme, et punktid $P = (x, y, z)$ kujundavad piirkonna E , kui nende silinderkoordinaadid muutuvad piirides $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$ ja $0 \leq h \leq \sqrt{1 - r^2}$ (sest sfääri punktides on $r^2 + h^2 = 1$). Valemi (46) põhjal saame



Joon. 6.31

$$J = \iiint_{\Delta} r^2 h \cos \varphi \, dr \, d\varphi \, dh,$$

kus

$$\Delta = \{(r, \varphi, h) : 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq h \leq \sqrt{1-r^2}\}.$$

Arvutame viimase integraali:

$$J = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} h \, dh = \frac{1}{15}.$$

N 6.5.2. Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leida integraal

$$J = \iiint_E xz \, dx \, dy \, dz,$$

kus piirkond E on piiratud sfääri osaga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) ning koordinaattasanditega $x=0$, $y=0$ ja $z=0$.

Lahendus. Tuleb teha asendus (50). Selleks joonestame piirkonna E (joon. 6.31). Joonistelt 6.30 ja 6.31 näeme, et punktid $P = (x, y, z)$ kujundavad piirkonna E , kui nende sfäärkoordinaadid muutuvad piirides $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$ ja $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Valemi (52) põhjal saame

$$J = \iiint_{\Delta} r \cos \varphi \sin \theta \, r \cos \theta \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

kus $\Delta = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Arvutame viimase integraali:

$$J = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{15}.$$

Ülesanded

Üleminekuga silinderkoordinaatidele või elliptilistele silinderkoordinaatidele leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.5.1).

956. $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$ ja $z=2$.
957. $\iiint_E \frac{dx \, dy \, dz}{1 + (z-1)^2}$, kus $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
958. $\iiint_E xz \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ning tasanditega $z=0$, $z=1$, $y=x$ ja $y=x\sqrt{3}$.
959. $\iiint_E y \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, tasandiga $z=0$ ja paraboloidiga $z = x^2 + y^2$.
960. $\iiint_E z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$ ($y \geq 0$) ning tasanditega $z=0$, $z=c$ ja $y=0$.
961. $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0\}$.
962. $\iiint_E \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \right\}$.
963. $\iiint_E xz \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$.

Üleminekuga sfäär- või ellipsoidkoordinaatidele, leida järgmised integraalid (vt. näide N 6.5.2).

964. $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$, kus piirkond E on piiratud sfääri osaga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($y \geq 0$, $z \geq 0$) ning tasanditega $y=0$ ja $z=0$.
965. $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$.
966. $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

967. $\iiint_E \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.
968. $\iiint_E (x^2+y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$.
969. $\iiint_E (x^2+y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$.
970. $\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, kus E on ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.
971. $\iiint_E \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4}} dx dy dz$, kus E on ellipsoid $6x^2 + 4y^2 + 3z^2 \leq 12$.
972. $\iiint_E z^2 dx dy dz$, kus E on kerade $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ ja $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$ ühisosa.
973. $\iiint_E z dx dy dz$, kus $E = \left\{ (x, y, z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$.

§ 6.6. KOLMEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSI

Vaatleme integraali

$$J = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \quad (58)$$

rakendusi keha ruumala, massi, massikeskme ja inertsimomentide arvutamisel.

1. Keha ruumala. Olgu keha E kinnine ja mõõtuv ning asetsegu xyz -ruumis. Keha E ruumala V_E avaldub valemiga

$$V_E = \iiint_E dx dy dz. \quad (59)$$

Valem (59) annab kolmekordse integraali (58) geomeetrilise tähenduse juhul, kui $f(x, y, z) = 1$ kogu piirkonnas E .

2. Keha mass, massikeske ja inertsimomendid. Olgu kinnise mõõtuva keha E tihedus igas punktis $P = (x, y, z)$ määratud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y, z)$. Keha E mass m_E avaldub valemiga

$$m_E = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (60)$$

Keha E massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid määratakse valemitega

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m} \iiint_E x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_c = \frac{1}{m} \iiint_E y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_c = \frac{1}{m} \iiint_E z \rho(x, y, z) dx dy dz, \end{cases} \quad (61)$$

kus $m = m_E$ arvutatakse valemiga (60).

Keha E inertsimomendid I_{xy} , I_{yz} ja I_{zx} vastavalt xy -tasandi, yz -tasandi ja zx -tasandi suhtes määratakse integraalidega

$$\begin{cases} I_{xy} = \iiint_E z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{yz} = \iiint_E x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{zx} = \iiint_E y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{cases} \quad (62)$$

Keha E inertsimomendid I_x , I_y ja I_z vastavalt x -telje, y -telje ja z -telje suhtes määratakse valemitega

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx}. \quad (63)$$

Üldiselt, keha E inertsimoment I_l mingi telje l suhtes määratakse integraaliga

$$I_l = \iiint_E r^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (64)$$

kus r on punkti (x, y, z) kaugus teljest l .

Keha E inertsimoment koordinaatide alguspunkti suhtes määratakse valemiga

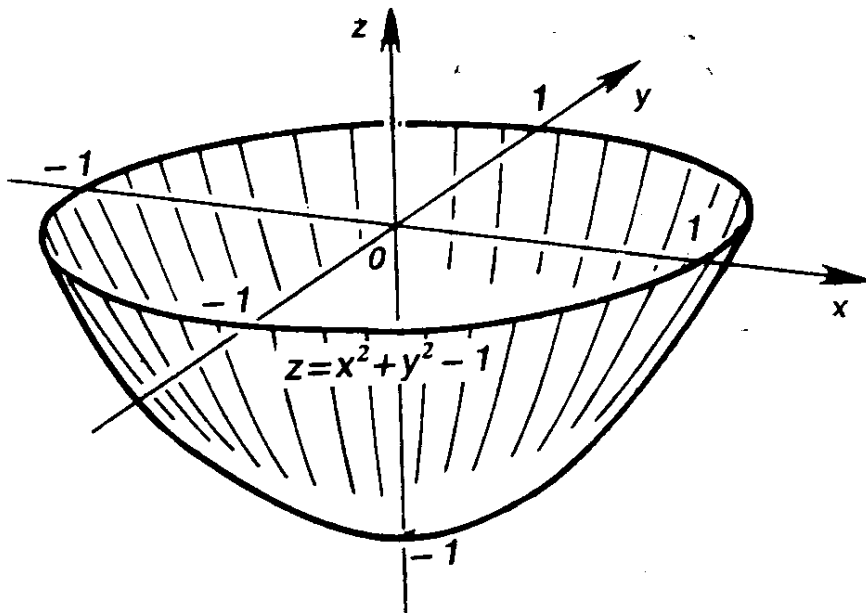
$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}. \quad (65)$$

Näited

N 6.6.1. Leida keha E ruumala V_E , kui keha E on piiratud paraboloidiga $z = x^2 + y^2 - 1$ ja tasandiga $z = 0$.

Lahendus. Kasutame valemit (59). Selleks joonistame keha E (joon. 6.32).

Integraali (59) arvutamiseks lähme üle silinderkoordinaatidele (45). Pinna $z = x^2 + y^2 - 1$ võrrand silinderkoordinaatides on $h = r^2 - 1$. Jooniseid 6.32 ja 6.29 võrreldes näeme, et punktid (x, y, z) kujundavad keha E , kui $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ ja $r^2 - 1 \leq h \leq 0$. Selle keha sümmeetrilisuse tõttu piisab, kui sooritada arvutused $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ korral ja tulemus neljakordistada. Valemi (59) järgi saame siis



Joon. 6.32

$$V_E = 4 \int_{\Delta} \int \int r \, dr \, d\varphi \, dh = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r \, dr \int_{r^2-1}^0 dh = \frac{\pi}{2}.$$

N 6.6.2. Leida keha E ruumala V_E , kui keha E asetseb esimeses oktandis (s. o. piirkonnas, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$) ja on piiratud koordinaattasanditega $x=0$, $y=0$ ja $z=0$ ning pinnaga

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = x + y.$$

L a h e n d u s. Kasutame valemit (59) üleminekuga üldistele ellipsoidkoordinaatidele (56). Selleks kõigepealt avaldame antud pinna võrrandi üldistes ellipsoidkoordinaatides. Asetades pinna võrrandisse avaldised (56), saame

$$\begin{aligned} (r \cos^s \varphi \sin^t \theta + r \sin^s \varphi \sin^t \theta + r \cos^t \theta)^2 &= \\ &= ar \cos^s \varphi \sin^t \theta + br \sin^s \varphi \sin^t \theta, \end{aligned}$$

kust

$$r[(\cos^s \varphi + \sin^s \varphi) \sin^t \theta + \cos^t \theta] = (a \cos^s \varphi + b \sin^s \varphi) \cos^t \theta.$$

Näeme, et on otstarbekas võtta $s=t=2$, sest siis avaldub pinna võrrand kõige lihtsamal kujul:

$$r = (a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta,$$

kus $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ja $0 \leq \theta \leq \pi/2$, sest keha E asetseb esimeses oktandis.

Näeme, et punktid (x, y, z) kujundavad keha E , kui $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ja $0 \leq r \leq u$, kus $u = (a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta$.

Nüüd saame valemi (59) põhjal:

$$V_E = \int_{\Delta} \int \int 4abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin^3 \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 4abc \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^u r^2 \, dr = \frac{abc}{60} (a+b)(a^2+b^2).$$

Ülesanded

Leida kehade ruumalad, kui nad on piiratud järgmiste pinda-
dega (vt. näited N 6.6.1 ja N 6.6.2). Arvud a , b ja c on positiivsed.

974. Silindrid $z=9-y^2$ ja $z=1+y^2$ ning tasandid $x=-1$ ja $x=5$.
975. Paraboloidid $z=x^2+y^2$ ja $z=2x^2+2y^2$ ning silinder $x^2+y^2=1$.
976. Paraboloidid $z=x^2+y^2$ ja $z=x^2+2y^2$ ning tasandid $x=1$, $y=x$ ja $y=2x$.
977. Silindrid $y=x^2$ ja $3y=4-x^2$ ning tasandid $z=0$ ja $z=9$.
978. Hüperboolne paraboloid $z=xy$ ning tasandid $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ ja $x+y=z$.
979. Paraboloidid $z=x^2+y^2$ ja $z=2x^2+2y^2$, silinder $y=x^2$ ning tasand $y=x$.
980. Pind $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.
981. Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ja paraboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.
982. Pind $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.
983. Pind $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=x^2y$.
984. Leida kuubi $E=[0, a]^3$ mass, kui kuubi tihedus igas punktis $P=(x, y, z)$ on $\rho=\rho(x, y, z)=z$.
985. Leida risttahuka $E=[0, a]\times[0, b]\times[0, c]$ mass, kui tihedus igas tema punktis (x, y, z) on $\rho=\rho(x, y, z)=x+y+z$.
986. Leida kuubi mass, kui kuubi külje pikkus on a ja kuubi tihedus igas tema punktis on arvuliselt võrdne punkti kauguste summaga kuubi kolmest tahust, mis läbivad ühte tema tippu.
987. Leida tasanditega $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$ ja $z=0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdne punkti aplikaadiga.
988. Leida kera E mass, kui kera raadius on 3 ja tihedus $\rho=\rho(x, y, z)$ igas tema punktis (x, y, z) on võrdeline punkti kaugusega kera keskpunktist, kusjuures tihedus ühiku kaugusel kera keskpunktist on 2.
989. Leida kera mass, kui kera raadius on a ja kera igas punktis (x, y, z) tiheduse ruut $\rho^2=a^2-(x^2+y^2+z^2)$.
990. Leida silindri $E=\{(x, y, z): x^2+y^2\leq a^2, 0\leq z\leq c\}$ mass, kui tihedus igas tema punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga silindri teljest.
991. Leida sfäärilise kihi $a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq 4a^2$ mass, kui kihi tihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega punktist $(0, 0, 0)$.

Leida homogeensete kehade massikeskme koordinaadid, kui kehad on piiratud järgmiste pindadega (a ja b on positiivsed arvud).

992. $x+y+z=4a, x=0, y=0, z=0.$

993. $z^2=xy, x=a, y=b, z=0.$

994. $x^2+y^2+z^2=a^2 (x>0, y>0, z>0), x=0, y=0, z=0.$

995. Leida poolkera $x^2+y^2+z^2 \leq a^2 (z \geq 0)$ massikeskme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on arvuliselt võrdne punkti kaugusega kera keskpunktist.

Leida järgmiste pindadega piiratud homogeensete kehade inertsimomendid koordinaattasandite ja koordinaattelgede suhtes (a, b ja c on positiivsed arvud).

996. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x=0, y=0, z=0.$

997. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

998. Leida kera $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ inertsimoment tema sümmeetri suhtes, kui kera tihedus punktis (x, y, z) on võrdeline punkti kaugusega kera keskpunktist.

999. Leida homogeense keha

$$E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq c\}$$

inertsimoment sirge $x=y=z$ suhtes.

§ 6.7. PÄRATUD KORDSED INTEGRAALID

Vaatleme lähemalt, kuidas defineeritakse kahekordne integraal

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (66)$$

üle lõpmatu piirkonna D või tõkestamata funktsioonist $f(x, y)$. Selliseid integraale (66) nimetatakse päratuteks kahekordseteks integraalideks. Päratud kolmekordsed integraalid defineeritakse analoogiliselt.

1. **Kahekordne integraal üle lõpmatu piirkonna.** Olgu funktsioon $f(x, y)$ määratud tõkestamata piirkonnas D . Eraldame piirkonnast D tõkestatud mõötuvate sidusate osapiirkondade D_n jada

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset D,$$

mis piirprotsessis $n \rightarrow \infty$ läheneb piirkonnale D , s. o. iga punkti $P \in D$ korral leidub indeks n , et $P \in D_n$.

D 6.7.1. Kui eksisteerib integraal

$$J_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \quad (67)$$

iga $n=1, 2, \dots$ korral ja lõplik piirväärtus

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n, \quad (68)$$

mis ei sõltu jada D_n valikust, siis arvu J nimetatakse funktsiooni f kahekordseks integraaliks üle lõpmatu piirkonna D ja märgitakse sümboliga (66).

2. Tõkestamata funktsiooni kahekordne integraal. Olgu funktsioon $f(x, y)$ antud piirkonnas D ja olgu ta tõkestamata selle piirkonna sise- või rajapunkti P_0 ümbruses. Eraldame piirkonnast D mõõtuva sidusa osapiirkonna ω_λ , mis sisaldab punkti P_0 ja kus λ tähendab suurimat kaugust punkti P_0 ja osapiirkonna ω_λ raja-joone punktide vahel. Olgu D_λ piirkonna D ülejäänud osa, s.o. piirkond $D_\lambda = D \setminus \omega_\lambda$.

Vaatleme piirprotsessi, kus piirkond D_λ läheneb piirkonnale D nii, et $\lambda \rightarrow 0$.

D 6.7.2. Kui eksisteerib integraal

$$J_\lambda = \iint_{D_\lambda} f(x, y) dx dy \quad (69)$$

ja lõplik piirväärtus

$$J = \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda, \quad (70)$$

mis ei sõltu osapiirkondade D_λ valikust, siis arvu J nimetatakse tõkestamata funktsiooni f kahekordseks integraaliks üle piirkonna D ja märgitakse sümboliga (66).

Kui funktsioon f on tõkestamata piirkonnas D joone c ümbruses, kusjuures joone c pindala on null, siis funktsiooni f kahekordne integraal selles piirkonnas D defineeritakse analoogiliselt. Jälle eraldame piirkonnast D mõõtuva osapiirkonna ω_λ , mis sisaldab joont c ja kus λ on suurim kaugustest osapiirkonna ω_λ raja-joone ja joone c vahel, ning vaatleme piirkonda $D_\lambda = D \setminus \omega_\lambda$. Vastava integraali mõiste anname jälle definitsiooni D 6.7.2 järgi.

3. Päratute integraalide koonduvustunnused. Kui päratu integraal definitsiooni D 6.7.1 või D 6.7.2 järgi eksisteerib, siis öeldakse, et ta koondub arvuks J . Muudel juhtudel öeldakse, et ta hajub.

Kui on teada, et päratu integraal koondub, siis on teada ka, et piirväärtus (67) või (70) ei sõltu osapiirkondade valikust ja päratu integraali arvutamiseks võime valida osapiirkonnad nii, et integraali oleks hõlpsam arvutada.

D 6.7.3. Päratut integraali (66) nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub integraal

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (71)$$

Päratute integraalide koonduvuse uurimiseks kasutatakse järgmisi koonduvustunnuseid.

KT 6.7.1. Kui $f(x, y) \geq 0$ kogu piirkonnas D , siis päratu integraal (66) üle lõpmatu piirkonna D (tõkestamata funktsioonist f) koondub arvuks J parajasti siis, kui vähemalt ühe osapiirkondade jada korral eksisteerib lõplik piirväärtus (68) (piirväärtus (70)).

KT 6.7.2. Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad igas vaadeldavas osapiirkonnas ja

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y), \quad \text{kui } (x, y) \in D,$$

siis päratu integraali

$$\iint_D g(x, y) dx dy \quad (72)$$

koonduvusest järeldeb integraali (66) koonduvus ja integraali (66) hajuvusest järeldeb integraali (72) hajuvus.

KT 6.7.3. Kui integraal (67) (integraal (69)) eksisteerib iga vaadeldava osapiirkonna korral, siis integraalid (66) ja (71) koonduvad või hajuvad üheaegselt.

Samasugused teoreemid kehtivad ka kolmekordsete päratute integraalide korral.

Tunnuse KT 6.7.3 põhjal päratute kordsete integraalide korral mõisted «koonduv» ja «absoluutselt koonduv» langevad kokku. Selles mõttes erinevad nad ühe muutuja funktsiooni päratutest integraalidest, mille seas on ka tingimisi koonduvaid päratuid integraale (vt. MAP I, § 7.3 ja § 7.4).

Näited

N 6.7.1. Leida integraal

$$J = \iint_D \frac{dx dy}{(6+4x^2+9y^2)^2},$$

kus $D=R^2$, s. o. kogu xy -tasand.

Lahendus. Tegemist on integraaliga üle lõpmatu piirkonna, kusjuures integraalialune funktsioon $f(x, y) \geq 0$. Sel juhul tunnuse KT 6.7.1 järgi on küllalt, kui leida üks osapiirkondade jada D_n , mille korral eksisteerib piirväärtus (68).

Võtame osapiirkonnad

$$D_n = \{(x, y): 4x^2 + 9y^2 \leq n^2\} \subset D.$$

See jada D_n läheneb piirkonnale D , kui $n \rightarrow \infty$. Arvutame integraali

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(6+4x^2+9y^2)^2},$$

mis eksisteerib tunnuse PT 6.1.1 põhjal. Minnes üle elliptilistele polaarkoordinaatidele $2x=r \cos \varphi$, $3y=r \sin \varphi$, saame

$$I_n = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n \frac{r dr}{(6+r^2)^2} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6+n^2} \right).$$

Seega eksisteerib piirväärtus

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\pi}{36},$$

mis tunnuse KT 6.7.1 põhjal ongi otsitav integraal J .

N 6.7.2. Leida integraal

$$J = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

kus $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lahendus. Integraalialune funktsioon $f(x, y)$ on tõkestamata punkti $(0, 0) \in D$ ümbruses. Seega tegemist on tõkestamata funktsiooni integraaliga. Et $f(x, y) \geq 0$, siis tunnuse KT 6.7.1 põhjal piisab, kui leida üks osapiirkondade jada, mille korral eksisteerib piirväärtus (70).

Eraldame piirkonnast D ringi raadiusega λ ja keskpunktiga punktis $(0, 0)$. Ülejäänud osa on siis osapiirkond

$$D_\lambda = \{(x, y) : \lambda^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Osapiirkond D_λ läheneb piirkonnale D , kui $\lambda \rightarrow 0$.

Arvutame integraali

$$J_\lambda = \iint_{D_\lambda} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

mis eksisteerib tunnuse PT 6.1.1 põhjal. Minnes üle polaarkoordinaatidele, saame

$$J_\lambda = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\lambda^1 \frac{r dr}{\sqrt{r^2}} = 2\pi(1 - \lambda).$$

Näeme, et eksisteerib piirväärtus

$$J = \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda = 2\pi.$$

See piirväärtus eksisteerib siis ka iga jada $\lambda_n \rightarrow 0$ korral (vt. MAP I, T 2.2.1). Tunnuse PT 6.7.1 põhjal arv J ongi otsitav integraal.

Ülesanded

Leida järgmised päratud kahekordsed integraalid või veenduda nende hajuvuses (vt. näited N 6.7.1 ja N 6.7.2).

1000. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$, kus $D = \mathbb{R}^2$.

1001. $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 2)^2}$, kus $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

1002. $\iint_D \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$, kus $D = \mathbb{R}^2$.

1003. $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + 4x^2 + 9y^2)^{3/2}}$, kus $D = \mathbb{R}^2$.

$$1004. \iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^{2/3}}, \text{ kus } D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1\}.$$

$$1005. \iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2}, \text{ kus } D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1\}.$$

$$1006. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \text{ kus } D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq 1\}.$$

$$1007. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{6-2x^2-3y^2}}, \text{ kus } D = \left\{ (x, y): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}.$$

$$1008. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-2x+y}}, \text{ kus } D = \{(x, y): |2x-y| \leq 1, 0 < y \leq 1\}.$$

$$1009. \iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy, \text{ kus } D = \{(x, y): x^2+y^2 \leq a^2\}.$$

Leida järgmised päratud kolmekordsed integraalid või veenduda nende hajuvuses.

$$1010. \iiint_E \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \text{ kus } E = \{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \geq 1\}.$$

$$1011. \iiint_E z e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz, \text{ kus } E = \mathbf{R}^3.$$

$$1012. \iiint_E \frac{dx dy dz}{x^2+y^2+z^2+4}, \text{ kus } E = \mathbf{R}^3.$$

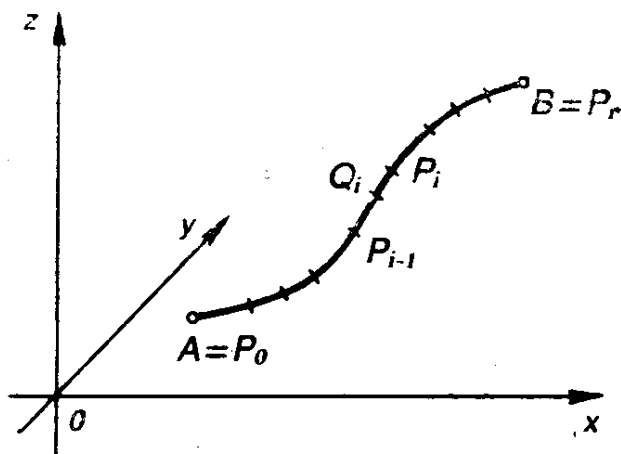
$$1013. \iiint_E \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz, \text{ kus } E = \{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}.$$

$$1014. \iiint_E \frac{xyz dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \text{ kus } E = \{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}.$$

VII. JOONINTEGRAALID

§ 7.1. ESIMEST LIIKI JOONINTEGRAALID

Olgu xyz -ruumis antud sirgestuv joon AB , kus A on joone alguspunkt ja B on joone lõpp-punkt (joon. 7.1). Olgu joonel AB määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$.



Joon. 7.1

Jaotame joone AB osadeks punktidega P_i ($i=0, 1, \dots, n$), võttes $A=P_0$ ja $B=P_n$. Saadud osakaarte $P_{i-1}P_i$ pikkused olgu Δs_i , kusjuures kaare pikkust möödame alati alguspunktist A lõpp-punkti B poole. Igal osakaarel $P_{i-1}P_i$ võtame suvalise punkti Q_i ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta s_i.$$

Olgu λ osakaarte $P_{i-1}P_i$ maksimaalne pikkus, s. o.

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i.$$

D 7.1.1. Arvu J nimetatakse funktsiooni f esimest liiki joonintegraaliks (ehk joonintegraaliks kaare pikkuse järgi) mööda joont AB , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon, \text{ alati kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata joone AB osadeks $P_{i-1}P_i$ jaotamisviisist ja punktide Q_i valikust, ja kirjutatakse

$$J = \int_{AB} f(x, y, z) ds \quad \text{ehk} \quad J = \int_{AB} f ds. \quad (1)$$

Joont AB integraalis (1) nimetatakse integreerimisteeks, punkti A nimetatakse integreerimistee alguspunktiks ja punkti B tema lõpp-punktiks.

Integreerimisteed AB märgitakse ka ühe tähega L , s. o.

$$J = \int_L f(x, y, z) ds,$$

eriti siis, kui joon AB on kinnine, s. o. $A=B$.

Joonintegraali (1) nimetatakse tasandiliseks, kui joon AB asetseb xy -tasandil (või yz -, või zx -tasandil). Sel korral funktsioon f võib olla kahe muutuja funktsioon ja joonintegraal (1) esitub kujul

$$J = \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (2)$$

Kui joon AB on ruumiline joon, siis öeldakse ka, et joonintegraal (1) on ruumiline joonintegraal.

Joonintegraali (1) arvutamisel kasutatakse tema järgmisi omadusi.

I. Joonintegraal (1) ei sõltu integreerimistee AB läbimise suunast, s. t.

$$\int_{AB} f ds = \int_{BA} f ds.$$

II. Joonintegraal (1) on aditiivne, s. t. kui joon AB koosneb osadest AC ja CB , siis

$$\int_{AB} f ds = \int_{AC} f ds + \int_{CB} f ds,$$

kus integraali olemasolust vasakul järeldeb mõlema integraali olemasolu paremal ja vastupidi.

III. Joonintegraal (1) on lineaarne, s. t. iga arvu α ja β korral

$$\int_{AB} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{AB} f ds + \beta \int_{AB} g ds,$$

kus integraalide olemasolust paremal järeldeb integraali olemasolu vasakul, kuid mitte vastupidi.

Joonintegraali (1) korral kehtivad ka ülejäänud Riemanni integraali omadused, s. o. monotoonsus, absoluutne integreeruvus ja keskväärtusteoreem.

Joonintegraali (1) olemasolu saab kindlaks teha järgmise piisava tunnuse abil.

PT 7.7.1. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB , siis joonintegraal (1) eksisteerib.

Tasandilise joonintegraali (2) arvutamine. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB , siis tunnuse PT 7.1.1 põhjal joonintegraal (2) eksisteerib ja tema arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid.

1. Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus punktile A vastab $t=\alpha$ ja punktile B vastab $t=\beta$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (3)$$

2. Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$y=y(x), \quad x \in [a, b],$$

kus punktile A vastab $x=a$ ja punktile B vastab $x=b$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4)$$

3. Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$x=x(y), \quad y \in [c, d],$$

kus punktile A vastab $y=c$ ja punktile B vastab $y=d$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{x_y'^2 + 1} dy. \quad (5)$$

4. Kui joon AB on antud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r=r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

kus punktile A vastab $\varphi=\alpha$ ja punktile B vastab $\varphi=\beta$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (6)$$

5. Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y)=0$, siis kasutame teoreemi T 3.4.1 ilmutamata funktsiooni olemasolu kohta, mille abil avaldame joone võrrandi ilmutatud kujul $y=y(x)$ (kujul $x=x(y)$, parameetrilisel kujul või polaarkoordinaatides) ning leiame tuletise ja kasutame arvutusvalemit (4) (arvutusvalemit (5), (3) või (6)).

Ruumilise joonintegraali (1) arvutamine. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB , siis tunnuse PT 7.1.1 põhjal joonintegraal (1) eksisteerib ja tema arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid.

6. Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus punktile A vastab $t=\alpha$ ja punktile B vastab $t=\beta$, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (7)$$

7. Kui joon AB on antud ilmutatud võrranditega

$$y=y(x), \quad z=z(x), \quad x \in [a, b],$$

kus punktile A vastab $x=a$ ja punktile B vastab $x=b$, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x, y(x), z(x)] \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx. \quad (8)$$

8. Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandisüsteemiga

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

siis kasutame teoreemi T 3.4.3 ilmutamata funktsiooni olemasolu kohta, mille abil avaldame joone võrrandid ilmutatud kujul $y=y(x)$, $z=z(x)$ (või parameetrilisel kujul) ja leiame tuletised. Arvutamiseks kasutame valemit (8) (või valemit (7)).

9. Kui joon $L=AB$ on kinnine, s. o. $A=B$, siis joonintegraali (1) ja (2) arvutamisel võib aditiivsuse omaduse põhjal võtta integreerimise alguspunktiks ja ühiseks lõpp-punktiks joone L iga punkti.

Näited

N 7.1.1. Leida tasandiline joonintegraal

$$J = \int_{AB} \frac{x ds}{\sqrt{2} y},$$

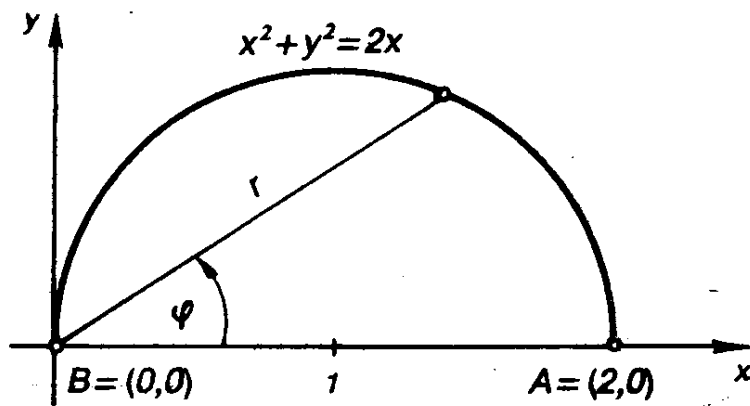
kus joon AB on antud võrrandiga $y=x+3$, $1 \leq x \leq 4$.
Lahendus. Kasutame valemit (4), mille põhjal

$$\begin{aligned} J &= \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2}(x+3)} \sqrt{1+1} dx = \\ &= \int_1^4 \frac{x+3-3}{x+3} dx = \int_1^4 dx - 3 \int_1^4 \frac{d(x+3)}{x+3} = \\ &= 3(1 - \ln 7 + \ln 4). \end{aligned}$$

N 7.1.2. Leida tasandiline joonintegraal

$$J = \int_{AB} y ds,$$

kus joon AB on antud võrrandiga $x^2+y^2=2x$ ($y>0$), $A=(2,0)$ ja $B=(0,0)$.
Lahendus. Joon AB on antud ilmutamata kujul ja kujutab endast ringjoone osa (joon. 7.2). Lähme üle polaarkoordinaatidele. Joone AB võrrand esitub kujul $r=2 \cos \varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Valemi (6) põhjal saame



Joon. 7.2

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\pi/2} r \sin \varphi \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} r \sin \varphi \, d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d \sin \varphi = 2.
 \end{aligned}$$

Ülesanded

Leida järgmised tasandilised joonintegraalid mööda antud joont AB või L (vt. näited N 7.1.1 ja N 7.1.2).

1015. $\int_{AB} \frac{ds}{x-y}$, $AB: y = \frac{1}{2}x - 2$, $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$

1016. $\int_{AB} \frac{2x+y}{y} ds$, $AB: y = -2x - 1$, $A = (0, -1)$, $B = (1, -3)$

1017. $\int_{AB} \frac{ds}{x}$, $AB: x = 2y + 3$, $A = (3, 5)$, $B = (5, 1)$

1018. $\int_{AB} xy \, ds$, $AB: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, $A = (1, 0)$,
 $B = (0, 1)$

1019. $\int_L \sqrt{y} \, ds$, $L: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

1020. $\int_L y \, ds$, $AB: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$

1021. $\int_{AB} y \, ds$, $AB: r = \cos \varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2]$

1022. $\int_{AB} (x - y) \, ds$, $AB: r = \cos \varphi$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

1023. $\int_L (x^2 + y^2) \, ds$, $L: r = a \sin \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

1024. $\int_L \arctan \frac{y}{x} ds$, kui L on Archimedese spiraali $r=2\varphi$ osa, kus $0 \leq r \leq \pi$
1025. $\int_{AB} \sqrt{x^2+y^2} ds$, $AB: x^2+y^2=a^2$ ($x>0$), $A=(a, 0)$, $B=(0, a)$
1026. $\int_L (x-y) ds$, $L: x^2+y^2=2x$
1027. $\int_L x ds$, $L: x^2+y^2=ay$
1028. $\int_L (x+y) ds$, kui L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A=(0, 0)$, $B=(1, 0)$ ja $C=(0, 1)$
1029. $\int_L xy ds$, kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $A=(0, 0)$, $B=(4, 0)$, $C=(4, 2)$ ja $D=(0, 2)$
1030. $\int_L |y| ds$, kui L on lemniskaat $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

Leida järgmised joonintegraalid mööda antud ruumilist joont L .

1031. $\int_L \frac{3z^2 ds}{x^2+y^2}$, kus L on krüvijoone $x=a \cos t$, $y=a \sin t$, $z=at$ esimene keerd ($0 \leq t \leq 2\pi$).
1032. $\int_L (x+3z) ds$, kui L on joone $x=3t$, $y=3t^2/\sqrt{2}$, $z=t^3$ osa, kus $0 \leq t \leq 1$.
1033. $\int_L z ds$, kui L on koonilise krüvijoone $x=t \cos t$, $y=t \sin t$, $z=t$ osa, kus $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.
1034. $\int_L z^3 ds$, kus L on silindri $x^2+y^2=ax$ ja poolsfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($z \geq 0$) lõikejoon.
1035. $\int_L xyz ds$, kus L on ringjoone $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=a^2/4$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.
1036. $\int_L \sqrt{2y^2+z^2} ds$, kus L on ringjoon $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$.

§ 7.2. ESIMEST LIIKI JOONINTEGRAALI RAKENDUSI

Vaatleme, kuidas joonintegraaliga

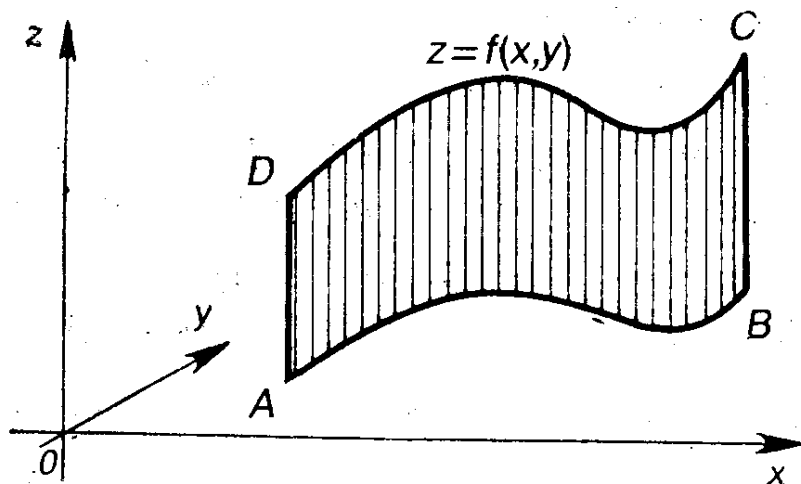
$$J = \int_{AB} f(x, y, z) ds \quad (9)$$

arvutada joone pikkust, silindripinna pindala, joone massi ja massikeset.

1. **Joone pikkus.** Kui xyz -ruumis antud joon AB on sile, siis tema pikkus s_{AB} avaldub valemiga

$$s_{AB} = \int_{AB} ds. \quad (10)$$

2. **Silinderpinna pindala.** Olgu funktsioon $f(x, y) \geq 0$ pidev xy -tasandil asetseval siledal joonel AB . Vaatleme vertikaalset silinderpinda $ABCD$ (joon. 7.3), mille alumine serv on joon AB



Joon. 7.3

ja ülemine serv on funktsiooni f graafik $z = f(x, y)$. Pinna $ABCD$ pindala S_{ABCD} avaldub valemiga

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (11)$$

Valem (11) annab esimest liiki joonintegraali (9) geomeetrilise tähenduse.

3. **Joone mass.** Kui sileda joone AB joontihedus $p = p(x, y, z)$ on pidev funktsioon, siis selle joone mass m_{AB} avaldub valemiga

$$m_{AB} = \int_{AB} p(x, y, z) ds. \quad (12)$$

4. **Joone massikeskme koordinaadid.** Kui sileda joone AB joontihedus $p = p(x, y, z)$ on pidev funktsioon, siis selle joone massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad valemitega

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m} \int_{AB} xp(x, y, z) ds \\ y_c = \frac{1}{m} \int_{AB} yp(x, y, z) ds \\ z_c = \frac{1}{m} \int_{AB} zp(x, y, z) ds, \end{cases} \quad (13)$$

kus $m = m_{AB}$ on joone AB mass.

Näited

N 7.2.1. Leida joone $y=x^2/2$, $0 \leq x \leq \text{sh } 1$, pikkus s .

Lahendus. Kasutame valemit (10) ja arvutusvalemit (4). Saame

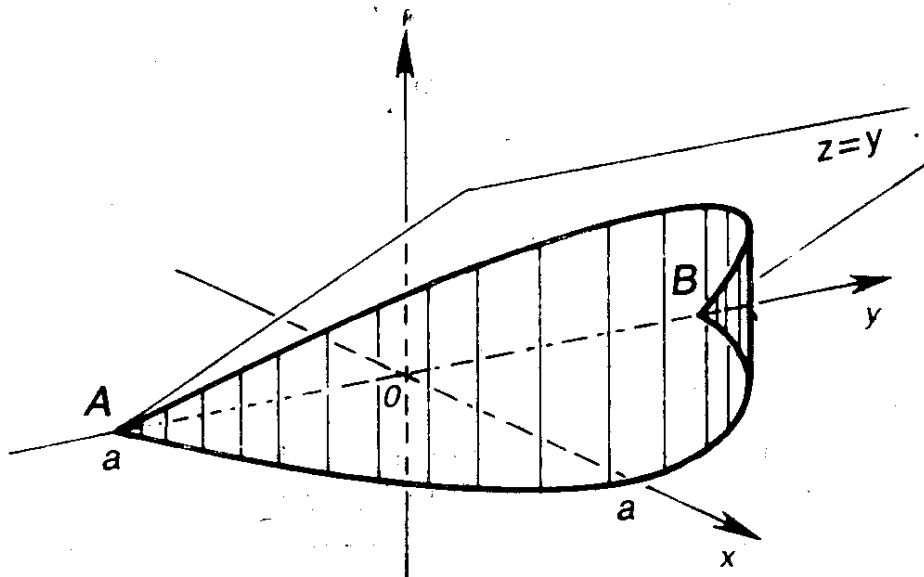
$$s = \int_{AB} ds = \int_0^{\text{sh } 1} \sqrt{1+x^2} dx.$$

Integraali arvutamiseks teeme muutujate vahetuse $x = \text{sh } t$:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+\text{sh}^2 t} \text{ch } t dt = \int_0^1 \text{ch}^2 t dt = \frac{2+\text{sh } 2}{4}.$$

N 7.2.2. Leida vertikaalse silindripinna pindala S , kui pinna alumine serv asetseb xy -tasandil ja ülemine serv on joon (ehk järgmiste pindade lõikejoon) $x^2+y^2=a^2$, $z=y$.

Lahendus. Kasutame valemit (11). Selleks joonistame vaadeldava silindripinna (joon. 7.4).



Joon. 7.4

Vastavalt valemile (11) tuleb leida joonintegraal funktsioonist $z = f(x, y) = y$ mööda ringi kaart $AB: r=a$, $\varphi \in [0, \pi]$, s. o. integraal

$$S = \int_{AB} z ds.$$

Integraali arvutamiseks läheme üle polaarkoordinaatidele ja kasutame arvutusvalemit (6). Et kujund on sümmeetriline, siis leiame pinna selle osa pindala, kus $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, ja võtame selle kahekordselt. Saame

$$S = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 2a^2.$$

Ülesanded

Leida järgmiste xy -tasandil asetsevate joonte pikkused (vt. näide N 7.2.1).

1037. $y=2x\sqrt{x}$, $x \in [0, 7]$ 1038. $y=\operatorname{ch} x$, $x \in [0, 1]$

1039. $x=\ln(t-1)$, $y=\ln(t+\sqrt{t^2-1})+\sqrt{t^2-1}$, $t \in [2, e+1]$

1040. $r=e^\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ 1042. $y=1-\ln \cos x$, $x \in [0, \pi/4]$

1041. $r=2 \sin^3(\varphi/3)$

Leida järgmiste ruumiliste joonte märgitud kaarte pikkused.

1043. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, $A=(0, 0, 0)$, $B=(3, 3, 2)$

1044. $x=e^{-t} \cos t$, $y=e^{-t} \sin t$, $z=e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$

1045. $z=x^2+y^2$, $y=x \tan z$, $A=(0, 0, 0)$, $B=(\cos 1, \sin 1, 1)$

Leida vertikaalsete silindripindade pindalad, kui pindade alumised servad on xy -tasandil ja ülemised servad on määratud järgmiste joontega (ehk järgmiste pindade lõikejoontega) (vt. näide N 7.2.2).

1046. $x^2+y^2=1$, $z=2xy$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$)

1047. $x^2+y^2=4$, $2z=x^2+4$ 1048. $y^2=x$, $z=\sqrt{x(1-4x)}$

1049. Leida silindripinna $y^2=2x$ pindala, mis asub silindri $z^2=2x-4x^2$ sees.

1050. Leida silindripinna $x^2+y^2=2x$ selle osa pindala, mis asub kera $x^2+y^2+z^2=4$ sees.

1051. Leida xy -tasandil oleva kõvera $x=2 \cos t$, $y=\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ mass, kui tema joontihedus on $\rho(x, y)=|y|$.

1052. Leida xy -tasandil oleva homogeense kõvera $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0 \leq t \leq \pi$ masskeskme koordinaadid.

§ 7.3. TEIST LIIKI JOONINTEGRAALID

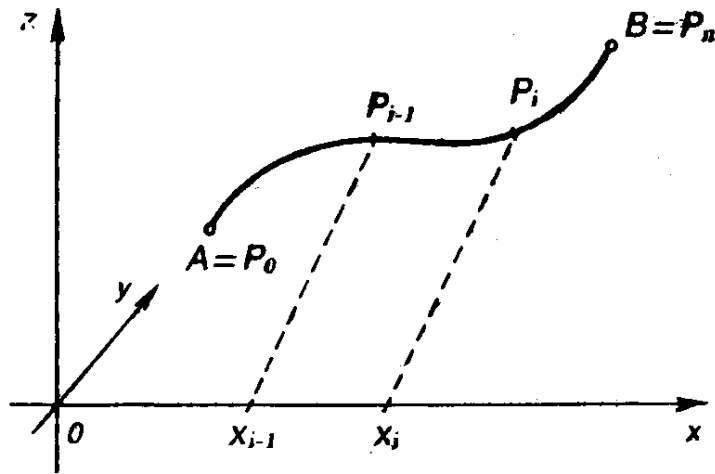
Olgu xyz -ruumis antud sirgestuv joon AB , kus A on joone alguspunkt ja B on joone lõpp-punkt (joon. 7.5). Olgu joonel AB määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$.

Jaotame joone AB osadeks punktidega $P_i=(x_i, y_i, z_i)$ ($i=0, 1, \dots, n$), võttes $A=P_0$ ja $B=P_n$. Igal saadud osakaarel $e_i=P_{i-1}P_i$ võtame suvalise punkti Q_i ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta x_i,$$

kus $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Suurust Δx_i nimetatakse siin osakaare $P_{i-1}P_i$ algebraaliseks (ehk aritmeetiliseks) projektsiooniks x -teljele.



Joon. 7.5

Olgu

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|.$$

D 7.3.1. Arvu J nimetatakse funktsiooni f teist liiki joon-integraaliks (ehk joonintegraaliks kaare projektsioonide järgi x -teljele) mööda joont AB , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon, \text{ alati kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata joone AB osadeks $P_{i-1}P_i$ jaotamisviisist ja punktide Q_i valikust, ja kirjutatakse

$$J = \int_{AB} f(x, y, z) dx \quad \text{ehk} \quad J = \int_{AB} f dx. \quad (14)$$

Erijuhul, kui joon AB asetseb x -teljel, muutub integraal (14) Riemanni integraaliks.

Moodustades summad

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta y_i, \quad \sigma = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta z_i,$$

võime samal viisil defineerida teist liiki joonintegraalid projektsioonide järgi y -teljele ja z -teljele, s. o. joonintegraalid

$$J = \int_{AB} f(x, y, z) dy \quad \text{ehk} \quad J = \int_{AB} f dy \quad (15)$$

ja

$$J = \int_{AB} f(x, y, z) dz \quad \text{ehk} \quad J = \int_{AB} f dz. \quad (16)$$

Joonintegraale (14), (15) ja (16) nimetatakse ka joonintegraaliks koordinaatide järgi.

Olgu joonel AB määratud kolm funktsiooni $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

D 7.3.2. Üldiseks teist liiki joonintegraaliks nimetatakse järgmist joonintegraalide summat

$$J = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} P dx + \int_{AB} Q dy + \int_{AB} R dz, \quad (17)$$

kusjuures avaldist

$$P dx + Q dy + R dz \quad (18)$$

nimetatakse joonintegraalialuseks avaldiseks.

Joonintegraalid (14), (15) ja (16) on joonintegraali (17) erijuhud.

Joont AB integraalides (14)–(17) nimetatakse integreerimisteeks, punkti A nimetatakse integreerimistee alguspunktiks ja punkti B tema lõpp-punktiks.

Joonintegraale (14)–(17) nimetatakse tasandilisteks, kui joon AB asetseb xy -tasandil (või yz -, või zx -tasandil). Sel juhul funktsioon f võib olla kahe muutuja funktsioon. Kui joon AB on ruumiline joon, siis öeldakse ka, et integraalid (14)–(17) on ruumilised joonintegraalid.

Joonintegraalide (14)–(17) arvutamisel kasutatakse nende järgmisi omadusi.

I. Teist liiki joonintegraalid muudavad märki integreerimistee AB läbimissuuna muutmisel vastupidiseks, s. o.

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

II. Kui joon AB on risti x -teljega, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx = 0. \quad (19)$$

Kui joon AB on risti y -teljega, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) dy = 0. \quad (20)$$

Kui joon AB on risti z -teljega, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz = 0. \quad (21)$$

III. Teist liiki joonintegraalid on aditiivsed ja lineaarsed.

Teist liiki joonintegraalide korral kehtivad ka ülejäänud Riemanni integraali omadused, nagu monotoonsus, absoluutne integreeruvus ja keskväärtusteoreem.

Kui joon AB asetseb xy -tasandil, siis on ta risti z -teljega ja seetõttu kehtib tingimus (21). Joonintegraalid (14), (15) ja (17) muutuvad sel korral tasandilisteks ning esituvad kujul

$$J = \int_{AB} f(x, y) dx, \quad J = \int_{AB} f(x, y) dy \quad (22)$$

ja

$$J = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (23)$$

Joonintegraalides (14)–(17) integreerimisteed AB märgitakse ka ühe tähega L , eriti siis, kui joon AB on kinnine, s. o. $A=B$.

Kui integreerimistee L on kinnine joon, siis pole näha, mis suunas teda läbida tuleb, aga sellest oleneb omaduse I põhjal joonintegraali märk. Sellepärast kinnise joone korral integreerimistee läbimissuund märgitakse kas täiendavalt juurde või arvestatakse kokkulepet, et tasandilistes joonintegraalides (22) ja (23), kus joon AB on xy -tasandil, läbitakse integreerimistee alati positiivses suunas, s.o. suunas, mille puhul joone poolt piiratud ala jääb vasakule (kui vaadata z -telje positiivselt poolelt xy -tasandile).

Joonintegraalide (14), (15) ja (16) olemasolu saab kindlaks teha järgmise piisava tunnuse abil.

PT 7.3.1. *Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB , siis joonintegraalid (14), (15) ja (16) eksisteerivad.*

Teist liiki tasandilise joonintegraali arvutamine. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB , siis tunnuse PT 7.3.1 põhjal joonintegraalid (22) eksisteerivad ja nende arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid:

1. Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus punktile A vastab $t=\alpha$ ja punktile B vastab $t=\beta$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] x'(t) dt, \quad (24)$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] y'(t) dt. \quad (25)$$

2. Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$y=y(x), \quad x \in [a, b],$$

kus punktile A vastab $x=a$ ja punktile B vastab $x=b$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f[x, y(x)] dx. \quad (26)$$

3. Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$x=x(y), \quad y \in [c, d],$$

kus punktile A vastab $y=c$ ja punktile B vastab $y=d$, siis

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f[x(y), y] dy. \quad (27)$$

4. Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y)=0$, siis toimime analoogiliselt nagu esimest liiki tasandilise joonintegraali korral (§ 7.1).

5. Üldise tasandilise joonintegraali (23) arvutamiseks kasutame definitsioonavaldist (17), millega tema arvutamine taandub joonintegraalide (22) arvutamisele.

Teist liiki ruumilise joonintegraali arvutamine. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB , siis tunnuse PT 7.3.1 põhjal integraalid (14), (15) ja (16) eksisteerivad ja nende arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid:

6. Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus punktile A vastab $t=\alpha$ ja punktile B vastab $t=\beta$, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt, \quad (28)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] y'(t) dt, \quad (29)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] z'(t) dt. \quad (30)$$

7. Kui joon AB on antud ilmutatud kujul võrranditega

$$y=y(x), \quad z=z(x), \quad x \in [a, b],$$

kus punktile A vastab $x=a$ ja punktile B vastab $x=b$, siis lähme üle parameetrilisele kujule

$$x=x, \quad y=y(x), \quad z=z(x), \quad x \in [a, b]$$

ja valemist (28) saame valemi

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_a^b f[x, y(x), z(x)] dx. \quad (31)$$

Analoogiliselt toimime ka juhtudel, kui joon AB on mingis lõigus antud ilmutatud kujul võrranditega $z=z(y)$, $x=x(y)$ või $x=x(z)$, $y=y(z)$.

8. Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandisüsteemiga

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

siis toimime analoogiliselt nagu esimest liiki ruumilise joonintegraali arvutamisel (§ 7.1).

9. Üldise teist liiki joonintegraali arvutamiseks kasutame definitsioonavaldist (17), millega tema arvutamine taandub joonintegraalide (14), (15) ja (16) arvutamisele.

10. Kui integreerimistee L on kinnine, siis joonintegraalide (14), (15) ja (16) arvutamisel võib aditiivsuse omaduse põhjal võtta integreerimistee alguspunktiks ja ühiseks lõpp-punktiks joone L iga punkti.

Tasandilise joonintegraali arvutamine Greeni valemi abil. Kui funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised P_y ja Q_x on pidevad kinnises piirkonnas D , mille rajajoon L on tükiti

sile, s.t. koosneb siledatest tükkidest, siis kehtib Greeni valem

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy. \quad (32)$$

Valem (32) taandab mööda kinnist joont L võetud üldise teist liiki joonintegraali arvutamise teatava kahekordse integraali arvutamisele.

Näited

N 7.3.1. Leida joonintegraal

$$J = \int_{AB} xy dx$$

mööda xy -tasandil asetsevat joont $AB: y = x^2$, kus $A = (0, 0)$ ja $B = (2, 4)$.

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (26). Joonel AB punktile A vastab $x=0$ ja punktile B vastab $x=2$. Valemi (26) põhjal on siis

$$J = \int_0^2 xx^2 dx = \int_0^2 x^3 dx = 4.$$

N 7.3.2. Leida joonintegraal

$$J = \int_L xy dx,$$

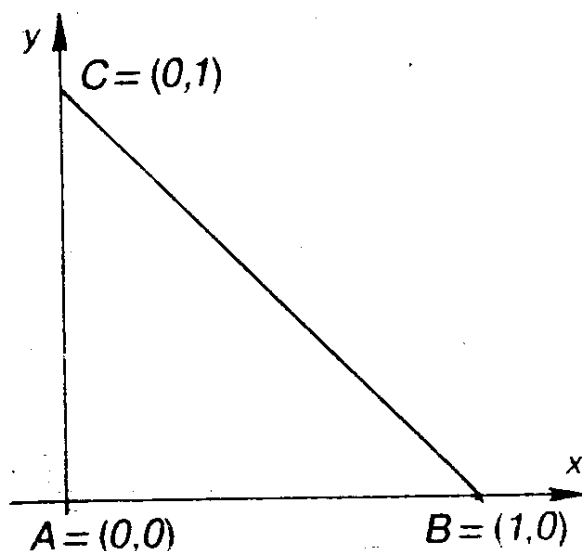
kui joon L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ ja $C = (0, 1)$.

Lahendus. Joonistame integreerimistee L (joon. 7.6). Aditiivsuse omaduse põhjal on

$$J = \int_{AB} xy dx + \int_{BC} xy dx + \int_{CA} xy dx.$$

Sirglõik CA on risti x -teljega, siis omaduse II põhjal viimane integraal mööda lõiku CA on null. Seega

$$J = \int_{AB} xy dx + \int_{BC} xy dx.$$



Joon. 7.6

Kasutame arvutusvalemit (26). Sirglõigu AB võrrand on $y=0$, $x \in [0, 1]$, kus punktile A vastab $x=0$ ja punktile B vastab $x=1$. Sirglõigu BC võrrand on $y=1-x$, $x \in [0, 1]$, kus punktile B vastab $x=1$ ja punktile C vastab $x=0$. Valemi (26) põhjal saame seega

$$J = \int_0^1 x \cdot 0 \, dx + \int_1^0 x(1-x) \, dx = -\frac{1}{6}.$$

Ülesanded

Leida järgmised joonintegraalid mööda xy -tasandil asetsevat joont AB (vt. näited N 7.3.1 ja N 7.3.2).

1053. $\int_{AB} xy \, dx$, $AB: y = \sin x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, 0)$

1054. $\int_{AB} y \, dx$, $AB: y = 2 - \frac{x}{2}$, $A = (4, 0)$, $B = (0, 2)$

1055. $\int_{AB} (x^2 - y^2) \, dy$, $AB: x = \sqrt{y}$, $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$

1056. $\int_{AB} x \, dy$, $AB: 3x + 2y - 6 = 0$, $A = (2, 0)$, $B = (0, 3)$

1057. $\int_{AB} y \, dx$, $AB: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$

1058. $\int_{AB} x \, dy$, $AB: x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

1059. $\int_{AB} \cos y \, dy$, $AB: x$ -telg, $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$

1060. $\int_{AB} e^y \, dx$, AB : sirglõik, mis ühendab punkte $A = (2, 0)$ ja $B = (2, 6)$.

1061. $\int_L x \, dy$, kui L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ ja $C = (0, 2)$.

1062. $\int_L (x^2 + y^2) \, dx$, kui L on kontuur, mille moodustavad sirged $x=1$, $x=5$, $y=1$ ja $y=3$.

Leida järgmised üldised teist liiki joonintegraalid

1063. $\int_{AB} \cos y \, dx + \sin x \, dy$, $AB: y = x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, \pi)$

1064. $\int_L y \, dx + x \, dy$, $L: x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$

1065. $\int_{AB} (2-y) \, dx + x \, dy$, $AB: x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $A = (0, 0)$, $B = (2\pi, 0)$

Leida Greeni valemi abil järgmised joonintegraalid.

1066. $\int_L (1-x^2)y \, dx + x(1+y^2) \, dy$, $L: x^2 + y^2 = a^2$

1067. $\int_L (xy + x + y) \, dx + (xy + x - y) \, dy$, $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1068. $\int_L (xy + x + y) \, dx + (xy + x - y) \, dy$, $L: x^2 + y^2 = ax$

- Leida järgmised ruumilised teist liiki joonintegraalid.
1069. $\int_{AB} x dx + y dy + z dz$, kui AB on sirglõik, mis ühendab punkte $A = (1, 1, 1)$ ja $B = (2, 3, 4)$.
1070. $\int_{AB} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, kui $AB: y = x^2, z = x^3, x \in [0, 1]$.
1071. $\int_{AB} y dx + z dy + x dz$, kui $AB: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t, t \in [0, 2\pi]$.

§ 7.4. INTEGREERIMISTEEST SÖLTUMATUD JOONINTEGRAALID

Olgu ruumilises piirkonnas E antud kaks erinevat punkti A ja B , mis on ühendatud kahe piirkonnas E asetseva kõveraga AIB ja $AIIB$. Olgu funktsioonid $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ määratud piirkonnas E . Vaatleme joonintegraali

$$J = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz. \quad (32)$$

D 7.4.1. Kui iga kõvera AIB ja $AIIB$ korral piirkonnas E kehtib võrdus

$$\int_{AIB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AIIB} P dx + Q dy + R dz,$$

siis öeldakse, et joonintegraal (32) ei sõltu (ehk on sõltumatu) integreerimisteest piirkonnas E ja kirjutatakse

$$J = \int_A^B P dx + Q dy + R dz. \quad (33)$$

Seega joonintegraal (33) sõltub punktide A ja B asukohast piirkonnas E ja on sõltumatu neid punkte A ja B ühendavast integreerimisteest.

1. Tasandilise joonintegraali sõltumatus integreerimisteest.
Asetsegu piirkond D xy -tasandil. Iga kinnist joont piirkonnas D nimetame kontuuriks. Kontuuri nimetatakse lihtsaks, kui ta ei lõiku iseendaga. Piirkonda D nimetatakse ühelisidusaks, kui ta on sidus ja kui ta koos iga lihtsa kontuuriga sisaldab ka selle kontuuri poolt piiratud ala.

Olgu piirkond D lahtine ja ühelisidus. Olgu funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised P_y ja Q_x pidevad piirkonnas D .

Vaatleme piirkonnas D tasandilist joonintegraali

$$J = \int_{AB} P dx + Q dy, \quad (34)$$

kus joon AB on tükiti sile. Kui joonintegraal (34) on integreerimisteest sõltumatu, siis kirjutame kooskõlas valemiga (33), et

$$J = \int_A^B P dx + Q dy. \quad (35)$$

T 7.4.1. Joonintegraal (34) on piirkonnas D integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui selles piirkonnas D integraalilune avaldis

$$P dx + Q dy \quad (36)$$

on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile, s. o. kui

$$P_y = Q_x. \quad (37)$$

T 7.4.2. Kui avaldis (36) on täisdiferentsiaal funktsioonile $U(x, y)$ piirkonnas D , siis kehtib valem

$$\int_A^B P dx + Q dy = U(B) - U(A). \quad (38)$$

Valem (38) üldistab Newtoni-Leibnizi valemi joonintegraalile (34).

T 7.4.3. Piirkonnas D mööda iga kontuuri L on

$$\int_L P dx + Q dy = 0 \quad (39)$$

parajasti siis, kui integraalilune avaldis (36) on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile, s. o. kui kehtib tingimus (37).

Teoreemis T 7.4.3 (samuti ka teoreemides T 7.4.1 ja T 7.4.2) on oluline, et piirkond D on ühelisidus. Vastasel juhul see teoreem ei ole õige (vt. ülesanne 1097).

Teoreemi T 7.4.2 kasutatakse joonintegraali (35) arvutamiseks. Kuid selleks on vaja leida funktsioon $U(x, y)$, mille täisdiferentsiaal (36) on antud joonintegraaliga (35). Seda võib teha järgmisel kolmel viisil.

M 7.4.1. Vaatleme punkte $M_0 = (a, b)$, $M_1 = (x, b)$, $M_2 = (a, y)$ ja $M = (x, y)$ ning murdjooni M_0M_1M ja M_0M_2M , mis koosnevad sirglõikudest M_0M_1 ja M_1M ning M_0M_2 ja M_2M (joon. 7.7).

Funktsioon U , mille täisdiferentsiaal on (36), avaldub valemiga

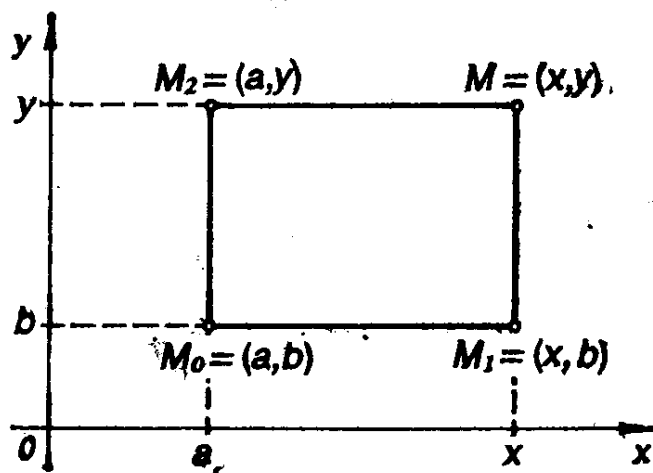
$$U(x, y) = \int_a^x P(x, b) dx + \int_b^y Q(x, y) dy + C, \quad (40)$$

kui murdjoon M_0M_1M asetseb piirkonnas D , või valemiga

$$U(x, y) = \int_a^x P(x, y) dx + \int_b^y Q(a, y) dy + C, \quad (41)$$

kui murdjoon M_0M_2M asetseb piirkonnas D .

Punkt $M_0 = (a, b)$ on suvaline ja valitakse nii, et eeldused murdjoone kohta oleksid täidetud ja integraalide (40) ja (41) arvutamine oleks võimalikult lihtne.



Joon. 7.7

M 7.4.2. Olgu avaldis (36) funktsiooni $U(x, y)$ täisdiferentsiaal, s. o. $dU = P dx + Q dy$. Et alati $dU = U_x dx + U_y dy$, siis kehtivad võrdused

$$U_x = P \quad \text{ja} \quad U_y = Q. \quad (42)$$

Integreerides esimest võrdust (42) muutuja x järgi, saame

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + a(y), \quad (43)$$

kus $a(y)$ on integreerimiskonstant, mis võib sõltuda muutujast y . Suuruse $a(y)$ leidmiseks diferentseerime saadud avaldist (43) muutuja y järgi. Siis teise võrduse (42) põhjal saame

$$U_y = \left(\int P(x, y) dx \right)'_y + a'(y) = Q,$$

kust avaldame $a'(y)$. Viimase integreerimine annab

$$a(y) = \int a'(y) dy + C.$$

Seega

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + \int a'(y) dy + C,$$

millega funktsioon U on leitud.

M 7.4.3. Olgu avaldis (36) funktsiooni U täisdiferentsiaal, s. o. $dU = P dx + Q dy$. Et alati $dU = U_x dx + U_y dy$, siis

$$U_x = P, \quad U_y = Q.$$

Integreerides esimest võrdust muutuja x järgi ja teist võrdust muutuja y järgi, saame kaks järgmist avaldist funktsioonile U :

$$U = \int P dx + a(y) + C$$

$$U = \int Q dy + b(x) + C,$$

kus $a(y)$ ja $b(x)$ on integreerimiskonstandid, mis sõltuvad vastavalt muutujaist y ja x , ning C on konstant.

Otsitava funktsiooni U saame, kui võtame esimese U avaldise ja asendame seal liikme $a(y)$ teisest U avaldisest ainult muutujast y sõltuvate liikmetega. Funktsiooni U saame ka nõnda, et asendame teises U avaldises liikme $b(x)$ esimesest U avaldisest ainult muutujast x sõltuvate liikmetega.

2. Ruumilise joonintegraali sõltumatus integreerimisteest. Olgu lahtine ruumiline piirkond E pinnaliselt ühelisidus, s. o. sidus piirkond, kus iga kontuuri $L \subset E$ saab vaadelda mingi pinna $\Sigma \subset E$ rajajoonena. Olgu funktsioonid $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ ning nende osatuletised P_y, P_z, Q_z, Q_x, R_x ja R_y pidevad piirkonnas E . Olgu joonintegraalis (32) joon AB tükiti sile.

T 7.4.4. Joonintegraal (32) on piirkonnas E integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui selles piirkonnas E integraalilune avaldis

$$P dx + Q dy + R dz \quad (44)$$

on mingi funktsiooni täisdiferentsiaal, s. o. kui

$$P_y = Q_x, \quad Q_z = R_y, \quad R_x = P_z. \quad (45)$$

T 7.4.5. Kui avaldis (44) on funktsiooni $U(x, y, z)$ täisdiferentsiaal piirkonnas E , siis kehtib valem

$$\int_A^B P dx + Q dy + R dz = U(B) - U(A). \quad (46)$$

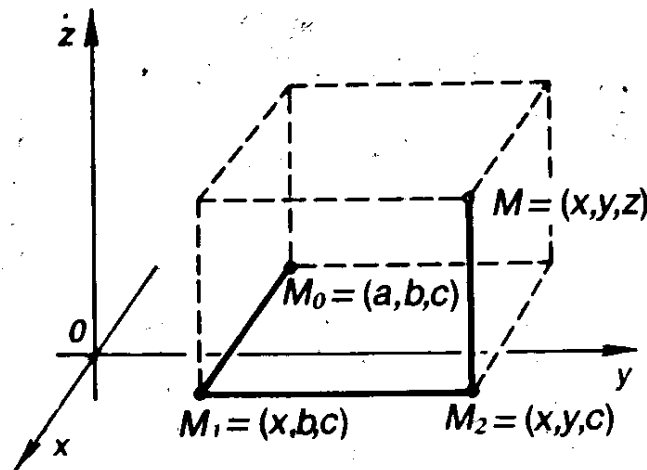
T 7.4.6. Piirkonnas E mööda iga kontuuri L on

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = 0$$

parajasti siis, kui integraalilune avaldis (44) on mingi funktsiooni täisdiferentsiaal, s. o. kui kehtivad tingimused (45).

Teoreemi T 7.4.5 kasutatakse joonintegraali (33) arvutamiseks. Kuid selleks on vaja leida funktsioon $U(x, y, z)$, mille täisdiferentsiaal (44) on joonintegraaliga (33) antud. Seda võib teha samuti nagu tasandilisel juhul, näiteks järgmiselt.

M 7.4.4. Kui murdjoon $M_0M_1M_2M$ (joon. 7.8), mis koosneb sirglõikudest M_0M_1 , M_1M_2 ja M_2M , kus $M_0 = (a, b, c)$, $M_1 = (x, b, c)$, $M_2 = (x, y, c)$ ja $M = (x, y, z)$, asetseb piirkonnas E , siis funktsioon U , mille täisdiferentsiaal on (44), avaldub valemiga



Joon. 7.8

$$U(x, y, z) = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz. \quad (47)$$

Punkt $M_0 = (a, b, c)$ on suvaline ja valitakse nii, et eeldus murdjoone kohta oleks täidetud ning integraali arvutamine oleks võimalikult lihtne. Analoogilised valemid saame ka teiste joonisel 7.8 olevate murdjoonte kohta, mis ühendavad punkte M_0 ja M , ning asetsevad piirkonnas E .

Näited

N 7.4.1. Näidata, et joonintegraal

$$\int_L (x + e^y) dx + x e^y dy$$

on sõltumatu integreerimistest L .

L a h e n d u s. Funktsioonid $P = x + e^y$ ja $Q = x e^y$ ja nende osatuletised on pidevad kogu xy -tasandil. Et $P_y = e^y$ ja $Q_x = e^y$, siis kehtib võrdus $P_y = Q_x$. Teoreemi T 7.4.1 põhjal antud joonintegraal on integreerimistest L sõltumatu kogu xy -tasandil.

N 7.4.2. Leida funktsioon $U(x, y)$, kui tema täisdiferentsiaal on

$$dU = (1 + y e^{xy}) dx + (1 + x e^{xy}) dy.$$

L a h e n d u s. Kasutame meetodit M 7.4.1. Piirkonnaks D võime võtta kogu xy -tasandi. Võttes $a = 0$ ja $b = 0$, saame valemi (40) põhjal

$$U(x, y) = \int_0^x (1 + 0) dx + \int_0^y (1 + x e^{xy}) dy = x + y + e^{xy} + C,$$

kui murdjoon $M_0 M_1 M$ asetseb piirkonnas D . See tingimus on täidetud, sest D hõlmab kogu xy -tasandi.

Kasutame meetodit M 7.4.2. Esimese võrduse (42) põhjal on $U_x = 1 + y e^{xy}$. Integreerime seda võrdust x järgi:

$$U = \int (1 + y e^{xy}) dx = x + e^{xy} + a(y).$$

Diferentseerime saadud võrdust y järgi, siis

$$U_y = x e^{xy} + a'(y) = 1 + x e^{xy},$$

sest teise võrduse (42) põhjal on $U_y = 1 + x e^{xy}$. Seega $a'(y) = 1$, kust $a(y) = y + C$. Järelikult

$$U(x, y) = x + y + e^{xy} + C.$$

Kasutame meetodit M 7.4.3. Integreerides võrdusi $U_x = 1 + y e^{xy}$ ja $U_y = 1 + x e^{xy}$ vastavalt x ja y järgi, saame

$$U = x + e^{xy} + a(y) + C$$

$$U = y + e^{xy} + b(x) + C.$$

Pannes esimesse võrdusse $a(y)$ asemele teisest võrdusest liikme y , saame funktsiooni U . Analoogiliselt, pannes teise võrdusse $b(x)$ asemele esimesest võrdusest liikme x , saame jälle funktsiooni $U = x + y + e^{xy} + C$.

N 7.4.3. Leida joonintegraal

$$J = \int_{(1,2)}^{(3,4)} x dx + y dy.$$

L a h e n d u s. Integraaliaine avaldis on funktsiooni

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + C$$

täisdiferentsiaal ja seda võib leida näiteks meetodiga M 7.4.1. Valemi (38) põhjal saame

$$I = U(3, 4) - U(1, 2) = 10.$$

Ülesanded

Millised järgmistest joonintegraalidest on integreerimisteest sõltumatud ja millised sõltuvad (vt. näide N 7.4.1).

$$1072. \int_L (4x + 2y) dx + (2x - 6y) dy$$

$$1073. \int_L y dx - x dy$$

$$1074. \int_L (3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy$$

$$1075. \int_L \ln(x+z) dx + \arcsin y dy + e^{x+z} dz$$

$$1076. \int_L \frac{yz}{\sqrt{x}} dx + 2z \sqrt{x} dy + 2y \sqrt{x} dz$$

$$1077. \int_L \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Leida funktsioonid U nende täisdiferentsiaalide dU järgi märgitud meetodite abil (vt. näide N 7.4.2).

$$1078. dU = (3x^2 - 2xy^2) dx + (3y^2 - 2x^2y) dy \quad (\text{M 7.4.1, M 7.4.2, M 7.4.3})$$

$$1079. dU = (e^{2y} - 5y^3 e^x) dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x) dy \quad (\text{M 7.4.2})$$

$$1080. dU = \frac{(x+2y) dx + y dy}{(x+y)^2} \quad (\text{M 7.4.2})$$

$$1081. dU = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{M 7.4.3}).$$

$$1082. dU = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy \quad (\text{M 7.4.1})$$

$$1083. dU = [2x + \sin(x+y)] dx + [2y + \sin(x+y)] dy \quad (\text{M 7.4.3})$$

$$1084. dU = \sin(x+y) (dx + dy) \quad (\text{M 7.4.2})$$

$$1085. dU = \frac{yz dx + xz dy + xy dz}{1 + x^2 y^2 z^2} \quad (\text{M 7.4.4})$$

$$1086. dU = yz dx + zx dy + xy dz$$

Leida järgmised joonintegraalid (vt. näide N 7.4.3).

$$1087. \int_{(-1,2)}^{(2,3)} y dx + x dy$$

1088. $\int_{(0,1)}^{(1,2)} 2xy^{-3} dx - (3x^2 - y^2)y^{-4} dy$
1089. $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$
1090. $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy$
1091. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} x dx + y dy + z dz$
1092. $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x dx - y^2 dy + z dz$
1093. $\int_{(-1,2,2)}^{(0,3,4)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Näidata teoreemi T 7.4.3 põhjal, et iga diferentseeruva funktsiooni f korral võrduvad järgmised joonintegraalid nulliga, kui L on kontuur.

1094. $\int_L f(x) dx + th y dy$
1095. $\int_L f(xy) (y dx + x dy)$
1096. $\int_L x^{-2} f(y/x) (x dy - y dx)$
1097. Näidata, et joonintegraal

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

mööda iga kontuuri L , mis ümbritseb punkti $(0, 0)$.

§ 7.5. TEIST LIIKI JOONINTEGRAALIDE RAKENDUSI

Vaatleme teist liiki joonintegraali rakendusi pindala ja töö arvutamisel.

1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine. Olgu xy -tasandil asetseva kujundi D rajajoon L tükiti sile. Siis kujundi D pindala S_D avaldub valemitega

$$S_D = \int_L x dy \quad (48)$$

$$S_D = \int_L y dx \quad (49)$$

ja

$$S_D = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx \quad (50)$$

Valem (50) sageli kirjutatakse kujul

$$S_D = \frac{1}{2} \int_L x^2 d\frac{y}{x}. \quad (51)$$

Kui joon L on antud parameetrilisel kujul võrranditega $x = x(t)$, $y = tx(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, siis valem (51) teisendub kujule

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dt. \quad (52)$$

2. Töö arvutamine. Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punktini B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimel, kus $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ on pidevad funktsioonid joonel AB . Siis jõu \vec{F} töö W on arvutatav valemiga

$$W = m \int_{AB} P dx + Q dy + R dz. \quad (53)$$

Kui jõud \vec{F} on määratud mingi piirkonna E igas punktis ja joonintegraalis (53) integraalialune avaidis on funktsiooni $U(x, y, z)$ täisdiferentsiaal, siis valemi (46) põhjal arvutub jõu \vec{F} töö valemiga

$$W = m[U(B) - U(A)], \quad (54)$$

s. t. vaadeldaval juhul ei sõltu töö W materiaalse punkti liikumisest AB , vaid ainult materiaalse punkti alguskohast A ja lõppasukohast B .

N 7.5.1. Leida valemi (50) abil ringi $x^2 + y^2 \leq a^2$ pindala S .

Lahendus. Vaadeldav ring on piiratud ringjoonega $x^2 + y^2 = a^2$. Lähme üle parameetrilisele kujule, siis selle ringjoone võrrand on $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Valemi (50) ning arvutusvalemite (25) ja (24) põhjal saame

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_L x dy - \frac{1}{2} \int_L y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t a \cos t dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} dt = \pi a^2. \end{aligned}$$

Ülesanded

Leida xy -tasandil olevate tasandiliste kujundite pindalad, kui nad on piiratud järgmiste joontega (vt. näide N 7.5.1).

1098. Ellips $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

1099. Astroid $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$

1100. Kardiid $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$

1101. $y = x^2, x = y^2$

1102. Joone $(x+y)^3 = 2xy$ silmus

1103. Bernoulli lemniskaat $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

1104. Olgu xy -tasandil jõud \vec{F} suunatud igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist O . Leida jõu töö W , mis on kulunud ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2, 4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

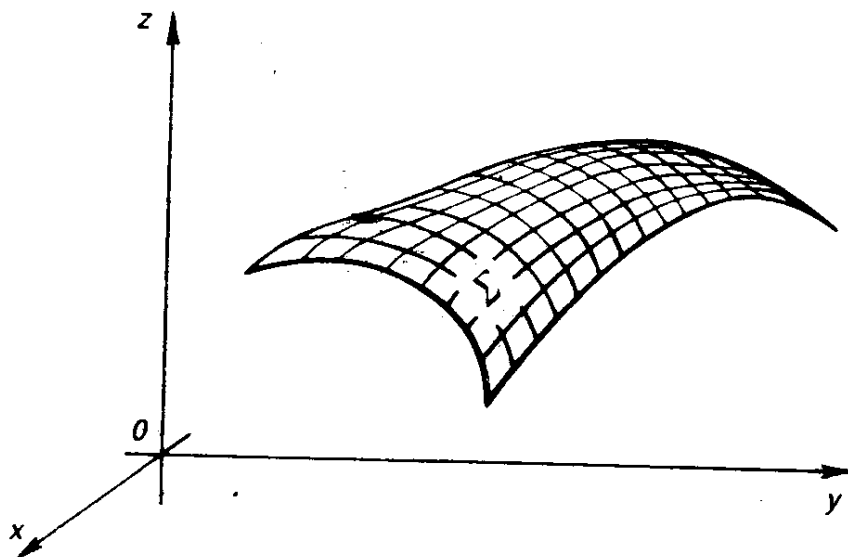
1105. Jõud konstantse suurusega F on xy -tasandi igas punktis x -telje suunaline. Leida jõu töö W , mis kulub ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0, a)$ punkti $(a, 0)$.

1106. Jõud \vec{F} on suunatud xy -tasandi igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus on võrdne punkti M kaugusega punktist O . Leida jõu \vec{F} töö W punkti massiga m nihutamisel punktist A punkti B .

VIII. PINDINTEGRAALID

§ 8.1. ESIMEST LIIKI PINDINTEGRAAL

Olgu antud sile või tükiti sile, s.o. siledatest tükkidest koosnev pind Σ (joon. 8.1). Olgu pinnal Σ määratud kolme muutuva funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame pinna Σ suvaliselt tükiti sile-



Joon. 8.1

date joonte abil osadeks $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, mille pindalad olgu S_1, S_2, \dots, S_n . Võtame pinna igal osal suvalise punkti $P_i \in \Sigma_i$ ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) S_i.$$

Olgu λ pinna osade Σ_i suurim diameeter.

D 8.1.1. Arvu J nimetatakse funktsiooni f esimest liiki pindintegraaliks (ehk pindintegraaliks pindala järgi) mööda pinda Σ , kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon, \text{ kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata pinna Σ jaotamisviisist osadeks Σ_i ja punktide $P_i \in \Sigma_i$ valikust, ja kirjutatakse

$$J = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS. \quad (1)$$

Kui pind Σ asetseb xy -tasandil, siis pindintegraal (1) kujutab endast kahekordset integraali. Sama on ka siis, kui pind Σ asetseb yz - või zx -tasandil.

Pindintegraalil (1) on samad omadused mis kahekordsel integraalil, s.t. pindintegraal (1) on aditiivne, lineaarne, jne.

Pindintegraali olemasolu saab kindlaks teha järgmise piisava tunnuse abil.

PT 8.1.1. Kui pind Σ on sile ja funktsioon f on pidev sellel pinnal Σ , siis pindintegraal (1) eksisteerib.

Pindintegraali (1) arvutamine. Kui pind Σ on sile ja funktsioon f on pidev sellel pinnal Σ , siis tunnuse PT 8.1.1 põhjal pindintegraal (1) eksisteerib ja tema arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid.

1. Kui pind Σ on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f \, dS = \iint_{\Delta} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \quad (2)$$

kus (vt. § 6.3)

$$E=x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F=x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G=x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

2. Kui pind Σ on antud ilmutatud võrrandiga

$$z=z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f \, dS = \iint_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx \, dy. \quad (3)$$

3. Kui pind Σ on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y, z)=0$, siis kasutame ilmutamata funktsiooni olemasolu teoreemi T 3.4.2, et avaldada pinna võrrand ilmutatud kujul $z=z(x, y)$ ja leida osatuletised z_x ja z_y , ning integraali (1) arvutame valemi (3) põhjal.

Valemiga (3) analoogilised valemid saame, kui pind Σ on antud või avaldub ilmutatud kujul võrranditega $x=x(y, z)$ ja $y=y(z, x)$.

Pindintegraali (1) rakendused. Vaatleme pindintegraali (1) rakendust pinna pindala, materiaalse pinna massi, inertsimomentide ja massikeskme koordinaatide arvutamisel.

1. Sileda pinna Σ pindala S_{Σ} on arvutatav valemiga

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} dS. \quad (4)$$

2. Olgu materiaalsel pinnal Σ pindtihedus määratud funktsiooniga $\gamma=\gamma(x, y, z)$ pinna igas punktis (x, y, z) . Siis pinna Σ mass m_{Σ} on arvutatav valemiga

$$m_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \gamma(x, y, z) \, dS. \quad (5)$$

3. Materiaalse pinna Σ inertsimomendid koordinaattelgedes suhtes on arvutatavad valemitega

$$\begin{cases} I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dS \\ I_y = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dS \\ I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dS, \end{cases} \quad (6)$$

kus $\gamma(x, y, z)$ on pinna Σ pindtihedus.

4. Materiaalse pinna Σ massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid on arvutatavad valemitega

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} x \gamma(x, y, z) dS \\ y_c = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} y \gamma(x, y, z) dS \\ z_c = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} z \gamma(x, y, z) dS, \end{cases} \quad (7)$$

kus $m = m_{\Sigma}$ arvutatakse valemiga (5) ja $\gamma(x, y, z)$ on pinna Σ pindtihedus.

Näited

N 8.1.1. Leida pindintegraal

$$J = \iint_{\Sigma} x dS,$$

kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ülemine pool.

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (3). Et

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

ja

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

siis valemi (3) põhjal saame

$$J = \int_D \int_D x \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_D \int_D \frac{x dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Viimase integraali arvutamisel läheme üle polaarkoordinaatidele. Saame

$$J = a \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Et need integraalid on teineteisest sõltumatud ja esimene integraal on null, siis teist päratut integraali ei ole vajagi leida. Seega $I=0$.

N 8.1.2. Leida valemi (4) abil sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ ülemise poole pindala. L a h e n d u s. Tuleb leida pindintegraal (4) mööda pinda

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Et

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2},$$

siis arvutusvalemi (3) põhjal saame

$$S = \iint_D \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Leides selle päratu kahekordse integraali üleminekuga polaarkoordinaatidele, saame $S = 2\pi a^2$.

Ülesanded

Leida järgmised pindintegraalid (vt. näide N 8.1.1).

1107. $\iint_{\Sigma} (6x+4y+3z) \, dS$, kus Σ on tasandi $x/2+y/3+z/4=1$ osa, mis asub esimeses oktandis, s. o. piirkonnas, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$.
1108. $\iint_{\Sigma} (6x+4y+3z) \, dS$, kus Σ on tasandi $x+2y+3z=6$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.
1109. $\iint_{\Sigma} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dS$, kus Σ on ühiksfääri $x^2+y^2+z^2=1$ ülemine pool.
1110. $\iint_{\Sigma} y \, dS$, kus Σ on sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ ülemine pool.
1111. $\iint_{\Sigma} (1+x) \, dS$, kus Σ on sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.
1112. $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 \, dS$, kus Σ on sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ alumine pool.
1113. $\iint_{\Sigma} (y+z+\sqrt{a^2-x^2}) \, dS$, kus Σ on silindri $x^2+y^2=a^2$ osa, mis asetseb tasandite $z=0$ ja $z=a/\pi$ vahel.
1114. $\iint_{\Sigma} (x^2+y^2) \, dS$, kus Σ on keha $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ rajapind.

Leida järgmiste pindade pindalad (vt. näide N 8.1.2).

1115. Tasandi $2z=12-6x-3y$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.
1116. Sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ osa, mis asetseb silindri $x^2+y^2=ax$ sees.
1117. Silindri $x^2+y^2=ax$ osa, mis asetseb sfääris $x^2+y^2+z^2=a^2$.
1118. Silindri $y^2+z^2=a^2$ osa, mis asetseb silindri $x^2+y^2=a^2$ sees.

1119. Leida poolsfääri mass, kui tema raadius on a ja pindtihedus igas punktis on võrdne selle punkti kaugusega raadiusest, mis on risti poolsfääri alusega.
1120. Leida silindri $x^2 + y^2 = a^2$ selle osa mass, mis asetseb tasan-dite $z=0$ ja $z=c$ vahel, kui pindtihedus igas punktis on pöördvõrdeline selle punkti kauguse ruuduga koordinaatide alguspunktist.
1121. Leida koonuse $x^2 + y^2 = z^2$ osa, kus $0 < z' < 1$, inertsimoment z -telje suhtes, kui pindtihedus igas punktis on võrdne ühega.
1122. Leida massikeskme koordinaadid homogeense sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osal, kus $x > 0, y > 0, z > 0$.

§ 8.2. TEIST LIIKI PINDINTEGRAALID

Olgu antud sile pind parameetriliste võrranditega

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta, \quad (8)$$

kus vastavus punktide (x, y, z) ja (u, v) vahel on üksühene, s. t. pinnal (8) ei ole kordseid punkte.

Pinda (8) nimetatakse kahekülgses (ehk kahepoolseks) pinnaks, kui pinna normaali nihutamisel pinnal mis tahes kontuuri mööda ta suund lähtepunkti tagasijõudmisel jääb endiseks. Kui aga leidub kontuur, mille läbimisel normaal omandab vastupidise suuna, siis seda pinda nimetatakse ühekülgses (ehk ühepoolseks) pinnaks.

Sile pind Σ , mille määravad parameetrilised võrrandid (8), on alati kahekülgne pind. Seejuures pinna külge, mille määrab nor-

maal $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, kus

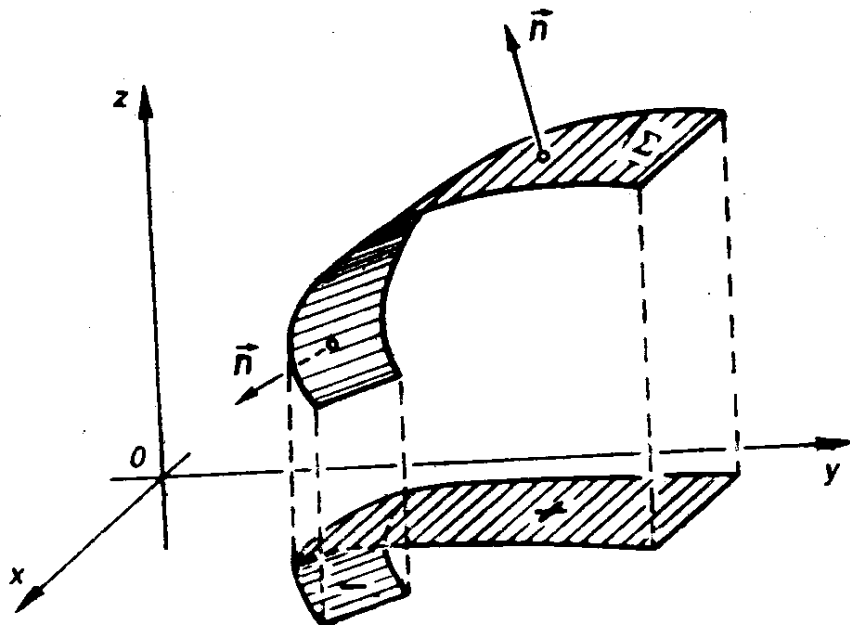
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{array} \right. \quad (9)$$

ja

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad (10)$$

nimetatakse pinna positiivseks küljeks. Pinna Σ teist külge nimetatakse siis pinna negatiivseks küljeks.

Erijuhul, kui pind Σ on antud ilmutatud võrrandiga $z = z(x, y)$,



Joon. 8.2

$(x, y) \in D$, siis tema positiivseks küljeks on pinna ülemine külg ja negatiivseks küljeks tema alumine külg.

Olgu antud sile või tükiti sile kahekülgne pind Σ . Valime sel pinnal Σ ühe külje, märkides selle pinna normaali \vec{n} abil (joon. 8.2).

Projekteerime pinna Σ xy -tasandile. Saadud projektsiooni pindala võtame kas pluss- või miinusemärgiga järgmise reegli järgi. Seal, kus pinna normaal \vec{n} moodustab z -teljega teravnurga, võtame projektsiooni pindala plussmärgiga, s.o. positiivsena, ja seal, kus normaal \vec{n} moodustab z -teljega nürinurga, võtame projektsiooni pindala miinusemärgiga, s.o. negatiivsena.

Olgu pinnal Σ määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame pinna Σ tükiti siledate joonte abil osadeks $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ ja leiame nende osade projektsioonid xy -tasandile. Nende osade projektsioonide pindalad võtame positiivsena või negatiivsena ülal antud reegli järgi ja tähistame vastavalt S_1, S_2, \dots, S_n . Võtame pinna igal osal suvalise punkti $P_i \in \Sigma_i$ ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) S_i.$$

Olgu λ pinnaosade Σ_i suurim diameeter.

D 8.2.1. Arvu J nimetatakse funktsiooni f teist liiki pind-integraaliks (ehk pindintegraaliks projektsioonide järgi xy -tasandile) mööda pinna Σ valitud külge, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon, \text{ kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata pinna Σ jaotamisviisist osadeks Σ_i ja punktide $P_i \in \Sigma_i$ valikust, ja kirjutatakse

$$J = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy. \quad (11)$$

Võttes pinna osade Σ_i projektsioonid yz - ja zx -tasandile, võime samal viisil defineerida veel kaks pindintegraali liiki:

$$J = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dy dz \quad (12)$$

ja

$$J = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dz dx. \quad (13)$$

Olgu pinnal Σ määratud kolm funktsiooni $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$.

D 8.2.2. Üldiseks teist liiki pindintegraaliks J nimetatakse järgmist pindintegraalide summat:

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Sigma} P dx dy + Q dy dz + R dz dx = \\ &= \iint_{\Sigma} P dx dy + \iint_{\Sigma} Q dy dz + \iint_{\Sigma} R dz dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Avaldist $P dx dy + Q dy dz + R dz dx$ pindintegraalis (14) nimetatakse integraalialuseks avaldiseks.

Teist liiki pindintegraalil on samad omadused mis kahekordsel integraalil, s. o. ta on aditiivne, lineaarne jne. Oluline on veel järgmine omadus, mis järeldeb definitsioonist D 8.2.1.

Omadus 8.2.1. Kui pind Σ on risti xy -tasandiga, siis

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy = 0. \quad (15)$$

Analoogiline omadus on ka pindintegraalidel (12) ja (13).

Pindintegraali olemasolu saab kindlaks teha järgmise piisava tunnuse abil.

PT 8.2.1. Kui pind Σ on sile ja funktsioon f on pidev sellel pinnal Σ , siis pindintegraalid (11), (12) ja (13) eksisteerivad.

Pindintegraalide (11), (12) ja (13) arvutamine. Kui pind Σ on sile ja funktsioon f on pidev sellel pinnal Σ , siis tunnuse PT 8.2.1 põhjal pindintegraalid (11), (12) ja (13) eksisteerivad ja nende arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid.

1. Kui pind Σ on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f dx dy = \pm \iint_{\Delta} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] C du dv \quad (16)$$

$$\iint_{\Sigma} f dy dz = \pm \iint_{\Delta} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] A du dv \quad (17)$$

$$\iint_{\Sigma} f dz dx = \pm \iint_{\Delta} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] B du dv, \quad (18)$$

kus A , B ja C on antud võrdustega (10).

Valemites (16), (17) ja (18) paremal integraalide ees tuleb võtta plussmärk, kui integreerimiseks on valitud pinna Σ positiivne külge, ja miinusmärk, kui integreerimiseks on valitud pinna Σ negatiivne külge.

2. Kui pind Σ on antud ilmutatud kujul võrrandiga

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f \, dx \, dy = \pm \iint_D f[x, y, z(x, y)] \, dx \, dy. \quad (19)$$

Kui pind Σ on antud ilmutatud kujul võrrandiga

$$x = x(y, z), \quad (y, z) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f \, dy \, dz = \pm \iint_D f[x(y, z), y, z] \, dy \, dz. \quad (20)$$

Kui pind Σ on antud ilmutatud kujul võrrandiga

$$y = y(z, x), \quad (z, x) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f \, dz \, dx = \pm \iint_D f[x, y(z, x), z] \, dz \, dx. \quad (21)$$

Valemites (19), (20) ja (21) paremal integraalide ees võetakse plussmärk, kui integreerimiseks on valitud pinna Σ positiivne külge, ja miinusmärk, kui integreerimiseks on valitud pinna Σ negatiivne külge.

3. Teist liiki pindintegraali arvutamist võib taandada esimest liiki pindintegraali arvutamisele järgmise seose abil:

$$\iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS, \quad (22)$$

kus $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ on integreerimiseks valitud pinna külje normaal.

4. Kui pind Σ on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y, z) = 0$, siis toimime analoogiliselt nagu esimest liiki pindintegraali korral.

N 8.2.1. Leida pindintegraal

$$J = \iint_{\Sigma} z^2 \, dx \, dy,$$

kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ alumise poole ülemine külge.

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (19). Sfääri võrrandist saame, et integreerida tuleb mööda pinna

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ülemist külge. Seega valemis (19) tuleb paremal integraali ette võtta plussmärk. Valemi (19) põhjal saame

$$J = \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy, \quad \text{kus } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Minnes üle polaarkoordinaatidele, saame

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)r dr = \frac{\pi}{2}.$$

Ülesanded

Leida järgmised pindintegraalid (vt. näide N 8.2.1).

1123. $\iint_{\Sigma} z^2 dx dy$, kus Σ on sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ ülemise poole alumine külg.
1124. $\iint_{\Sigma} z^2 dx dy$, kus Σ on ellipsoidi $x^2+y^2+2z^2=2$ ülemise poole ülemine külg.
1125. $\iint_{\Sigma} z^2 dx dy$, kus Σ on ellipsoidi $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ sisemine külg.
1126. $\iint_{\Sigma} (x^2+y^2)^{1/4} dx dy$, kus Σ on xy -tasandil oleva ringi $x^2+y^2 \leq a^2$ alumine külg.
1127. $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, kus Σ on tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$ ja $z=1$ piiratud kuubi positiivne külg.
1128. $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, kus Σ on sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ väline külg.
1129. $\iint_{\Sigma} y^2z dx dy + xz dy dz + x^2y dz dx$, kus Σ on sellise keha pinna väliskülge, mis asetseb esimeses oktandis ja on piiratud pindadega $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ ja $z=0$.

§ 8.3. GAUSSI—OSTROGRADSKI JA STOKESI VALEMID

Olgu funktsioonid $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ määratud tõkestatud ruumilises piirkonnas E , mille rajapind on Σ .

1. **Gaussi—Ostrogradski valem.** Olgu piirkond E kinnine ja tema rajapind Σ tükiti sile. Kui funktsioonid P , Q ja R ning nende osatuletised P_x , Q_y ja R_z on pidevad piirkonnas E , siis kehtib valem

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_E (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz, \quad (23)$$

kus pindintegraal vasakul on võetud mööda pinna Σ väliskülge.

Valemit (23) nimetatakse Gaussi—Ostrogradski valemiks. Ta avaldab suvalise teist liiki pindintegraali mööda kinnist pinda Σ teatava kolmekordse integraalina.

Valemit (23) kasutatakse pindintegraali arvutamisel kolmekordse integraali abil ning kujundite ruumalade arvutamisel.

Kui funktsioonid P , Q ja R rahuldavad piirkonnas E tingimust $P_x + Q_y + R_z = 1$, siis piirkonna E ruumala V_E on arvutatav valemiga

$$V_E = \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy. \quad (24)$$

Viimasest valemist (24) saame erijuhuna järgmised valemid:

$$V_E = \iint_{\Sigma} z \, dx \, dy \quad (25)$$

$$V_E = \iint_{\Sigma} x \, dy \, dz \quad (26)$$

$$V_E = \iint_{\Sigma} y \, dz \, dx \quad (27)$$

$$V_E = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy. \quad (28)$$

2. Stokesi valem. Olgu kahekülgne pind Σ ja tema rajajoon L tükiti siledad. Kui funktsioonid P , Q ja R ning nende osatuletised P_y , P_z , Q_x , Q_z , R_x ja R_y on pidevad pinnal Σ , siis kehtib valem

$$\begin{aligned} & \int_L P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \\ & = \iint_{\Sigma} (R_y - Q_z) \, dy \, dz + (P_z - R_x) \, dz \, dx + (Q_x - P_y) \, dx \, dy, \end{aligned} \quad (29)$$

kus joonintegraal on võetud mööda joont L positiivses suunas pinna Σ külje suhtes, mida mööda integreeritakse.

Valemit (29) nimetatakse Stokesi valemiks. Ta avaldab teist liiki joonintegraali mööda kinnist joont L teatava teist liiki pindintegraali kaudu. Valemit (29) kasutatakse joonintegraalide arvutamisel pindintegraali abil.

Näited

N 8.3.1. Leida Gaussi-Ostrogradski valemi (23) abil pindintegraal

$$J = \iint_{\Sigma} z \, dx \, dy,$$

kus Σ on esimeses oktandis asetseva kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ osa pinna väliskülg. **Lahendus.** Et $P=0$, $Q=0$ ja $R=z$ ning $P_x=0$, $Q_y=0$ ja $R_z=1$, siis valemi (23) põhjal saame

$$J = \iiint_E dx \, dy \, dz,$$

kus E on esimeses oktandis asetseva kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ osa. Et kera ruumala on $4\pi a^3/3$, siis valemi (59) põhjal paragrahvist 6.6 saame $J = \pi a^3/6$.

N 8.3.2. Leida kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ruumala valemi (28) abil.

Lahendus. Tuleb arvutada integraal (28) mööda sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ väliskülge. Võtame sfääri võrrandi parameetrilisel kujul

$$x = a \cos \varphi \sin \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \theta,$$

kus $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ja $0 \leq \theta \leq \pi$, ja kasutame arvutusvalemeid (16), (17) ja (18), võttes $u = \varphi$ ja $v = \theta$ ning $\Delta = \{(\varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Arvutame kõigepealt jakobiaanid

$$A = \begin{vmatrix} y_\varphi & z_\varphi \\ y_\theta & z_\theta \end{vmatrix} = -a^2 \cos \varphi \sin^2 \theta,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_\varphi & x_\varphi \\ z_\theta & x_\theta \end{vmatrix} = -a^2 \sin \varphi \sin^2 \theta,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_\varphi & y_\varphi \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = -a^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Uurides suunda, mida omab sfääri normaal $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, mille koordinaadid on antud võrdustega (9), näeme, et ta on sfääri sisekülje normaal. Seega antud juhul on sfääri positiivseks küljeks tema sisekülg. Et valemis (28) tuleb integreerida mööda sfääri väliskülge (praegusel juhul mööda sfääri negatiivset külge), siis arvutusvalemities (16), (17) ja (18) tuleb võtta integraalide ette miinusmärgid.

Valemi (28) ja arvutusvalemite (16), (17) ja (18) põhjal saame

$$\begin{aligned} V_E &= -\frac{a^3}{3} \int_{\Delta} \int [\cos \varphi \sin \theta (-\cos \varphi \sin^2 \theta) + \\ &+ \sin \varphi \sin \theta (-\sin \varphi \sin^2 \theta) + \cos \theta (-\sin \theta \cos \theta)] d\varphi d\theta = \\ &= -\frac{a^3}{3} \int_{\Delta} \int \sin \theta d\varphi d\theta = -\frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{4a^3\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ülesanded

Leida Gaussi-Ostrogradski valemi (23) abil järgmised pind-integraalid (vt. näide N 8.3.1).

1130. $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ väliskülg.
1131. $\iint_{\Sigma} (y+z) dy dz + (z-x) dz dx + xy dx dy$ mööda kinnise sileda pinna Σ väliskülge.
1132. $\iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + z^3 dx dy$ mööda pinna Σ väliskülge, kui Σ on keha $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq b$ rajapind.
1133. $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ mööda kuubi sisekülge, kui kuup on piiratud tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$ ja $z=1$.
1134. $\iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$ mööda siledat pinda Σ , mis on keha E rajapind, kui keha E ruumala on V_E ja $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ on pinna Σ väliskülje normaal.
1135. $\iint_{\Sigma} u_x dy dz + u_y dz dx + u_z dx dy$ mööda kinnise sileda pinna Σ väliskülge, kui funktsioon $u(x, y, z)$ rahuldab Laplace'i võrrandit $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

1136. $\iint_{\Sigma} u_y dy dz + u_x dz dx + (x+y) dx dy$ mööda kinnise sileda pinna Σ väliskülge, kui funktsiooni u teist järku osatuletised on pidevad ja funktsioon u rahuldab võrrandit $u_{xy}=0$.
1137. $\iint_{\Sigma} yz dx dy + xz dy dz + xy dz dx$ mööda keha E rajapinna Σ väliskülge, kui keha E on piiratud silindriga $x^2+y^2=a^2$ ($x, y \geq 0$) ning tasanditega $x=0, y=0, z=0$ ja $z=b$.

Leida järgmiste kehade E ruumalad valemite (25)–(28) abil (vt. näide N 8.3.2).

1138. Ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$.
1139. E on kehade $x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$ ja $(x-a)^2+y^2 \leq a^2$ ühisosa.
1140. Keha E on piiratud pindadega $x=0, z=0$ ja $x=u \cos v, y=u \sin v, z=-u+3 \cos v$, kus $u \geq 0$.
1141. Keha E on piiratud pindadega $z=c, z=-c$ ja $x=a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, y=a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, z=c \sin u$.

Arvutada Stokesi valemi (29) abil järgmised joonintegraalid.

1142. $\int_L x^2 dx + y^3 dy + cz dz$, kus L on kontuur.
1143. $\int_L x^2 y^3 dx + y^2 dy + z dz$, kus L on ringjoon $x^2+y^2=a^2, z=0$, võttes pinnaks Σ poolsfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($z \geq 0$) ja integreerides mööda pinna Σ ülemist külge.
1144. $\int_L (2x+y) dx - 2y dy + z dz$, kui L koosneb kolmnurga ABC külgedest, kus $A=(0, -1, 0), B=(0, 2, 0)$ ja $C=(2, 0, 0)$, võttes pinnaks Σ kolmnurga ABC ja integreerides mööda pinna Σ ülemist külge.

§ 8.4. VÄLJATEOORIA ELEMENDID

Skalaar- ja vektorväljad. Olgu kolmemõõtmelises ruumis antud piirkond E . Kui piirkonna E igas punktis (x, y, z) on määratud üks reaalarv U funktsiooniga $U=U(x, y, z)$, siis öeldakse, et piirkonnas E on antud skalaarväli U .

Skalaarvälja U nimetatakse diferentseeruvaks, kui funktsioon $U=U(x, y, z)$ on diferentseeruv. Skalaarväljas U pindu $U(x, y, z)=C=\text{const}$ nimetatakse niivopindadeks.

Diferentseeravas skalaarväljas U vektorit

$$\text{grad } U = (U_x, U_y, U_z) \quad (30)$$

nimetatakse skalaarvälja U gradiendiks punktis (x, y, z) .

Vektori (30) tähistamiseks kasutatakse sümboolset vektorit

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

mida nimetatakse nablaks ehk Hamiltoni operaatoriks. Vektori nabla abil kirjutatakse

$$\text{grad } U = \nabla U.$$

Vektor $\text{grad } U$ on nivoopinna normaal. Laplace'i operaatorit $\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ võib vektori nabla abil kirjutada kujul $\Delta U = \nabla \nabla U$.

Kui piirkonna E igas punktis (x, y, z) on määratud vektor $\vec{A} = (P, Q, R)$, kus $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ ja $R = R(x, y, z)$ on punktis (x, y, z) määratud funktsioonid, siis öeldakse, et piirkonnas E on defineeritud vektorväli $\vec{A} = (P, Q, R)$.

Kui vektor $\vec{A} = (P, Q, R)$ on diferentseeruv piirkonnas E , s.o. funktsioonid P , Q ja R on diferentseeruvad piirkonnas E , siis vektorvälja \vec{A} nimetatakse diferentseeruvaks.

Tuletis antud suunas. Olgu piirkonnas E antud mingi telg l , mis läbib punkti $A = (a, b, c)$ ja mille suund on määratud ühikvektoriga $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Olgu $M = (x, y, z)$ suvaline punkt teljel l . Tähistame AM abil punkti A ja M vahelise kauguse. Kaugus AM võetakse plussmärgiga, kui vektori \vec{AM} ja telje l suunad ühtivad, ja miinusmärgiga, kui nende suunad on vastupidised.

D 8.4.1. Piirväärtust

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow A} \frac{U(M) - U(A)}{AM} \quad (31)$$

nimetatakse funktsiooni $U(x, y, z)$ tuletiseks antud suunas l punktis A .

Tuletis (31) kujutab funktsiooni U muutumise kiirust telje l suunas. Erijuhul, kui telg l on x -, y - või z -telg, siis tuletis (31) on vastavalt osatuletis U_x , U_y või U_z .

Kui funktsioon U on diferentseeruv piirkonnas E , siis kehtib valem

$$\frac{\partial U}{\partial l} = U_x \cos \alpha + U_y \cos \beta + U_z \cos \gamma, \quad (32)$$

mida kasutatakse tuletise (31) leidmiseks.

Selleks, et funktsiooni U tuletis telje l suunas oleks maksimumne, peab telje l suund ühtima vektori $\text{grad } U$ suunaga. Sel korral tuletis on võrdne $\text{grad } U$ pikkusega.

Vektori voog ja divergents. Asetsegu vektorväljas $\vec{A} = (P, Q, R)$ kahekülgne pind Σ , mille üks külge olgu määratud ühiknormaaliga $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Vektori \vec{A} vooks W_Σ läbi pinna Σ antud suunas \vec{n} nimetatakse pindintegraali

$$W_\Sigma = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS. \quad (33)$$

Kui pind Σ on tükiti sile ja funktsioonid P , Q ja R on pidevad pinnal Σ , siis vektori \vec{A} voog (33) eksisteerib.

Olgu Σ piirkonna E rajapind ja \vec{n} pinna Σ väliskülje normaal. Vaatleme piirprotsessi $E \rightarrow M$, kus piirkond E tõmbub kokku punktiks $M \in E$ nii, et piirkonna E diameeter läheneb nullile.

Piirväärtust

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{E \rightarrow M} \frac{W_\Sigma}{V_E} \quad (34)$$

nimetatakse vektori \vec{A} divergentsiks punktis $M = (x, y, z)$.

Kui funktsioonid P , Q ja R ning nende osatuletised P_x , Q_y ja R_z on pidevad piirkonnas E , siis divergents (34) eksisteerib ja kehtib valem

$$\operatorname{div} \vec{A} = P_x + Q_y + R_z, \quad (35)$$

mida kasutatakse $\operatorname{div} \vec{A}$ arvutamiseks.

Vektori nabla abil võib valemi (35) kirjutada kujul

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}. \quad (36)$$

ja Gaussi-Ostrogradski valemi (23) kujul

$$\iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{A} \, dS = \iiint_E \nabla \cdot \vec{A} \, dV. \quad (37)$$

Vektorvälja \vec{A} , mille igas punktis on $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, nimetatakse solenoidväljaks. Valemist (37) on näha võrduse (36) tõttu, et solenoidväljas vektori \vec{A} voog läbi iga kinnise pinna on võrdne nulliga. Seepärast solenoidvälja nimetatakse ka allikavabaks väljaks.

Vektori tsirkulatsioon ja rootor. Olgu piirkonnas E määratud vektorväli $\vec{A} = (P, Q, R)$, kus funktsioonid P , Q ja R on piirkonnas E pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Asetsegu joon L piirkonnas E .

Joonintegraali

$$\int_L P \, dx + Q \, dy + R \, dz \quad (38)$$

nimetatakse vektori \vec{A} lineaarseks integraaliks mööda

joont L . Kui joon L on kinnine, siis joonintegraali (38) nimetatakse vektori \vec{A} tsirkulatsiooniks mööda joont L .

Vektorit

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \quad (39)$$

nimetatakse vektori \vec{A} rootoriks.

Vektori nabla abil võime vektori \vec{A} rootori (40) kirjutada kujul

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}. \quad (40)$$

Vektorvälja \vec{A} , mille igas punktis on $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$, nimetatakse keerisevabaks väljaks.

Vektorvälja \vec{A} nimetatakse potentsiaalseks, kui leidub diferentseeruv funktsioon U , et $\vec{A} = \operatorname{grad} U$. Sel korral funktsiooni U nimetatakse vektorvälja \vec{A} potentsiaaliks.

Selleks et vektorväli \vec{A} pinnaliselt ühelisidusas piirkonnas E oleks potentsiaalne, on tarvilik ja piisav, et ta oleks keerisevaba, s. o.

$$R_y = Q_z, P_z = R_x, Q_x = P_y. \quad (41)$$

Kui joon L on pinna Σ rajajooneks, siis võib Stokesi valemi kirjutada kujul

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS, \quad (42)$$

kus $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ on pinna Σ selle külje ühiknormaal, mille suhtes joon L integreerimisel läbitakse positiivses suunas.

Näited

N 8.4.1. Leida skalaarväljas $U = x^2 + 2y + 3z^2$ nivoopind, mis läbib punkti $P_0 = (2, 1, 0)$, ja määrata gradient selles punktis P_0 .

Lahendus. Et $U(P_0) = 6$, siis otsitav nivoopind on $x^2 + 2y + 3z^2 = 6$. Leiame vektori $\operatorname{grad} U$, s. o. vektori (30). Saame $\operatorname{grad} U = (2x, 2, 6z)$, kust näeme, et punktis P_0 on $\operatorname{grad} U(P_0) = (4, 2, 0)$.

N 8.4.2. Leida funktsiooni $U = x^5 + y^5 + z^2$ tuletis vektori $\vec{m} = (3, 4, 0)$ suunas ja väärtus punktis $P_0 = (1, 0, 5)$.

Lahendus. Muudame antud vektori \vec{m} ühikvektoriks \vec{n} . Saame $\vec{n} = (3/5, 4/5, 0)$. Nüüd valemi (32) põhjal

$$\frac{\partial U}{\partial l} = 5x^4 \cdot 3/5 + 5y^4 \cdot 4/5 + 2z \cdot 0 = 3x^4 + 4y^4.$$

Tuletise väärtus antud punktis P_0 on

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = 3.$$

Ülesanded

Leida järgmistes skalaarväljades U niivopinnad, mis läbivad antud punkti P_0 , ja määrata gradient selles punktis P_0 (vt. näide N 8.4.1).

1145. $U = x^2 + y^2 - z^2$, $P_0 = (1, 1, 1)$

1146. $U = 4z \arctan(y/x)$, $P_0 = (1, 1, 1)$

1147. $U = z + e^{xy}$, $P_0 = (1, 0, -1)$

Tõestada järgmised valemid, kus $C = \text{const}$ ning f , U ja V on diferentseeruvad funktsioonid.

1148. $\text{grad } CU = C \text{ grad } U$

1149. $\text{grad } (U + V) = \text{grad } U + \text{grad } V$

1150. $\text{grad } (UV) = V \text{ grad } U + U \text{ grad } V$

1151. $\text{grad } \frac{U}{V} = \frac{V \text{ grad } U - U \text{ grad } V}{V^2}$ ($V \neq 0$)

1152. $\text{grad } f(U) = f'(U) \text{ grad } U$

Leida järgmiste funktsioonide U tuletised antud vektori \vec{n} suunas ja väärtused märgitud punktis P_0 (vt. näide N 8.4.2).

1153. $U = 2xy + 2yz$, $\vec{n} = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$, $P_0 = (2, 0, 2)$

1154. $U = x^3 + y^3 + z^3$, $\vec{n} = (1, 2, 2)$, $P_0 = (2, 1, 1)$

1155. Leida punktid, milles funktsiooni $U = x^2 - y^3 + 3y - 2x + z^2$ tuletis igas suunas on null.

1156. Leida skalaarvälja $U = U(x, y, z)$ tuletis välja $V = V(x, y, z)$ gradiendi suunas.

1157. Millises suunas funktsioon $U = x \sin z - y \cos z$ punktis $(0, 0, 0)$ muutub kõige kiiremini?

1158. Leida vektori $\vec{A} = (x, y, z)$ voog koordinaatide alguspunkti poolt läbi tasandi $x + y + z = 1$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.

1159. Leida vektori $\vec{A} = (xy, y + z, x + 2z)$ voog koordinaatide alguspunkti poolt läbi tasandi $2x + y + z = 2$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.

1160. Leida vektori $\vec{A} = (x, y, z)$ voog keha $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ seest.

1161. Leida vektori $\vec{A} = (x, y, z)$ voog läbi pinna

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 1$$

tema välisnormaali suunas.

Leida järgmiste vektorite \vec{A} divergentsid märgitud punktis P_0 .

1162. $\vec{A} = (xy^2, x^2y, z^3), P_0 = (1, -1, 1)$

1163. $\vec{A} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(x, y, z), P_0 = (-1, 2, -2)$

1164. $\vec{A} = (x, y, z), P_0 = (x, y, z)$

1165. $\vec{A} = e^{xy}(-x, y, xyz), P_0 = (x, y, z)$

Näidata, et järgmised vektorväljad \vec{A} on solenoidväljad.

1166. $\vec{A} = yz(4x, -y, -z)$

1167. $\vec{A} = e^{xy}(y, -x, (x^2 - y^2)z)$

Tõestada järgmised valemid, kus \vec{A} ja \vec{B} on diferentseeruvad vektorid ning U ja V on diferentseeruvad funktsioonid.

1168. $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$

1169. $\operatorname{div} C\vec{A} = C \operatorname{div} \vec{A} \quad (C = \text{const})$

1170. $\operatorname{div}(U\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla U + U \operatorname{div} \vec{A}$

1171. $\operatorname{div} \nabla U = \Delta U$

1172. $\operatorname{div}(U\nabla V) = U\Delta V + \nabla U \cdot \nabla V$

Leida järgmiste vektorite \vec{A} rootorid märgitud punktides.

1173. $\vec{A} = (xz, -y^2, xy), P_0 = (4, 1, 2)$

1174. $\vec{A} = (x^2, z \cos x, y \sin^2 x), P_0 = (0, 1, 2)$

1175. $\vec{A} = (x, -z^2, y^2), P_0 = (x, y, z)$

Tõestada järgmised valemid, kus \vec{A} ja \vec{B} on diferentseeruvad vektorid, U on diferentseeruv funktsioon ning λ ja μ on konstandid.

1176. $\operatorname{rot}(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{A} + \mu \operatorname{rot} \vec{B}$

1177. $\operatorname{rot}(U\vec{A}) = U \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{grad} U \times \vec{A}$

1178. $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$

1179. Näidata, et vektorväli $\vec{A} = (yz, xz, xy)$ on keerisevaba.

1180. Näidata, et vektorväli $\vec{A} = \operatorname{grad} U$ on keerisevaba, kui funktsiooni U teist järku segatuletised on pidevad.

1181. Näidata, et iga diferentseeruva vektori \vec{A} korral vektorväli $\operatorname{rot} \vec{A}$ on solenoidväli.

1182. Näidata, et vektorväli $\vec{A} = (x, y, z)$ on potentsiaalne ja leida selle potentsiaal U .

1183. Tõestada, et kui vektorväli \vec{A} on solenoidväli ja on potentsiaalne, siis $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$ ja et sel korral välja potentsiaal U rahuldab Laplace'i võrrandit $\Delta U = 0$.
1184. Leida vektori $\vec{A} = (x^2y^3, 1, z)$ tsirkulatsioon mööda kontuuri $L: x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, kus $a = \text{const}$.
1185. Näidata, et kui vektorväli \vec{A} on potentsiaalne, siis vektori \vec{A} tsirkulatsioon selles väljas mööda iga kinnist joont L on võrdne nulliga.

VASTUSED

§ 1.1

1. $S_n = 1 - (n+1)^{-1}$, $S=1$, 2. $3S_n = 1 - (3n+1)^{-1}$, $S=1/3$. 3. $3S_n = 1 + 1/2 + 1/3 - (n+1)^{-1} - (n+2)^{-1} - (n+3)^{-1}$, $S=11/18$. 4. $S_n = 1 - (2n+3)^{-1}$, $S=1$. 5. $S_n = 1 - (n+1)^{-2}$, $S=1$. Üldliige esitada vahena $A/n^2 - B/(n+1)^2$. 6. $2S_n = n(n+1)$, $S=\infty$. Vt. MAP I, ülesanne 50. 7. $6S_n = n(n+1) \cdot (2n+1)$, $S=\infty$. Vt. MAP I, ülesanne 51. 8. $S_n = (n+2)^{1/2} - (n+1)^{1/2} - 1$, $S=-1$. Vt. MAP I, ülesanne 274. 9. $S_n = [n/(n+1)]^{1/2}$, $S=1$. Esitada rea üldliige kahe murru vahena. 10. $S_n = 4[1 - (-1/2)^n]/3$, $S=4/3$. Vt. MAP I, ülesanne 53. 11. $S_n = (n+1)^{-2} - (n+1)^{-1}$, $S=0$. Rida jaotada kahe rea vaheks ja kasutada ülesannete 1 ja 5 vastuseid. 12. $7/2$.

Rida vaadelda kahe geomeetrilise rea summana. 13. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln \frac{k+2}{k+1}$. 14. $3 -$

$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$. 15. $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. 16. $\sum_{k=0}^{\infty} 1$. 17. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(k-1)^2+2} - \frac{1}{k^2+2} \right]$. 18. $\sum_{k=1}^{\infty} k^3$. Vt. MAP I, ülesanne 52. 19. Hajub TT 1.1.1 põhjal,

sest $\lim u_n \neq 0$. 20. Hajub TT 1.1.1 põhjal. Vt. MAP I, § 2.1. 21. Hajub TT 1.1.1 põhjal. 22. Hajub Cauchy kriteeriumi KT 1.1.1 põhjal. Arvestada, et $\ln n < n$ ja teisendused viia läbi analoogiliselt näitega N 1.1.3. 23. Hajub Cauchy kriteeriumi KT 1.1.1 põhjal. Arvestada, et $\tan x > x$, kui $0 < x < \pi/2$, ja teisendused viia läbi analoogiliselt näitele N 1.1.3. 24. Hajub TT 1.1.1 põhjal. Vt. MAP I, § 2.1. 25. Hajub TT 1.1.1 põhjal.

§ 1.2

26. Koondub I võrdluslause KT 1.2.1 põhjal, sest $1/[(n+2)3^n] \leq (1/3)^n$. 27. Koondub I võrdluslause KT 1.2.1 põhjal, sest $1/[n2^n] \leq (1/2)^n$. 28. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 2/n^2$. 29. Hajub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 1/n$. 30. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 1/n^2$. 31. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 1/n^2$. 32. Hajub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal. Viia irratsionaalsus lugejast nimetajasse. siis on näha, et $2u_n \sim n^{-1/2}$. 33. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 2^n \pi/3^n$. 34. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 2^n \pi/3^n$. 35. Hajub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim \pi/n$. 36. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n = 2 \sin^2(a/2n) \sim a^2/(2n^2)$. 37. Hajub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim \pi/n^{1/2}$. 38. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim 1/(n2^n)$. 39. Hajub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim (2/n)^{1/2}$. 40. Koondub II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $u_n \sim (2/n)^{3/2}$. 41. Koondub. 42. Koondub. Kasutada järgmist seost: $\ln n = O(n^\epsilon)$ iga $\epsilon > 0$ korral. 43. Hajub iga a korral. 44. Hajub. Võrrelda reaga ülesandest 25. 45. Koondub D'Alembert'i tunnuse KT 1.2.3 järgi. 46. Koondub Cauchy tunnuse KT 1.2.4 järgi. 47. Koondub

Cauchy tunnuse KT 1.2.4 järgi. 48. Hajub D'Alembert'i tunnuse KT 1.2.3 järgi. 49. Koondub Cauchy tunnuse KT 1.2.4 järgi. 50. Koondub D'Alembert'i tunnuse KT 1.2.3 järgi. 51. Koondub Cauchy tunnuse KT 1.2.4 järgi. 52. Hajub D'Alembert'i tunnuse KT 1.2.3 järgi. 53. Koondub D'Alembert'i tunnuse KT 1.2.3 järgi. 54. Hajub Cauchy tunnuse KT 1.2.4 järgi. 55. Koondub. 56. Koondub. 57. Koondub, kui $a < 1$, ja hajub, kui $a \geq 1$. 58. Koondub. 59. Koondub. 60. Koondub. 61. Koondub. 62. Koondub, kui $b > 1$. 63. Hajub. Tunnuse rakendamisel saame $n(1 - u_{n+1}/u_n) = -2(n+1)^{1/2} + o(1)$. 64. Koondub, kui $a+b > 1$. Kasutada valemit (18), võttes $x=1/n$. 65. Koondub, $R_n \leq \leq (2n+1)^{-1}$. 66. Hajub. 67. Hajub. 68. Koondub, $R_n \leq \ln^{-1} n$. 69. Hajub. 70. Koondub, kui $a > 1$, ja hajub, kui $a \leq 1$; $R_n \leq (a-1)^{-1} \ln^{1-a} n$. 71. Koondub, $R_n \leq \ln(1+e^n) - n$. 72. $N > 1000$. 73. $N > 23$. 74. $N > e^{10}$. 75. $N > e^{23}$. 76. Näidata rea $\sum n^2/n!$ koonduvust. 80. Koondub. 81. Koondub. 82. Koondub. 83. Koondub. 84. Koondub iga a korral. 85. Koondub iga b korral. 86. Koondub. 87. Hajub. 88. Koondub. 89. Koondub, kui $a > 1/2$. 90. Koondub, kui $p > 3/2$. Kasutada valemit (17), II võrdluslauset KT 1.2.2 ja näidet N 1.2.5. 91. Hajub Cauchy tunnuse KT 1.2.4 järgi. On erijuhtum $p=0$ ülesandest 90. 92. Koondub, kui $p > 2$, ja hajub, kui $p < 2$. Kasutada Raabe tunnust KT 1.2.5 ja valemit (18).

§ 1.3

93. Koondub absoluutselt. Vt. ülesanne 45. 94. Koondub tingimisi näite N 1.1.3 ja Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 järgi. 95. Koondub absoluutselt Cauchy tunnuse KT 1.3.3 järgi. 96. Koondub tingimisi Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 ja integraaltunnuse KT 1.2.7 järgi. 97. Koondub absoluutselt integraaltunnuse KT 1.2.7 järgi. 98. Koondub tingimisi Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 ja I võrdluslause KT 1.2.1 põhjal, sest $|u_n| > 1/(n+2)$. 99. Koondub absoluutselt iga a korral I võrdluslause KT 1.2.1 põhjal, sest $|u_n| \leq 1/n^{3/2}$. 100. Koondub tingimisi Leibnizi tunnuse KT 1.3.1 järgi ja $|u_n| = 1/n^{1/2}$ tõttu. 101. Koondub tingimisi. Kasutada valemit $\sin(a+\beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$ ja Leibnizi tunnust KT 1.3.1. Absoluutselt ei koonu II võrdluslause KT 1.2.2 põhjal, sest $\sin(1/n) \sim 1/n$. 102. Hajub TT 1.1.1 põhjal. 103. Koondub absoluutselt. 104. Hajub. 105. Koondub absoluutselt. 106. Koondub absoluutselt iga a korral. 107. Hajub. 108. Koondub tingimisi. 109. Koondub absoluutselt, kui $|a| < 1$; koondub tingimisi, kui $a = -1$; hajub, kui $a = 1$. 110. Koondub Dirichlet' tunnuse KT 1.3.5 järgi. Võtta $\varepsilon_n = 1/n$. 111. Koondub Abeli tunnuse KT 1.3.4 järgi. Võtta $\varepsilon_n = \cos(1/n)$. 112. Koondub Dirichlet' tunnuse KT 1.3.5 järgi. 113. Koondub Abeli tunnuse KT 1.3.4 järgi. Võtta $\varepsilon_n = n/(n+1)$.

§ 1.4

119. $X=A=(-\infty, \infty)$, $S(x) = (1+x^2)/x$, $S(0)=0$. 120. $X=A=(-1, 1)$, $S(x) = 1/(1-x^2)$. Arvestada, et $x^{2n} = (x^2)^n$. 121. $X=A=(-1/2, 1/2)$, $S(x) = (1+2x)^{-1}$. 122. $X=A=(1, 5)$, $S(x) = (5-x)^{-1}$. 123. $X=A=(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $S(x) = x/(x-1)$. 124. $X=A=(1/e, e)$, $S(x) = (1 - \ln x)^{-1} \ln x$. 125. $X=A=(k\pi, (k+1)\pi)$, kus $k \in \mathbf{Z}$; $S(x) = (1 - \cos x)^{-1}$. 126. $X=[-1, 1)$, $A=(-1, 1)$ D'Alembert'i tunnuse KT 1.3.2 järgi. 127. $X=A=[-1, 1]$ D'Alembert'i tunnuse KT 1.3.2 järgi. 128. $X=A=(-\infty, \infty)$ I võrdluslause KT 1.2.1 põhjal, sest $1/(n^2+x^2) \leq 1/n^2$. 129. $X=(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$, $A=(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Kasutada D'Alembert'i tunnust KT 1.3.2. 130. $X=(-\infty, \infty)$, $A=\emptyset$. Iga x korral Leibnizi tüüpi rida. Absoluutse koonduvuse uurimisel arvestada, et $|u_n| \sim 1/n$, ja rakendada II võrdluslauset KT 1.2.2. 131. $X=A=(-1, 1)$. 132. $X=(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$, $A=(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. 133. $X=A=(-\infty, \infty)$. 134. $X=\mathbf{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $A=\emptyset$. 135. $X=A=(-\infty, -1) \cup (-1/3, \infty)$. 136. $X=A=(-2, \infty)$. 137. $X=A=(-\infty, \infty)$. 138. $X=A=(1, \infty)$. 139. Jaa. 140. Ei. 141. Jaa. 142. Jaa.

143. Jaa. 144. Ei. 145. Jaa. 146. Ei. 147. $A=U=(-\infty, \infty)$. Kasutada Weierstrassi tunnust KT 1.4.2. 148. $A=U=(-\infty, \infty)$. 149. $A=U=(-\infty, \infty)$. 150. $A=U=[-1, 1]$. 151. $A=U=X$, kus X on rea koonduvuspiirkond. 152. $A=U=(-\infty, \infty)$. 153. $A=\emptyset$, $U=(-\infty, \infty)$. 154. $A=\emptyset$, $U=(-\infty, \infty)$. 155. $A=\emptyset$, $U=[-2, 2]$. 156. $A=\emptyset$, $U=[a, \infty)$ iga $a < 0$ korral. 157. $A=U=[k\pi - \pi/6, k\pi + \pi/6]$, kus $k \in \mathbb{Z}$. 158. $A=U=(-\infty, \infty)$. 159. $A=\emptyset$, $U=[-1, 1]$. 160. $A=R \setminus -\mathbb{N}$, $G=[a, \infty) \setminus -\mathbb{N}$, kus $-\mathbb{N} = \{-1, -2, \dots\}$, iga $a < 0$ korral. 165. 0. 166. 1. 167. $\pi/2$. 168. $-\pi$. 169. $1/2$. 170. 6. 171. $5\pi/2$. 172. $1/3$. 175. -2 . 176. 1.

§ 1.5

177. $R=1$, $X=[-1, 1)$, $A=(-1, 1)$. 178. $R=1/3$, $X=A=(-1/3, 1/3)$. 179. $R=1$, $X=A=(-1, 1)$. 180. $R=5$, $X=A=(-5, 5)$. 181. $R=1/2$, $X=A=(-1/2, 1/2)$. 182. $R=4$, $X=A=(-4, 4)$. 183. $R=1/2$, $X=A=(-5/2, -3/2)$. 184. $R=10$, $X=A=(-7, 13)$. 185. $R=0$, $X=A=\{0\}$. 186. $R=1$, $X=A=[-1, 1]$. 187. $R=\infty$, $X=A=(-\infty, \infty)$. 188. $R=1$. Kui $a > 1$, siis $X=A=[-1, 1]$; kui $0 < a \leq 1$, siis $X=[-1, 1)$, $A=(-1, 1)$. 189. $R=1/e$, $X=[-1/e, 1/e)$, $A=(-1/e, 1/e)$. 190. $R=1/e$, $X=A=(-1/e, 1/e)$. 191. $R=\infty$, $X=A=(-\infty, \infty)$. 192. $R=e$, $X=A=(-e, e)$. 193. $R=0$, $X=A=\{3\}$. 194. $R=1/e$, $X=A=(2-1/e, 2+1/e)$. 195. $-\ln(1-x)$, $x \in [-1, 1)$. 196. $(1-x)^{-2}$, $x \in (-1, 1)$. 197. $(1+x)^{-2}$, $x \in (-1, 1)$. 198. $(2-x)^{-1} \ln(3-x)$, $x \in [1, 3)$, $f(2)=1$. 199. $x^{-1} \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$, $f(0)=1$. 200. $2(1-x)^{-3}$, $x \in (-1, 1)$. 201. $2x^2(1+x)^{-3}$, $x \in (-1, 1)$. 202. $\arctan x$, $x \in [-1, 1]$. 203. $\ln 2 + x/2 + x^2/8 - x^4/192$. 204. $x + x^3/3$. 205. $x - x^3/3$. 206. $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4$. 207. $1 - x + x^3/6 - x^4/24$. 208. $x^2 - 2x^4/3$. Kasutada valemit (57). 209. $x - (1+1/2)x^2 + (1+1/2+1/3)x^3 - (1+1/2+1/3+1/4)x^4$. Kasutada valemit (56). 210. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$. 211. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$. 212. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin(\pi n/4)}{n!} x^n$. 213. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\pi/4)^{2n} (x-2)^{2n}$. 214. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$, $R=\infty$. 215. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $R=\infty$. 216. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!}$, $R=\infty$. 217. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 218. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. Kasutada valemit $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. 219. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. Kasutada valemit $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$. 220. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$, $R=\infty$. 221. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R=\infty$. Kasutada valemeid (52) ja (53) ning arvestada, et $f(x) = x \cos x - \sin x$. 222. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$. 223. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 224. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $R=1$. 225. $\sum_{n=10}^{\infty} x^{n-1}$, $R=1$.

226. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$, $R=1$. 227. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$, $R=2$. 228. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$, $R=3$.
229. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$, $R=2$. 230. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n}$, $R=1$.
231. $\ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n 8^n}$, $R=8$. 232. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 3^n x^{n+1}$, $R=\frac{1}{3}$.
233. $1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2}$, $R=1$. 234. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, $R=\infty$.
235. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$. 236. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$. 237. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)x^{2n}}{n(2n-1)}$, $R=1$.
238. $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$, $R=1$. 239. $\frac{\pi x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \times$
 $\times \frac{x^{2n}}{2n-1}$, kus $(-1)!!=1$; $R=1$. 240. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R=\infty$.
241. $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n 2^n}$, $R=2$. 242. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.
243. $4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $R=1$. 244. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2} + 1\right)}{n!} x^{3n}$, $R=\infty$.
- Kasutada valemit $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. 245. $3 \sum_{n=0}^{\infty} (1-2^{-n}) x^n$, $R=1$.
246. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $R=\infty$. 247. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-x^{2n}}{(2n)! n}$, $R=\infty$.
248. $x(1-x)^{-2}$, $x \in (-1, 1)$. 249. $2x^2(1-x)^{-3}$, $x \in (-1, 1)$.
 250. $-x^2(1+x)^{-2}$, $x \in (-1, 1)$. 251. $(e^x - 1)/x$, kui $x \neq 0$; $f(0)=1$.
 252. $x^{-1} \arctan x$, kui $x \neq 0$; $f(0)=1$, $x \in [-1, 1]$. 253. $(1 - \cos x)/x$, kui $x \neq 0$; $f(0)=0$. 254. $1/2$. 255. 0 . Arvestada, et $\arcsin x \sim x$. 256. $-\infty$. Arvestada, et $\sin x \sim x$ ja $\lim \ln a = \ln \lim a$. 257. $-2/3$. 258. $0,747$. 259. $0,24488$.
 260. $2,835$. 261. $0,946$. 262. $0,6449$. 263. $0,072$.

§ 1.6

264. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. Koondub PT 1.6.1 põhjal funktsiooniks $f(x)$.
265. $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. Koondub. 266. $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. Koondub.
267. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. Koondub absoluutselt ja ühtlaselt PT 1.6.3 põhjal.
268. $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. Koondub. 269. $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \left[\frac{1}{2} + \right.$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \Big]. \text{ Koondub. 270. } \frac{2 \sin \pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times$$

$$\times \frac{n \sin nx}{\pi^2 - n^2}. \text{ Koondub. 271. } \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}. \text{ Koondub absoluutselt}$$

ja ühtlaselt. 272. $\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Koondub. 273. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Koondub.

274. $\frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos [(2n+1)\pi x/T]}{(2n+1)^2}$. Koondub absoluutselt ja ühtlaselt.

275. $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Koondub. 276. 1. 277. $\frac{2}{\pi} -$

$$- \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}. \text{ Koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 278. } \frac{\pi}{2} -$$

$$- \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \text{ Koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 279. } \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \text{ Koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 280.}$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \text{ Koondub. 281. } \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}. \text{ Koondub.}$$

282. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$. Koondub ühtlaselt ja absoluutselt. 283. $\frac{\sin x}{2} +$

$$+ 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}. \text{ Koondub. 284. } \pi^2/12. \text{ Kasutada ülesande 275 vastust, võttes } x=\pi. \text{ 285. } \pi^2/8. \text{ Kasutada ülesande 278 vastust, võttes } x=0.$$

286. 1/2. Kasutada ülesande 277 vastust. 287. $\pi^3/32$. 288. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} +$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}; \quad x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}.$$

289. $a^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \pi a, a(\pi - a)/2, (\pi^2 - 3\pi a + 3a^2)/6$.

§ 2.1

290. $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$, $y=0$, kinnine. 291. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $x^2 + y^2 = 4$, kinnine. 292. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$, $x^2 + y^2 = 4$, lahtine. 293. $D = \{(x, y) : x > -y\}$, $x + y = 0$, lahtine. 294. $D = \{(x, y) : x + y > 0; x > 0, x \neq 1\}$; $x = 0, x = 1, x + y = 0$; lahtine. 295. $D = \{(x, y) : y = x\}$, $y = x$, kinnine. 296. $D = \{(x, y) : y \in [-1, 1]\}$; $y = -1, y = 1$; kinnine. 297. $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$; $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$; kinnine. 298. $D = \{(x, y) : -1 \leq x^2 + y \leq 1\}$; $y = -x^2 + 1, y = -x^2 - 1$; kinnine. 299. $D = \{(x, y) : x^2 > y\}$, $y = x^2$, lahtine. 300. $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y^2 > x\}$; $y^2 = x, x = 0, y = 0$. 301. $D = \{(x, y) : x > -1, y > -1, y \neq 0\}$; $x = -1, y = -1, y = 0$; lahtine. 302. $D = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 3\}$; $x^2 + y^2 = 2, x^2 + y^2 = 3$; lahtine.

303. $D = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \neq 3\}$; $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3$.
 304. $D = \{(x, y) : 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, (2n+1)\pi \leq x \leq (2n+2)\pi, y \leq 0, n \in \mathbf{Z}\}$;
 $x = n\pi, y = 0$; kinnine. 305. $D = \mathbf{R}^2$, kinnine. 306. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2n\pi, n =$
 $= 0, 1, \dots\}$; $x^2 + y^2 = 2n\pi$; kinnine. 307. $D = \{(x, y) : 2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2n+1)\pi,$
 $n = 0, 1, \dots\}$; $x^2 + y^2 = n\pi$; kinnine. 308. $D = \{(x, y) : |y| \leq |x|, x \neq 0\}$; $|y| =$
 $= |x|, x = 0$. 309. Malelaud, mis on piiratud sirgetega $x = 0, x = 8, y = 0$ ja
 $y = 8$, kus laua rajajoon ja mustad ruudud moodustavad määramispiirkonna.
 310. Samad. 311. Erinevad. 312. Erinevad. 313. Samad. 314. Erinevad.
 315. Samad. 316. Erinevad, sest g ei ole punktis $(0, 0)$ määratud. 317. $D =$
 $= \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. 318. $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. 319. $D = \{(x, y) : xy =$
 $= x + y\}$. 320. $5/4$. 321. -1 . 322. 0 . 327. $(y^2 - x^2)/(2xy)$, $(x^2 - y^2)/(2xy)$,
 $(y^2 - x^2)/(2xy)$, $2xy/(x^2 - y^2)$. 328. $1 + y, x + 1/y$.

§ 2.2.

329. $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. 330. $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0\}$.
 331. $E = \{(x, y, z) : xy > 0, z > 0\}$. 332. $E = \{(x, y, z) : x, yz \in [-1, 1]\}$.
 333. $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. 334. E on kogu xyz -ruum, välja arvatud
 punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud. 335. $3/4$. 336. $1, 25$.
 337. 0 . 338. $\{(x, y, z, w) : xy \geq 0, z \in \mathbf{R}, w = z + (xy)^{1/2}\}$. 339. $\{(x, y, z, w) :$
 $x \geq 0, y \neq 0, z > -1, w = x^{1/2}y^{-2} + \ln(z+1)\}$. 340. $\{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 \neq 0,$
 $z \in \mathbf{R}, w = (2+z)/(x^2 + y^2)\}$. 341. $\{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 \neq 0, z \neq 0, w = (x^2 + y^2)/$
 $/[z \ln(x^2 + y^2 + 1)]\}$. 342. $\ln x + y/z - z$. 343. $x(x - y)/2 + z^2$. 344. $f(x, y) =$
 $= (1 - x)^2 - y - 2^{1/2}$, $w(x, y, z) = x - y + (2z)^{1/2} - 2^{1/2}$. 345. $f(x, y) = 2x^2 +$
 $+ \ln y$, $w(x, y, z) = 2x + y + (yz)^{1/2}$.

§ 2.3

349. 4 . 350. 16 . 351. 1 . 352. 0 . 353. 0 . 354. 2 . 355. $1/8$. 356. 0 . 357. 0 .
 358. $-\infty$. 359. 0 . Minna üle polaarkoordinaatidele. 360. 0 . Minna üle polaar-
 koordinaatidele. 361. 0 . Minna üle polaarkoordinaatidele või muutujate vahe-
 tusega $x^2 = u, y^2 = v$ taandada ülesandele 359. 362. 0 . 363. 1 . Võtta $u = xy$ ja
 arvestada, et $u \rightarrow 0$ korral $\tan u \sim u$. 364. $1/2$. 365. 0 . Minnes üle polaar-
 koordinaatidele, näeme, et $xy/(x^2 + y^2) \leq 1/2$. 366. e . Võtta $u = x^2 y^2$. 367. e^3 .
 368. 1 . 369. 1 . Arvestada, et $\lim u = \lim e^{\ln u} = e^{\lim \ln u}$. 374. $A = 0, B = 1$.
 375. $A = 1, B = 1$. 376. $A = 1, B = 0$. 377. 0 . 378. 0 . 381. $P_{2n} = P_0 = (3, 1)$.
 382. $P_{2n} = P_0 = (1, -1)$. 383. $\lim P_{2n} = P_0 = (\pi/2, 0)$. 384. Pidev T 2.3.3 põhjal.
 385. Pidev T 2.3.3 põhjal. 388. Pidev, pidev x ja y järgi. 389. Ei ole pidev,
 pidev x ja y järgi. 390. Ei ole pidev, pidev x järgi, ei ole pidev y järgi. 391. Pidev,
 ei ole pidev x järgi, pidev y järgi. 392. Pidev, ei ole pidev x ega y järgi.
 393. $(0, 0)$. 394. Katkev sirgel $x + y = 0$. 395. Katkeb sirgel $y + x = 0$. 396. Kat-
 keb koordinaattelgedel. 397. Katkeb koordinaattasanditel. 398. Katkeb punktis
 $(0, 0)$ ning ringjoontel $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + y^2 = 2$. 399. Lisada $f(0, y) = y$. 400. Li-
 sada $f(x, y) = 0$, kui $x + y = 0$. 401. Lisada $f(x, y) = 0$, kui $x + y = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
 402. Lisada $f(x, y) = 1/64$, kui $x + 2y = 8$. 403. $\delta < \varepsilon/5$. 404. Veenduda, et D on
 tõkestatud kinnine hulk ja kasutada teoreemi T 2.3.8. 405. $\delta = \varepsilon/12$. 406. $\delta = \varepsilon/2$.
 407. $\delta = 25\varepsilon/16$.

§ 3.1

411. $z_x = 3, z_y = -2y$. 412. $z_x = 2x, z_y = 2y$. 413. $z_x = 2e^{2x+3y}, z_y = 3e^{2x+3y}$.
 414. $z_x = 3x^2y + 2, z_y = x^3$. 415. $u_x = 3x^2yz^2, u_y = x^3z^2 + 7, u_z = 2x^3yz$. 416. $u_x =$
 $= 1/x, u_y = 1/y, u_z = 2/z$. 417. $z_x = 5(x+2y)^4, z_y = 10(x+2y)^4$. 418. $z_x = 2/y,$
 $z_y = -2x/y^2$. 419. $z_x = xy^4/(1+x^2y^4)^{1/2}, z_y = 2x^2y^3/(1+x^2y^4)^{1/2}$. 420. $z_x =$
 $= -4 \sin(4x - y), z_y = \sin(4x - y)$. 421. $z_x = \sin y, z_y = x \cos y$. 422. $z_x =$
 $= 1/(y \cos^2(x/y)), z_y = -x/(y^2 \cos^2(x/y))$. 423. $z_x = -y/(1+x^2y^2), z_y =$
 $= -x/(1+x^2y^2)$. 424. $z_x = yx^{y-1}, z_y = x^y \ln x$. 425. $z_x = y(x+y)^{y-1}, z_y =$

$= z[\ln(x+y) + y/(x+y)]$. 426. $z_x = a^{xy} [y \ln a + xy^2/a]$, $z_y = a^{xy} [x \ln a + yx^2/a]$, kus $a = 1 + xy$. Osatuletise z_y saame osa tuletisest z_x , vahetades x ja y kohtadega. 427. $z_x = \sin y x^{\sin y - 1}$, $z_y = z \ln x \cos y$. 428. $u_x = 2x$, $u_y = zy^2 - 1$, $u_z = y^2 \ln y$. 429. Kui $x \neq 0$, siis $f_x = \sin(y/x) - (y/x) \cos(y/x)$, $f_y = \cos(y/x)$; kui $x = 0$, siis $f_y(0, y) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$. Kui $y \neq 0$, siis osatuleti $f_x(0, y)$ ei eksisteeri. 430. Kui $a = x^2 + y^2 \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \ln a + 2x^3 y^2/a$. Et funktsioonid x ja y paiknevad sümmeetriliselt, siis vahetades x ja y kohtadega, saame arvutamata $f_y = 2yx^2 \ln a + 2y^3 x^2/a$. Kui $a = 0$, s. o. punktis $(0, 0)$, on $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. 431. Kui $|x| + |y| \neq 0$, siis $f_x = 2xy^3/a^2$, $f_y = x^2(x^2 - y^2)/a^2$, kus $a = x^2 + y^2$; $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. 432. Kui $x \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan(y/x) - yx^2/a$, $f_y = x^3/a$, kus $a = x^2 + y^2$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0$, $f_y(0, y) = 0$. 433. Kui $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan(y/x) - y$, $f_y = x - 2y \arctan(x/y)$; kui $x = 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x(0, y) = -y$, $f_y(0, y) = 0$; kui $x \neq 0$ ja $y = 0$, siis $f_y(x, 0) = x$, $f_x(x, 0) = 0$; kui $x = y = 0$, siis $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. 434. Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = xy^2[3x \sin(1/b) - \cos(1/b)]$, $f_y = yx^2[3y \sin(1/b) - \cos(1/b)]$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0$, $f_y(0, y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x, 0) = 0$, $f_y(x, 0) = 0$. 435. Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \sin(1/b) - y \cos(1/b)$, $f_y = 2yx^2 \sin(1/b) - x \cos(1/b)$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0$, $f_y(0, y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x, 0) = 0$, $f_y(x, 0) = 0$. 436. $z_{xx} = 2$, $z_{yy} = z_{xy} = 0$. 437. $z_{xx} = -z_{yy} = 6xy$, $z_{xy} = 3(x^2 - y^2)$. 438. $z_{xx} = 0$, $z_{yy} = 2x/y^3$, $z_{xy} = 1 - 1/y^2$. 439. $z_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y)$, $z_{yy} = -x \sin(x+y)$, $z_{xy} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$. 440. $z_{xx} = -4y(x+y)^{-3}$, $z_{yy} = 4x(x+y)^{-3}$, $z_{xy} = 2(x-y) \times (x+y)^{-3}$. 441. $z_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $z_{yy} = x^y \ln^2 x$, $z_{xy} = x^{y-1}(1+y \ln x)$ ($x > 0$). 442. $z_{xx} = -1/(x+y^2)^2$, $z_{yy} = 2(x-y^2)/(x+y^2)^2$, $z_{xy} = -2y/(x+y^2)^2$. 443. $z_{xx} = -2x/(1+x^2)^2$, $z_{yy} = -2y/(1+y^2)^2$, $z_{xy} = 0$ ($xy \neq 1$). 444. $u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = -s$, $u_{xy} = z - s$, $u_{xz} = y - s$, $u_{yz} = x - s$, kus $s = (x+y+z)^{-2}$. 445. $u_{xx} = -y^2 z^2 \sin v$, $u_{yy} = -x^2 z^2 \sin v$, $u_{zz} = -x^2 y^2 \sin v$, $u_{xy} = z \cos v - xyz^2 \sin v$, $u_{xz} = y \cos v - xy^2 z \sin v$, $u_{yz} = x \cos v - x^2 y z \sin v$, kus $v = 1 + xyz$. 451. Osatuletiste f_{xxyx} ja f_{xxxy} pidevust. 452. Osatuletiste f_{xy} ja f_{yx} pidevust. 453. Üks vastustest: osatuletiste f_{xy} , f_{yx} , f_{xyx} , f_{xxy} , f_{yyx} , f_{yxy} , f_{xyyx} ja f_{xyxy} pidevust. 454. $z_{xy} = z_{yx} = \cos x$. Kasutada teoreemi T 3.1.2, mille põhjal $z_{xy} = z_{yx}$, sest segatuletise z_{yx} leidmine on lihtsam. 455. $z_{xy} = z_{yx} = 2y/x$. 456. $z_{xy} = e^{x+y}$. 457. $u_{xxy} = 0$. 458. $u_{xyz} = u_{zxy} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$. 459. $-6(\cos x + \cos y)$. 460. $z'_t = e^{\sin t - \cos t}(\cos t + \sin t)$. 461. $z'_t = 5t^4/(t^5 - 1)$. 462. $u'_t = 2t \cos 2t + \sin 2t$. 463. $z'_t = 2t + 4t^3 + 1$. Kirjutada liitfunktsioon kujul $z = t^2 + x^2 + y^2$, $t = t$, $x = t^2$, $y = t^{1/2}$ ja kasutada valemit (3) kujul $z'_t = z'_t t'_t + z'_x x'_t + z'_y y'_t$. 464. $z'_t = \cos^{-2}(t + t^4 - t^5)(1 + 4t^3 - 5t^4)$. 465. $z'_x = e^x(x+1)/(1+x^2 e^{2x})$. Kirjutada liitfunktsioon kujul $z = \arctan(xy)$, $x = x$, $y = e^x$ ja kasutada valemit (3) kujul $z'_x = z'_x x'_x + z'_y y'_x$. 466. $u'_x = 2e^x \sin x$. 467. $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t = 2u_x + u_y/t + u_z$. 468. $z'_t = (f_x x^2 \ln y + f_y 2x \ln y)(-2t) + (f_y x^2 \ln y + f_x x^2/y) e^{\sin t} \cos t$, kus $x = 1 - t^2$, $y = e^{\sin t}$. 469. $z_x = z_u u_x + z_v v_x = 3x^2 \cos^2 y \sin y$, $z_y = z_u u_y + z_v v_y = x^3 \cos y(1 - 3 \sin^2 y)$. 470. $z_x = 0$, $z_y = 0$. 471. $z_x = y^x(2x + x^2 \ln y)$, $z_y = x^3 y^{x-1}$. 472. $z_x = 0$, $z_y = -1$. 473. $w_x = 2xv u^{v-1}$, $w_y = zu^v \ln u$, $w_z = 2zv u^{v-1} + y u^v \ln u$, kus $u = x \sin y$, $v = x \cos y$. 474. $w_x = e^{uv}(y - v/(xz) + uy)$, $w_y = e^{uv}(x - v/(yz) + ux)$, $w_z = -e^{uv} v/z^2$, kus $u = 1/(xyz)$, $v = \ln(xy)$. 475. $z_x = f_u(u, v)(1 - y) + f_v(u, v)v(1 - y)$, $z_y = -x f_u(u, v) - x f_v(u, v)v$, kus $u = x - xy$, $v = e^{x-xy}$. 476. $z_x = f(u) + xy f_u(u)(1 - x^{-2})$, $z_y = x f_u(u) \times (x+1/x)$, kus $u = xy + y/x$. 477. $w_x = f_u(u, v)/y$, $w_y = -x f_u(u, v)/y^2 + f_v(u, v)/z$, $w_z = -y f_v(u, v)/z^2$, kus $u = x/y$, $v = y/z$. 478. $w_x = 2xe^{xz} f_u(u, v)$, $w_y = e^z f_v(u, v) \ln z$, $w_z = e^z [f(u, v) + f_v(u, v)y/z]$, kus $u = x^2$, $v = y \ln z$.

§ 3.2

479. $dz = dx + 3dy$. Kasutada valemit (14). 480. $dz = 4(x - y)dx - 4x dy$.
 481. $dz = y dx + x dy$. 482. $dz = (y dx - x dy)/y^2$. 483. $dz = e^{1+xy}(y dx + x dy)$.
 484. $dz = \sin(xy)(y dx + x dy)$. 485. $dz = y^x \ln y dx + xy^{x-1} dy$. 486. $du =$
 $= (dx - 2dy + 3dz)/\cos^2(x - 2y + 3z)$. Kasutada valemit (18). 487. $du =$
 $= -\sin(x^2yz)(2xyz dx + x^2z dy + x^2y dz)$. 488. $du = 2xz(2yz dx + xz dy + 2xy dz)u$.
 489. $d^2z = 6xy^2 dx^2 + 12x^2y dx dy + 2x^3 dy^2$. Kasutada valemit (15). 490. $d^2z =$
 $= 2 dx dy$. 491. $d^2z = 2(dx^2 + dy^2)$. 492. $d^2z = 2 \sin 2y dx dy + 2x \cos 2y dy^2$.
 493. $d^3z = 6(dx^3 + dy^3)$. Kasutada valemit (16). 494. $d^3z = 24x dx^3 + 6dx dy^2$.
 495. $d^2u = 2y dz^2 + 2 dx dy + 2z dy dz$. Kasutada valemit (19). 496. $d^2u =$
 $= -xy \sin z dx^2 + 2 \sin z dx dy + 2y \cos z dx dz + 2x \cos z dy dz$. 497. $d^3u =$
 $= 6 dx dy dz$. Kasutada valemit (20). 498. $d^3u = 6yz^2 dx^3 + 18xz^2 dx^2 dy +$
 $+ 36xyz dx^2 dz + 18x^2y dx dz^2 + 6x^3 dy dz^2 + 36xz^2 dx dy dz$. 499. $d^4z = 5!(x+y+1) \times$
 $\times (dx+dy)^4$. Kasutada valemit (26). 500. $d^6z = -5!(dx+2dy)^6/(x+2y-3)^6$.
 501. $d^6w = -\cos(2x+3y-5z)(2dx+3dy-5dz)^6$. 502. $d^9w = 0$. Valemit (26)
 kasutada ei saa, sest liitfunktsioonis $w = u^3$, $u = 2x + y - 3z^2$ ei ole koostisosa
 u lineaarne. Kuid funktsiooni avaldisest vahetult on näha, et üheksandat järku
 osatuletised tulevad igal juhul võrdsed nulliga. 503. $dz = (e^{2x} - 2xe^{2x} - 1) dx$.
 Kasutada valemit (23). 504. $dz = [-\sin x \sin(2x+1) + 2 \cos x \cos(2x+1)] dx$.
 505. $dz = [4x(x^2+1) \arctan x^3 + 3x^2(x^2+1)^2/(1+x^6)] dx$. 506. $dz = 2 \ln(y+1) dx +$
 $+ (2x+1)(y+1)^{-1} dy$. 507. $dz = 8x^3 dx + 8y^3 dy$. 508. $dz = e^{2x-y}[(2x+2x^2 +$
 $+ 2xy+y) dx + x(1-x-y) dy]$. 509. $dz = (4xy+y^2) dx + (2x^2 - 3y^2 + 2xy) dy$.
 Kirjutada funktsioon kujul $z = uvw$, $u = x+y$, $v = 2x-y$, $w = y$ ja kasutada
 valemit (23).

§ 3.3

514. $e^x \sin y = y + xy + x^2y/2 - y^3/6 + a_3$. 515. $e^y \cos x = 1 + y + y^2/2 - x^2/2 +$
 $+ y^3/6 - x^2y/2 + a_3$. 516. $\ln(1+x+y) = x + y - (x+y)^2/2 + (x+y)^3/3 + a_3$.
 517. $z = y + xy - y^2/2 + y^3/3 - xy^2/2 + x^2y/2 + a_3$. 518. $z = x - xy^2 + a_3$. 519. $z =$
 $= x^2y + a_3$. 520. $x/y = 1 + \Delta x - \Delta y - \Delta x \Delta y/2 + \Delta y^2 + \Delta x \Delta y^2/3 - \Delta y^3 + a_3$.
 521. $e^{xy} = 1 + (\Delta x - \Delta y) + (\Delta x - \Delta y)^2/2 + (\Delta x - \Delta y)^3/3 + a_3$. 522. $\ln(xy) =$
 $= \Delta x + \Delta y - (\Delta x^2 + \Delta y^2)/2 + (\Delta x^3 + \Delta y^3)/3 + a_3$. 523. $f(x, y) = -\pi \Delta x + \pi \Delta x \Delta y +$
 $+ \pi^3 \Delta x^3/6 - \pi \Delta x \Delta y^2 + a_3$. 524. 1,06. 525. 2,005. 526. 8,21. 527. 0,005. 528. $2x +$
 $+ 2y - z - 1 = 0$, $\vec{n} = (2, 2, -1)$. 529. $2x + 4y - z - 5 = 0$, $\vec{n} = (2, 4, -1)$.
 530. Puutujatasandit märgitud punktis Q_0 ei ole olemas T 3.3.1 põhjal, sest
 funktsioon ei ole diferentseeruv selles punktis. 531. $2x - 2y + 4z - \pi = 0$,
 $\vec{n} = (1, -1, 2)$. 532. $z = 0$, $\vec{n} = (0, 0, 1)$. 533. Ei eksisteeri T 3.3.1 põhjal.
 534. $a = 2$. 535. $a = 3$. 536. $a = 0$. 537. $a = 0$. 538. $a = 5$. 539. $a = 3$.

§ 3.4

540. Jah, jah. $y' = -(x^2 - y)/(y^2 - x)$. Kasutada teoreemi T 3.4.1.
 541. Jah, jah, $y' = -[(x+y+1)e^y + 1]/[x(x+y+1)e^y + 1]$. 542. Ei, ei. 543. Jah,
 ei. 544. $y' = -e^x/(1 + \cos y)$, $y'' = e^{2x} \sin y/(1 + \cos y)^3 - e^x/(1 + \cos y)$.
 545. $y' = (x+y-1)/(x+y+1)$, $y'' = 4(x+y)/(x+y+1)^3$. 546. $y' = -y/(y+x)$,
 $y'' = 2y/(y+x)^2 - y^2/(y+x)^3$. 547. $y' = (x+y)/(x-y)$, $y'' = 2(x^2+y^2)/(x-y)^3$.
 548. Jah, jah, $z_x = -1$, $z_y = -y/(x+z)$. Kasutada teoreemi T 3.4.2. 549. Ei, sest
 $F(P_0) \neq 0$. 550. Jah, ei. 551. $z_x = -1/(2 + \cos z)$, $z_y = -1/(2 + \cos z)$. Kasutada
 meetodit M 3.4.2. 552. $z_x = -z/x$, $z_y = -z/y$. 553. $z_x = -\sin 2x/\sin 2z$, $z_y =$
 $= -\sin 2y/\sin 2z$. 554. $z_x = (y - z^2)/(2xz + 3z^2)$, $z_y = x/(2xz + 3z^2)$. Osatuletiste
 leidmiseks kirjutada võrrand kujul $xz^2 + z^3 = xy$. 555. $z_{xx} = -(z^2 + x^2)/z^3$, $z_{yy} =$
 $= -(z^2 + y^2)/z^3$, $z_{xy} = -xy/z^3$. 556. $z_{xx} = [(1-z)^2 + x^2]/(1-z)^3$, $z_{yy} =$
 $= [(1-z)^2 + y^2]/(1-z)^3$, $z_{xy} = xy/(1-z)^3$. 557. $z_{xx} = z/x^2$, $z_{yy} = z/y^2$

$z_{xy} = z/(xy)$. 558. $d^2z = -2dx^2/5 - 2dx dy/5 - 394dy^2/125$. 559. $d^2z = -dx^2 + 2dx dy$. 560. $z_{xxx} = e^{x-z} - 3e^{2(x-z)} + 2e^{3(x-z)}$, $z_{yyy} = e^{y-z} - 3e^{2(y-z)} + 2e^{3(y-z)}$, $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx} = -e^{y+x-2z} + 2e^{y+2x-3z}$, $z_{xyy} = z_{yxx} = z_{yyx} = -e^{y+x-2z} + 2e^{x+2y-3z}$. 561. $u_x = (yz - y)/u$, $u_y = (xz - x)/u$, $u_z = (xy - z)/u$. 562. $y' = 4x(y - x^2)/(y - z)$, $z' = 4x(z - x^2)/(z - y)$. 563. $y' = (2xe^z + 1)/(e^y + e^z)$, $z' = (2xe^y - 1)/(e^y + e^z)$. 564. $y' = (z \cos x - y \sin x)a$, $z' = (z \sin x + y \cos x)a$, kus $a = (y^2 + z^2)^{-1}$. 565. $y' = (3z^2 - 2x)b$, $z' = (2x - 1)b$, $y'' = (6zz'^2 - 2)b$, $z'' = (2 - 6z'^2)b$, kus $b = (3z^2 - 1)^{-1}$. 566. $y' = (x - z)a$, $z' = (y - x)a$, $y'' = (1 + y'^2 + z'^2)a$, $z'' = -(1 + y'^2 + z'^2)a$, kus $a = (z - y)^{-1}$. 567. $u_x = b$, $v_x = -b$, $u_y = 2ye^{vb}$, $v_y = 2ye^{ub}$, kus $b = (e^u + e^v)^{-1}$. 568. $u_x = va$, $v_x = -v^2a/u$, $u_y = va$, $v_y = -v^2a/u$, kus $a = \cos(x + y)$. Kaks viimast võrdust saame eelmistest x ja y sümmeetrilise paiknemise tõttu. 569. $du = -(u dx + 2v dy)/(x + y^2)$, $dv = -[v dx + (xu - yv)]/(x + y^2)$. 570. $u_x = yva$, $v_x = yua$, $u_y = xva$, $v_y = xua$, $u_{xx} = u_{yy} = v_{xx} = v_{yy} = 0$, $u_{xy} = va$, $v_{xy} = ua$, kus $a = (u + v)^{-1}$. 571. $u_x = -ub$, $v_x = -vb$, $u_y = -2vb$, $v_y = (xu - yv)b$, $u_{xx} = 2ub^2$, $u_{yy} = 2(3vy - xu)b^2$, $u_{xy} = 4vb^2$, $v_{xx} = 2vb^2$, $v_{yy} = 8y(yv - 3)b^2$, $v_{xy} = 4(yv - 1)b^2$, kus $b = (x + y^2)^{-1}$. 572. Kirjutada süsteem kujul $F = x(u, v) - x = 0$, $G = y(u, v) - y = 0$ ja kontrollida teoreemi T 3.4.4 tingimuste täidetust. 573. Kirjutada süsteem kujul $F = u(x, y) - u = 0$, $G = v(x, y) - v = 0$ ja kontrollida teoreemi T 3.4.4 tingimuste täidetust, arvestades teoreemi ja ülesande tähistuste erinevust. 574. Jah, teoreemi T 3.4.6 põhjal, sest $J = 6yz^2 + 6zx^2 \neq 0$. 575. On sõltuvad, sest $v = u^2 - 2w$. Teoreem T 3.4.6 ei anna vastust, sest $J = 0$. 576. $x + y + z - 3 = 0$, $n = (1, 1, 1)$. 577. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$, $n = (6, 3, 2)$. 578. $x + 2y - 4 = 0$, $n = (1, 2, 0)$. 579. $5x + y + 11z - 18 = 0$, $n = (5, 1, 11)$.

§ 3.5

580. $z_x = x/2$, $z_y = -y/2$. 581. $z_x = z^{1/2}x$, $z_y = -z^{1/2}y$. 582. $z_x = -8u^{-1} \sin v = -8y/(x^2 + y^2)$, $z_y = 8u^{-1} \cos v = 8x/(x^2 + y^2)$. 583. $z_x = x$, $z_y = y$. 584. $z_x = x$, $z_y = -y$. 585. $z_x = -\cot u \cos v = -x/z$, $z_y = -\cot u \sin v = -y/z$. 586. $z_x = 3x(z/4)^{1/3}$, $z_y = -3y(z/4)^{1/3}$. 587. $z_x = 2x$, $z_y = 2y$. 588. $z_x = -3uv = 3(y - x^2)/2$, $z_y = 3(u + v)/2 = 3x/2$. 589. $z_{xx} = 8 \sin 2v/u^2$, $z_{xy} = -8 \cos 2v/u^2$, $z_{yy} = -8 \sin 2v/u^2$. 590. $z_{xx} = z_{yy} = 2$, $z_{xy} = 0$. 591. $z_{xx} = -(u^2 - v^2)a$, $z_{xy} = (u^4 - v^4)a$, $z_{yy} = -(u^2 + v^2)^2a$, kus $a = 1/(u^3v^3)$. 592. $z_{yxx} = -16x(3y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^3$. 593. $z_{yxy} = 0$. 594. $z_{yxx} = -64yz^{-5}(y^2 + 2x^2)$. 595. $x - z + 2 = 0$, $n = (1, 0, -1)$. Kasutada valemeid (34) ja (35) paragrahvist 3.3. 596. $6x - 2y - z - 8 = 0$, $n = (6, -2, -1)$. 597. $3x + 3y - z - 10 = 0$, $n = (3, 3, -1)$.

§ 4.1

598. $y''_{tt} + y = 0$. 599. $y''_{tt} + 2y'_t + y = 0$. 600. $y''_{tt} + y = 0$. 601. $y''_{tt} + y = 0$. 602. $y'''_{ttt} - y''_{tt} - y'_t + y = 0$. 603. $ty''_{tt} + y = 0$. 604. $t^2y''_{tt} + 2ty'_t = 2$. 605. $y''_{tt} = 0$. 606. $y'''_{ttt} + y = 0$. 607. $x'_v - xy = 0$. 608. $x''_{yy} - 2x'_y = 0$. 609. $xx''_{yy} + x'^2_y - 1 = 0$. 610. $x'''_{yyy} = 0$. 611. $x'''_{yyy} + xx'^5_y = 0$. 612. $u''_{tt} + 8uu'^3_t = 0$. 613. $u''_{tt} = 0$. 614. $t^3u'''_{ttt} + (3t^4 + 1)u''_{tt} + u'_t = 0$. Võtta teisendus kujul $x = 1/t$, $y = u/t$. 615. $u'_t = u$. 616. $u''_{tt} = 0$. 617. $u''_{tt} - u'_t = u$. 618. $u''_{xx} = u$. 619. $u''_{xx} - 2xu'_x + (x^2 - 1)u = 0$. 620. $u''_{xx} + 1 = 0$. 621. $u'''_{xxx} = 0$. 622. $W = r'/r$. Tähistada $r = u$, $\varphi = t$ ja vaadelda kui iuhtumit 4.1.3. 623. $r'_t = r^3$, $\varphi'_t = -1$. Funktsioonid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ tuleb asendada uute funktsioonidega $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Leidnud tuletised $x'_t = r'_t \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_t$ ja $y'_t = r'_t \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_t$, paigutame nad võrrandisüsteemi, kust määrame r'_t ja φ'_t . 624. $k = (r^2 + 2r'^2 - rr''_{\varphi}) / (r^2 + r'^2)^{3/2}$.

§ 4.2

625. $u_t = 0$. Asendus on kujul (18), seepärast kasutada valemeid (19). 626. $u_s = 0$. Asendus on kujul (23), seepärast kasutada valemeid (24). 627. $u_s + u_t = e^s \operatorname{sh} t$. 628. $u_s - u_t = 0$. 629. $u_{st} = 0$. Asendus on kujul (18), seepärast kasutada valemeid (19) ja (21). 630. $u_{st} = 0$. 631. $u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt} - u_s - u_t = 0$. Asendus on kujul (23), seepärast kasutada valemeid (24) ja (25). 632. $u_{st} = 0$. 633. $2u_{st} = su_t$. 634. $w_{ss} = 0$. 635. $w_{ss} = 1/2$. 636. $w_s = 0$. 637. $w_{ss} + w_{st} = 2w$. 638. $w_{st} = 0$. 639. $w_{ss} + (t/s - 1)w_{tt} = 0$. 640. $w_{xy} = 0$. 641. $w(w_{xx} + w_{yy}) = w_x^2 + w_y^2$. Asendus ei muuda võrrandi kuju. 642. $W = u_{\varphi}$. 643. $W = r^2 u_{rr}$. 644. $W = u_{\varphi\varphi}$. 645. $u_{rr} + u_r/r + u_{\varphi\varphi}/r^2 = 0$. 646. $u_{vv} = 0$.

§ 4.3

650. $\operatorname{locmax} z = z(-1, 0) = 1$. 651. $\operatorname{locmin} z = z(1, 0) = -2$. Kriitilises punktis $(-1, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole. 652. Kriitilises punktis $(0, 1)$ ekstreemumit ei ole. 653. $\operatorname{locmax} z = z(0, 0) = 1$. 654. $\operatorname{locmin} z = z(1, 0) = -1$. 655. $\operatorname{locmin} z = z(1, 1) = -1$. Kriitilises punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole. 656. $\operatorname{locmin} z = z(0, 0) = 2$. Tuleb leida vahetu analüüsiga, sest tunnust PT 4.3.2 kasutada ei saa $A_1 = A_2 = 0$ tõttu. 657. $\operatorname{locmin} z = z(1, 2) = 3 - \ln 4$. Punkt $(-1, 2)$ (kus osatuletised on nullid) ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda. 658. $\operatorname{locmax} z = z(\pi/3, \pi/3) = 3^{1/2}3/8$, $\operatorname{locmin} z = z(2\pi/3, 2\pi/3) = -3^{1/2}3/8$. 659. Punktides $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$ $\operatorname{locmin} z = -2$. Punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole, mida näitab funktsiooni väärtuste võrdlus sirgetel $y = x$ ja $y = -x$ punkti $(0, 0)$ läheduses. 660. $\operatorname{locmin} u = u(-1, -2, 3) = -14$. 661. $\operatorname{locmax} u = u(1, 1, 1) = 1$. Mitterange lokaalne ekstreemum on, kui $y = 0$, $x \neq 0$, $x + 2y + 3z \neq 7$. 662. Statsionaarses punktis $(1, -1)$ on $z = 2 \pm 4$, seega lokaalne maksimum on 6 ja lokaalne miinimum on -2 . Osatuletised leida ilmutamata funktsiooni diferentseerimise eeskirja M 3.4.1 põhjal. 663. $\max z = z(0, -1) = 2$, $\min z = z(0, 1/2) = -0,25$. 664. $\max z = z(-1, 0) = z(1, 0) = 3$, $\min z = z(0, 1) = z(0, -1) = 1$. 665. $\max z = z(1, 0) = 0$, $\min z = z(0, 1) = -3$. 666. $\max z = z(-1, 0) = z(0, -1) = 1$, $\min z = z(0, 0) = 0$. 667. $\max z = z(0, 1) = z(0, -1) = 3/e$, $\min z = z(0, 0) = 0$. 668. Punktis $(0, 0)$ on ainuke lokaalne maksimum $u(0, 0) = 0$, kuid näiteks punktis $(5, 0)$ on $z(5, 0) = 25$. Seega punkt $(0, 0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt. Osatuletised on nullid ka punktis $(2, 2)$, kuid see punkt ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda D . 670. $10 + 10 + 10$. 671. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. 672. Kuup. 673. $x = y = (2V)^{1/3}$, $z = (2V)^{1/3}/2$, kus x ja y on vanni põhja mõõtmed ja z on vanni kõrgus. 674. Kuup küljega $2R/3^{1/2}$. 675. Võrdhaarne. 676. Võrdkülgne kolmnurk. 677. Ristküliku küljed on $2p/3$ ja $p/3$. 678. Kolmnurga küljed on $3p/4$, $3p/4$ ja $p/2$. 679. Risttahuka külgservad on $2a/3^{1/2}$, $2b/3^{1/2}$, $2c/3^{1/2}$. 680. Võrdkülgne kolmnurk. 681. Võrdkülgne kolmnurk.

§ 4.4

683. Tinglik $\operatorname{locmax} z = z(0, 0) = 1$. 684. Tinglik $\operatorname{locmax} z = z(0, 0) = 0$, tinglik $\operatorname{locmin} z = z(1, -1) = -1$. 685. Tinglik $\operatorname{locmax} z = z(-1, 1) = 2$, tinglik $\operatorname{locmin} z = z(1, 1) = -2$. 686. Punktides $(0, \pi^{1/2})$ ja $(0, -\pi^{1/2})$ tinglik $\operatorname{locmin} z = 0$, punktides $(\pi^{1/2}, 0)$ ja $(-\pi^{1/2}, 0)$ tinglik $\operatorname{locmax} z = \pi$. 687. Punktis $(1, 1)$, millele vastab $\lambda = -2$, tinglik $\operatorname{locmin} z = 2$. 688. Punktis $(2, 2)$, millele vastab $\lambda = -1$, tinglik $\operatorname{locmax} z = 1$; punktis $(-2, -2)$, millele vastab $\lambda = 1$, tinglik

locmin $z = -1$. 689. Punktis $(4/5, 3/5)$, millele vastab $\lambda = 5/2$, tinglik locmin $z = 1$; punktis $(-4/5, -3/5)$, millele vastab $\lambda = -5/2$, tinglik locmax $z = 11$. 690. Punktis $(3, 3, 3)$, millele vastab $\lambda = 9$, tinglik locmin $z = 9$. 691. Punktis $(-1, 2, -2)$, millele vastab $\lambda = 1/2$, tinglik locmin $z = -9$; punktis $(1, -2, 2)$, millele vastab $\lambda = -1/2$, tinglik locmax $z = 9$. 692. Punktis $(5, 5, 5)$, millele vastab $\lambda = -25$, tinglik locmax $u = 125$. Tunnust PT 4.4.1 ei saa kasutada, teostada vahetu analüüs. 693. Punktis $(1, 1, 2)$, millele vastavad $\lambda = -2$ ja $\mu = 0$, tinglik locmin $u = 6$. 694. Punktis $(1, 1, 1)$, millele vastavad $\lambda = -1$ ja $\mu = 1$, tinglik locmax $u = 2$; punktis $(-1, 1, 1)$, millele vastavad $\lambda = 1$ ja $\mu = -1$, tinglik locmin $u = -2$. 695. Punktis $(0, 0)$ tinglik locmin $z = 0$. 696. Punktides $(0, 1)$ ja $(0, -1)$ tinglik locmin $z = 0$, punktides $(1, 0)$ ja $(-1, 0)$ tinglik locmax $z = 2$. 697. Punktis $(0, 0)$ tinglik locmin $z = 0$. 698. Punktis $(1, 1, 1)$ tinglik locmin $z = 5$. 699. Punktis $(0, 2, 0)$ tinglik locmax $u = 0$. 700. Punktis $(0, 0)$ tinglik globaalne max $z = 0$. 701. Kogu sirgel $y = x$ on $z = 1$, seega mitterange tinglik ekstreemum. Lahendada taandamisega harilikule ekstreemumile. Lagrange'i ja Smithi meetod ei vii sihile. 702. Punktis $(1, 1)$ tinglik locmax $z = e$. 703. Punktides $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$ tinglik locmax $z = 1$, punktides $(1, -1)$ ja $(-1, 1)$ tinglik locmin $z = -1$. 704. Tinglikus statsionaarses punktis $(1 - 2^{-1/2}, 1 - 2^{-1/2})$ tinglik globaalne max $z = [2(2^{1/2} - 1)]^{1/2}$. Punktides $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ tinglik globaalne min $z = 0$. Vaadelda funktsiooni $u = 1 - x^2 - y^2$, sest juure ärajätmine ei muuda ekstreemumite asukohta. 705. Funktsiooni määramispiirkonna D sees on vaid üks tinglik statsionaarne punkt $(2, 2)$, kus on tinglik globaalne max $z = 2$. Piirkonna D rajajoone punktides $(0, 0)$, $(2, 0)$ ja $(0, 2)$ tinglik globaalne min $z = 0$. Vaadelda funktsiooni $u = xy$, sest juure ärajätmine ei muuda ekstreemumite asukohta. 706. Punktis $(\pi/6, \pi/6, \pi/6)$ tinglik max $u = 1/8$. 707. Tinglikud ekstreemumid puuduvad. Tinglik statsionaarne punkt on (a, a, a) , kus $a = (8/3)^{1/2}$. 708. Punktides, kus kaks koordinaati on $4/3$ ja kolmas on $7/3$, on tinglik max $u = 112/7$; punktides, kus kaks koordinaati on 2 ja kolmas on 1 , on tinglik min $u = 4$. 710. $(21/13, 2, 63/26)$. 711. $(3, -1, 1)$. 712. $z_{\max} = 2^{1/2}$. 713. Kuup külgservaga $(S/6)^{1/2}$. 714. Minimaalne pindala on $3^{1/2} 3ab$, kus a ja b on ellipsi pooltelgedele pikkused. 715. 27.

§ 5.1

723. 9. 724. 1. 725. $1 - \ln(1+e) + \ln 2$. 726. $\pi/2$. Teha muutujate vahetus $z = y - 2$. 727. 1. Teha muutuja vahetus $y = 1/n$, siis saab kasutada teoreemi T 5.1.1 näiteks lõigus $Y = [0, 1]$. 728. $26/3$. 729. $2,5$. 730. 1. 731. $2F'(y) = -\ln(1+y^2)$. 732. $F'(y) = 2y^{-1}(\cos \pi y^2 - \cos y^2)$. 733. $F'(y) = y^{-1} \arcsin 2y$. 734. $F'(y) = y^{-1}(3 \cos y^3 - \cos y)$. Kasutada teoreemi T 5.1.5. 735. $F'(y) = 4(1+y)(2+y)^{-1}y^{-1} \ln|1+y|$. 736. $F'(y) = 2(\sin 2y^2 - \sin y^2)/y$. 737. $J = 1 - \cos 1$. 738. $J = \sin^2 1$. 739. $J = e$. 740. $J = -1$. Tekkiva integraali algfunktsiooni saab ülesandest 765 (MAP I). 741. $J = \arctan 3 - \arctan 4 = -\arctan(1/13)$. 742. $J = \ln 7$. 743. $J = \ln(b+1) - \ln(a+1)$. 744. $F_y = y^{-1} \ln|1+y+yz|$, $F_z = (1+z)^{-1} \ln(1+y+yz)$. 745. $F_y = y^{-1}[\exp(yz^2) - 2 \exp(y^2z)]$, $F_z = z^{-1}[2 \exp(yz^2) - \exp(y^2z)]$. 746. $J(a) = \pi \arcsin a$. 747. $2J(a) = \pi \operatorname{sgn} a \ln(1 + |a|)$. 748. $J(a) = 0$. 749. $J(a) = \pi \operatorname{sgn} a (\ln|a + (a^2 - 1)^{1/2}| - \ln 2)$. 750. $J = \ln(b+1) - \ln(a+1)$. 751. $2J = \ln(b^2 + 2b + 2) - \ln(a^2 + 2a + 2)$. 752. $J = \arctan [(b - a)/(1 + (a+1)(b+1))]$.

§ 5.2

761. Kasutada tunnust PT 5.2.2. 762. Kasutada tunnust PT 5.2.3. 763. Kasutada tunnust PT 5.2.1, võttes majorandiks $g(x) = \pi/[2(1-x^2)^{1/2}]$. 764. Teha muutuja vahetus $t = 1/x$. 766. Integraali ühtlase koonduvuse näitamiseks kasutada teoreemi T 5.2.1. 767. Integraali ühtlase koonduvuse näitamiseks kasutada tunnust PT 5.2.2, võttes $g(x) = x/(1+x^2)$, $h(x, y) = \sin(x+y)$. 768. Kasutada tunnust PT 5.2.3, võttes $g(x) = 1/x^{1+a}$. 770. $1/18$. 771. $\pi^2/8$. 772. $2J(a) = \ln a$. 773. $J(a) = \ln(a+1)$. 774. $2J(a) = \pi \ln[a + (1+a^2)^{1/2}]$. Dife-

rentseerimisel parameetri järgi saadud integraalis teha muutuja vahetus $x = \sin t$ ja seejärel $\tan t = u$. 775. $J(a, b) = \ln b - \ln a$. Diferentseerimisel parameetri a järgi saame võrduse $J_a = -1/a$. Viimase integreerimisel a järgi saame võrduse $J(a, b) = -\ln a + C(b)$, kus $C(b)$ on integreerimiskonstant. Selle konstandi määramiseks võtame viimases võrduses $a = b$ ja arvestame, et lähte võrduse põhjal $J(b, b) = 0$. 776. $2J(a, b) = \pi \ln(a/b)$. Konstandi määramiseks võtta $a = b$. 777. $J(a, b) = \pi \ln(a^{1/2} + b^{1/2})$. 778. $J(a, b) = \arctan(b/a)$. Diferentseerida algul parameetri a järgi. Saadud integraal leida ositi integreerimise teel. 779. $2J(b) = \pi \operatorname{sgn} b$. Integraali $J(a, b)$ ühtlane koonduvus on näidatud näites N 5.2.2. Teoreemi T 5.2.1 eeldused on täidetud ja me võime piirile minna integraalimärgi all. Integraali $J(a, b)$ väärtus võtta ülesande 778 vastusest. 780. 0. 781. $-3/2$. 782. 0. 783. 1. 784. $J(a, b) = \ln(b/a)$ ($a > 0, b > 0$). 785. $2J(a) = \pi a \operatorname{sgn} a$. Algul diferentseerida integraali parameetri a järgi, kasutades valemit (9). 786. $2J(a) = \pi a \operatorname{sgn} a$. Kasutada diferentseerimist parameetri järgi. 787. $2J = \pi \ln(1 + 2^{1/2})$. 788. $2J = (\pi/2)^{1/2}$. Teha muutuja vahetus $x^2 = t$. 789. $2J = (\pi/2)^{1/2}$. 790. $\pi^{1/2}/2$. 791. $\pi b/2 - (\pi a)^{1/2}$. 792. $\pi^{1/2}(b^{1/2} - a^{1/2})$.

§ 5.3

795. $3\pi/512$. Teha muutuja vahetus $\sin^2 x = t$. 796. $\pi 2^{1/2}/4$. Teha muutuja vahetus $x^4 = t$. 797. $\pi/8$. Kirjutada integraalilune funktsioon kujul $x^{1/2}(1-x)^{1/2}$. 798. $\pi 2^{1/2}/4$. Kasutada valemit (24). 799. $1/560$. Teha muutuja vahetus $\sin^2 x = t$. 800. π . Teha muutuja vahetus $x^2 = 4t$. 801. $\pi/2^{1/2}$. 802. $2\pi 3^{1/2}/9$. 803. $\Gamma(p+1)$. 804. $B(m+1, n-m)$. 805. $B(1/m; 1-1/n)$, kus $n < 0$ või $n > 1$. 806. $B[(m+1)/2, (n+1)/2]$. 807. $\pi^2 \cos a\pi / \sin^2 a\pi$. 808. $\pi^3(1 + \cos^2 a\pi) / \sin^3 a\pi$. 809. $\pi a^{n-1} / [2\Gamma(n) \cos(n\pi/2)]$, $a > 0$. 810. $\pi a^{n-1} / [2\Gamma(n) \sin(n\pi/2)]$, $a > 0$. 811. $(2\pi)^{1/2}/4$. Teha muutuja vahetus $x^2 = t$. 812. $(2\pi)^{1/2}/4$.

§ 5.4

813. π . 814. 0. 815. 0. 816. $\pi^2/4$. 817. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{y} \sin ay \cos xy \, dy$.

818. $S(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{y} (1 - \cos ay) \sin xy \, dy$, kus $S(x) = f(x)$, kui $|x| \neq a$, ning $S(a) = 1/2$ ja $S(-a) = -1/2$. 819. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty y^{-2} (\sin ay - ay \cos ay) \sin xy \, dy$, kus $|x| \neq a$. 820. $S(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty y^{-2} (\sin ay - ay \cos ay) \sin xy \, dy$, kus $S(x) = f(x)$, kui $|x| \neq a$, ning $S(a) = 1/2$ ja $S(-a) = -1/2$. 821. $S(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{y} [\sin(x-a)y - \sin(x-b)y] \, dy$, kus $S(x) = f(x)$, kui $x \neq a$ ja $x \neq b$, ning $S(a) = S(b) = 1$. Kasutada valemit (33). 822. $S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1+y^2)^{-1} \times (\cos xy + y \sin xy) \, dy$, kus $S(x) = f(x)$, kui $x \neq 0$ ja $S(0) = 1/2$. Kasutada

valemit (33). 823. $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-ay} \cos xy \, dy$. 824. $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-ay} \sin xy \, dy$.

825. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2} \sin xy \, dy$. 826. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1-y^2} \cos \frac{\pi y}{2} \cos xy \, dy$.

827. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ay}{y} e^{ixy} \, dy$. 828. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx - y^2/4) \, dy$.

829. $f(x) = \frac{-i}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp(iyx - y^2/4) \, dy$. Kasutada eelmise ülesande 828

lahendust. 830. $F(y) = (2/\pi)^{1/2} a / (y^2 + a^2)$. 831. $F(y) = -i(2/\pi)^{1/2} ay / (y^2 + a^2)$.

832. $F(y) = \exp[-(y^2 + a^2)/2] \operatorname{ch} ay$. 833. $F(y) = (2/\pi)^{1/2} a / (y^2 + a^2)$. 834.

$F(y) = (2/\pi)^{1/2} y / (y^2 + a^2)$. 836. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1+y^2)^{-1} \cos xy \, dy$. Kasutada üles-

ande 833 vastust. 837. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} y(1+y^2)^{-1} \sin xy \, dy$. Kasutada ülesande

834 vastust. 838. $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$. 839. $f(x) = 2x / [\pi(1+x^2)]$, $x \in [0, \infty)$.

§ 6.1

840. $J = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 f(x, y) \, dx$. 841. $J = \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) \, dy +$

$+ \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) \, dx$. Esitus valemi (7) järgi on antud

kahe integraali summana, kuid võib kirjutada ka ühe integraalina $J = \int_{-2}^2 dx \int_{|x|/2}^1 f(x, y) \, dy$, mis on ka õige, kuid integraali arvutamiseks sobimatu.

842. $J = \int_0^2 dx \int_0^1 f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) \, dx$. 843. $J = \int_{-1}^1 dx \int_{-a}^a f(x, y) \, dy =$

$= \int_{-1}^1 dy \int_{-b}^b f(x, y) \, dx$, kus $a = (1-x^2)^{1/2}$ ja $b = (1-y^2)^{1/2}$. 844. $J =$

$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_{-c}^c f(x, y) \, dx$, kus $c = y^{1/2}$. 845. $J = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) \, dy =$

$= \int_0^1 dy \int_{y^{1/3}}^{y^{1/2}} f(x, y) \, dx$. 846. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) \, dx$. 847. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) \, dx$. 848.

$\int_0^1 dx \int_{1-x}^a f(x, y) \, dy$, kus $a = (1-x^2)^{1/2}$. 849. $\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) \, dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) \, dx$.

850. $\int_{-1}^0 dy \int_{-a}^a f(x, y) \, dx + \int_0^3 dy \int_{-a}^{1-y} f(x, y) \, dx$, kus $a = (y+1)^{1/2}$. 851.

$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{(1-x^2)^{1/2}} f(x, y) \, dy$. 852. $\int_0^1 dy \int_{-a}^a f(x, y) \, dx$, kus $a = \arccos y$. 853.

$\int_0^1 dy \int_b^{\pi-b} f(x, y) dx$, kus $b = \arcsin y$. 854. $1/6$. 855. $1/10$. 856. π . 857. 2 . 858. $3/2$.
 Arvestada; et $e^{x-y} = e^x e^{-y}$. 859. $1/3$. 860. $1/2$. 861. $5\pi^2/32^2$. 862. $33/140$.
 863. $35\pi a^4/12$. Lahenduse algus: $J = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3 dx =$
 $= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 a (1 - \cos t) dt = \dots$ 864. $85\pi/128 \approx 2,086$. 865. $-\pi/2 <$
 $< J < 4\pi$.

§ 6.2

866. $4\pi/3$. 867. $\pi/6$. 868. $2\pi/3$. 869. $\pi(\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2)$. 870. $\pi^2/16$.
 871. 4π . 872. 4π . 873. $2\pi/9$. 874. $32/9$. 875. $-2/3$. 876. $32/9$. 877. 24π . 878. 7 .
 879. $224/3$. 880. $4/3$. 881. $\pi/2$. Teha asendus $u = x + y$, $v = x - y$ ja seejärel
 minna üle polaarkoordinaatidele. 882. $5\pi/2$. Teha asendus $x = u + 1$, $y = v$
 ja seejärel minna üle polaarkoordinaatidele. 883. $1/840$. 884. $J =$
 $= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^1 f(r \cos^3 \varphi, r \sin^3 \varphi) r dr$. 885. $J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^w f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$,
 kus $w = a \cos^{1/2} 2\varphi$.

§ 6.3

886. $3/4$. Kasutada valemit (25). 887. 2 . 888. $16 - 6/\ln 2$. 889. $7,5 - 8 \ln 2$.
 890. 5 . 891. πa^2 . Kasutada valemit (25), minnes üle polaarkoordinaatidele.
 892. πab . Kasutada valemit (25), minnes üle elliptilistele polaarkoordinaati-
 dele. 893. $\pi(b^2 - a^2)/4$. 894. $3\pi a^2/2$. 895. πa^2 . 896. a^2 . Minna üle polaarkoor-
 dinaatidele. 897. $2a^2$. Minna üle polaarkoordinaatidele. 898. $5\pi a^2/8$. 899. $3/4$.
 Minna üle elliptilistele polaarkoordinaatidele. 900. $39\pi/25$. 901. $3\pi a^2$. 902. $ab/70$.
 Minna üle üldistele elliptilistele polaarkoordinaatidele, võttes $s = 8$. 903.
 $\pi ab(a^2/c^2 + b^2/d^2)/4$. 904. $1/6$. 905. $560/3$. 906. $3/4$. 907. $6^{1/2} 48/5$. 908. $\pi/2$.
 909. $\pi(8 - 3^{1/2} 3)/6$. 910. $1/6$. 911. 16 . 912. 22π . 913. $\pi(3^{1/2} 6 \pm 5)/3$. 914. $16/3$.
 915. 3π . 916. $4\pi(6^{1/2} 2 - 3)$. 917. π . 918. $\pi abc(2 - 2^{1/2})/3$. 919. 14 . 920.
 $2\pi(2^{1/2} 2 - 1)/3$. 921. $4\pi a[a - (a^2 - b^2)^{1/2}]$. 922. $2^{1/2} 2\pi$. 923. $16(8^{1/2} - 1)/3$.
 924. $2a^2(\pi - 2)$. 925. 4π . Võtta integreerimise piirkond yz -tasandil. 926. $\pi at +$
 $+ \pi h^2 \ln [(a+t)/h]$, kus $t = (a^2 + h^2)^{1/2}$. 927. $a(\beta - \alpha)[b(\delta - \gamma) + a(\sin \delta - \sin \gamma)]$.
 928. $2\pi ha^2/3$. 929. $4a^2/3$. 930. $4a^2 bk/3$, kus $a > b$ on ellipsi poolteljed.
 931. $x_c = 0$, $y_c = 4b/(3\pi)$. 932. $x_c = (1 - \pi/4)(1 + 2^{1/2})$, $y_c = (\pi/2 - 1)(2 + 2^{1/2})/8$.
 933. $x_c = -a/2$, $y_c = 8a/5$. 934. $x_c = 5a/6$, $y_c = 16a/(9\pi)$. 935. $x_c = \pi a$, $y_c =$
 $= 5a/6$. 936. $x_c = -a/5$, $y_c = 0$. 937. $x_c = -(64 + 15\pi)a/(80 + 40\pi)$, $y_c = 0$.
 938. $J_x = J_y = (1 - 5\pi/16)a^4$. 939. $J_x = 21\pi a^4/32$, $J_y = 49\pi a^4/32$. 940. $4J_x =$
 $= 4J_y = 3\pi a^4/2^{1/2}$.

§ 6.4

941. $J = \iint_D dx dy \int_1^{3-x} f(x, y, z) dz$, kus $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$;
 $J = \int_0^1 dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz$, kus $D = \{(y, z) : -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 1 \leq z \leq$

$\leq 3 - x$. 942. $J = \iint_D dx dy \int_2^4 f(x, y, z) dz$, kus $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$; $J =$
 $= \int_{-1}^1 dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz$, kus $D(x) = \{(y, z): -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 2 \leq z \leq$
 $\leq 4\}$. 943. $J = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$, kus $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq$
 $\leq 1 - x\}$; $J = \int_0^1 dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz$, kus $D(x) = \{(y, z): 0 \leq y \leq 1 - x,$
 $0 \leq z \leq 1 - x - y\}$. 944. $J = \iint_D dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz$, kus $D = \{(x, y):$
 $x^2 + y^2 \leq 1\}$; $J = \int_{-1}^1 dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz$, kus $D(x) = \{(y, z): -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq$
 $\leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$. 945. $J = \iint_D dx dy \int_{-w}^w f(x, y, z) dz$, kus
 $w = c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ ja $D = \{(x, y): x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$; $J =$
 $= \int_{-a}^a dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz$, kus $D(x) = \{(y, z): y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1 - x^2/a^2\}$.
 946. 6. 947. 4. 948. $40/3$. 949. $10 \ln(4/5)$. 950. $8\pi/3$. 951. $1/2$. 952. $1/364$.
 953. 11.

§ 6.5

956. $\pi/2$. 957. $\pi^2/4$. 958. $3a^3(3^{1/2} - 2^{1/2})$. 959. 0. 960. $8c^2/9$. 961.
 $4\pi(b^5 - a^5)/15$. 962. 3π . Minna üle elliptilistele silinderkoordinaatidele, võttes
 $x = 3r \cos \varphi$, $y = 2r \sin \varphi$, $z = h$, kus $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq h \leq 1$. 963. $2/5$.
 964. $\pi/8$. 965. $\pi/2$. 966. $\pi/10$. 967. $2\pi/3$. Osa lahendusest: minnes üle sfäär-
 koordinaatidele, saame

$$\begin{aligned}
 J &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r dr \int_0^\pi \frac{d(r^2 - 4r \cos \theta + 4)}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \\
 &= \pi \int_0^1 r dr (\sqrt{(r+2)^2} - \sqrt{(r-2)^2}) = \pi \int_0^1 r dr (r+2 - |r-2|).
 \end{aligned}$$

Et $r - 2 < 0$, siis edasi arvestame, et $|r - 2| = -(r - 2)$. 968. $4\pi a^5/15$.
 969. $8\pi(b^5 - a^5)/15$. 970. $4\pi abc/5$. 971. $6\pi^2$. 972. $59\pi a^5/480$. 973. $\pi abc^2/4$.

§ 6.6

974. 128. 975. $\pi/2$. 976. $7/12$. 977. 16. 978. $7/24$. 979. $3/35$. 980. $\pi a^3/3$.
 Minna üle sfäärkoordinaatidele, arvestades kujundi sümmeetriat. 981.
 $5\pi abc(3 - 5^{1/2})/12$. 982. $4\pi abc/35$. Minna üle üldistele ellipsoidkoordinaatidele,
 võttes $s = t = 3$, siis antud pinna korral $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
 983. $\pi a^7 b^4 c/192$. 984. $a^4/2$. 985. $abc(a+b+c)/2$. 986. $3a^4/2$. 987. $a^4/24$. 988.
 162π . 989. $\pi^2 a^4/4$. 990. $k\pi a^4 c/2$, kus k on võrdetegur. 991. $6k\pi a^2$, kus k on
 võrdetegur. 992. (a, a, a) . 993. $(3a/5, 3b/5, 9(ab)^{1/2}/32)$. 994. $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$.
 995. $(0, 0, 2a/5)$. 996. $I_{xy} = abc^3/60$, $I_{yz} = a^3bc/60$, $I_{zx} = ab^3c/60$. 997. $I_{xy} =$
 $= 4\pi abc^3/15$, $I_{yz} = 4\pi a^3bc/15$, $I_{zx} = 4\pi ab^3c/15$. 998. $4ma^2/9$, kus $m = k\pi a^4$ on
 kera mass ja k on võrdetegur. 999. $I_z = m(a^2 + 2c^2/3)$, kus $m = 2\pi \rho a^2 c$ on
 silindri mass ja ρ on tema tihedus.

§ 6.7

1000. π . 1091. $\pi/8$. 1002. Hajub. 1003. $\pi/3$. 1004. 3π . 1005. Hajub.
 1006. 2π . 1007. 2π . 1008. $2^{1/2}$. 1009. Hajub. 1010. $4\pi/3$. 1011. 0. 1012. Hajub.
 1013. $8\pi a(\ln a - 1)$. 1014. Hajub.

§ 7.1

1015. $5^{1/2} \ln 2$. Kasutada valemit (4). 1016. $5^{1/2} \ln 3^{1/2}$. 1017. $5^{1/2} \ln (5/3)/2$.
 Kasutada valemit (5). 1018. $1/2$. Kasutada valemit (3). 1019. $2\pi a(2a)^{1/2}$.
 1020. $16a^2/3$. 1021. $1/2$. Kasutada valemit (6). 1022. $\pi/2$. 1023. $\pi a^3/2$.
 1024. $[(\pi^2+4)^{3/2}-8]/12$. 1025. $\pi a^2/2$. Minna üle polaarkoordinaatidele ja
 kasutada valemit (6). 1026. 2π . Minna üle polaarkoordinaatidele ja
 kasutada valemit (6). 1027. 0. Minna üle polaarkoordinaatidele ja kasutada
 valemit (6). 1028. $1+2^{1/2}$. Kasutada aditiivsuse omadust ja jaotada kontuur
 osadeks AB , BC ja CA . 1029. 24. 1030. $2a^2(2-2^{1/2})$. Esitada joone võrrand
 polaarkoordinaatides ja kasutada valemit (6). 1031. $8a\pi^3 2^{1/2}$. 1032. $21/2$.
 1033. $(8-2^{1/2}2)/3$. 1034. $a^4(7+2^{1/2}13)/16$. 1035. $3^{1/2}a^4/32$. 1036. $2\pi a^2$.

§ 7.2

1037. $2(8^3-1)/27$. 1038. sh 1. 1039. e. 1040. $2^{1/2}(e^{2\pi}-1)$. 1041. 3π .
 1042. $\ln(1+2^{1/2})$. 1043. 5. 1044. $3^{1/2}$. 1045. $5/3$. 1046. 1. Minna üle polaar-
 koordinaatidele. 1047. 12π . Minna üle polaarkoordinaatidele ja sümmeetria tõttu
 leida neljakordne pindala osast, kus $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. 1048. π . 1049. $\pi/2$. 1050. 16.
 1051. $2+3^{1/2}8\pi/9$. 1052. $(4/3, 4/3)$.

§ 7.3

1053. π . Kasutada valemit (26). 1054. -4 . 1055. $-40/3$. Kasutada valemit
 (27). 1056. 3. 1057. $-\pi/4$. Kasutada valemit (24). 1058. 2π . Kasutada vale-
 mit (25). 1059. 0. Vastuse saame omaduse II põhjal, sest sirglõik AB on
 risti y -teljega. 1060. 0. Vastuse saame omaduse II põhjal, sest sirglõik AB
 on risti x -teljega. 1061. 3. 1062. -32 . 1063. 2. Kasutada definitsioonavaldist
 (17) ja arvutusvalemeid (26) ja (27). 1064. 0. Kasutada arvutusvalemeid
 (24) ja (25). Mõlemad integraalid arvutada korruga, arvestades, et
 $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$. 1065. -2π . Arvutada mõlemad integraalid korruga
 valemite (24) ja (25) põhjal. 1066. $\pi a^4/2$. Kahekordne integraal arvutada üle-
 minekuga polaarkoordinaatidele. 1067. 0. Kahekordne integraal leida ülemine-
 kuga elliptilistele polaarkoordinaatidele $x=ar \cos \varphi$, $y=br \sin \varphi$, kus $0 \leq r \leq 1$
 ja $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 1068. $-\pi a^3/8$. 1069. 13. 1070. $1/35$. 1071. -4π .

§ 7.4

1072. Sõltumatu. Kasutada teoreemi T 7.4.1. 1073. Sõltuv. 1074. Sõltu-
 matu. 1075. Sõltuv. Kasutada teoreemi T 7.4.4. 1076. Sõltumatu. 1077. Sõltu-
 matu. 1078. $U(x, y) = x^3 - x^2y^2 + y^3 + C$. Meetodi M 7.4.1 korral võtta $a=b=0$.
 1079. $U(x, y) = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$. 1080. $U(x, y) = \ln|x+y| - y/(x+y) + C$ või
 $U(x, y) = \ln|x+y| + x/(x+y) + C$. 1081. $U(x, y) = (x^2+y^2)^{1/2} + C$. 1082. $U(x, y) =$
 $= y^2 \cos x + x^2 \cos y + C$. Võtta $a=b=0$. 1083. $U(x, y) = x^2 - \cos(x+y) + y^2 + C$.
 1084. $U(x, y) = C - \cos(x+y)$. 1085. $U(x, y, z) = \arctan(xyz) + C$. 1086.
 $U(x, y, z) = xyz + C$. 1087. 8. Kasutada valemit (38). 1088. $5/8$. 1089. 64.
 1090. 4. 1091. 13. Kasutada valemit (46). 1092. $10/3$. 1093. 2. 1097. Võtta algul
 joonintegraal mööda ringjoont $x^2+y^2=a^2$, saame 2π . Võttes joonintegraali
 mööda suvalist kontuuri L , ühendame kontuuri L sirglõigu abil ringjoonega
 $x^2+y^2=a^2$. Nii saame teha kontuuri, mis ei ümbritse punkti $(0, 0)$. Sellise kon-
 tuuri korral saab kasutada juba teoreemi T 7.4.3, sest täisdiferentsiaali tunnus
 ei ole täidetud vaid punktis $(0, 0)$.

§ 7.5

1098. πab . Kasutada valemit (50). **1099.** $3\pi ab/8$. Kasutada valemit (50). Sümmeetria tõttu võtta neljakordselt osa, kus $0 \leq t \leq \pi/2$. **1100.** $6\pi a^2$. **1101.** $1/3$. **1102.** $1/15$. **1103.** $2a^2$. Kasutada valemit (51), tehes asenduse $y/x = t$ või $y/x = \tan t$. **1104.** -14 . **1105.** Fa . **1106.** $m(r_B^2 - r_A^2)/2$, kus r_A ja r_B on vastavalt punkti A ja punkti B kaugused punktist O .

§ 8.1

1107. $61^{1/2}12$. **1108.** $14^{1/2}54$. **1109.** π . **1110.** 0 . Kasutada valemit (3). Saadud integraalis minna üle polaarkoordinaatidele. Enne arvutada integraal φ järgi, mis on 0 , siis on näha, et teist keerulist integraali arvutada pole vaja. **1111.** $\pi a^2(2+a)/4$. Kasutada valemit (3). Saadud integraalis minna üle polaarkoordinaatidele. **1112.** $2\pi a^6/15$. **1113.** $5a^3/\pi$. Kasutada valemit (2). Pinna Σ võrrandis minna üle parameetrilisele kujule $x = a \cos u$, $y = a \sin u$, $z = v$, kus $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq a/\pi$. Saadud integraalis jaotada piirkond Δ kaheks osaks $0 \leq u \leq \pi$, kus $|\sin u| = \sin u$, ja $\pi \leq u \leq 2\pi$, kus $|\sin u| = -\sin u$. Valemit (3) kasutada ei saa, sest ei saa avaldada $z = z(x, y)$. **1114.** $\pi(1+2^{1/2})/2$. **1115.** 14 . Kasutada valemit (4) ja arvutusvalemit (3). **1116.** $2a^2(\pi - 2)$. **1117.** $4a^2$. **1118.** $8a^2$. **1119.** $\pi^2 a^3/2$. **1120.** $2\pi c \arctan(c/a)$. **1121.** $\pi/2^{1/2}$. **1122.** $(a/2, a/2, a/2)$.

§ 8.2

1123. $-\pi a^4/2$. Kasutada arvutusvalemit (19). **1124.** π . Kasutada arvutusvalemit (19) ja minna üle elliptilistele polaarkoordinaatidele. **1125.** 0 . **1126.** $-4\pi a^{5/2}/5$. **1127.** 3 . Kasutada definitsioonavaldist (14) ja arvutusvalemeid (19), (20) ja (21). **1128.** $4\pi a^3$. **1129.** $\pi/8$.

§ 8.3

1130. $4\pi a^3$. **1131.** 0 . **1132.** $\pi a^2 b(3a^2 + b^2)$. Kolmekordne integraal leida meetodiga M 6.4.1. Saadud kahekordses integraalis integraalialusest funktsioonist $2b(x^2 + y^2) + b^3/3$ leida integraalid mõlemast liidetavast eraldi. **1133.** 3 . **1134.** $3V_E$. Valemi (22) abil minna üle teist liiki pindintegraalile. Siis kasutada valemit (23) ja arvestada valemit (59) paragrahvist 6.6. **1135.** 0 . **1136.** 0 . **1137.** $a^2 b(16a + 3\pi b)/24$. **1138.** $4\pi abc/3$. Minna üle parameetrilisele kujule $x = a \cos \varphi \sin \theta$, $y = b \sin \varphi \sin \theta$, $z = c \cos \theta$, kus $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ja kasutada valemit (28) ning arvutusvalemeid (16), (17) ja (18). **1139.** $16a^3(3\pi - 4)/9$. Kasutada valemit (25) ja arvutusvalemit (19) ning minna üle polaarkoordinaatidele. Sümmeetria tõttu piisab leida neljakordne ruumala osast, kus $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ja $0 \leq r \leq 2a \cos \varphi$. **1140.** 6 . **1141.** $4\pi|c|(a^2 + b^2/2)/3$. **1142.** 0 . **1143.** $-\pi a^6/8$. **1144.** -3 .

§ 8.4

1145. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $\text{grad } U = (2, 2, -2)$. **1146.** $4z \arctan(y/x) = \pi$, $\text{grad } U = (-2, 2, \pi)$. **1147.** $z + e^{xy} = 0$, $\text{grad } U = (0, 1, 1)$. **1153.** $y(1 + 2^{1/2}) \rightarrow -x - z, -4$. **1154.** $x^2 + 6y^2 + 6z^2, 16$. Valemi (32) kasutamiseks tuleb vektor n muuta samasuunaliseks ühikvektoriks. **1155.** $(1, 1, 0)$ ja $(1, -1, 0)$. Valemi (32) põhjal tuleb leida punktid, kus $U_x = U_y = U_z = 0$. **1156.** $\text{grad } U \text{ grad } V / |\text{grad } V|$. **1157.** y -telje negatiivses suunas. **1158.** $1/2$. **1159.** $10/3$. **1160.** $3\pi a^2 h$. **1161.** π . **1162.** 29 . **1163.** $2/3$. **1164.** 3 . **1165.** xye^{xy} . **1173.** $(4, -1, 0)$. **1174.** $(-1, 0, 0)$. **1175.** $(2y + 2z, 0, 0)$. **1182.** $U = x + y + z + C$. **1184.** $\pm \pi a^6/8$.

REGISTER

- Abeli lemma 30
 — tunnus 17
 absoluutselt koonduv päratu integraal 188
 — — rida 16
 algebraline e. aritmeetiline projektioon 200
 allikavaba väli 229
 argumendi diferentsiaal 69
 — muut 54
 argument e. sõltumatu muutuja 43, 49
 asendus kahekordses integraalis 155
 — kolmekordses integraalis 177
 astmerea koonduvusraadius 29
 — — vahemik 29
 — kordaja 29
 astmerida 29
- Beetafunktsioon 138
 Bernoulli lemniskaat 169
 Bolzano—Weierstrassi lemma 52
- Cauchy—Hadamardi valem 29
 — korrutis 18
 — kriteerium 6
 — peaväärtus 142
 — tunnus 10
 — — suvalistele ridadele 17
- D'Alemberti tunnus 10
 — — suvalistele ridadele 17
 diferentseeruv funktsioon 69
 — skalaarväli 227
 — vektorväli 228
 diferentsiaalide meetod 90
 Dirichlet' tunnus 17
- Elementaarfunktsioon 50
 ellipsoidkoordinaadid 180
 elliptilised polaarkoordinaadid 157
 — silinderkoordinaadid 178
 esimest liiki joonintegraal 192
 — — pindintegraal 216
 Eukleidiline ruum 48
 Euleri—Gaussi valem 139
 Euleri esimest liiki integraal 138
 — teist liiki integraal 139
 — tingimus 76
 — valem 39
- Fourier' integraal 142
 — — komplekskujul 143
 — koosinusintegraal 143
 — — teisend 144
 — — teisendus 144
 — kordajad 37
 — rida 36
 — — komplekskujul 39
 — siinusintegraal 143
 — -teisend 145
 — -teisendus 145
 — teisend 144
 — teisendus 144
- funktsionaaldeterminant 81
 -jada 20
 — — koonduvuspiirkond 21
 — — piirfunktsioon 21
 -rea koonduvuspiirkond 22
 — — osasummade jada 21
 — — summa 21
 — — — määramispiirkond 22
 — — üldliige 21
 -rida 21
- funktsiooni absoluutne integreeruvus 149
 — ilmutamata kuju 79
 — graafik 44, 49
 — katkevuspunkt 54
 — korduv piirväärtus 53
 — kriitiline punkt 109
 — muut 54
 — muutumispiirkond 43, 49
 — määramispiirkond 43, 49
 — piirväärtus 52
 — statsionaarne punkt 108
 — väärtus 43, 49
- Gammafunktsioon 139
 Gaussi—Ostrogradski valem 224
 geomeetiline rida 6
 globaalne ekstreemum 109
 — — punkt 109
 — maksimum (miinimum) 109

- gradient 227
 Greeni valem 205
- Hajuv funktsionaaljada 20
 — funktsionaalrida 22
 — rida 5
 Hamiltoni operaator 228
 harmooniline rida 6
 helikoid 170
 homogeenne funktsioon 76
 hulga diameeter 48
- Identsuse aksioom 48
 ilmutamata funktsioon 79, 80
 integraalsumma 148, 171
 — tunnus 11
 integreerimispiirkond 148, 171
 — tee 193, 202
 — — alguspunkt 193, 202
 — — lõpp-punkt 193, 202
 integreeruva ruuduga funktsioon 38
 integreeruv funktsioon 148, 171
- Jakobiaan 81, 82
 joon e. kõver 49
 joone mass 198
 — massi keskme koordinaadid 198
 — parameetrilised võrrandid 49
 joonintegraali aditiivsus 193
 -alune avaldis 202
 — lineaarsus 193
 joonintegraal kaare pikkuse järgi 192
 — — projektsioonide järgi 201
 — koordinaatide järgi 201
- Kahekordne integraal 148
 — — tõkestamata funktsioonist 188
 — — üle lõpmatu piirkonna 188
 kahekordse integraali aditiivsus 149
 — — lineaarsus 149
 — — monotoonsus 149
 — — muutujate vahetuse valem 155
 kahekülgne e. kahepoolne pind 220
 kahe muutuja funktsioon 43
 kardioid 168
 katkev funktsioon 54
 kaugus punktide vahel 48
 keerisevaba väli 230
 keha inertsimomendid 184
 — mass 183
 — massikese 184
 — ruumala 183
 keskväärtusteoreem 149
 kinnine hulk 45
 — joon 202
 kolmekordne integraal 171
 kolmekordse integraali muutujate vahetuse valem 177
 kolmeleheline roos 166
 kolmnurga aksioom 48
- kontuur 207
 koonduv funktsionaaljada 20
 — funktsionaalrida 22
 — punktide jada 51
 — rida 5
 koonduvus koordinaatide järgi 52
 koosinusrida 37
 kriitiline punkt 109
- Lagrange'i funktsioon 115
 — meetod 115
 lahtine hulk 45
 Leibnizi tunnus 16
 — valem 122
 lihtne kontuur 207
 liitfunktsioon 50
 liitfunktsiooni esitus ahela kujul 50
 — koostisosad 50
 — vahepealsed muutujad 50
 lineaarne funktsioon 49
 logaritmiline tunnus 11
 lokaalne ekstreemum 108
 — — punkt 108
 — maksimum (miinimum) 108
 lõpmata suur suurus 52
 — väike suurus 52
 lõpmatu rida 5
 lähenemistee punktile 51
- Maclaurini rida 30
 mitmene funktsioon 44, 49
 m -mõõtmeline e. m -dimensionaalne punkt 48
 — — ruum 48
 muutujate vahetus kahekordses integraalis 155
 — — kolmekordses integraalis 177
- Nabla 228
 neljaleheline roos 168
 niveopind 227
 n -järku e. n -es täisdiferentsiaal 71
 nulljada 6
 nullpunkt 48
- Osadiferentsiaal 69
 osatuletis 63
 osatuletiste meetod 90
- Parameetrilisel kujul antud funktsioon 89
 parameetrist sõltuv integraal 122
 Parsevali võrdus 38
 pidev funktsioon 53, 54
 — joon 49
 piirkonna teisendus 154, 176
 piirpunkt 51
 pindintegraal pindala järgi 216
 — projektsioonide järgi 221
 pinna inertsimomendid 218

pinnaliselt ühelisidus piirkond 210
 pinna mass 217
 — massikeskme koordinaadid 218
 — normaal 76, 84
 — parameetrid 163
 — parameetrilised võrrandid 163
 — pindala 164
 — positiivne (negatiivne) külge 220
 polaarkoordinaadid 156
 positiivne läbimissuund 203
 — rida 9
 potentsiaalne vektorväli 230
 punkti koordinaadid 48
 — ümbrus 44, 48
 puutujatasand 75, 83
 põhielementaarfunktsioonid 50
 päratu kahekordne integraal 187

Raabe tunnus 10
 rajajoon e. raja 45
 -pind e. raja 48
 -punkt 44
 range lokaalne ekstreemum 108
 rea jääkliige 6
 — liige 5
 — osasummade jada 5
 — summa 5
 — üldliige 5
 — ümberjärjestus 17
 regulaarne teisendus 155, 176
 ruumiline joonintegraal 193, 202

Segatuletis 64
 sfäärkoordinaadid 179
 sidus hulk 49
 siinusrida 37
 sile joon 49
 — pind 163
 silinderkoordinaadid 178
 -pinna pindala 198
 sirglõik 49
 sisepunkt 44
 skalaarväli 227
 Smithi meetod 117
 solenoidväli 229
 statsionaarne punkt 108
 Stirlingi valem 11
 Stokesi valem 225
 sõltumatud funktsioonid 83
 sõltuvad funktsioonid 83
 sõltuv funktsioon 83
 sümmeetria aksioom 48

Taandamisvalem 138, 139
 tasandilise kujundi inertsimomendid
 165
 — — mass 165
 — — massikese 165
 tasandiline joonintegraal 193, 202

Taylori kordajad 30
 — rida 30
 — valem 75
 — valemi jääkliige 75
 teist järku e. teine osatuletis 63
 — — — täisdiferentsiaal 70
 — liiki joonintegraal 201
 — — pindintegraal 221
 teoreem osatulelise piirväärtusest 63
 — segatuletisest 64
 tingimisi koonduv rida 17
 tinglik globaalne ekstreemum 113
 — — — punkt 113
 — — maksimum 113
 — — miinimum 113
 — kriitiline punkt 115, 116, 117
 — lokaalne ekstreemum 113
 — — — punkt 113
 — — maksimum 112
 — — miinimum 112
 — statsionaarne punkt 115, 116, 117
 toor 170
 trigonomeetriline Fourier' rida 36
 — rida 36
 tuletis antud suunas 228
 tõkestatud hulk 48
 tõkestatud punktide jada 52
 täiendusvalem 138, 139
 täisdiferentsiaal 69
 täisdiferentsiaali kaju invarianttsuse
 lause 71
 tükiti sile joon 204, 205
 — — pind 216

Vahelduvate märkidega rida 16
 vektori divergents 229
 — lineaarne integraal 229
 — rootor 230
 — tsirkulatsioon 230
 — voog 229
 vektorväli 228
 vektorvälja potentsiaal 230
 võrdsed punktid 48
 välispunkt 45

Weierstrassi tunnus 22
 — — integraalile 130

Ühelisidus piirkond 207
 ühekülgne e. ühepoolne pind 220
 ühtlaselt koonduv funktsionaaljada 21
 — — -rida 22
 — — integraal 130
 — pidev funktsioon 54
 üldine harmooniline rida 10
 — teist liiki joonintegraal 201
 — — — pindintegraal 222
 üldised ellipsoidkoordinaadid 180
 — elliptilised polaarkoordinaadid 157

SISUKORD

Eessõna	3
I. Read	
§ 1.1. Arvrea koonduvus	5
§ 1.2. Positiivsed arvread	9
§ 1.3. Suvalised arvread	16
§ 1.4. Funktsionaalread	20
§ 1.5. Astmereal	29
§ 1.6. Fourier' read	36
II. Mitme muutuja funktsioonid	
§ 2.1. Kahe muutuja funktsioonid	43
§ 2.2. Mitme muutuja funktsioonid	48
§ 2.3. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus	51
III. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine	
§ 3.1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised	63
§ 3.2. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal	69
§ 3.3. Mitme muutuja funktsiooni diferentsiaalarvutuse rakendusi	75
§ 3.4. Ilmutamata funktsioonide olemasolu ja diferentseerimine	79
§ 3.5. Parameetrilisel kujul antud mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine	89
IV. Muutujate vahetus diferentsiaalavaldistes ja ekstreemumid	
§ 4.1. Muutujate vahetus tuletistega avaldistes	95
§ 4.2. Muutujate vahetus osatuletistega avaldistes	100
§ 4.3. Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid	108
§ 4.4. Tinglikud ekstreemumid	112
V. Parameetrist sõltuvad integraalid	
§ 5.1. Parameetrist sõltuv määratud integraal	122
§ 5.2. Parameetrist sõltuvad päratud integraalid	129
§ 5.3. Euleri integraalid	138
§ 5.4. Fourier' integraal	142
VI. Kordsed integraalid	
§ 6.1. Kahekordne integraal	148
§ 6.2. Muutujate vahetus kahekordses integraalis	152
§ 6.3. Kahekordse integraali rakendusi	162
§ 6.4. Kolmekordne integraal	171

§ 6.5. Muutujate vahetus kolmekordses integraalis	176
§ 6.6. Kolmekordse integraali rakendusi	183
§ 6.7. Päratud kordsed integraalid	187

VII. Joonintegraalid

§ 7.1. Esimest liiki joonintegraal	192
§ 7.2. Esimest liiki joonintegraali rakendusi	197
§ 7.3. Teist liiki joonintegraalid	200
§ 7.4. Integreerimisteest sõltumatud joonintegraalid	207
§ 7.5. Teist liiki joonintegraalide rakendusi	213

VIII. Pindintegraalid

§ 8.1. Esimest liiki pindintegraal	216
§ 8.2. Teist liiki pindintegraalid	220
§ 8.3. Gaussi—Ostrogradski ja Stokesi valemid	224
§ 8.4. Väljateooria elemendid	227
Vastused	234
Register	251

Эльмар Реймерс
Практикум по математическому анализу. II часть

На эстонском языке
Художник-оформитель Т. Ару
Таллин, «Валгус»

Toimetaja U. Alas

Kunstiline toimetaja M. Henno

Tehniline toimetaja R. Nisametdinov

Korrektorid L. Kondraševa, M. Lillipuu

ИБ № 6468

Laduda antud 18. 03. 87

Trükkida antud 05. 04. 88

Formaat 60×90/16

Trükipaber nr. 1

Kiri: Literaturnaja

Kõrgtrükk

Tingtrükipoognaid 16,25

Tingvärvitõmmiseid 16,25

Arvestuspoognaid 15,89

Trükiarv 2500

Tellimuse nr. 1248

Hind 85 kop.

Tellitud

Kirjastus «Valgus», 200С90 Tallinn, Pärnu mnt. 10
H. Heidemanni nim. trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19. II

DIFERENTSEERIMISE PÕHIVALEMID

1. $c' = 0$ ($c = \text{const}$)

2. $x' = 1$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(x^a)' = ax^{a-1}$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$

7. $(e^x)' = e^x$

8. $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$

9. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

17. $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

18. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$

19. $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$

20. $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

21. $(\text{cthx})' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$

22. $(\text{arsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

23. $(\text{arch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

24. $(\text{arth } x)' = \frac{1}{1-x^2}$

25. $(\text{arcth } x)' = \frac{1}{1-x^2}$

INTEGREERIMISE PÕHIVALEMID

$$1) \int 0 \, dx = C$$

$$2) \int dx = x + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$5) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$

$$14) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$$

$$15) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$16) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$7) \int e^x dx = e^x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$9) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$10) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$12) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$17) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$18) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

85 100