Sisukord

I peatükk.
Nõrgad topoloogiad Banachi ruumides

§ 1. Topoloogilised ruumid

1.1. Topoloogia mõiste. Näiteid topoloogilistest ruumidest

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et hulga X alamhulkade kogum τ on *topoloogia* (hulgal X), kui

1° $\emptyset, X \in \tau$;

2° kogum τ sisaldab kõikvõimalikud oma hulkade lõplikud ühisosad, s.t. mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $A_1, \ldots, A_n \in \tau$ korral $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau$;

3° kogum τ sisaldab kõikvõimalikud oma hulkade ühendid, s.t. mis tahes alamkogumi $\mathcal{E} \subset \tau$ korral $\bigcup_{A \in \mathcal{E}} A \in \tau$.

Seejuures paari (X, τ) nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks.* Kui topoloogia τ roll on kontekstist selge (või see ei vaja täpsustamist), siis öeldakse ka lihtsalt, et X on topoloogiline ruum. Kogumi τ hulki nimetatakse *lahtisteks hulkadeks* (ruumis X või topoloogias τ). Kogumi τ hulkade täiendeid nimetatakse *kinnisteks hulkadeks* (ruumis X või topoloogias τ).

Näide 1.1. Hulga X kõigi alamhulkade kogum $\mathcal{P}(X)$ ja kogum $\{\emptyset, X\}$ on topoloogiad hulgal X. Neid topoloogiaid nimetatakse vastavalt *diskreetseks* topoloogiaks ja *triviaalseks* (või ka *indiskreetseks*) topoloogiaks.

Definitsioon 1.2. Olgu τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X. Öeldakse, et topoloogia τ_1 on *tugevam* kui topoloogia τ_2 (või et topoloogia τ_2 on *nõrgem* kui topoloogia τ_1), kui $\tau_1 \supset \tau_2$.

Vahetult eelnevast definitsioonist on selge, et *diskreetne topoloogia ja triviaalne topoloogia antud hulgal on vastavalt tugevaim ja nõrgim topoloogia sellel hulgal.*

Näide 1.2. Meetrilise ruumi (X, d) lahtiste hulkade kogum on topoloogia (ruumil X). Seda topoloogiat nimetatakse *meetrika d poolt indutseeritud topoloogiaks.*

Niisiis, *hulk meetrilises ruumis on lahtine parajasti siis, kui ta on lahtine selle ruumi meetrika poolt indutseeritud topoloogias; hulk meetrilises ruumis on kinnine parajasti siis, kui ta on kinnine selle ruumi meetrika poolt indutseeritud topoloogias.*

Diskreetne topoloogia hulgal X on indutseeritud diskreetse meetrika d poolt (PÕHJENDADA!), kus

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq y; \\ 0, & \text{kui } x = y, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$

Kui hulgas X on vähemalt kaks elementi, siis ei leidu niisugust meetrikat hulgas X, mis indutseeriks triviaalse topoloogia $\{\emptyset, X\}$ (PÕHJENDADA!). Niisiis, *mitte iga topoloogia pole indutseeritud mingi meetrika poolt.*

Näide 1.3. Olgu (X,τ) topoloogiline ruum ning olgu $Y \subset X$. Siis kogum

$$\{U \cap Y : U \in \tau\}$$

on topoloogia hulgal Y. Seda topoloogiat nimetatakse *suhteliseks* (ehk *relatiivseks*) *τ-topoloogiaks* (hulgal Y).

Näide 1.4. Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ (s.t. $\mathcal{E}$ on mingi hulga X alamhulkade kogum). Nõrgimat topoloogiat (s.t. vähimat topoloogiat) hulgal X, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$, nimetatakse kogumi $\mathcal{E}$ poolt *genereeritud* topoloogiaks ja tähistatakse sümboliga $\tau(\mathcal{E})$. Pole raske näha, et

$$\tau(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\tau \text{ on topoloogia} \\ \text{hulgal } X, \\ \tau \supset \mathcal{E}}} \tau \qquad \text{(PÕHJENDADA!)}.$$

1.2. Punkti ümbrused topoloogilises ruumis

Olgu (X,τ) topoloogiline ruum ning olgu $x \in X$.

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et hulk $N \subset X$ on punkti x *ümbrus* (topoloogias τ), kui leidub hulk $U \in \tau$ nii, et $x \in U \subset N$.

Kui punkti x mingi ümbruse puhul vajab topoloogia τ roll kontekstis täpsustamist/rõhutamist, siis viidatakse sellele ümbrusele, kui punkti x τ-ümbrusele.

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et punkti x ümbruste kogum $\mathcal{N}$ on punkti x *ümbruste baas* (ehk topoloogia τ *lokaalne baas* punktis x), kui punkti x mis tahes ümbruse U korral leidub hulk $N \in \mathcal{N}$ nii, et $x \in N \subset U$.

1.3. Topoloogia baas

Definitsioon 1.5. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Öeldakse, et kogum $\mathfrak{B} \subset \tau$ on *topoloogia τ baas,* kui iga kogumi τ hulk (s.t. iga lahtine hulk ruumis X) esitub mingi kogumi $\mathfrak{B}$ hulkade ühendina.

Lause 1.1. *Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ning olgu $\mathfrak{B} \subset \tau$. Siis kogum $\mathfrak{B}$ on topoloogia τ baas parajasti siis, kui iga punkti $x \in X$ korral sisaldab kogum $\mathfrak{B}$ mingi selle punkti ümbruste baasi.*

TÕESTUS. BLA-BLA-BLA... □

Teoreem 1.2. *Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathfrak{B}$ mingi hulga X alamhulkade kogum. Siis $\mathfrak{B}$ on baas mingile topoloogiale hulgal X parajasti siis, kui on kehtivad järgmised kaks tingimust:*

(1) *iga $x \in X$ korral leidub $W \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in W$;*

(2) *mis tahes $U, V \in \mathfrak{B}$ ja $x \in U \cap V$ korral leidub $W \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in W \subset U \cap V$.*

Seejuures kõnealune topoloogia on

$$\tau := \{U \subset X \colon \text{iga } x \in U \text{ korral leidub } W \in \mathfrak{B} \text{ nii, et } x \in W \subset U\},$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* BLA-BLA-BLA...

Piisavus. BLA-BLA-BLA... □

Lause 1.3. *Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathcal{E}$ mingi hulga X alamhulkade kogum. Siis*

(a) *kogumi $\mathcal{E}$ hulkade lõplikud ühisosad (koos hulgaga X) moodustavad kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud topoloogia $\tau(\mathcal{E})$ baasi;*

(b) *kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud topoloogia $\tau(\mathcal{E})$ koosneb tühjast hulgast, hulgast X ja kogumi $\mathcal{E}$ hulkade lõplike ühisosade ühenditest.*

TÕESTUS. BLA-BLA-BLA... □

1.4. Pere koonduvus topoloogilises ruumis

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et seos $\preccurlyeq$ hulgas I on *eeljärjestus,* kui

1° $\preccurlyeq$ on *refleksiivne,* s.t. mis tahes $\alpha \in I$ korral

$$\alpha \preccurlyeq \alpha;$$

2° $\preccurlyeq$ on *transitiivne,* s.t. mis tahes $\alpha, \beta, \gamma \in I$ korral

$$\alpha \preccurlyeq \beta,\ \beta \preccurlyeq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha \preccurlyeq \gamma.$$

Seejuures paari $(I, \preccurlyeq)$ nimetatakse *eeljärjestatud hulgaks.* Kui eeljärjestuse $\preccurlyeq$ roll on kontekstist selge (või see ei vaja täpsustamist), siis öeldakse ka lihtsalt, et I on eeljärjestatud hulk.

Kirjutades $\beta \succcurlyeq \alpha$, mõistetakse selle all, et $\alpha \preccurlyeq \beta$. Valemeid $\alpha \preccurlyeq \beta$ ja $\beta \succcurlyeq \alpha$ loetakse "element α eelneb elemendile β" või "element β järgneb elemendile α".

Kui lisaks tingimustele 1° ja 2°

3° $\preccurlyeq$ on *antisümmeetriline,* s.t. mis tahes $\alpha, \beta \in I$ korral

$$\alpha \preccurlyeq \beta,\ \beta \preccurlyeq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta,$$

siis eeljärjestust $\preccurlyeq$ nimetatakse *osaliseks järjestuseks* ning öeldakse, et paar $(I, \preccurlyeq)$ (või lihtsalt hulk I) on *osaliselt järjestatud hulk.*

Definitsioon 1.7. Öeldakse, et eeljärjestatud hulk $(I, \preccurlyeq)$ on *suunatud hulk,* kui

4° mis tahes $\alpha, \beta \in I$ korral leidub $\gamma \in I$ nii, et

$$\alpha \preccurlyeq \gamma \quad \text{ja} \quad \beta \preccurlyeq \gamma.$$

Definitsioon 1.8. Olgu I suunatud hulk ning olgu X topoloogiline ruum. Kujutusi $I \to X$ nimetatakse *suunatud peredeks* või lihtsalt *peredeks* ruumis X (või ruumi X elementide peredeks). Pere $I \ni \alpha \mapsto x_\alpha \in X$ märgitakse sümboliga $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ või $(x_\alpha)_\alpha$ või lihtsalt (x_α). Elemente x_α nimetatakse selle pere *liikmeteks,* elementidele $\alpha \in I$ viidatakse kui *indeksitele.*

Näide 1.5. Jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ meetrilises ruumis X on pere $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$, kus naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ on varustatud loomuliku järjestusega $\leq$.

Definitsioon 1.9. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum, olgu $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ pere ruumis X ning olgu $x \in X$. Öeldakse, et pere (x_α) koondub elemendiks x (ruumis X või topoloogias τ) ja kirjutatakse

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in I]{\tau} x, \qquad x_\alpha \underset{\alpha}{\overset{\tau}{\to}} x \qquad \text{või} \qquad x_\alpha \overset{\tau}{\to} x$$

või lihtsalt

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in I]{} x, \qquad x_\alpha \underset{\alpha}{\to} x \qquad \text{või} \qquad x_\alpha \to x,$$

kui punkti x iga ümbruse U korral leidub indeks $\alpha_0 \in I$ nii, et

$$\alpha \in I,\ \alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha \in U.$$

Näide 1.6. On lihtne veenduda, et *jada meetrilises ruumis koondub parajasti siis, kui see jada koondub tõlgendatuna loomulikul viisil* (s.t. näites 1.5 kirjeldatud viisil) *perena,* ning et *seejuures on nendel jadal ja perel üks ja sama piirväärtus.*

Rõhutame, et *pere piirväärtus topoloogilises ruumis ei ole üldjuhul üheselt määratud* (erinevalt jada piirväärtusest meetrilises ruumis) – koonduval perel topoloogilises ruumis võib üldjuhul leiduda rohkem kui üks piirväärtus. Tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et antud topoloogilises ruumis leiduks igal koonduval perel täpselt üks piirväärtus, anname jaotises 1.7 (vt lauset 1.11).

1.5. Hulga sisemus, raja ja sulund topoloogilises ruumis.

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ning olgu $A \subset X$.

Definitsioon 1.10. Suurimat hulgas A sisalduvat lahtist hulka ruumis X nimetatakse hulga A *sisemuseks* (topoloogias τ) ja tähistatakse sümboliga A° või $\operatorname{int} A$.

Vähimat hulka A sisaldavat kinnist hulka ruumis X nimetatakse hulga A *sulundiks* (topoloogias τ) ja tähistatakse sümboliga $\overline{A}$ või $\operatorname{cl} A$.

Märgime, et niisugused suurim lahtine hulk ja vähim kinnine hulk on olemas: ilmselt

$$A^\circ = \bigcup_{A \supset U \in \tau} U \qquad \text{ja} \qquad \overline{A} = \bigcap_{A \subset F \in \mathcal{F}} F \qquad \text{(PÕHJENDADA!)},$$

kus $\mathcal{F}$ tähistab ruumi X kõigi kinniste alamhulkade kogumit.

Definitsioon 1.11. Vahet $\overline{A} \setminus A^\circ$ nimetatakse hulga A *rajaks* (topoloogias τ) ja tähistatakse sümboliga ∂A.

Kui topoloogia τ roll vajab kontekstis täpsustamist, tähistatakse hulga A sisemust, sulundit ja raja topoloogias τ vastavalt sümbolitega $\operatorname{int}_\tau A$, $\overline{A}^\tau$ või $\operatorname{cl}_\tau A$ ja $\partial_\tau A$.

Definitsioon 1.12. Sisemuse A° punkte nimetatakse hulga A *sisepunktideks.* Raja ∂A punkte nimetatakse hulga A *rajapuktideks.*

Järgnevad laused 1.4–1.6 kirjeldavad vastavalt hulga sisepunkte, sulundi punkte ja rajapunkte.

Lause 1.4. *Olgu $x \in X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $x \in A^\circ$*;*

(ii) *punktil x leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas A.*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.1. Tõestada lause 1.4.

□

Lause 1.5. *Olgu $x \in X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $x \in \overline{A}$*;*

(ii) *punkti x iga ümbrus sisaldab hulga A punkte;*

(iii) *leidub hulga A elementide pere, mis koondub punktiks x.*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.2. Tõestada lause 1.5.

□

Lause 1.6. *Olgu $x \in X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$x \in \partial A$;*

(ii) *punkti x iga ümbrus sisaldab nii hulga A punkte kui ka hulka A mittekuuluvaid punkte.*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.3. Tõestada lause 1.6.

□

1.6. Pidevad kujutused topoloogilistes ruumides

Olgu (X, τ_1) ja (Y, τ_2) topoloogilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$.

Definitsioon 1.13. Öeldakse, et kujutus f on *pidev,* kui

$$f^{-1}(V) \in \tau_1 \quad \text{iga } V \in \tau_2 \text{ korral}$$

(s.t. ruumi Y lahtiste hulkade originaalid kujutuse f suhtes on lahtised hulgad ruumis X).

Definitsioon 1.14. Olgu $x \in X$. Öeldakse, et kujutus f on *pidev* punktis x, kui punkti $f(x)$ iga ümbruse V korral leidub punkti x ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$.

Teisissõnu, kujutus f on pidev punktis x parajasti siis, kui punkti $f(x)$ mis tahes ümbruse V originaal $f^{-1}(V)$ on punkti x ümbrus (PÕHJENDADA!).

Kui topoloogiate τ_1 ja τ_2 roll vajab kontekstis täpsustamist, siis kõneldakse pidevuse asemel *τ_1-τ_2-pidevusest.*

Lause 1.7. *Kujutus f on pidev parajasti siis, kui ta on pidev igas ruumi X punktis.*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.4. Tõestada lause 1.7.

□

Lause 1.8. *Olgu $x \in X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *kujutus f on pidev punktis x;*

(ii) *mis tahes punktiks x koonduva pere (x_α) korral ruumis X koondub vastav kujutuse f väärtuste pere $\big(f(x_\alpha)\big)$ väärtuseks $f(x)$ ruumis Y, s.t.*

$$x_\alpha \underset{\alpha}{\to} x \text{ ruumis } X \quad \Longrightarrow \quad f(x_\alpha) \underset{\alpha}{\to} f(x) \text{ ruumis } Y.$$

TÕESTUS.

Ülesanne 1.5. Tõestada lause 1.8.

□

Lause 1.9. *Olgu topoloogia τ_2 (hulgal Y) genereeritud hulga Y alamhulkade kogumi $\mathcal{E}$ poolt. Siis kujutus f on pidev parajasti siis, kui $f^{-1}(E) \in \tau_1$ iga $E \in \mathcal{E}$ korral (s.t. parajasti siis, kui kogumi $\mathcal{E}$ hulkade originaalid kujutuse f suhtes on lahtised).*

Tõestus. BLA-BLA-BLA... □

Definitsioon 1.15. Kui kujutus f on pööratav, kusjuures nii f ise kui ka tema pöördkujutus on pidevad, siis öeldakse, et f on *homöomorfism.*

Kui leidub homöomorfism $X \to Y$, siis öeldakse, et ruumid X ja Y on *homöomorfsed* (või et ruum X on *homöomorfne* ruumiga Y või et ruum Y on homöomorfne ruumiga X).

1.7. Topoloogiliste ruumide eralduvusaksioomid

Definitsioon 1.16. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on

- *T_0-ruum,* kui mis tahes kahe erineva punkti $x, y \in X$ korral leidub hulk $U \in \tau$ nii, et
$$x \in U \text{ ja } y \notin U \qquad \text{või} \qquad y \in U \text{ ja } x \notin U;$$
- *T_1-ruum,* kui mis tahes kahe erineva punkti $x, y \in X$ korral leidub hulk $U \in \tau$ nii, et
$$x \in U \text{ ja } y \notin U;$$
- *T_2-ruum* ehk *Hausdorffi* ruum, kui mis tahes kahe erineva punkti $x, y \in X$ korral leiduvad hulgad $U, V \in \tau$ nii, et
$$x \in U,\ y \in V \text{ ja } U \cap V = \emptyset;$$

On ilmne, et iga T_1-ruum on T_0-ruum ning et iga T_2-ruum on T_1-ruum.

NB! Või "ühepunktine"?

Lause 1.10. *Topoloogiline ruum on T_1-ruum parajasti siis, kui temas iga ühepunktiline hulk on kinnine.*

Tõestus. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Tarvilikkus. Olgu ruum X T_1-ruum ning olgu $x \in X$. Siis iga $y \in X \setminus \{x\}$ korral leidub $U_y \in \tau$ nii, et $y \in U_y$, kuid $x \notin U_y$. Aga nüüd $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y \in \tau$, seega $\{x\}$ on kinnine hulk.

Piisavus. Kui iga ühepunktiline hulk ruumis X on kinnine ning $x, y \in X$, $x \neq y$, siis $x \in X \setminus \{y\} =: U \in \tau$, kusjuures $y \notin U$, seega X on T_1-ruum. □

Lause 1.11. *Topoloogiline ruum on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui igal tema elementide perel on ülimalt üks piirväärtus.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et topoloogiline ruum X on Hausdorffi ruum. Oletame vastuväiteliselt, et mingil ruumi X elementide perel $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ on rohkem kui üks piirväärtus. Sel juhul mingite kahe erineva $x, y \in X$ korral $x_\alpha \to x$ ja $x_\alpha \to y$. Kuna X on Hausdorffi ruum, siis leiduvad lõikumatud lahtised hulgad $U, V \subset X$ nii, et $x \in U$ ja $y \in V$. Kuna $x_\alpha \to x$ ja $x_\alpha \to y$, siis leiduvad indeksid $\alpha_U, \alpha_V \in I$ nii, et
$$\alpha \in I,\ \alpha \succcurlyeq \alpha_U \implies x_\alpha \in U \qquad \text{ja} \qquad \alpha \in I,\ \alpha \succcurlyeq \alpha_V \implies x_\alpha \in V.$$
Hulga I suunatuse tõttu leidub indeks $\alpha \in I$ nii, et $\alpha \succcurlyeq \alpha_U$ ja $\alpha \succcurlyeq \alpha_V$. Nüüd $x_\alpha \in U \cap V$, mis on vastuolus hulkade U ja V lõikumatusega.

Piisavus. BLA-BLA-BLA... □

Definitsioon 1.17. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on

- *regulaarne,* kui mis tahes kinnise hulga $F \subset X$ ja punkti $x \in X \setminus F$ korral leiduvad hulgad $U, V \in \tau$ nii, et
$$x \in U,\ F \subset V \text{ ja } U \cap V = \emptyset;$$
- *täielikult regulaarne,* kui kinnise hulga $F \subset X$ ja punkti $x \in X \setminus F$ korral leidub pidev funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ (siin vaatleme hulka $\mathbb{R}$ varustatuna loomuliku meetrika poolt indutseeritud topoloogiaga), mille väärtused sisalduvad lõigus $[0,1]$ ning $f(x) = 1$ ja $f|_F = 0$.
- *normaalne,* kui mis tahes lõikumatute kinniste hulkade $F, H \subset X$ korral leiduvad hulgad $U, V \in \tau$ nii, et
$$F \subset U,\ H \subset V \text{ ja } U \cap V = \emptyset.$$

Märkus 1.1. Mõned allikad nõuavad regulaarsetelt, täielikult regulaarsetelt ja normaalsetelt ruumidelt täiendavalt, et need ruumid oleksid T_1-ruumid.

Iga täielikult regulaarne ruum on regulaarne, sest kui f on funktsioon täielikult regulaarse ruumi definitsioonist, siis hulgad

$$U := \left\{z \in X\colon f(z) > \frac{1}{2}\right\} \quad \text{ja} \quad V := \left\{z \in X\colon f(z) < \frac{1}{2}\right\}$$

on lahtised (PÕHJENDADA!), kusjuures $x \in U$, $F \subset V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Normaalne ruum ei tarvitse üldjuhul olla regulaarne.

Näide 1.7. Kaheelemendilist hulka $\{a, b\}$, mis on varustatud topoloogiaga $\big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\big\}$, nimetatakse *Sierpinski ruumiks.* Sierpinski ruum on normaalne, kui mitte regulaarne.

Definitsioon 1.18. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on

- T_3*-ruum,* kui ta on regulaarne T_1-ruum;
- $T_{3\frac{1}{2}}$*-ruum* ehk *Tihhonovi ruum,* kui ta on täielikult regulaarne T_1-ruum;
- T_4*-ruum,* kui ta on normaalne T_1-ruum.

Kui mingi $i \in \big\{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\big\}$ korral (X, τ) on T_i-ruum, siis öeldakse ka, et topoloogia τ on T_i.

Lausest 1.10 järeldub, et iga T_3-ruum on T_2-ruum; samuti, et iga T_4-ruum on T_3-ruum. Kuna iga täielikult regulaarne ruum on regulaarne, siis iga $T_{3\frac{1}{2}}$-ruum on T_3-ruum. Iga T_4-ruum on $T_{3\frac{1}{2}}$-ruum – see fakt järeldub järgnevast *Urõsoni lemmast.*

Teoreem 1.12 (Urõsoni lemma)**.** *Olgu X normaalne topoloogiline ruum ning olgu $F, H \subset X$ lõikumatud kinnised alamhulgad. Siis leidub pidev funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ (siin vaatleme hulka $\mathbb{R}$ varustatuna loomuliku meetrika poolt indutseeritud topoloogiaga), mille väärtused sisalduvad lõigus $[0,1]$ ning $f|_F = 1$ ja $f|_H = 0$.*

TÕESTUS. SEE TULEMUS ON TÕESTATAKSE ÜLDISE TOPOLOOGIA KURSUSES. $\square$

1.8. Kujutuste hulga poolt indutseeritud nõrk topoloogia

Olgu X mittetühi hulk ning olgu iga $i \in J$ korral (X_i, τ_i) topoloogiline ruum ja $f_i \colon X \to X_i$, kus J on mingi mittetühi hulk (mille elementidele viitame kui *indeksitele* ning millel me ei eelda mitte mingisuguse struktuuri olemasolu).

Definitsioon 1.19. Nõrgimat topoloogiat (s.t. vähimat topoloogiat) hulgal X, mille suhtes iga kujutus f_i, kus $i \in J$, on pidev, nimetatakse hulga $\{f_j \colon j \in J\}$ poolt *indutseeritud (nõrgaks) topoloogiaks.*

Märgime, et selline nõrgim topoloogia eksisteerib: selleks on (hulga X alamhulkade) kogumi

$$\left\{f_i^{-1}(U) \colon i \in J,\, U \in \tau_i\right\}$$

poolt genereeritud topoloogia (hulgal X) (vt. näidet 1.4) (PÕHJENDADA!).

1.9. Topoloogiliste ruumide korrutisruum

Olgu J mingi mittetühi hulk (mille elementidele viitame kui indeksitele ning millel me ei eelda mitte mingisuguse struktuuri olemasolu) ning olgu iga $i \in J$ korral X_i mittetühi hulk.

Meenutame, et hulkade X_i otsekorrutis $\prod_{i\in J} X_i$ on defineeritud võrdusega

$$\prod_{i\in J} X_i := \left\{ f \colon J \to \bigcup_{i\in J} X_i \;\middle|\; f(i) \in X_i \text{ iga } i \in J \text{ korral} \right\}$$

(s.t. otsekorrutis $\prod_{i\in J} X_i$ on kõigi niisuguste kujutuste $f \colon J \to \bigcup_{i\in J} X_i$ hulk, mille puhul $f(i) \in X_i$ iga $i \in J$ korral); seejuures kujutuse $J \ni i \mapsto x_i$ märkimiseks kasutatakse sümbolit $(x_i)_{i\in J}$.

Otsekorrutisel $\prod_{i\in J} X_i$ on iga indeksi $\beta \in J$ korral defineeritud *koordinaatfunktsioon*

$$\pi_\beta \colon \prod_{i\in J} X_i \ni (x_i)_{i\in J} \longmapsto x_\beta \in X_\beta.$$

Eeldame nüüd täiendavalt, et iga $i \in J$ korral on (X_i, τ_i) topoloogiline ruum.

Definitsioon 1.20.

§ 2. Topoloogilised vektorruumid

Kõikjal edaspidises, kõneldes vektorruumist, peame silmas, et tegemist on vektorruumiga üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K}$ on reaalarvude korpus $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpus $\mathbb{C}$ – ükskõik kumb neist kahest korpusest, välja arvatud, muidugi, juhul, kui (kon)tekstis pole sedastatud teisiti.

Definitsioon 2.1. Olgu X vektorruum ning olgu τ topoloogia ruumil X. Öeldakse, et paar (X, τ) on *topoloogiline vektorruum,* kui vektorruumi tehted

$$X \times X \ni (x, y) \longmapsto x + y \in X \quad \text{ja} \quad \mathbb{K} \times X \ni (a, x) \longmapsto ax \in X$$

on pidevad. (Siin vaatleme hulka X varustatuna topoloogiaga τ ning hulka $\mathbb{K}$ loomuliku kauguse poolt indutseeritud topoloogiaga ning korrutishulki $X \times X$ ja $\mathbb{K} \times X$ vastavate korrutistopoloogiatega.) Kui seejuures topoloogia τ roll on kontekstist selge (või see ei vaja täpsustamist), siis öeldakse ka lihtsalt, et X on topoloogiline vektorruum.