Sisukord

I peatükk.
Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

§ 1. Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

1.1. m-mõõtmelise eukleidilise ruumi mõiste

Olgu $m \in \mathbb{N}$. Tähistame

$$\mathbb{R}^m := \{(x_1, \ldots, x_m) \colon\ x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

(hulga $\mathbb{R}^m$ elemendid on niisiis kõikvõimalikud reaalarvuliste komponentidega m-komponendilised järjendid). Hulga $\mathbb{R}^m$ elemente nimetame *punktideks.* Me kasutame tähistust $(x_i)_{i=1}^m := (x_1, \ldots, x_m)$. Arvusid $x_1, \ldots, x_m$ nimetame selle punkti *koordinaatideks.*

Kõneldes edaspidi *tasandist* või lihtsalt *ruumist,* mõistame me selle all vastavalt ruumi $\mathbb{R}^2$ või $\mathbb{R}^3$: tasandi (ja ruumi) igale punktile vastavad (fikseeritud ristkoordinaadistiku puhul) tema üheselt määratud koordinaadid; teiselt poolt, iga tasandi (ja ruumi) punkt on üheselt määratud oma koordinaatidega.

Punktide $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $Q = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ vaheline *kaugus* $d(P, Q)$ defineeritakse võrdusega

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i|^2}. \tag{1.1}$$

Hulka $\mathbb{R}^m$ koos temas valemiga (1.1) defineeritud kaugusega nimetatakse *m-mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks* $\mathbb{R}^m$.

Valemi (1.1) poolt antud kaugus ruumides $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ langeb kokku nn. loomuliku kaugusega nendes ruumides: nendes ruumides tuleb punktide P ja Q vaheline valemist (1.1) rehkendatav kaugus $d(P, Q)$ sama, mis lõigu PQ pikkus (rehkendatuna välja elementaargeomeetrilistele argumentidele tuginedes).

Tõepoolest, juhul $m = 1$, tähistades $P = (x) =: x$ ja $Q = (y) =: y$,

$$d(P,Q) = |y - x|;$$

juhul $m = 2$, tähistades $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$,

$$d(P,Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

(selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu PQ pikkus); juhul $m = 3$, tähistades $P=(x_1,y_1,z_1)$ ja $Q=(x_2,y_2,z_2)$,

$$d(P,Q)=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2}$$

(ka selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu PQ pikkus).

Loetleme kauguse olulisemad omadused: mis tahes $P,Q,R\in\mathbb{R}^m$ korral

1° $d(P,Q)=0 \iff P=Q$;

2° $d(P,Q)=d(Q,P)$;

3° $d(P,Q)\leqslant d(P,R)+d(R,Q)$.

Omadusi 1°–3° nimetatakse *kauguse aksioomideks.* Aksioom 3° väidab sisuliselt, et kolmnurga ühegi külje pikkus ei ületa ülejäänud kahe külje pikkuste summat. Seepärast nimetatakse aksioomi 3° *kolmnurga võrratuseks.* Aksioomid 1° ja 2° järelduvad vahetult kauguse definitsioonist. Kolmnurga võrratust on kõige lihtsam järeldada *Minkowski võrratusest* (vt. arutelu järgmises punktis teoreemi 1.1 järel), kuid see on tõestatav ka vahetult, nagu me seda järgnevalt teeme.

Kolmnurga võrratuse 3° tõestus. Olgu $P=(x_1,\dots,x_m)$, $Q=(y_1,\dots,y_m)$, $R=(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{R}^m$. Kolmnurga võrratuse tõestuseks peame näitama, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m|y_i-x_i|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m|y_i-z_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^m|z_i-x_i|^2},$$

milleks, arvestades, et $\sqrt{\sum_{i=1}^m|y_i-x_i|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m\big(|y_i-z_i|+|z_i-x_i|\big)^2}$, piisab näidata, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m\big(|y_i-z_i|+|z_i-x_i|\big)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m|y_i-z_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^m|z_i-x_i|^2}$$

ehk, tähistades iga $i\in\{1,\dots,m\}$ korral $a_i:=|y_i-z_i|$ ja $b_i:=|z_i-x_i|$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

ehk (tõstes selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\sum_{i=1}^m(a_i+b_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^m a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}+\sum_{i=1}^m b_i^2$$

ehk, arvestades, et $\sum_{i=1}^m(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^m a_i^2+2\sum_{i=1}^m a_i\,b_i+\sum_{i=1}^m b_i^2$,

$$\sum_{i=1}^m a_i\,b_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}\tag{1.2}$$

ehk (tõstes jällegi selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\, b_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\Big). \tag{1.3}$$

Kuna

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\, b_i\Big)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\, b_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} a_j\, b_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i\, b_i\, a_j\, b_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i^2\, b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} a_i\, b_i\, a_j\, b_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{m} a_i\, b_i\, a_j\, b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i^2\, b_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} a_i\, b_i\, a_j\, b_j\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\Big) &= \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} b_j^2\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^2\, b_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i^2\, b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} a_i^2\, b_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{m} a_i^2\, b_j^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i^2\, b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} (a_i^2\, b_j^2 + a_j^2\, b_i^2),\end{aligned}$$

siis võrratus (1.3) on samaväärne võrratusega

$$2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} a_i\, b_i\, a_j\, b_j \leqslant \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} (a_i^2\, b_j^2 + a_j^2\, b_i^2),$$

mis kehtib, sest mis tahes $i, j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$a_i^2\, b_j^2 + a_j^2\, b_i^2 - 2a_i\, b_i\, a_j\, b_j = (a_i\, b_j - a_j\, b_i)^2 \geqslant 0.$$

□

Märkus 1.1. Võrratust (1.2) (mis kehtib mis tahes $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \geqslant 0$ korral), nimetatakse *Cauchy võrratuseks.*

Ülesanne 1.1. Tõestada *tagurpidi kolmnurga võrratus:* mis tahes $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ korral

$$d(P,Q) \geqslant \big|d(P,R) - d(Q,R)\big|.$$

Tagurpidi kolmnurga võrratus väidab sisuliselt, et kolmnurga kahe külje pikkuste vahe ei ületa kolmanda külje pikkust.

Näpunäide. Kasutada kauguse aksioome 2° ja 3°.

1.2. Minkowski võrratus

Kõige lihtsam moodus kauguse kolmnurga aksioomi tõestuseks on järeldada ta *Minkowski võrratusest.*

Teoreem 1.1 (Minkowski võrratus). *Olgu* $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \geqslant 0$ *ning olgu* $p > 1$ *(*$a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ *ja* p *on reaalarvud). Siis*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

Minkowski võrratusest järeldub kauguse kolmnurga aksioom: mis tahes $P = (x_1, \ldots, x_m)$, $Q = (y_1, \ldots, y_m)$, $R = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ korral, võttes Minkowski võrratuses $p = 2$, $a_i = |y_i - z_i|$ ja $b_i = |z_i - x_i|$, saame

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \big(|y_i - z_i| + |z_i - x_i|\big)^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |z_i - x_i|^2} = d(P,R) + d(R,Q). \end{aligned}$$

Minkowski võrratust on mugav järeldada *Rogers–Hölderi võrratusest.*

Teoreem 1.2 (Rogers–Hölderi võrratus). *Olgu* $p, q \in (1, \infty)$ *kaaseksponendid, s.t.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Mis tahes reaalarvude* $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \geqslant 0$ *korral*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

Märkus 1.2. Cauchy võrratus (1.2) on erijuht Rogers–Hölderi võrratusest (1.5), kus $p = q = 2$.

Rogers–Hölderi võrratust, omakorda, on mugav järeldada *Youngi võrratusest.*

Teoreem 1.3 (Youngi võrratus). *Olgu* $p, q \in (1, \infty)$ *kaaseksponendid, s.t.,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Mis tahes reaalarvude* $a, b \geqslant 0$ *korral*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{1.6}$$

Märkus 1.3. Youngi võrratus formuleeritakse sageli järgneval (lausega 1.3 samaväärsel) kujul: *kui* $p, q \in (1, \infty)$ *on kaaseksponendid, siis mis tahes reaalarvude* $a, b \geqslant 0$ *korral*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Minkowski võrratuse tõestus. Olgu $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \geqslant 0$. Kuna mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)(a_i + b_i)^{p-1} = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1},$$

siis Rogers–Hölderi võrratuse põhjal, valides $q \in (1, \infty)$ selliselt, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (siis $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ ja $q(p-1) = p$),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^{m} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{m} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Kui $a_1 = \cdots = a_m = 0$, siis võrratuse (1.4) kehtivus on ilmne. Kui mingi $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $a_i > 0$, siis järeldub eelnevast võrratuste-võrdusteahelast, et

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

mis, arvestades, et $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, on samaväärne võrratusega (1.4). □

ROGERS–HÖLDERI VÕRRATUSE TÕESTUS. Kui $a_1 = \cdots = a_m = 0$ või $b_1 = \cdots = b_m = 0$, siis on võrratuse (1.5) kehtivus ilmne. (Õigupoolest kehtib niisugusel juhul selles mitteranges võrratuses võrdus.) Vaatleme nüüd juhtu, kus vähemalt üks arvudest $a_1, \ldots, a_m$ ja vähemalt üks arvudest $b_1, \ldots, b_m$ erinevad nullist. Siis iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral, võttes Youngi võrratuses (1.6)

$$a = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^m a_k^p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^m b_k^q},$$

saame

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{k=1}^m a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{a_i^p}{p\sum_{k=1}^m a_k^p} + \frac{b_i^q}{q\sum_{k=1}^m b_k^q}.$$

Seega

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{k=1}^m a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^m a_i^p}{p\sum_{k=1}^m a_k^p} + \frac{\sum_{i=1}^m b_i^q}{q\sum_{k=1}^m b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

millest järeldub võrratus (1.5). □

YOUNGI VÕRRATUSE TÕESTUS. Olgu $a, b \geqslant 0$. Kui $b = 0$, siis võrratus (1.6) ilmselt kehtib; seega võime järgnevas eeldada, et $b > 0$. Tähistades $\lambda := \frac{1}{p}$, omandab võrratus (1.6) kuju

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1 - \lambda) b$$

ehk (jagades selle võrratuse mõlemad pooled läbi arvuga b)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda \leqslant \lambda \frac{a}{b} + 1 - \lambda.$$

Tähistades $t := \frac{a}{b}$, piisab Youngi võrratuse tõestuseks niisiis näidata, et iga $t \in (0, \infty)$ korral

$$t^\lambda - \lambda t \leqslant 1 - \lambda.$$

Selleks vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = t^\lambda - \lambda t$. Kuna

$$\varphi'(t) = \lambda t^{\lambda-1} - \lambda = \lambda(t^{\lambda-1} - 1),$$

siis $\varphi'(t) > 0$, kui $t \in (0, 1)$, ning $\varphi'(t) < 0$, kui $t \in (1, \infty)$. Niisiis, $\varphi(1)$ on funktsiooni φ maksimaalne väärtus intervallis $(0, \infty)$; seega iga $t \in (0, \infty)$ korral

$$t^\lambda - \lambda t \leqslant \varphi(1) = 1 - \lambda,$$

nagu soovitud. □

Ülesanne 1.2. Tõestada, et

(a) Rogers–Hölderi võrratuses (1.5) kehtib võrdus parajasti siis, kui leidub arv $\xi \in \mathbb{R}$ nii, et $b_i^q = \xi\, a_i^p$ iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral või $a_i^p = \xi\, b_i^q$ iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral;

(b) Minkowski võrratuses (1.4) kehtib võrdus parajasti siis, kui leidub arv $\eta \in \mathbb{R}$ nii, et $b_i = \eta\, a_i^p$ iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral või $a_i = \eta\, b_i^p$ iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral.

1.3. Kerad ja risttahukad. Punkti ümbrused

Definitsioon 1.1. Olgu $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $r > 0$.

Hulka
$$B(P_0, r) := \{P \in \mathbb{R}^m \colon\ d(P, P_0) < r\}$$
(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide P hulka, mille kaugus punktist P_0 on väiksem kui r) nimetatakse *lahtiseks keraks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Hulka
$$\overline{B}(P_0, r) := \{P \in \mathbb{R}^m \colon\ d(P, P_0) \leqslant r\}$$
(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide P hulka, mille kaugus punktist P_0 ei ületa arvu r) nimetatakse *kinniseks keraks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Hulka
$$S(P_0, r) := \{P \in \mathbb{R}^m \colon\ d(P, P_0) = r\}$$
(s.t. niisuguste ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide P hulka, mis asuvad punktist P_0 kaugusel r) nimetatakse *sfääriks* (ruumis $\mathbb{R}^m$) keskpunktiga P_0 ja raadiusega r.

Juhul $m = 1$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, on lahtine kera ja kinnine kera vastavalt vahemik ja lõik: tähistades $P_0 = (x_0) =: x_0$,
$$B(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r),$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - x_0| \leqslant r\} = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$
Juhul $m = 2$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^2$, on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine ring, kinnine ring ja ringjoon: tähistades $P_0 = (x_0, y_0)$,
$$B(P_0, r) = \{(x, y) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < r^2\},$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \{(x, y) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leqslant r^2\},$$
$$S(P_0, r) = \{(x, y) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = r^2\}.$$
Juhul $m = 3$, s.t. ruumis $\mathbb{R}^3$, on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine kera, kinnine kera ja kerapind (ehk sfäär) selles tähenduses, nagu me neid tunneme analüütilisest geomeetriast: tähistades $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,
$$B(P_0, r) = \{(x, y, z) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 < r^2\},$$
$$\overline{B}(P_0, r) = \{(x, y, z) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 \leqslant r^2\},$$
$$S(P_0, r) = \{(x, y, z) \colon\ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 = r^2\}.$$

Definitsioon 1.2. Lahtist kera $B(P_0, \varepsilon)$ ruumis $\mathbb{R}^m$ nimetatakse punkti P_0 *ε-ümbruseks* ja tähistatakse ka sümboliga $U_\varepsilon(P_0)$.

Mis tahes hulka ruumis $\mathbb{R}^m$, mis sisaldab punkti P_0 mingi ε-ümbruse, nimetatakse punkti P_0 *ümbruseks.*

Definitsioon 1.3. Olgu $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, m$. Hulka
$$\begin{aligned}(a_1, b_1) \times \dots \times (a_m, b_m) &= \{(x_1, \dots, x_m) \colon\ x_i \in (a_i, b_i),\ i = 1, \dots, m\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) \colon\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \dots, m\}\end{aligned} \tag{1.7}$$
nimetatakse *lahtiseks koordinaatristtahukaks.* Hulka
$$\begin{aligned}[a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] &= \{(x_1, \dots, x_m) \colon\ x_i \in [a_i, b_i],\ i = 1, \dots, m\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) \colon\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, m\}\end{aligned} \tag{1.8}$$

nimetatakse *kinniseks koordinaatristtahukaks.*

Vahemikke $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ ja lõike $[a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m]$ nimetatakse vastavalt risttahukate (1.7) ja (1.8) *servadeks.*

Edaspidi, *kõneldes lihtsalt (kinnistest ja lahtistest) risttahukatest, mõistame me nende all (vastavalt kinnisi ja lahtisi) koordinaatristtahukaid.* Risttahukat, mille kõik servad on võrdse pikkusega, nimetatakse *kuubiks.*

Risttahukaid ja kuupe ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse vastavalt *ristkülikuteks* ja *ruutudeks.* Ristkülikute (sealhulgas ruutude) puhul kõneldakse servade asemel *külgedest.*

Punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, kus iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral $x_i^0 := \frac{b_i + a_i}{2}$ (s.t. punkti, mille koordinaadid on risttahukate (1.7) ja (1.8) vastavate servade keskpunktid), nimetatakse risttahukate (1.7) ja (1.8) *keskpunktiks.*

Tähistades iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$d_i := \frac{b_i - a_i}{2} = b_i - x_i^0 = x_i^0 - a_i,$$

esituvad risttahukad (1.7) ja (1.8) vastavalt kujul

$$\begin{aligned}
&(x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \cdots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m) \\
&\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \colon\ x_i^0 - d_i < x_i < x_i^0 + d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\} \\
&\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \colon\ |x_i - x_i^0| < d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&[x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1] \times \cdots \times [x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m] \\
&\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \colon\ x_i^0 - d_i \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\} \\
&\qquad = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \colon\ |x_i - x_i^0| \leqslant d_i,\ i = 1, \ldots, m\big\}
\end{aligned}$$

Lause 1.4. (a) *Iga kera B korral ruumis $\mathbb{R}^m$ leiduvad sama keskpunktiga kuubid C_1 ja C_2 nii, et*

$$C_1 \subset B \subset C_2.$$

(b) *Iga (koordinaat)risttahuka C korral ruumis $\mathbb{R}^m$ leiduvad sama keskpunktiga kerad B_1 ja B_2 nii, et*

$$B_1 \subset C \subset B_2.$$

Muuhulgas järeldub lausest 1.4, (b), et *(koordinaat)risttahukas keskpunktiga P_0 on punkti P_0 ümbrus.* Lahtiseid ja kinniseid (koordinaat)risttahukaid keskpunktiga P_0 nimetatakse vastavalt punkti P_0 *lahtisteks* ja *kinnisteks risttahukakujulisteks ümbrusteks.*

Lause 1.4 tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada üks lemma (mida on mugav kasutada ka näiteks lause 2.1 tõestuses).

Lemma 1.5. *Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m)$, $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant d(P, P_0) \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|. \tag{1.9}$$

TÕESTUS. Arvestades, et $d(P,P_0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|^2}$, sisalduvad võrratused (1.9) järgnevas võrratusteahelas:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^0|^2} \leqslant \sqrt{m \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|^2} = \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0|.$$

□

LAUSE 1.4 TÕESTUS. Lause väited piisab tõestada ainult lahtiste kerade B ja lahtiste (koordinaat)risttahukate C jaoks, sest iga kinnine kera sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist kera ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises keras; samuti, iga kinnine (koordinaat)risttahukas sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist (koordinaat)risttahukat ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises (koordinaat)risttahukas.

Olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

(a). Olgu $r > 0$. Vaatleme lahtist kera $B := B(P_0, r)$. Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B \quad &\iff \quad d(P,P_0) < r \quad \implies \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < r \\ &\iff \quad P \in (x_1^0 - r, x_1^0 + r) \times \cdots \times (x_m^0 - r, x_m^0 + r) =: C_2, \end{aligned}$$

seega $B \subset C_2$; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B \quad &\iff \quad d(P,P_0) < r \\ &\impliedby \quad \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < r \quad \iff \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \frac{r}{\sqrt{m}} \\ &\iff \quad P \in \left(x_1^0 - \tfrac{r}{\sqrt{m}}, x_1^0 + \tfrac{r}{\sqrt{m}}\right) \times \cdots \times \left(x_m^0 - \tfrac{r}{\sqrt{m}}, x_m^0 + \tfrac{r}{\sqrt{m}}\right) =: C_1, \end{aligned}$$

niisiis $B \supset C_1$.

(b). Olgu $d_1, \ldots, d_m > 0$. Tähistame

$$C := (x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \cdots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m).$$

Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C \quad &\iff \quad |x_i - x_i^0| < d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral} \\ &\implies \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i =: d \\ &\implies \quad d(P,P_0) < \sqrt{m}d \quad \iff \quad P \in B(P_0, \sqrt{m}d) =: B_2, \end{aligned}$$

seega $C \subset B_2$; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C \quad &\iff \quad |x_i - x_i^0| < d_i \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral} \\ &\impliedby \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \min_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i =: r \\ &\impliedby \quad d(P,P_0) < r \quad \iff \quad P \in B(P_0, r) =: B_1, \end{aligned}$$

niisiis $C \supset B_1$. □

1.4. Lahtised ja kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et punkt $P \in \mathbb{R}^m$ on hulga $\mathcal{D}$

- *sisepunkt,* kui leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset \mathcal{D}$ (s.t. punktil P leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas $\mathcal{D}$);
- *rajapunkt,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral

$$U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing \quad \text{ja} \quad U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D}) \neq \varnothing$$

(s.t. punkti P iga ümbrus sisaldab nii hulga $\mathcal{D}$ punkte kui ka hulka $\mathcal{D}$ mittekuuluvaid punkte).

Definitsioon 1.5. Hulga $\mathcal{D}$ kõigi sisepunktide hulka nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *sisemuseks* ja tähistatakse sümboliga $\mathcal{D}^\circ$.

Hulga $\mathcal{D}$ kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *rajaks* ja tähistatakse sümboliga $\partial\mathcal{D}$.

Hulga $\mathcal{D}$ ja tema raja ühendit nimetatakse hulga $\mathcal{D}$ *sulundiks* ja tähistatakse sümboliga $\overline{\mathcal{D}}$:

$$\overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}.$$

Järgnev lause, mis toob välja sisemuse, raja ja sulundi lihtsamad omadused, järeldub vahetult vastavatest definitsioonidest.

Lause 1.6. (a) *$\mathcal{D}^\circ \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$;*

(b) *$\mathcal{D}^\circ \cap \partial\mathcal{D} = \varnothing$;*

(c) *hulga $\mathcal{D}$ iga punkt on kas hulga $\mathcal{D}$ sisepunkt või selle hulga rajapunkt, s.t. iga $x \in \mathcal{D}$ korral realiseerub täpselt üks järgmistest teineteist välistavatest võimalustest:*

$$x \in \mathcal{D}^\circ \qquad \textit{või} \qquad x \in \partial\mathcal{D};$$

(d) *$\partial\mathcal{D} = \partial(\mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D})$;*

(e) *iga $x \in \mathbb{R}^m$ korral realiseerub täpselt üks järgmistest üksteist välistavatest võimalustest:*

$$x \in \mathcal{D}^\circ, \qquad x \in \partial\mathcal{D} \qquad \textit{või} \qquad x \in (\mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D})^\circ.$$

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D}$ on

- *lahtine,* kui $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ$ (s.t. kõik hulga $\mathcal{D}$ punktid on tema sisepunktid);
- *kinnine,* kui $\mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D}$ (s.t. hulk $\mathcal{D}$ sisaldab oma raja).

Vahetult definitsioonist järeldub, et *hulk $\mathcal{D}$ on kinnine parajasti siis, kui $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$.*

Tõepoolest,

$$\mathcal{D} \text{ on kinnine} \iff \mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D} \iff \mathcal{D} \supset \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \iff \mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \iff \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}.$$

Lause 1.7. (a) *Lahtine kera ruumis* $\mathbb{R}^m$ *on lahtine hulk.*

(b) *Kinnine kera ruumis* $\mathbb{R}^m$ *on kinnine hulk.*

Väite (b) tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnev lihtne lause.

Lause 1.8. *Hulk* $\mathcal{D}$ *on lahtine parajasti siis, kui tema täiend* $\mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D}$ *on kinnine.*

TÕESTUS:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \text{ on lahtine} \quad &\iff \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ \quad \iff \quad \mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D} = \varnothing \quad \iff \quad \partial\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D} \\ &\iff \quad \partial(\mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D} \quad \iff \quad \mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D} \text{ on kinnine.} \end{aligned}$$

□

LAUSE 1.7 TÕESTUS. Olgu $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $r > 0$.

(a). Olgu $P \in B(P_0, r)$. Veendumaks kera $B(P_0, r)$ lahtisuses, piisab näidata, et P on selle kera sisepunkt, s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $\varepsilon > 0$ ja $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral (kolmnurga võrratuse põhjal)

$$d(Q, P_0) \leqslant d(Q, P) + d(P, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0);$$

niisiis, kui võtta $\varepsilon := r - d(P, P_0) > 0$, siis mis tahes $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral

$$d(Q, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0) = r - d(P, P_0) + d(P, P_0) = r,$$

s.t. $Q \in B(P_0, r)$ ning seega $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$.

(b). Veendumaks kera $\overline{B}(P_0, r)$ kinnisuses, piisab lause 1.8 põhjal näidata, et täiend $\mathbb{R}^m \backslash \overline{B}(P_0, r)$ on lahtine, milleks, fikseerides vabalt $P \in \mathbb{R}^m \backslash \overline{B}(P_0, r)$, piisab näidata, et P on hulga $\mathbb{R}^m \backslash \overline{B}(P_0, r)$ sisepunkt, s.t. leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \backslash \overline{B}(P_0, r)$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $\varepsilon > 0$ ja $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral (tagurpidi kolmnurga võrratuse põhjal, vt. ülesannet 1.1)

$$d(Q, P_0) \geqslant d(P, P_0) - d(P, Q) > d(P, P_0) - \varepsilon;$$

niisiis, kui võtta $\varepsilon := d(P, P_0) - r > 0$, siis mis tahes $Q \in U_\varepsilon(P)$ korral

$$d(Q, P_0) > d(P, P_0) - \varepsilon = d(P, P_0) - \big(d(P, P_0) - r\big) = r,$$

s.t. $Q \in \mathbb{R}^m \backslash \overline{B}(P_0, r)$ ning seega $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \backslash \overline{B}(P_0, r)$. □

Märkus 1.4. Teine võimalus lause 1.7 tõestamiseks on tõestada kõigepealt järgnev lause.

Lause 1.9. *Mis tahes $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ning $r > 0$ korral*

$$\partial B(P_0, r) = S(P_0, r) \quad ja \quad \partial \overline{B}(P_0, r) = S(P_0, r).$$

Teisisõnu, kera raja ruumis $\mathbb{R}^m$ on sama keskpunkti ja raadiusega sfäär.

Kinnise kera kinnisus järeldub lausest 1.9 vahetult kinnisuse definitsiooni põhjal. Veendumaks lahtise kera lahtisuses, piisab lause 1.8 põhjal näidata, et tema täiend on kinnine, mis, arvestades, et hulga ja tema täiendi rajad on võrdsed, järeldub jällegi lausest 1.9 vahetult hulga kinnisuse definitsiooni põhjal.

Veel ühte võimalust lause 1.7 tõestuseks on kirjeldatud ülesandes 2.2.

LAUSE 1.9 TÕESTUS.

Ülesanne 1.3. Tõestada lause 1.9.

□

Märkus 1.5. Ruumi $\mathbb{R}^m$ hulkade korral võivad esineda kõik järgnevad (üksteist välistavad) olukorrad:

(1) hulk on lahtine, kuid mitte kinnine;

(2) hulk on kinnine, kuid mitte lahtine;

(3) hulk pole ei kinnine ega lahtine;

(4) hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine.

Seejuures hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine (s.t. realiseerub olukord (4)) parajasti siis, kui tema raja on tühi hulk. Ainsad niisuguse omadusega hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$ on tühi hulk $\varnothing$ ja kogu hulk $\mathbb{R}^m$ ise.

Ülesanne 1.4. Tõestada, et ainsad hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$, mille raja on tühi hulk, on hulk $\mathbb{R}^m$ ja tühi hulk $\varnothing$.

NÄPUNÄIDE. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}$ ja $Q = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \backslash \mathcal{D}$. Tõestada, et leidub hulga $\mathcal{D}$ rajapunkt, mis asub punkte P ja Q ühendaval sirglõigul

$$\{(x_1 + t(y_1 - x_1), \ldots, x_m + t(y_m - x_m)) : t \in [0, 1]\}.$$

1.5. Hulga tõkestatus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 1.7. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *tõkestatud,* kui leidub reaalarv $r > 0$ nii, et

$$\mathcal{D} \subset B\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ arvu null}}), r\big)$$

(s.t. $\mathcal{D}$ sisaldub mingis keras keskpunktiga $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ arvu null}})$).

Ülesanne 1.5. Tõestada, et hulk ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis (mis tahes keskpunktiga) keras.

Järgnev lause järeldub vahetult hulga tõkestatuse definitsioonist, Arvestades, et lause 1.4 põhjal sisaldub iga kera ruumis $\mathbb{R}^m$ mingis sama keskpunktiga kuubis ning, vastupidi, iga kuup ruumis $\mathbb{R}^m$ sisaldub mingis sama keskpunktiga keras.

Lause 1.10. *Hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$\mathcal{D} \subset \underbrace{[-M, M] \times \cdots \times [-M, M]}_{m \text{ tegurit}}.$$

Teisisõnu, hulk $\mathcal{D}$ on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis kuubis keskpunktiga $(0, \ldots, 0)$.

Lause 1.10 võime ümber sõnastada ka järgmiselt: *hulk $\mathcal{D}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui tema punktide kõikvõimalike koordinaatide hulk on tõkestatud, s.t. leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|x_i| \leqslant M \quad \textit{iga } P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \textit{ ja iga } i \in \{1, \ldots, m\} \textit{ korral.}$$

1.6. Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$

Hulga sidususe definitsioon ruumis $\mathbb{R}^m$ toetub Jordani joone mõistele, mis omakorda toetub funktsiooni $T \to \mathbb{R}^m$, kus $T \subset \mathbb{R}$, pidevuse mõistele. Neile kahele mõistele ongi pühendatud käesoleva jaotise kolm esimest alajaotist.

1.6.1. Funktsiooni $T \to \mathbb{R}^m$, kus $T \subset \mathbb{R}$, pidevus

Definitsioon 1.8. Olgu $T \subset \mathbb{R}$. Öeldakse, et funktsioon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on pidev punktis $t_0 \in T$, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[t \in T,\ |t - t_0| < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad d\big(\Phi(t), \Phi(t_0)\big) < \varepsilon.$$

Öeldakse, et funktsioon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on pidev, kui ta on oma määramispiirkonna T igas punktis pidev.

Paneme tähele, et juhul $m = 1$ langeb äsjadefineeritud funktsiooni $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ pidevuse mõiste kokku kursusest "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" tuttava (ühe muutuja) funktsiooni $\Phi\colon T \to \mathbb{R}$ pidevuse mõistega, sest sel juhul $d\big(\Phi(t), \Phi(t_0)\big) = |\Phi(t) - \Phi(t_0)|$.

Märgime, et funktsioonide $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ ning funktsioonide süsteemide

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in T, \tag{1.10}$$

vahel on üksühene vastavus: ühelt poolt, süsteem (1.10) määrab funktsiooni

$$\Phi\colon T \ni t \longmapsto \big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) \in \mathbb{R}^m; \tag{1.11}$$

teiselt poolt, mis tahes funktsioon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ määrab ühesel viisil funktsioonid (1.10), mis rahuldavad tingimust (1.11) – sellise omadusega funktsioonide (1.10) väärtused mis tahes punktis $t \in T$ on defineeritud võrdustega

$$\phi_1(t) = \xi_1, \quad \ldots\ldots, \quad \phi_m(t) = \xi_m, \qquad \text{kus } \Phi(t) = (\xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Seejuures funktsioon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on pidev parajasti siis, kui teda (tingimuse (1.11) abil) määravad funktsioonid (1.10) on pidevad.

Ülesanne 1.6. Tõestada, et funktsioon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on pidev parajasti siis, kui teda (tingimuse (1.11) abil) määravad funktsioonid (1.10) on pidevad.

1.6.2. Pideva joone mõiste ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 1.9. Olgu $T \subset \mathbb{R}$ intervall. Pidevat funktsiooni $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ nimetatakse *pidevaks jooneks* ehk *Jordani jooneks* ehk lihtsalt *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^m$. Hulka $\{\Phi(t)\colon t \in T\}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ (s.t. funktsiooni Φ väärtuste hulka) nimetatakse seejuures joone Φ *jäljeks.* Funktsiooni Φ argumendile viidatakse kui *parameetrile.*

Kuidas on pideva joone definitsioon 1.9 kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga joontest? Joont $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on kõige lihtsam ette kujutada kui ruumis $\mathbb{R}^m$ eeskirja $u = \Phi(t)$ järgi liikuva punkti trajektoori: ajahetkel $t \in T$ asub liikuv punkt ruumi $\mathbb{R}^m$ punktis $\Phi(t)$; vt. joonist **??**.

Sageli, kõneldes joonest, peetakse tegelikult silmas hoopis teatava joone jälge. Näiteks öeldes, et teatav joon ruumis $\mathbb{R}^m$ sisaldub ruumi $\mathbb{R}^m$ teatavas alamhulgas, peetakse tegelikult silmas, et kõnealuse joone jälg sisaldub kõnealuses hulgas; öeldes, et teatav joon ruumis $\mathbb{R}^m$ läbib teatavat punkti (ruumis $\mathbb{R}^m$), peetakse tegelikult silmas, et kõnealuse joone jälg sisaldab kõnealust punkti. Sedalaadi terminoloogilist ebatäpsust, mis üldjuhul sisulist kaksipidimõistmist ei tekita, lubame endale käesolevas konspektis ka meie.

Kui intervall T on lõik, s.t. $T = [\alpha, \beta]$ mingite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, korral, siis nimetatakse joont Φ *kaareks.* Ruumi $\mathbb{R}^m$ punkte $\Phi(\alpha)$ ja $\Phi(\beta)$ nimetatakse seejuures vastavalt kaare Φ *alguspunktiks* ja kaare Φ *lõpp-punktiks.* Kaare algus- ja lõpp-punkti nimetatakse selle kaare *otspunktideks.* Öeldes, et kaar ruumis $\mathbb{R}^m$ ühendab ruumi $\mathbb{R}^m$ punkte A ja B, peetakse silmas, et A ja B on selle kaare otspunktid.

1.6.3. Joone esitusviise

Kuigi käsiloleva punkti põhimõiste – ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulga sidususe – defineerimiseks vajaminev matemaatiline aparatuur sai meil eelnevates punktides sisse toodud, lükkame sidususe mõiste defineerimise edasi järgmisse jaotisse: käsilolev jaotis on parim võimalik koht tutvumaks mõnede sagedaminikasutatavate joone esitusviisidega.

Kõikjal selles jaotises on $T \subset \mathbb{R}$ mingi intervall.

1.6.3.1. Joone esitus parameetriliste võrranditega

Olgu

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in T, \tag{1.12}$$

pidevad funktsioonid. Siis ka funktsioon

$$T \ni t \longmapsto \big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big) \in \mathbb{R}^m$$

on pidev (vt. ülesannet 1.6), s.t. see funktsioon on joon. Selle joone kohta öeldakse, et ta on esitatud *parameetrilisel kujul* võrranditega (1.12) (või et see joon on esitatud *parameetriliste võrranditega* (1.12).

Märgime, et *iga pidev joon ruumis* $\mathbb{R}^m$ *on ühesel viisil esitatav parameetrilise võrrandite abil* (vt. jaotise 1.6.1 lõiku, mis algab sõnadega "Märgime, et").

1.6.3.2. Tasandilise joone esitus võrrandiga $y = f(x)$

Jooni ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse *tasandilisteks joonteks.* Selles ja järgmises alajaotises tutvustame kaht sagedastikasutatavat tasandiliste joonte esitusviisi.

Olgu funktsioon

$$y = f(x), \quad x \in T, \tag{1.13}$$

pidev funktsioon. Siis ka funktsioon

$$T \ni t \longmapsto \big(t, f(t)\big) \in \mathbb{R}^2$$

on pidev (sest "koordinaatfunktsioonid" $T \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$ ja $T \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$ on pidevad; vt. ülesannet 1.6), s.t. see funktsioon on joon. Selle joone kohta öeldakse, et ta on esitatud võrrandiga (1.13). Märgime, et võrrandiga (1.13) esitatud tasandilise joone esitus parameetrilisel kujul on

$$x = t, \quad y = f(t), \qquad t \in T.$$

1.6.3.3. Tasandilise joone esitus polaarkoordinaatides

Kõikjal järgnevas, kõneldes polaarkoordinaatidest "xy-tasandil" $\mathbb{R}^2$, loeme pooluseks koordinaatide alguspunkti ja polaarteljeks x-telje positiivse osa. Sel juhul tasandi mis tahes punkti ristkoordinaadid x ja y ning polaarkoordinaadid ϕ ja r (siin ϕ tähistab polaarnurka ja r polaarraadiust) on seotud võrdustega

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \tag{1.14}$$

(vt. joonist **??**).

Olgu funktsioon

$$r = r(\phi), \quad \phi \in T, \tag{1.15}$$

pidev. Siis ka funktsioon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^2$, mis seab parameetri väärtusele ϕ hulgast T vastavusse tasandi $\mathbb{R}^2$ punkti, mille polaarnurk ja polaarraadius on vastavalt ϕ ja $r(\phi)$, on pidev (sest võrduste (1.14) põhjal $\Phi\colon T \ni \phi \mapsto \big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big) \in \mathbb{R}^2$ ning "koordinaatfunktsioonid" $T \ni \phi \mapsto r(\phi)\cos\phi \in \mathbb{R}$ ja $T \ni \phi \mapsto r(\phi)\sin\phi \in \mathbb{R}$ on pidevad; vt. ülesannet 1.6). Selle joone kohta öeldakse, et ta on esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga (1.15). Märgime, et polaarkoordinaatides võrrandiga (1.15) esitatud tasandilise joone esitus parameetrilisel kujul on

$$x = r(\phi)\cos\phi, \quad y = r(\phi)\sin\phi, \qquad \phi \in T.$$

1.6.4. Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 1.10. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *sidus,* kui tema mis tahes kahe punkti korral leidub neid punkte ühendav pidev kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas $\mathcal{D}$.

1.7. Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 1.7. Tõestada, et

(a) 1° $\mathbb{R}^m$ ja $\varnothing$ on lahtised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$;

2° kui I on mis tahes indeksite hulk ning U_i, $i \in I$, on lahtised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$, siis ka nende hulkade ühend $\bigcup_{i\in I} U_i$ on lahtine (s.t. mis tahes kogumi lahtiste hulkade ühend ruumis $\mathbb{R}^m$ on lahtine hulk);

3° kui $n \in \mathbb{N}$ ning $U_1, \ldots, U_n$ on lahtised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$, siis ka nende hulkade ühisosa $\bigcap_{i=1}^n$ on lahtine (s.t. lõpliku arvu lahtiste hulkade ühisosa ruumis $\mathbb{R}^m$ on lahtine hulk);

(b) 1° $\mathbb{R}^m$ ja $\varnothing$ on kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$;

2° kui I on mis tahes indeksite hulk ning F_i, $i \in I$, on kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$, siis ka nende hulkade ühisosa $\bigcap_{i\in I} F_i$ on kinnine (s.t. mis tahes kogumi kinniste hulkade ühisosa ruumis $\mathbb{R}^m$ on kinnine hulk);

3° kui $n \in \mathbb{N}$ ning $F_1, \ldots, F_n$ on kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$, siis ka nende hulkade ühend $\bigcup_{i=1}^n F_i$ on kinnine (s.t. lõpliku arvu kinniste hulkade ühend ruumis $\mathbb{R}^m$ on kinnine hulk).

NÄPUNÄIDE. Ülesande (b)-osa tõestuses on mugav kasutada (a)-osa koos lausega 1.8.

Ülesanne 1.8. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tõestada, et

(a) raja $\partial\mathcal{D}$ on kinnine hulk;

(b) $\partial(\partial\mathcal{D}) \subset \partial\mathcal{D}$;

NÄPUNÄIDE. Paneme tähele, et väited (a) ja (b) on hulga kinnisuse definitsiooni põhjal samaväärsed. Üks moodus ülesande lahendamiseks on tõestada väide (b), lähtudes vahetult rajapunkti definitsioonist. Teine moodus on tõestada väide (a), veendudes kõigepealt, et $\partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{\mathbb{R}^m\backslash\mathcal{D}}$, ning rakendades seejärel ülesannet 1.7, (b), 2°.

Ülesanne 1.9. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tõestada, et

(a) $\mathcal{D}^\circ = \mathbb{R}^m\backslash(\overline{\mathbb{R}^m\backslash\mathcal{D}})$ (teisisõnu, hulga sisemus on tema täiendi sulundi täiend);

(b) $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^m\backslash\big((\mathbb{R}^m\backslash\mathcal{D})^\circ\big)$ (teisisõnu, hulga sulund on tema täiendi sisemuse täiend).

NÄPUNÄIDE. Kasutada lauset 1.6.

Ülesanne 1.10. Olgu hulgad $\mathcal{D}, \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^m$ sellised, et $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$. Tõestada, et siis ka $\mathcal{D}^\circ \subset \mathcal{E}^\circ$ ja $\overline{\mathcal{D}} \subset \overline{\mathcal{E}}$. (Selles ülesandes tõestatavatele sisemuse ja sulundi omadustele viidatakse vastavalt kui *sisemuse monotoonsusele* ja *sulundi monotoonsusele.*)

NÄPUNÄIDE. Sisalduvuse $\overline{\mathcal{D}} \subset \overline{\mathcal{E}}$ tõestamisel kasutada ülesannet 1.9, (b), ja sisemuse monotoonsust. Teine võimalus selle sisalduvuse tõestamiseks on kasutada järgmise paragrahvi lauset 2.2.

Ülesanne 1.11. Tõestada, et tõkestatud hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ sulund $\overline{\mathcal{D}}$ on tõkestatud hulk.

§ 2. Jadad ruumis $\mathbb{R}^m$

2.1. Jada koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$

Definitsioon 2.1. Kui igale arvule $n \in \mathbb{N}$ on vastavalt mingile eeskirjale seatud vastavusse mingi (üheselt määratud) punkt $P_n \in \mathbb{R}^m$, siis öeldakse, et on antud *jada*

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots. \tag{2.1}$$

Jada (2.1) tähistatakse ka sümboliga $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ või lihtsalt (P_n). Kõneldes ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide jadast, ütleme me edaspidi lihtsalt *jada ruumis* $\mathbb{R}^m$.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ *koondub* punktiks $P \in \mathbb{R}^m$, kui

$$d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\Big[n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\Big] \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P) < \varepsilon.$$

Punkti P nimetatakse seejuures jada (P_n) *piirväärtuseks* ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{või} \quad P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P.$$

Ülesanne 2.1. Olgu jadad (P_n) ja (Q_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ ning punktid $P, Q \in \mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ ja $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Tõestada, et

(a) $d(P_n, Q) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(P, Q)$;

(b) $d(P_n, Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(P, Q)$.

Näpunäide. Kasutada tagurpidi kolmnurga võrratust (vt. ülesannet 1.1).

Järgnev lause kirjeldab koonduvust ruumis $\mathbb{R}^m$.

Lause 2.1. *Olgu $P_n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$, $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \dots$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ *ruumis* $\mathbb{R}^m$*;*

(ii) $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ *iga* $i \in \{1, \dots, m\}$ *korral.*

Teisisõnu, lause 2.1 ütleb, et *jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ koondub punktiks $P \in \mathbb{R}^m$ parajasti siis, kui selle jada punktide vastavate koordinaatide jadad koonduvad punkti P vastavateks koordinaatideks* (niisugusel juhul öeldakse, et jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *koondub koordinaaditi* punktiks P). Niisiis, *koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$ on samaväärne koordinaaditi koonduvusega.*

Lause 2.1 tõestus. Lemma 1.5 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$0 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \leqslant d(P_n, P) \leqslant \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i|,$$

järelikult arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal

$$d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \text{ ruumis } \mathbb{R}^m \quad &\Longleftrightarrow\quad d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\Longleftrightarrow\quad |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral} \\ &\Longleftrightarrow\quad x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i \text{ iga } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral.} \end{aligned}$$

□

2.2. Sulundi punkti ja kinnisuse kirjeldus jadade keeles

Lause 2.2. *Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$P \in \overline{\mathcal{D}}$ (s.t. punkt P kuulub hulga $\mathcal{D}$ sulundisse);*

(ii) *iga $\varepsilon > 0$ korral $U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$ (s.t. punkti P iga ümbrus lõikab hulka $\mathcal{D}$);*

(iii) *leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ (s.t. leidub hulga $\mathcal{D}$ punktide jada, mis koondub punktiks P).*

Tõestus. (i)⇒(ii). Olgu $P \in \overline{\mathcal{D}}$. Siis kehtib vähemalt üks tingimustest $P \in \mathcal{D}$ ja $P \in \partial\mathcal{D}$. Kui $P \in \mathcal{D}$, siis punkti P iga ümbrus sisaldab hulka $\mathcal{D}$ kuuluva punkti P. Kui $P \in \partial\mathcal{D}$, siis rajapunkti definitsiooni põhjal lõikab punkti P iga ümbrus hulka $\mathcal{D}$. Niisiis igal juhul tingimus (ii) kehtib.

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Peame näitama, et $P \in \overline{\mathcal{D}}$. Kui $P \in \mathcal{D}$, siis see sisalduvus ilmselt kehtib (sest $\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$). Vaatleme nüüd juhtu, kus $P \notin \mathcal{D}$. Siis punkti P iga ümbrus sisaldab hulka $\mathcal{D}$ mittekuuluva punkti P. Kuna tingimuse (ii) põhjal sisaldab punkti P iga ümbrus ka hulga $\mathcal{D}$ punkte, siis $P \in \partial\mathcal{D}$, seega $P \in \overline{\mathcal{D}}$ (sest $\partial\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$), nagu soovitud.

(ii)⇒(iii). Kehtigu (ii). Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in U_{\frac{1}{n}}(P) \cap \mathcal{D}$. Punktid P_n rahuldavad tingimusi

$$0 \leqslant d(P_n, P) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

seega jada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal ka $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, s.t. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$. Kuna $P_n \in \mathcal{D}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis tingimus (iii) kehtib.

(iii)⇒(ii). Kehtigu (iii) ning olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ ehk, teisisõnu, $d(P_n, P) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, siis leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $d(P_n, P) < \varepsilon$. Aga nüüd $P_n \in U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D}$; järelikult (ii) kehtib. □

Lause 2.3. *Hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõik oma elementide koonduvate jadade piirväärtused, s.t. kehtib implikatsioon*

$$\left[P_n \in \mathcal{D},\ n = 1, 2, \ldots, \quad P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P\right] \quad \Longrightarrow \quad P \in \mathcal{D}. \tag{2.2}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu hulk $\mathcal{D}$ kinnine ning olgu punktid $P_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, ja $P \in \mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$. Peame näitama, et $P \in \mathcal{D}$. Kuna hulk $\mathcal{D}$ on kinnine, siis $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$, seega piisab näidata, et $P \in \overline{\mathcal{D}}$. See sisalduvus järeldub lause 2.2 samaväärsusest (i)$\Leftrightarrow$(iii).

Piisavus. Kehtigu implikatsioon (2.2) ning olgu $P \in \partial\mathcal{D}$. Hulga $\mathcal{D}$ kinnisuseks piisab näidata, et $P \in \mathcal{D}$. Kuna $P \in \partial\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$, siis lause 2.2 samaväärsuse (i)$\Rightarrow$(iii) põhjal leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$. Implikatsiooni (2.2) põhjal järeldub siit, et $P \in \mathcal{D}$, nagu soovitud. □

Ülesanne 2.2. Järeldada lause 1.7 (kinnise kera kinnisus ja lahtise kera lahtisus) lausest 2.3.

Näpunäide. Kasutada ülesannet 2.1. Lahtise kera lahtisuse tõestuseks näidata, et tema täiend on kinnine ja rakendada lauset 1.8.

2.3. Hulga kuhjumispunkt

Definitsioon 2.3. Punkti $P \in \mathbb{R}^m$ nimetatakse hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *kuhjumispunktiks,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral $\mathcal{U}_\varepsilon(P) \cap \big(\mathcal{D}\backslash\{P\}\big) \neq \varnothing$ (s.t. punkti P iga ümbrus sisaldab temast erinevaid hulga $\mathcal{D}$ punkte).

Märkus 2.1. Rõhutame, et ruumis $\mathbb{R}^m$ üldjuhul

- hulgal võib kuhjumispunkte leiduda, aga võib ka mitte leiduda;
- hulga kuhjumispunkt võib kuuluda sellesse hulka, aga võib ka mitte kuuluda.

Ülesanne 2.3. Tõestada, et

(a) ruumi $\mathbb{R}^m$ lõplikul alamhulgal ei ole kuhjumispunkte;

(b) kui $r > 0$, $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, $P_1 := (x_1^0 + r, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, siis P_1 on nii lahtise kera $B(P_0, r)$ kui ka kinnise kera $\overline{B}(P_0, r)$ kuhjumispunkt, kusjuures $P_1 \in \overline{B}(P_0, r)$, kuid $P_1 \notin B(P_0, r)$.

Lause 2.4. *Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *P on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt;*

(ii) *$P \in \overline{\mathcal{D}\backslash\{P\}}$ (s.t. punkt P kuulub hulga $\mathcal{D}\backslash\{P\}$ sulundisse);*

(iii) *leiduvad punktid $P_n \in \mathcal{D}\backslash\{P\}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ (s.t. leidub hulga $\mathcal{D}\backslash\{P\}$ punktide jada, mis koondub punktiks P).*

Tõestus. (i)$\Leftrightarrow$(ii) järeldub vahetult kuhjumispunkti definitsioonist ja lause 2.2 samaväärsusest (ii)$\Leftrightarrow$(i).

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) järeldub vahetult lause 2.2 samaväärsusest (i)$\Leftrightarrow$(iii). □

2.4. Bolzano–Weierstrassi teoreem

Definitsioon 2.4. Öeldakse, et jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud, kui tema elementide hulk $\{P_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud.

Ülesanne 2.4. Tõestada, et koonduv jada ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud.

Teoreem 2.5 (Bolzano–Weierstrassi teoreem)**.** *Igast tõkestatud jadast ruumis $\mathbb{R}^m$ saab välja eraldada koonduva osajada.*

Tõestus. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty} = \big((x_1^n, \dots, x_m^n)\big)_{n=1}^{\infty}$ tõkestatud jada ruumis $\mathbb{R}^m$. Lause 1.10 põhjal on ka selle jada punktide vastavate koordinaatide jadad

$$(x_1^n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_2^n)_{n=1}^{\infty}, \quad \dots\dots, \quad (x_m^n)_{n=1}^{\infty}$$

tõkestatud. Seega Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal (arvjadade jaoks) leidub jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktide esimeste koordinaatide jadal $(x_1^n)_{n=1}^{\infty}$ koonduv osajada $(x_1^{k_n^1})_{n=1}^{\infty}$, teiste koordinaatide (osa)jadal $(x_2^{k_n^1})_{n=1}^{\infty}$ leidub koonduv osajada $(x_2^{k_n^2})_{n=1}^{\infty}$ jne. Kirjeldatud protseduuri tulemusena me saame (kasvavad) indeksite jadad

$$(k_n^1)_{n=1}^{\infty}, \quad (k_n^2)_{n=1}^{\infty}, \quad \dots\dots, \quad (k_n^m)_{n=1}^{\infty}$$

nii, et

- jada $(k_n^{i+1})_{n=1}^{\infty}$ on jada $(k_n^i)_{n=1}^{\infty}$ osajada iga $i \in \{1, \dots, m-1\}$ korral;
- jada $(x_i^{k_n^i})_{n=1}^{\infty}$ koondub iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral.

Aga nüüd kõik vastavate koordinaatide (osa)jadad $(x_i^{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, \dots, m$, koonduvad (sest iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral on $(x_i^{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$ kooduva jada $(x_i^{k_n^i})_{n=1}^{\infty}$ osajada), seega osajada $(P_{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$ koondub (sest ta koondub koordinaaditi). □

2.5. Cauchy kriteerium jada koonduvuseks

Definitsioon 2.5. Öeldakse, et jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ on *Cauchy jada* ehk *fundamentaaljada,* kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_k, P_n) < \varepsilon.$$

Teoreem 2.6 (Cauchy kriteerium jada koonduvuseks)**.** *Jada ruumis $\mathbb{R}^m$ koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Koondugu jada (P_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ punktiks $P \in \mathbb{R}^m$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Veendumaks, et (P_n) on Cauchy jada, peame leidma indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_k, P_n) < \varepsilon.$$

Mis tahes $k, n \in \mathbb{N}$ korral kolmnurga võrratuse põhjal

$$d(P_k, P_n) \leqslant d(P_k, P) + d(P, P_n).$$

Niisiis, kui valida indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P) < \frac{\varepsilon}{2},$$

siis kõikide $k, n \geqslant N$ korral

$$d(P_k, P_n) \leqslant d(P_k, P) + d(P, P_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Piisavusele esitame kaks erinevat tõestust. Neist esimene toetub jada koonduvuse kirjeldusele ruumis $\mathbb{R}^m$ (lausele 2.1) ja Cauchy kriteeriumile arvjadade koonduvuseks, teine aga Bolzano–Weierstrassi teoreemile 2.5.

Piisavuse esimene tõestus. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty} = \big((x_1^n, \ldots, x_m^n)\big)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$. Siis ka selle jada vastavate koordinaatide jadad

$$(x_1^n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_2^n)_{n=1}^{\infty}, \quad \ldots\ldots, \quad (x_m^n)_{n=1}^{\infty} \tag{2.3}$$

on Cauchy jadad, sest mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral lemma 1.5 põhjal

$$|x_i^k - x_i^n| \leqslant d(P_k, P_n) \quad \text{kõikide } k, n \in \mathbb{N} \text{ korral;}$$

seega Cauchy kriteeriumi põhjal arvjada koonduvuseks jadad (2.3) koonduvad, s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub koordinaaditi; järelikult lause 2.1 põhjal jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub.

Piisavuse teine tõestus. Olgu (P_n) Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$. Jada (P_n) koonduvuseks piisab näidata, et

(1) iga Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$ on tõkestatud;

(2) kui Cauchy jadal ruumis $\mathbb{R}^m$ on olemas koonduv osajada, siis see jada koondub samaks piirväärtuseks, milleks see osajadagi.

Tõepoolest, kui väited (1) ja (2) kehtivad, siis väite (1) ja Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal leidub jadal (P_n) koonduv osajada, seega väite (2) põhjal jada (P_n) koondub.

Ülesanne 2.5. Tõestada väited (1) ja (2).

□

2.6. Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 2.6. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk ja $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ kinnine tõkestatud hulk, kusjuures $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$. Nagu kõikjal eelnevas, tähistame lahtise ja kinnise kera keskpunktiga $P \in \mathbb{R}^m$ ja raadiusega $\alpha > 0$ vastavalt sümbolitega $B(P, \alpha)$ ja $\overline{B}(P, \alpha)$, s.t. $B(P, \alpha) := \{Q \in \mathbb{R}^m \colon d(P, Q) < \alpha\}$ ja $\overline{B}(P, \alpha) := \{Q \in \mathbb{R}^m \colon d(P, Q) \leqslant \alpha\}$.

(a) Tõestada, et leidub reaalarv $\alpha > 0$ nii, et $B(P, \alpha) \subset \mathcal{U}$ iga $P \in \mathcal{K}$ korral.

(b) Väitest (a) järeldub niisuguse reaalarvu $\gamma > 0$ olemasolu, et $\overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$ iga $P \in \mathcal{K}$ korral. Tõestada, et ühend $\bigcup_{P \in \mathcal{K}} \overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$ on (ruumis $\mathbb{R}^m$) kinnine tõkestatud hulk.

§ 3. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

3.1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste

Definitsioon 3.1. Kujutusi

$$f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{kus } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m, \tag{3.1}$$

nimetatakse *m muutuja funktsioonideks.*

Kõikvõimalikke m muutuja funktsioone, kus $m \geqslant 2$, nimetatakse *mitme muutuja funktsioonideks.*

Funktsiooni (3.1) määramispiirkonna $\mathcal{D}$ iga punkt $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}$ on üheselt määratud oma koordinaatidega $x_1, \ldots, x_m$; teiselt poolt, punktiga $P \in \mathcal{D}$ on üheselt määratud tema koordinaadid $x_1, \ldots, x_m$. Termin "m muutuja funktsioon" on niisiis põhjendatud asjaoluga, et sellise funktsiooni väärtused on määratud määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide koordinaate tähistavate m muutuja $x_1, \ldots, x_m$ väärtustega. Neid muutujaid (nagu ka määramispiirkonna punkte tähistavat muutujat P) nimetatakse funktsiooni (3.1) *argumentideks* ning, kui selle funktsiooni väärtuste märkimiseks kasutada muutujat u, siis selle funktsiooni märkimiseks kasutatakse ka tähistust

$$u = f(x_1, \ldots, x_m) \quad \text{või} \quad u = f(P) \quad \text{või} \quad u = u(x_1, \ldots, x_m) \quad \text{või} \quad u = u(P).$$

3.2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et funktsiooni f *piirväärtus* punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on arv c (või et funktsioon f *koondub* arvuks c protsessis $P \to P_0$ (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile P_0)) ja kirjutatakse

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} c,$$

või

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, \ldots, x_m) = c \quad \text{või} \quad f(x_1, \ldots, x_m) \xrightarrow[\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots \\ x_m \to x_m^0}]{} c,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c)| < \varepsilon.$$

Ruumis $\mathbb{R}^m$ kasutame piirprotsessi $(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ märkimisel ka tähistust $x_1, \ldots, x_m \longrightarrow x_1^0, \ldots, x_m^0$; näiteks tähistame funktsiooni $u = f(x, y)$ piirväärtust punktis (x_0, y_0) sümboliga $\lim\limits_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y)$; kui seejuures $x_0 = y_0 =: a$, siis kirjutame $\lim\limits_{x,y \to a,a}$ asemel lihtsalt $\lim\limits_{x,y \to a}$.

Definitsioon 3.3. Kui $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} 0$, siis öeldakse, et funktsioon f on punktis P_0 *lõpmata väike* (või protsessis $P \to P_0$ lõpmata väike või ka, et funktsioon f *hääbub* protsessis $P \to P_0$).

Definitsioon 3.4. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on ∞ (loetakse: lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} \infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub realarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad f(P) > E.$$

Definitsioon 3.5. Öeldakse, et funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 (või piirväärtus protsessis $P \to P_0$) on $-\infty$ (loetakse: miinus lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} -\infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub realarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\ 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad f(P) < -E.$$

Definitsioon 3.6. Kui $|f(P)| \xrightarrow[P\to P_0]{} \infty$, siis öeldakse, et funktsioon f on punktis P_0 *lõpmata suur* (või protsessis $P \to P_0$ lõpmata suur).

Teoreem 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteerium)**.** *Olgu P_0 funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt ning olgu $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} c$;

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D}\backslash\{P_0\},\ n = 1, 2, \ldots,\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c.$

Teisisõnu, funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 on c parajasti siis, kui iga punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ korral on vastava funktsiooni väärtuste jada $\big(f(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ piirväärtus c.

Tõestus. Tõestame teoreemi ainult juhu $c \in \mathbb{R}$ jaoks. Juhtudel $c = \infty$ ja $c = -\infty$ on tõestus analoogiline.

(i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i) ning olgu punktid $P_n \in \mathcal{D}\backslash\{P_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$. Fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab meil implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(ii) tõestuseks leida indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

Kuna $f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} c$, siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\, 0 < d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c)| < \varepsilon.$$

Kuna $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(P_n, P_0) < \delta.$$

Kui nüüd $n \geqslant N$, siis $P_n \in \mathcal{D}$ ja $0 < d(P_n, P_0) < \delta$ ning järelikult

$$|f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et (i) ei kehti. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in \mathcal{D} \backslash \{P_0\}$, mille korral

$$d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad |f(P_n) - c| \geqslant \varepsilon.$$

Aga nüüd $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0$, kuid mitte $f(P_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c$, mis on vastuolus eeldusega (ii). □

Järeldus 3.2. *Mitme muutuja funktsioonil saab antud punktis eksisteerida ülimalt üks piirväärtus.*

TÕESTUS. Olgu P_0 funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt ning olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ sellised, et

$$f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} \beta.$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et $\alpha = \beta$. Selleks valime mingi punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt); siis funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi (teoreemi 3.1) põhjal

$$f(P_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \beta$$

ning järelikult arvjada piirväärtuse ühesuse tõttu $\alpha = \beta$, nagu soovitud. □

3.3. Funktsiooni piirväärtuse omadusi

Teoreem 3.3. *Eksisteerigu funktsioonidel f ja g lõplik piirväärtus oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis P_0. Siis ka nende funktsioonide summal $f + g$, vahel $f - g$, korrutisel fg ning, kui $\lim_{P \to P_0} g(P) \neq 0$, siis ka jagatisel f/g eksisteerib punktis P_0 lõplik piirväärtus, kusjuures*

$$\lim_{P \to P_0} \big(f(P) + g(P)\big) = \lim_{P \to P_0} f(P) + \lim_{P \to P_0} g(P),$$
$$\lim_{P \to P_0} \big(f(P) - g(P)\big) = \lim_{P \to P_0} f(P) - \lim_{P \to P_0} g(P),$$
$$\lim_{P \to P_0} \big(f(P)\, g(P)\big) = \lim_{P \to P_0} f(P) \, \lim_{P \to P_0} g(P),$$
$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim\limits_{P \to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P \to P_0} g(P)}.$$

TÕESTUS. Tähistame

$$\lim_{P \to P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P \to P_0} g(P) =: \beta.$$

Olgu punktid $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$. Teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$f(P_n) \pm g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \pm \beta, \quad f(P_n)\, g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\, \beta \quad \text{ja} \quad \frac{f(P_n)}{g(P_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha}{\beta}$$

(siin viimane koonduvus peab aset leidma eeldusel, et $\beta \neq 0$), mis kehtib arvjada piirväärtuse vastavate omaduste põhjal, sest (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \text{ja} \quad g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta.$$

□

Lause 3.4 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse monotoonsus)**.** *Leidugu funktsioonide f ja g määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktil P_0 ümbrus $\mathcal{U}$, mille korral*

$$f(P) \leqslant g(P) \quad \textit{iga } P \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\} \textit{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim_{P \to P_0} g(P)$, siis

$$\lim_{P \to P_0} f(P) \leqslant \lim_{P \to P_0} g(P).$$

TÕESTUS. Eksisteerigu piirväärtused

$$\lim_{P \to P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P \to P_0} g(P) =: \beta.$$

Lause tõestuseks peame näitama, et $\alpha \leqslant \beta$. Selleks valime mingi punktiks P_0 koonduva punktist P_0 erinevate hulga $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes $n \geqslant N$ korral $P_n \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\}$, seega

$$f(P_n) \leqslant g(P_n).$$

Kuna teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{n \to \infty} g(P_n) = \beta,$$

siis arvjada piirväärtuse monotoonsuse tõttu $\alpha \leqslant \beta$, nagu soovitud. □

Lause 3.5 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse sändvitšteoreem)**.** *Leidugu funktsioonide f, g ja h määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktil P_0 ümbrus $\mathcal{U}$, mille korral*

$$f(P) \leqslant g(P) \leqslant h(P) \quad \textit{iga } P \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D})\backslash\{P_0\} \textit{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$, kusjuures need piirväärtused on võrdsed:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} h(P) =: c, \tag{3.2}$$

siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{P \to P_0} g(P)$, kusjuures

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = c.$$

Tõestus. Eksisteerigu piirväärtused $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ ja $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$ ning kehtigu võrdus (3.2). Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks P_0 koonduv punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Veendumaks, et $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) = c$, piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$\lim_{n \to \infty} g(P_n) = c. \tag{3.3}$$

Kuna $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes $n \geqslant N$ korral $P_n \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D})\backslash\{P_0\}$, seega

$$f(P_n) \leqslant g(P_n) \leqslant h(P_n).$$

Kuna (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} h(P_n) = c,$$

siis arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal kehtib (3.3). □

Lause 3.6. *Olgu P_0 funktsioonide f ja g määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt, kusjuures*

(1) $f(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} 0$;

(2) *funktsioon g on punkti P_0 mingis ümbruses tõkestatud, s.t leiduvad punkti P_0 ümbrus $\mathcal{U}$ ja arv $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|g(P)| \leqslant M \quad \textit{iga } P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \textit{ korral.}$$

Siis ka

$$f(P)\, g(P) \xrightarrow[P \to P_0]{} 0.$$

Teisisõnu, lause 3.6 ütleb, et *antud piirprotsessis hääbuva funktsiooni ja tõkestatud funktsiooni korrutis on selles piirprotsessis hääbuv.*

LAUSE 3.6 TÕESTUS. Olgu $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks P_0 koonduv punktist P_0 erinevate määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest P_0 on hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt). Veendumaks, et $f(P)\,g(P) \xrightarrow[P\to P_0]{} 0$, piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$f(P_n)\,g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.4}$$

Selleks märgime, et

- $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (see järeldub eeldusest (1) teoreemi 3.1 põhjal);
- jada $\big(g(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud, sest kuna $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et
$$n \geqslant N \quad\Longrightarrow\quad P_n \in \mathcal{U},$$
seega
$$|g(P_n)| \leqslant M \quad \text{iga } n \geqslant N \text{ korral},$$
järelikult
$$|g(P_n)| \leqslant \max\big\{|g(P_1)|, \ldots, |g(P_N)|, M\big\} \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral}.$$

Kuna hääbuva arvjada ja tõkestatud arvjada korrutis on hääbuv arvjada, siis (3.4) kehtib. □

3.4. Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt.

Definitsioon 3.7. Öeldakse, et funktsioon f on *pidev* punktis P_0, kui

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0),$$

s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$, nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\ d(P, P_0) < \delta\Big] \quad\Longrightarrow\quad |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Olgu $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$ sellised, et $P := (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{D}$. Vahet

$$\Delta u := \Delta u(P) := f(P) - f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)$$

nimetatakse funktsiooni f *(täis)muuduks* punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$. Funktsiooni f pidevuse tingimuse võime kirja panna ka järgneval nn. *diferentskujul: funktsioon $u = f(P)$ on pidev punktis P_0 parajasti siis, kui*

$$\Delta u \xrightarrow[\Delta x_i \to 0,\, i=1,\dots,m]{} 0.$$

Järgnev teoreem on vahetu järeldus teoreemist 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumist).

Teoreem 3.7 (mitme muutuja funktsiooni pidevuse Heine kriteerium)**.** *Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu punkt $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on pidev punktis P_0;*

(ii) $\big[P_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N},\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0\big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0).$

Teisisõnu, funktsioon f on pidev punktis P_0 parajasti siis, kui iga punktiks P_0 koonduva määramispiirkonna $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ korral koondub vastav funktsiooni väärtuste jada $\big(f(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ funktsiooni väärtuseks $f(P_0)$ punktis P_0.

Definitsioon 3.8. Öeldakse, et funktsioon f on *pidev,* kui ta on pidev oma määramispiirkonna $\mathcal{D}$ igas kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$.

Me ütleme, et funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, kui tema ahend $f|_{\mathcal{D}_0}$ on pidev funktsioon.

3.5. Piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$

Definitsioon 3.9. Olgu $P \in \mathbb{R}^m$. Arvu

$$\|P\| := d\big(P, (\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ arvu null}})\big)$$

(s.t. punkti P kaugust punktist $(\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ arvu null}})$) nimetatakse punkti P *normiks.*

Definitsioon 3.10. Olgu funktsiooni f määramispiirkond $\mathcal{D}$ tõkestamata.

Me ütleme, et funktsiooni f piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$ on

- arv $c \in \mathbb{R}$, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et
$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - c| < \varepsilon;$$
- ∞ (loetakse: lõpmatus), kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et
$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad f(P) > E;$$
- $-\infty$ (loetakse: miinus lõpmatus), kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub reaalarv $D > 0$ nii, et
$$P \in \mathcal{D},\ \|P\| > D \quad \Longrightarrow \quad f(P) < -E.$$

Kui funktsiooni f piirväärtus protsessis $\|P\| \to \infty$ on c ($c \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$), siis me kirjutame

$$\lim_{\|P\|\to\infty} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow[\|P\|\to\infty]{} c.$$

Kehtib teoreemi 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) järgnev analoog.

Teoreem 3.8. *Olgu funktsiooni f määramispiirkond ülalt tõkestamata ning olgu $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f(P) \xrightarrow[\|P\|\to\infty]{} c$;

(ii) $\Big[P_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N},\ \|P_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\Big] \quad \Longrightarrow \quad f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c.$

Toetudes teoreemile 3.8, on lihtne tõestada järelduse 3.2 analoog mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse ühesusest protsessis $\|P\| \to \infty$ ning samuti teoreemi 3.3 ja lausete 3.4–3.6 analoogid piirprotsessi $\|P\| \to \infty$ jaoks eeldusel, et funktsioonide f ja g (ning lauses 3.5 ka funktsiooni h) ühine määramispiirkond $\mathcal{D}$ on ülalt tõkestamata.

3.6. Piirväärtus mööda pidevat joont

Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, olgu P_0 määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt ning olgu $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ (siin $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall) pidev joon ruumis $\mathbb{R}^m$, mis läbib punkti P_0 ning mis sisaldub määramispiirkonnas $\mathcal{D}$, välja arvatud, võib-olla, punkt P_0, millelt me ei eelda kuulumist määramispiirkonda $\mathcal{D}$. Seejuures me eeldame, et leidub parajasti üks $t_0 \in T$ nii, et $P_0 = \Phi(t_0)$.

Definitsioon 3.11. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{t\to t_0} f\big(\Phi(t)\big),$$

siis seda piirväärtust nimetame funktsiooni f piirväärtuseks punktis P_0 (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile P_0) *mööda joont* Φ,

Lause 3.9. *Kui funktsioonil f eksisteerib oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis P_0 (lõplik või lõpmatu) piirväärtus*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) =: c, \tag{3.5}$$

siis c on ka funktsiooni f piirväärtus punktis P_0 mööda mis tahes pidevat joont (mis läbib punkti P_0 ning mis sisaldub määramispiirkonnas $\mathcal{D}$, välja arvatud, võib-olla, punkt P_0).

TÕESTUS. Eksisteerigu funktsioonil f punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) piirväärtus (3.5), olgu punkti P_0 sisaldav ning määramispiirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduv (välja arvatud, võib-olla, punkt P_0) pidev joon antud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_m = \phi_m(t), \qquad t \in T,$$

kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall, ning olgu $t_0 \in T$ (ainus) selline punkt, et

$$P_0 = \big(\phi_1(t_0), \ldots, \phi_m(t_0)\big).$$

Peame näitama, et

$$\lim_{t \to t_0} f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big) = c. \tag{3.6}$$

Olgu $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ mingi punktist t_0 erinevate intervalli T punktide jada, mille korral $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_0$. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab võrduseks (3.6) näidata, et

$$\lim_{n \to \infty} f\big(\phi_1(t_n), \ldots, \phi_m(t_n)\big) = c$$

ehk, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$P_n := \big(\phi_1(t_n), \ldots, \phi_m(t_n)\big),$$

piisab näidata, et

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = c. \tag{3.7}$$

Funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevuse tõttu funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi põhjal

$$\lim_{n \to \infty} \phi_1(t_n) = \phi_1(t_0), \quad \ldots\ldots, \quad \lim_{n \to \infty} \phi_m(t_n) = \phi_m(t_0);$$

s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub punktiks P_0 koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P_0$ ning järelikult lause 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal kehtib (3.7) (sest $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = c$). □

Ülesanne 3.1. Tõestada lause 3.9 toetudes punkti P_0 läbiva joone esitusele kujul $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$, kus $T \subset \mathbb{R}^m$ on mingi intervall (ja mitte selle joone esitusele parameetrilisel kujul nagu eelnevas tõestuses), ning vahetult piirväärtuse definitsioonile (ja mitte piirväärtuse Heine kriteeriumile nagu eelnevas tõestuses).

Näpunäide. Vaadelda eraldi juhtusid, kus $c \in \mathbb{R}$, $c = \infty$ ja $c = -\infty$.

Näide 3.1. Veendume, et kahe muutuja funktsiooni $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ piirväärtus punktis $(0, 0)$

$$\lim_{x,y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \tag{3.8}$$

ei eksisteeri. Vaadeldava kahe muutuja funktsiooni piirväärtus punktis $(0, 0)$ mööda joont $y = x$ (parameetri rollis on siin muutuja x) on

$$\lim_{\substack{x,y \to 0 \\ y = x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2};$$

piirväärtus punktis $(0, 0)$ mööda joont $y = 2x$ (parameetri rollis on siin muutuja x) on

$$\lim_{\substack{x,y \to 0 \\ y = 2x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 2x}{x^2 + (2x)^2} = \frac{2}{5};$$

need piirväärtused on erinevad; järelikult lause 3.9 põhjal piirväärtus (3.8) ei eksisteeri.

3.7. Korduvad piirväärtused

Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, välja arvatud võib-olla punktis (x_0, y_0) endas. Eksisteerigu iga punkti x korral koordinaadi x_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti x_0 enda korral) lõplik piirväärtus

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) =: g(x).$$

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \to x_0} g(x) =: \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y), \tag{3.9}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *korduvaks piirväärtuseks.*

Analoogiliselt defineeritakse korduv piirväärtus

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{3.10}$$

(ning samuti ka korduvad piirväärtused rohkem kui kahe muutuja funktsioonide jaoks).

Üldiselt ei järeldu korduvate piirväärtuste (3.9) ja (3.10) olemasolust piirväärtuse

$$\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y). \tag{3.11}$$

olemasolu.

See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 57, näide 2.3.8

Näide 3.2. Piirväärtus

$$\lim_{x,y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ei eksisteeri (vt. näidet 3.1); samas vastavad korduvad piirväärtused eksisteerivad: mis tahes $x \neq 0$ korral

$$\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

ning seega $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$. Analoogiliselt saame, et ka $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$.

Samuti ei järeldu piirväärtuse (3.11) olemasolust korduvate piirväärtuste (3.9) ja (3.10) olemasolu.

See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 57, näide 2.3.9

Näide 3.3. Piirväärtus

$$\lim_{x,y \to 0} y \sin \frac{1}{x}$$

on olemas, kuid üks vastavatest korduvatest piirväärtustest ei eksisteeri. Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, on piirprotsess $x, y \to 0$ sama, mis piirprotsess $r \to 0$; seega

$$\lim_{x,y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{r \to 0} r \, \sin \phi \, \sin \frac{1}{r \cos \phi} = 0,$$

sest hääbuva ja tõkestatud funktsiooni korrutis on hääbuv (märgime, et funktsioon $(\phi, r) \mapsto \sin \phi \, \sin \frac{1}{r \cos \phi}$ on tõkestatud). Samuti mis tahes $x \neq 0$ korral $\lim\limits_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = 0$, seega

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Samas mitte ühegi $y \neq 0$ korral piirväärtus $\lim\limits_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x}$ ei eksisteeri, seega ei eksisteeri ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x}$.

Lause 3.10. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses, välja arvatud võib-olla punktis (x_0, y_0) endas, kusjuures eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus*

$$\lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x, y) =: c.$$

(a) *Kui iga punkti x korral punkti x_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti x_0 enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y) =: g(x), \tag{3.12}$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, kusjuures

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x, y) = c.$$

(b) *Kui iga punkti y korral punkti y_0 mingist ümbrusest (välja arvatud võib-olla punkti y_0 enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y),$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, kusjuures

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{x,y\to x_0,y_0} f(x, y) = c.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse sümmeetriliselt.)

Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et iga (punktist x_0 erineva) punkti $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus (3.12), ning olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktiks x_0 koonduv punktist x_0 erinevate vahemiku $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ punktide jada. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab väite (a) tõestuseks näidata, et $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral, arvestades, et $f(x_n, y) \xrightarrow[y\to y_0]{} g(x_n)$, saame valida punkti y_n nii, et

$$|y_n - y_0| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad \bigl|f(x_n, y_n) - g(x_n)\bigr| < \frac{1}{n}.$$

Kuna $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ ja $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$, siis lause 2.1 põhjal $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0)$ ruumis $\mathbb{R}^2$, seega funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ ning järelikult

$$g(x_n) = \bigl(g(x_n) - f(x_n, y_n)\bigr) + f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

(siin $g(x_n) - f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, sest $|g(x_n) - f(x_n, y_n)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), nagu soovitud.

□

§ 4. Pidevate mitme muutuja funktsioonide põhiomadused

4.1. Pideva funktsiooni märgi säilivus

Teoreem 4.1. *Olgu hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ määratud funktsioon f pidev määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$. Kui $f(P_0) \neq 0$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$\textit{iga } P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D} \textit{ korral } f(P) \neq 0 \textit{ ja } \operatorname{sgn} f(P) = \operatorname{sgn} f(P_0)$$

(s.t. leidub punkti P_0 ümbrus, milles selle funktsiooni väärtusted erinevad nullist ning on sama märgiga, mis $f(P_0)$).

TÕESTUS. Tähsitame $\alpha := f(P_0) \neq 0$. Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis P_0 leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P \in \mathcal{D},\, d(P, P_0) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \frac{|\alpha|}{2},$$

s.t. iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} < f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2}.$$

Niisiis, kui $f(P_0) > 0$, siis iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P) > f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) - \frac{f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} > 0;$$

kui aga $f(P_0) < 0$, siis iga $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$ korral

$$f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) + \frac{-f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} < 0.$$

□

4.2. Aritmeetilised tehted pidevate funktsioonidega

Järgnev teoreem on vahetu järeldus funktsiooni pidevuse definitsioonist ja teoreemist 3.3.

Teoreem 4.2. *Olgu funktsioonid f ja g pidevad oma määramispiirkonna $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ kuhjumispunktis $P_0 \in \mathcal{D}$. Siis ka nende funktsioonide summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning, kui $g(P_0) \neq 0$, siis ka jagatis f/g on pidevad punktis P_0.*

Märkus 4.1. Eeldus $g(P_0) \neq 0$ teoreemis 4.2 koos teoreemiga 4.1 garanteerib, et punkt P_0 on jagatise f/g määramispiirkonna kuhjumispunkt.

Järeldus 4.3. *Olgu f ja g pidevad funktsioonid, millel on ühine määramispiirkond. Siis ka nende funktsioonide summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning, kui funktsioon g pole üheski määramispiirkonna punktis 0, siis ka jagatis f/g on pidevad funktsioonid.*

4.3. Pidevate funktsioonide liitfunktsiooni pidevus

Olgu $l \in \mathbb{N}$ ning olgu hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^l$ määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) &= \phi_1(t_1, \ldots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) &= \phi_2(t_1, \ldots, t_l), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \phi_m(Q) &= \phi_m(t_1, \ldots, t_l). \end{aligned}$$

Olgu hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ selline, et

$$\mathcal{D} \supset \Big\{ \big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big) \colon \ Q \in \Delta \Big\},$$

ning olgu hulgas $\mathcal{D}$ määratud funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m).$$

Siis on hulgas Δ määratud funktsioon

$$u = f\big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big) = f\big(\phi_1(t_1, \ldots, t_l), \ldots, \phi_m(t_1, \ldots, t_l)\big). \tag{4.1}$$

Ülaltoodud moel saadud (täpsemalt, kahe või enama funktsiooni järjest rakendamise teel saadud) funktsioone nimetatakse *liitfunktsioonideks.*

Teoreem 4.4. *Olgu funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevad hulga Δ kuhjumispunktis $Q_0 \in \Delta$ ning olgu funktsioon f pidev punktis*

$$P_0 = \big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big).$$

Siis ka liitfunktsioon (4.1) *on pidev punktis Q_0.*

Tõestus. Olgu $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ selline hulga Δ punktide jada, et $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_0$. Teoreemi 3.7 (pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab liitfunktsiooni (4.1) pidevuseks punktis Q_0 näidata, et

$$f\big(\phi_1(Q_n), \ldots, \phi_m(Q_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big)$$

ehk, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$P_n := \big(\phi_1(Q_n), \ldots, \phi_m(Q_n)\big),$$

piisab näidata, et

$$f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0). \tag{4.2}$$

Funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ pidevuse tõttu punktis Q_0 teoreemi 3.7 põhjal

$$\phi_1(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_1(Q_0), \quad \ldots\ldots, \quad \phi_m(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_m(Q_0);$$

s.t. jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub punktiks P_0 koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0$ ning järelikult (jällegi teoreemi 3.7 põhjal) funktsiooni f pidevuse tõttu punktis P_0 kehtib (4.2). □

4.4. Mitme muutuja elementaarfunktsioonid

Definitsioon 4.1. Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Funktsioone $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, mis on saadud (hulga $\mathcal{D}$ punktide koordinaate tähistavatest) m sõltumatust muutujast lõpliku arvu aritmeetiliste tehete, ühe muutuja elementaarfunktsioonide ja liifunktsiooni moodustamise operatsioonide rakendamise teel, nimetatakse *m muutuja elementaarfunktsioonideks.*

Kui $m \geqslant 2$, siis m muutuja elementaarfunktsioone nimetatakse *mitme muutuja elementaarfunktsioonideks.*

Järgneva teoreemi võtame käesolevas kursuses teadmiseks ilma seda tõestamata.

Teoreem 4.5. *Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad.*

Teoreemi 4.5 saab rakendada elementaarfunktsiooni piirväärtuse leidmisel: kui f on mitme muutuja elementaarfunktsioon ning P_0 on selle funktsiooni määramispiirkonna punkt, mis on ühtlasi selle määramispiirkonna kuhjumispunkt, siis teoreemi 4.5 põhjal
$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

4.5. Sidusas hulgas pideva funktsiooni vahepealsed väärtused

Teoreem 4.6 (Bolzano–Cauchy teoreem)**.** *Olgu funktsioon f pidev sidusas hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, olgu $A, B \in \mathcal{D}$ ning rahuldagu reaalarv c tingimust*
$$f(A) \leqslant c \leqslant f(B) \qquad (\text{või } f(B) \leqslant c \leqslant f(A), \text{ kui } f(B) < f(A)).$$
Siis mis tahes punkte A ja B ühendaval pideval kaarel, mis sisaldub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$, leidub punkt C nii, et $f(C) = c$.

Tõestus. Olgu tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ sisalduv punkte A ja B ühendav kaar antud parameetriliste võrranditega
$$x_1 = \phi_1(t), \dots, x_m = \phi_m(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$
kus $\phi_1, \dots, \phi_m$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevad funktsioonid ning
$$A = \big(\phi_1(\alpha), \dots, \phi_m(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad B = \big(\phi_1(\beta), \dots, \phi_m(\beta)\big).$$
Siis $u\colon [\alpha, \beta] \ni t \mapsto f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big) \in \mathbb{R}$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev funktsioon (sest ta on pidevate funktsioonide liitfunktsioon), kusjuures $u(\alpha) = f(A)$ ja $u(\beta) = f(B)$; järelikult Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub $t_0 \in [\alpha, \beta]$ nii, et $u(t_0) = c$ ehk, teisisõnu, tähistades $C := \big(\phi_1(t_0), \dots, \phi_m(t_0)\big)$,
$$f(C) = f\big(\phi_1(t_0), \dots, \phi_m(t_0)\big) = u(t_0) = c.$$

□

4.6. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni tõkestatus

NB! Kas Weierstrassi teoreemidele ikka viidatakse kui "esimesele" ja "teisele"? Jah, nii [Ф] kui ka [ИП] teevad nii!

Teoreem 4.7 (Weierstrassi esimene teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on tõkestatud selles hulgas.*

TÕESTUS. Olgu funktsiooon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f ei ole tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub punkt $P_n \in \mathcal{D}$ nii, et

$$|f(P_n)| > n.$$

Jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal saame temast välja eraldada koonduva osajada $(P_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Tähistame $P_0 := \lim\limits_{n\to\infty} P_{k_n}$; siis hulga $\mathcal{D}$ kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal $P_0 \in \mathcal{D}$. Kuna funktsioon $\mathcal{D} \ni P \mapsto |f(P)| \in \mathbb{R}$ on pidev (sest ta on pidevate funktsioonide $\mathcal{D} \ni P \mapsto f(P) \in \mathbb{R}$ ja $\mathbb{R} \ni u \mapsto |u| \in \mathbb{R}$ liitfunktsioon), siis teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal $|f(P_{k_n})| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(P_0)|$. Teiselt poolt, kuna punktid P_{k_n} rahuldavad tingimust

$$|f(P_{k_n})| > k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

siis $|f(P_{k_n})| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Saadud vastuolu tõestab teoreemi. □

4.7. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni rajad

Teoreem 4.8 (Weierstrassi teine teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon saavutab selles hulgas oma väärtuste hulga rajad. Teisisõnu, kui funktsiooon f on pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, siis leiduvad punktid $P_0, Q_0 \in \mathcal{D}$ nii, et*

$$f(P_0) = \sup_{P\in\mathcal{D}} f(P) \quad \textit{ja} \quad f(Q_0) = \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P).$$

Esitame Weierstrassi teisele teoreemile kaks tõestust, millest esimene toetub Bolzano–Weierstrassi teoreemile 2.5 ning teine Weierstrassi esimesele teoreemile.

WEIERSTRASSI TEISE TEOREEMI 4.8 ESIMENE TÕESTUS. Olgu funktsiooon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tähistame

$$M := \sup_{P\in\mathcal{D}} f(P) \quad \text{ja} \quad m := \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P)$$

ning valime iga $n \in \mathbb{N}$ korral punkti $P_n \in \mathcal{D}$ nii, et

$$f(P_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Siis jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal saame temast välja eraldada koonduva osajada $(P_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Tähistame $P_0 := \lim\limits_{n\to\infty} P_{k_n}$; siis hulga $\mathcal{D}$ kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal $P_0 \in \mathcal{D}$. Teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal $f(P_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0)$. Kuna punktid P_{k_n} rahuldavad tingimusi

$$M \geqslant f(P_{k_n}) > M - \frac{1}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} M,$$

siis arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal

$$f(P_0) = \lim_{n\to\infty} f(P_{k_n}) = M.$$

Tõestame nüüd sellise punkti $Q_0 \in \mathcal{D}$ olemasolu, mille korral $f(Q_0) = \inf\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$. Selleks märgime, et ka funktsioon $-f$ on pidev hulgas $\mathcal{D}$, järelikult eelnevalt tõestatu põhjal leidub punkt $Q_0 \in \mathcal{D}$ nii, et

$$-f(Q_0) = \sup_{P\in\mathcal{D}}\bigl(-f(P)\bigr) = -\inf_{P\in\mathcal{D}} f(P),$$

aga nüüd

$$f(Q_0) = \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P).$$

□

Weierstrassi teise teoreemi 4.8 teine tõestus. Olgu funktsiooon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tähistame $M := \sup\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ (see supreemum on Weierstrassi esimese teoreemi 4.7 põhjal lõplik) ja oletame vastuväiteliselt, et

$$f(P) < M \quad \text{iga } P \in \mathcal{D} \text{ korral.} \tag{4.3}$$

Siis funktsioon

$$g\colon\ \mathcal{D} \ni P \longmapsto \frac{1}{M - f(P)} \in \mathbb{R}$$

on pidev (sest ta on saadud pidevatest funktsioonidest aritmeetiliste tehete abil; juhime veel tähelepanu, et eelduse (4.3) põhjal $M - f(P) \neq 0$ hulgas $\mathcal{D}$); seega Weierstrassi esimese teoreemi 4.7 põhjal on funktsioon g tõkestatud. Teiselt poolt, valides hulga $\mathcal{D}$ punktide jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, mille korral $f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$, saame, et $M - f(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0+$ ning seega $g(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, mis on vastuolus funktsiooni g tõkestatusega.

Sellise punkti $Q_0 \in \mathcal{D}$ olemasolu, mille korral $f(Q_0) = \inf\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$, saab näidata täpselt samamoodi nagu eelmises tõestuses. □

Märkus 4.2. Tingimust $f(Q_0) = \inf\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P) =: m$ rahuldava punkti $Q_0 \in \mathcal{D}$ olemasolu teoreemi 4.8 tõestuses võib näidata ka analoogiliselt punkti P_0 olemasolu tõestusele, valides analoogiliselt esimese tõestusega punktid $Q_n \in \mathcal{D}$ nii, et $f(Q_n) < m + \frac{1}{n}$ (punktiks Q_0 sobib sellisel juhul jada (Q_n) mis tahes koonduva osajada piirväärtus), või, analoogiliselt teise tõestusega, oletades vastuväiteliselt, et $f(P) > m$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral ja vaadeldes sel juhul funktsiooni $h\colon\ \mathcal{D} \ni P \longmapsto \frac{1}{f(P)-m} \in \mathbb{R}$.

4.8. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni ühtlane pidevus

Definitsioon 4.2. Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Öeldakse, et funktsioon f on hulgas $\mathcal{D}$ *ühtlaselt pidev,* kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[P, Q \in \mathcal{D},\ d(P,Q) < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Vahetult definitsioonist on ilmne, et hulgas $\mathcal{D}$ ühtlaselt pidev funktsioon on pidev selles hulgas. Vastupidine väide üldjuhul ei kehti. Vastavasisulisi kontranäiteid on lihtne leida juba vahemikus määratud pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta – näiteks funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on vahemikus $x \in (0, \infty)$ pidev, kuid mitte ühtlaselt pidev.

Teoreem 4.9 (Cantori teoreem)**.** *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on selles hulgas ühtlaselt pidev.*

TÕESTUS. Olgu funktsioon f pidev tõkestatud kinnises hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole ühtlaselt pidev selles hulgas. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ selliselt, et iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad punktid $P_n, Q_n \in \mathcal{D}$, mille korral

$$d(P_n, Q_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad \big|f(P_n) - f(Q_n)\big| \geqslant \varepsilon.$$

Siis jada $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas $\mathcal{D}$), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal saame temast välja eraldada koonduva osajada $(P_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Tähistame $P_0 := \lim\limits_{n\to\infty} P_{k_n}$; siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{k_n} = P_0$, sest

$$0 \leqslant d(Q_{k_n}, P_0) \leqslant d(Q_{k_n}, P_{k_n}) + d(P_{k_n}, P_0) \leqslant \frac{1}{k_n} + d(P_{k_n}, P_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ning arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal seega ka $d(Q_{k_n}, P_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Hulga $\mathcal{D}$ kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal $P_0 \in \mathcal{D}$. Kuna funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{D}$, siis teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal $f(P_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0)$ ja $f(Q_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P_0)$. Nüüd ühel poolt

$$\lim_{n\to\infty}\big|f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})\big| = \big|f(P_0) - f(Q_0)\big| = 0, \tag{4.4}$$

teiselt poolt

$$\big|f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})\big| \geqslant \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral},$$

mis on vastuolus tingimusega (4.4). □

II peatükk.
Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutus

§ 1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus

1.1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Definitsioon 1.1. Olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0,\, x_i^0 + \Delta x_i,\, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_i},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) osatuletiseks argumendi x_i järgi* punktis P_0 ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0), \quad f'_{x_i}(P_0), \quad u'_{x_i}(P_0), \quad f_{x_i}(P_0), \quad u_{x_i}(P_0) \tag{1.1}$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik osatuletis $f'_{x_i}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(esimest järku) osatuletisfunktsioon (argumendi x_i järgi)*

$$f'_{x_i} : \mathcal{D} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) osatuletiseks argumendi x_i järgi.* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}, \quad u'_{x_i}, \quad f_{x_i}, \quad u_{x_i}. \tag{1.2}$$

Tähistused (1.1) on tähistustega (1.2) hästi kooskõlas: (lõplik) osatuletis antud punktis on osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Märkus 1.1. Märkimaks funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ esimest järku osatuletisfunktsiooni muutuja x_i järgi, kasutatakse tähistuste (1.2) kõrval sageli ka tähistusi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Märkus 1.2. Vahetult osatuletise definitsioonist näeme, et ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ osatuletis muutuja x järgi on sama, mis selle funktsiooni tuletis: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{dx}$ (ehk, alternatiivsetes tähistustes, $f'_x = f'$).

Märkus 1.3. Vahetult osatuletise definitsioonist järeldub, et m muutuja funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletis punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ muutuja x_i järgi on ühe muutuja funktsiooni

$$g(x) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$$

tuletis punktis x_i^0:

$$f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0).$$

See tähelepanek on kasulik mitme muutuja funktsiooni osatuletiste arvutamisel: leides funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletist muutuja x_i järgi, loeme ülejäänud muutujad $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ fikseeritud konstantideks ning leiame osatuletise u'_{x_i} nagu ühe muutuja x_i funktsiooni tuletise.

Näide 1.1. Leiame funktsiooni $u = x^4 \sin^3(x^7 y + 5y^{11})$ osatuletised.

Tõlgendades muutujat y fikseeritud konstandina ja leides tuletise funktsioonist u kui ühe muutuja x funktsioonist, saame

$$\begin{aligned} u'_x &= (x^4)'_x \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) + x^4 \Big(\sin^3(x^7 y + 5y^{11})\Big)'_x \\ &= 4x^3 \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) + x^4 \cdot 3\sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}) \cdot 7x^6 y \\ &= x^3 \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cdot \Big(4\sin(x^7 y + 5y^{11}) + 21x^7 y \cos(x^7 y + 5y^{11})\Big). \end{aligned}$$

Tõlegendades muutujat x fikseeritud konstandina ja leides tuletise funktsioonist u kui ühe muutuja y funktsioonist, saame

$$\begin{aligned} u'_y &= x^4 \cdot 3\sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}) \cdot (x^7 + 55y^{10}) \\ &= 3x^4 (x^7 + 55y^{10}) \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}). \end{aligned}$$

Märkus 1.4. Ühe muutuja funktsiooni puhul järeldub lõpliku tuletise olemasolust mingis punktis selle funktsiooni pidevus selles punktis. Mitme muutuja funktsiooni puhul analoogiline väide ei kehti: *m muutuja funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ puhul ei järeldu esimest järku osatuletiste $f'_{x_1}(P_0), \ldots, f'_{x_m}(P_0)$ olemasolust ja lõplikkusest funktsiooni f pidevus punktis P_0.*

NB! See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 67, ül. 447

Näide 1.2. Näites I.3.2 veendusime, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ei eksisteeri; seega funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

ei ole pidev punktis $(0,0)$. Samas leiduvad sellel funktsiooni punktis $(0,0)$ lõplikud osatuletised:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\,0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

1.2. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1,\ldots,x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses $\mathcal{U}$. Kõneldes funktsiooni f argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudest $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$ punktis P_0, eeldame edaspidi alati, kasutades tähistusi

$$\Delta P := (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m) \quad \text{ja} \quad P_0 + \Delta P := (x_1^0 + \Delta x_1,\ldots,x_m^0 + \Delta x_m)$$

(juhime tähelepanu, et viimane tähistus on kooskõlas ruumi $\mathbb{R}^m$ vektorruumistruktuuriga), et $P := P_0 + \Delta P \in \mathcal{U}$.

Tähistame

$$\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} = d(P,P_0).$$

Vahet

$$\begin{aligned} \Delta u := f(P) - f(P_0) &= f(P_0+\Delta P) - f(P_0) \\ &= f(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_m^0+\Delta x_m) - f(x_1^0,\ldots,x_m^0), \end{aligned} \tag{1.3}$$

nimetatakse *funktsiooni f muuduks punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$.*

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1,\ldots,x_m)$ on *diferentseeruv* punktis $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0)$, kui leiduvad arvud $A_1,\ldots,A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et selle funktsiooni muut punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$, rahuldab tingimust

$$f(P_0+\Delta P) - f(P_0) - (A_1\,\Delta x_1 + \cdots + A_m\,\Delta x_m) = o(\rho) \qquad \text{protsessis } \rho \to 0, \tag{1.4}$$

s.t.

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{f(P_0+\Delta P) - f(P_0) - (A_1\,\Delta x_1 + \cdots + A_m\,\Delta x_m)}{\rho} = 0.$$

Allpool märkuses 1.5 veendume, et m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooni 1.2 juht $m = 1$ on kooskõlas kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" antud ühe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga. Eelnevalt on aga otstarbekas m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse mõistet veidi uurida.

Järgnev teoreem annab kaks funktsiooni diferentseeruvusega samaväärset tingimust, mida sageli kasutatakse ka diferentseeruvuse definitsioonina.

Teoreem 1.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0;*

(ii) *leiduvad arvud $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul*

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_m \Delta x_m + \alpha, \tag{1.5}$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$;

(iii) *leiduvad arvud $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ selliselt, et funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul*

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = A_1 \, \Delta x_1 + \cdots + A_m \, \Delta x_m + \alpha_1 \, \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m \, \Delta x_m, \tag{1.6}$$

kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta P) = \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Teoreem 1.1 on vahetu järeldus järgnevast lemmast, mida me kasutame ka allpool teoreemide 1.3 ja 1.4 tõestamisel. See lemma ütleb, et definitsiooni 1.2 tingimusi rahuldavad arvukomplektid $A_1, \ldots, A_m$, teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi rahuldavad arvukomplektid $A_1, \ldots, A_m$ ning teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi rahuldavad arvukomplektid $A_1, \ldots, A_m$ on täpselt ühed ja samad. Veelgi enam, teoreemis 1.3 tõestame, et kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on diferentseeruv punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$, siis tal eksisteerivad selles punktis lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide $x_1, \ldots, x_m$ järgi, kusjuures ainus ülalloetletud tingimusi rahuldav arvukomplekt $A_1, \ldots, A_m$ on

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \quad \ldots\ldots, \quad A_m = \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

Lemma 1.2. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsiooni f muut (1.3) rahuldab tingimust (1.4);*

(ii) *funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul (1.5), kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$;*

(iii) *funktsiooni f muut (1.3) esitub kujul (1.6), kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta P) = \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, $i = 1, \ldots, m$.*

TÕESTUS. (i)⇒(ii) on ilmne, kui defineerida

$$\alpha := f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - (A_1 \, \Delta x_1 + \cdots + A_m \, \Delta x_m).$$

(ii)⇒(i) on samuti ilmne.

(ii)⇒(iii). Kehtigu (ii). Siis

$$\begin{aligned} f(P_0+\Delta P)-f(P_0)-\big(A_1\Delta x_1+\cdots+A_m\Delta x_m\big)&\\ =\alpha\,\frac{\Delta x_1^2+\cdots+\Delta x_m^2}{\rho^2}&=\frac{\alpha}{\rho}\,\frac{\Delta x_1}{\rho}\,\Delta x_1+\cdots+\frac{\alpha}{\rho}\,\frac{\Delta x_m}{\rho}\,\Delta x_m\\ =\alpha_1\,\Delta x_1+\cdots+\alpha_m\,\Delta x_m,& \end{aligned}$$

kus $\alpha_i=\dfrac{\alpha}{\rho}\,\dfrac{\Delta x_i}{\rho}$, $i=1,\dots,m$. Kuna

$$|\alpha_i|\leqslant\left|\frac{\alpha}{\rho}\right|\xrightarrow[\rho\to 0]{}0,\quad i=1,\dots,m,$$

siis $\alpha_i\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$, $i=1,\dots,m$. Seega kehtib (iii).

(iii)⇒(ii). Kehtigu (iii). Siis kehtib valem (1.5), kus

$$\alpha=\alpha_1\,\Delta x_1+\cdots+\alpha_m\,\Delta x_m;$$

seejuures $\alpha=o(\rho)$ protsessis $\rho\to 0$, sest

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha}{\rho}\right|&=\left|\alpha_1\,\frac{\Delta x_1}{\rho}+\cdots+\alpha_m\,\frac{\Delta x_m}{\rho}\right|\leqslant|\alpha_1|\,\frac{|\Delta x_1|}{\rho}+\cdots+|\alpha_m|\,\frac{|\Delta x_m|}{\rho}\\ &\leqslant|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_m|\xrightarrow[\rho\to 0]{}0.\end{aligned}$$

Seega (ii) kehtib. □

Järgnev teoreem ütleb, et *funktsiooni diferentseeruvusest antud punktis järeldub selle funktsiooni kõikvõimalike esimest järku osatuletiste olemasolu ja lõplikkus selles punktis.*

Teoreem 1.3. *Olgu funktsioon $u=f(P)=f(x_1,\dots,x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0=(x_1^0,\dots,x_m^0)\in\mathbb{R}^m$. Siis funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 lõplikud esimest järku osatuletised kõikide argumentide järgi. Seejuures ainus reaalarvukomplekt $A_1,\dots,A_m$, mis rahuldab (m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsiooni 1.2 tingimusi (ning lemma 1.2 põhjal seega ka ainus reaalarvukomplekt $A_1,\dots,A_m$, mis rahuldab teoreemi 1.1 väite* (ii) *tingimusi, ning ainus reaalarvukomplekt $A_1,\dots,A_m$, mis rahuldab teoreemi 1.1 väite* (iii) *tingimusi), on*

$$A_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0),\quad\dots\dots,\quad A_m=\frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

Tõestus. Teoreemi 1.1 samaväärsuse (i)⇔(iii) põhjal leiduvad arvud $A_1,\dots,A_m\in\mathbb{R}$ nii, et funktsiooni f muut Δu punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1,\dots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\dots\Delta x_m$, esitub kujul

$$\Delta u=A_1\,\Delta x_1+\cdots+A_m\,\Delta x_m+\alpha_1\,\Delta x_1+\cdots+\alpha_m\,\Delta x_m, \tag{1.7}$$

kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust

$$\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \xrightarrow[\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0]{} 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fikseerime vabalt $j \in \{1, \dots, m\}$. Tähistades

$$\Delta_{x_j} u := f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + \Delta x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0),$$

piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j$$

(sest osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$ on defineeritud kui selles valemis esinev piirväärtus ning lemma 1.2 põhjal rahuldavad definitsiooni 1.2 tingimusi, teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi ning teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi täpselt ühed ja samad arvukomplektid $A_1, \dots, A_m$).

Kui $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \dots = \Delta x_m = 0$, siis $\Delta_{x_j} u = \Delta u$, seega valemi (1.7) põhjal

$$\Delta_{x_j} u = \Delta u = A_j \, \Delta x_j + \alpha_j(0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0) \, \Delta x_j$$

ning järelikult

$$\frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j + \alpha_j(0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0) \xrightarrow[\Delta x_j \to 0]{} A_j,$$

nagu soovitud. □

Teoreem 1.4. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0;*

(ii) *funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 kõik lõplikud esimest järku osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, kusjuures selle funktsiooni muut (1.3) punktis P_0 rahuldab tingimust*

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \, \Delta x_m \right) = o(\rho) \qquad (1.8)$$

protsessis $\rho \to 0$;

(iii) *funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 kõik lõplikud esimest järku osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, kusjuures selle funktsiooni muut (1.3) esitub kujul*

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \, \Delta x_m + \alpha, \qquad (1.9)$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$;

(iv) *funktsioonil f eksisteerivad punktis P_0 kõik lõplikud esimest järku osatuletised* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$, *kusjuures selle funktsiooni muut* (1.3) *punktis P_0 esitub kujul*

$$\begin{aligned} &f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)\,\Delta x_m + \alpha_1\,\Delta x_1 + \cdots + \alpha_m\,\Delta x_m, \end{aligned} \tag{1.10}$$

kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta P) = \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, $i = 1, \ldots, m$.

TÕESTUS. (i)⇒(ii) järeldub (m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsioonist 1.2 ja teoreemist 1.3.

(ii)⇒(i) järeldub definitsioonist 1.2.

(ii)⇔(iii)⇔(iv) järeldub lemmast 1.2. □

Märkus 1.5. Kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" defineeriti ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ diferentseeruvus punktis x_0 kui lõpliku tuletise $f'(x_0)$ olemasolu. See definitsioon on kooskõlas m muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga 1.2 juhul $m = 1$.

Tõepoolest, kui eksisteerib lõplik tuletis

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

siis, defineerides funktsiooni $\alpha = \alpha(\Delta x) := \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$, kehtib tingimus $\alpha \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$, kusjuures funktsiooni f muut punktis x_0 esitub kujul

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x;$$

niisiis teoreemi 1.1 samaväärsuse (i)⇔(iii) põhjal funktsioon f on diferentseeruv definitsiooni 1.2 (juhu $m = 1$) järgi.

Teiselt poolt, kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv definitsiooni 1.2 mõttes (juhul $m = 1$), siis teoreemi 1.3 põhjal eksisteerib tal punktis x_0 lõplik (osa)tuletis (muutuja x järgi) $f'_x(x_0) = f'(x_0)$ (vt. märkust 1.2), niisiis see funktsioon on diferentseeruv kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" antud definitsiooni mõttes.

Näites 1.2 veendusime, et m muutuja funktsiooni lõplike (esimest järku) osatuletiste olemasolust (kõigi muutujate järgi) antud punktis ei järeldu üldjuhul selle funktsiooni pidevust selles punktis. Järgnev lause ütleb, et m muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis (millest teoreemi 1.3 põhjal järeldub kõigi lõplike esimest järku osatuletiste olemasolu selles punktis) toob endaga kaasa selle funktsiooni pidevuse selles punktis. Seega *lõplike esimest järku osatuletiste olemasolust antud punktis ei järeldu üldjuhul funktsiooni diferentseeruvust selles punktis.* Veelgi enam: näites 1.5 vaadeldakse kahe muutuja funktsiooni, mis on pidev punktis $(0,0)$ ning millel eksisteerivad punktis $(0,0)$ lõplikud esimest järku osatuletised mõlema argumendi järgi, kuid mis pole diferentseeruv punktis $(0,0)$. Seega *ka antud punktis pideva funktsiooni puhul ei järeldu üldjuhul lõplike esimest järku osatuletiste olemasolust selles punktis funktsiooni diferentseeruvust selles punktis.*

Lause 1.5. *Antud punktis diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.*

TÕESTUS. Funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on pidev (oma määramispiirkonna kuhjumis)punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$ parajasti siis, kui

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0.$$

Kui eeldada, et funktsion f on diferentseeruv punktis P_0, siis see koonduvus järeldub esitusest (1.5) (sest kui $\alpha = o(\rho)$ protsessis $\rho \to 0$, siis ammugi $\alpha \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$). $\square$

Selle punkti lõpetuseks toome mõned näited konkreetsete funktsioonide diferentseeruvuse kindlakstegemisest antud punktis.

NB! See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 74, ül. 512

Näide 1.3. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii) põhjal piisab funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ (ning on selleks ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x - 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$), s.t.

$$(\Delta x + \Delta y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0.$$

Veendume selles. Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x = \rho \cos \phi$, $\Delta y = \rho \sin \phi$, saame

$$\frac{(\Delta x + \Delta y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\rho} = \frac{\rho^2 (\cos\phi + \sin\phi)^2 \sin \frac{1}{\rho}}{\rho} = \rho\,(\cos\phi + \sin\phi)^2 \sin\frac{1}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

NB! See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 74, ül. 513

Näide 1.4. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2} = 0$$

ning, sümmeetriliselt, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)⇔(ii) põhjal piisab funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ (ning on selleks ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x - 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho\to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$), s.t.

$$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho\to 0.$$

Veendume selles:

$$\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho} = \frac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho} = \rho\,\sin\frac{1}{\rho^2} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Näide 1.5. Veendume, et kahe muutuja funktsioon

NB! See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 74, ül. 511

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on pidev punktis $(0,0)$ ning tal eksisteerivad selles punktis lõplikud osatuletised, kuid ta ei ole diferentseeruv selles punktis.

Funktsiooni f pidevuseks punktis $(0,0)$ piisab näidata, et $f(x,y) \xrightarrow[x,y\to 0]{} f(0,0) = 0$. Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x = \rho\cos\phi$, $\Delta y = \rho\sin\phi$, saame

$$\lim_{x,y\to 0} f(x,y) = \lim_{x,y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\phi\,\sin\phi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\,\cos^2\phi\,\sin\phi = 0.$$

Funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0,0)$ lõplikud osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2\,0}{h^2}}{h} = 0$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0\,h}{h^2}}{h} = 0;$$

seega teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)⇔(ii) põhjal on tema diferentseeruvuseks punktis $(0,0)$ tarvilik (ning ka piisav), et

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - 0\,\Delta x - 0\,\Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho\to 0$$

(siin $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$), s.t.

$$f(\Delta x,\Delta y) = \frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho\to 0. \tag{1.11}$$

Minnes üle polaarkoordinaatidele: $\Delta x = \rho\cos\phi$, $\Delta y = \rho\sin\phi$, saame

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho} = \frac{\dfrac{\rho^3\cos^2\phi\sin\phi}{\rho^2}}{\rho} = \cos^2\phi\sin\phi.$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}$ ei eksisteeri (sest ta sõltub lähenemisteest); seega (1.11) ei kehti ning järelikult funktsioon f pole diferentseeruv punktis $(0,0)$.

1.3. Piisav tingimus mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvuseks

Teoreem 1.6. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x_1,\ldots,x_m)$ punkti $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses lõplikud (esimest järku) osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures vastavad osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis P_0. Siis funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.*

Tõestus. Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et funktsioonil f eksisteerivad lõplikud osatuletised punktis P_0 kuubikujulises ümbruses

$$C := \Big\{(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m\colon \max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i - x_i^0| < \delta\Big\}.$$

Kõikjal järgnevas vaatleme vaid selliseid (funktsiooni f) argumentide muutusid $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$, mille korral $|\Delta x_i| < \delta$, $i = 1,\ldots,m$, ehk, teisisõnu, $P_0 + \Delta P \in C$, kus $\Delta P := (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m)$ ja $P_0 + \Delta P = (x_1^0 + \Delta x_1,\ldots,x_m^0 + \Delta x_m)$.

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et funktsiooni $u = f(P)$ muut $\Delta u := f(P_0+\Delta P)-f(P_0)$ (s.t. muut punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\ldots\Delta x_m$) esitub valemiga (1.6), kus funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m)$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Tähistame iga $i \in \{1,\ldots,m\}$ korral $x_i := x_i^0 + \Delta x_i$; siis

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{m-1},x_m) - f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ldots,x_{m-1}^0,x_m^0)\\
&= f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{m-1},x_m) - f(x_1^0,x_2,x_3,\ldots,x_{m-1},x_m)\\
&\quad + f(x_1^0,x_2,x_3,\ldots,x_{m-1},x_m) - f(x_1^0,x_2^0,x_3,\ldots,x_{m-1},x_m)\\
&\quad + f(x_1^0,x_2^0,x_3,\ldots,x_{m-1},x_m) - f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ldots,x_{m-1},x_m)\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ldots,x_{m-1}^0,x_m) - f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ldots,x_{m-1}^0,x_m^0)\\
&= g_1(x_1) - g_1(x_1^0) + g_2(x_2) - g_2(x_2^0) + \cdots + g_m(x_m) - g_m(x_m^0),
\end{aligned}$$

kus funktsioonid g_i on defineeritud võrdustega

$$g_i(x) = f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x,x_{i+1},\ldots,x_m), \qquad i = 1,\ldots,m.$$

Iga $i \in \{1,\ldots,m\}$ korral funktsioon g_i rahuldab lõigus $[x_i^0,x_i]$ (või lõigus $[x_i,x_i^0]$, kui $x_i < x_i^0$) kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi; seega leidub arv $\theta_i \in (0,1)$

(mis sõltub argumentide $x_1, \ldots, x_m$ muutudest $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$) nii, et

$$\begin{aligned} g_i(x_i) - g_i(x_i^0) &= g_i'(x_i^0 + \theta_i\, \Delta x_i)\, \Delta x_i \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i\, \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)\, \Delta x_i \end{aligned}$$

(märgime, et kui $x_i = x_i^0$, s.t. $\Delta x_i = 0$, siis sobib θ_i rolli mis tahes arv vahemikust $(0,1)$). Niisiis,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^m \big(g_i(x_i) - g_i(x_i^0)\big) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i\, \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)\, \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0)\, \Delta x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)\, \Delta x_i, \end{aligned}$$

kus iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$\alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i\, \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Kuna osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_m}$ on pidevad punktis P_0, siis funktsioonid $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ rahuldavad tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, $i = 1, \ldots, m$, ning seega funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0. □

Märkus 1.6. Mitme muutuja funktsiooni f diferentseeruvusest punktis P_0 ei järeldu üldjuhul tema osatuletiste (s.t. osatuletisfunktsioonide) pidevus punktis P_0.

Näide 1.6. Näites 1.4 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Näitame, et kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ eksisteerivad lõplikud osatuletised $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, kuid osatuletisfunktsioonid $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $(0,0)$.

Näites 1.4 veendusime, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Kõikjal hulgas $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)_x' = 2x\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= 2x\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\,\cos\frac{1}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ on punkti $(0,0)$ igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Tõepoolest, valides iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n > 0$ nii, et $\dfrac{1}{r_n^2} = 2n\pi$ (s.t. $r_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$), ning tähistades $P_n := (r_n, 0)$ ja $Q_n := (-r_n, 0)$, saame, arvestades, et $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \quad \text{ja} \quad Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0).$$

Samal ajal

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_n) = 2r_n \sin\frac{1}{r_n^2} - \frac{2r_n}{r_n^2}\cos\frac{1}{r_n^2} = 2r_n \sin 2n\pi - \frac{2}{r_n}\cos 2n\pi = -\frac{2}{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

ning, analoogiliselt, $\frac{\partial f}{\partial x}(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}$ on punkti $(0,0)$ igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Näide 1.7. Näites 1.3 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Näitame, et kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ eksisteerivad lõplikud osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, kuid osatuletisfunktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $(0,0)$.

Näites 1.3 veendusime, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Kõikjal hulgas $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left((x+y)^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x \\ &= 2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x+y)^2\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= 2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x\,(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri; niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, saame

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2r(\cos\phi + \sin\phi)\sin\frac{1}{r} - \frac{r\cos\phi\, r^2(\cos\phi+\sin\phi)^2}{r^3}\cos\frac{1}{r} \\ &= o(1) - \cos\phi\,(\cos\phi+\sin\phi)^2\cos\frac{1}{r} \qquad \text{protsessis } r \to 0.\end{aligned}$$

Valides iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n > 0$ nii, et $\frac{1}{r_n} = 2n\pi$ (s.t. $r_n = \frac{1}{2n\pi}$), ning tähistades $P_n := (r_n\cos 0, r_n \sin 0) = (r_n, 0)$ ja $Q_n := \left(r_n\cos\frac{\pi}{2}, r_n\sin\frac{\pi}{2}\right) = (0, r_n)$, saame, arvestades, et $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \quad \text{ja} \quad Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0).$$

Samal ajal

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(P_n) &= o(1) - \cos 0\,(\cos 0 + \sin 0)^2 \cos\frac{1}{r_n} = o(1) - \cos 2n\pi = o(1) - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(Q_n) &= o(1) - \cos\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{1}{r_n} = o(1) - 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;\end{aligned}$$

järelikult funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ei eksisteeri.

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ei eksisteeri; niisiis osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $(0,0)$ pidev.

1.4. Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse geomeetriline tõlgendus (kahe muutuja funktsiooni graafiku puutujatasand)

Definitsioon 1.3. Olgu kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Hulka

$$\Big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) : (x, y) \in \mathcal{D} \Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

nimetatakse funktsiooni f *graafikuks.*

Definitsioon 1.4. Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ pidev punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses. Tähistame $M_0 := \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ (märgime, et punkt M_0 asub funktsiooni f graafikul).

Tasandit π nimetatakse funktsiooni f graafiku *puutujatasandiks* punktis M_0, kui graafiku punkte $M := \big(x, y, f(x, y)\big)$ ja M_0 ühendava sirge ning selle tasandi vaheline nurk läheneb protsessis $(x, y) \to (x_0, y_0)$ nullile.

Paneme tähele, et funktsiooni f pidevuse tõttu punktis (x_0, y_0) on punkti (x, y) lähenemine punktile (x_0, y_0) (s.t. koonduvus $(x, y) \to (x_0, y_0)$) samaväärne graafiku punkti $M = \big(x, y, f(x, y)\big)$ lähenemisega punktile M_0 (mööda seda graafikut). Seetõttu sõnastatakse graafiku puutujatasandi definitsioon sageli ka järgmiselt: tasandit π nimetatakse funktsiooni f graafiku *puutujatasandiks* punktis M_0, kui graafiku punkti M lähenemisel punktile M_0 (mööda seda graafikut) läheneb neid punkte ühendava sirge ja selle tasandi vaheline nurk nullile.

Järgnev teoreem ütleb, et *kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab geomeetriliselt selle funktsiooni graafiku (z-teljega mitteparalleelse) puutujatasandi olemasolu vastavas graafiku punktis.*

Teoreem 1.7. *Olgu funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$ pidev punkti $P_0 := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses. Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0, siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis $M_0 := \big(x_0, y_0, f(P_0)\big)$. Selle puutujatasandi võrrand on*

$$z - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,(y - y_0). \tag{1.12}$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni f graafikul eksisteerib punktis M_0 puutujatasand, kusjuures see puutujatasand pole paralleelne z-teljega, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis P_0.

TÕESTUS. Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ diferentseeruv punktis P_0. Veendumaks, et tasand (1.12) on tema graafiku puutujatasand punktis M_0, piisab näidata, et graafiku punkti $M := \big(x, y, f(x, y)\big)$ lähenemisel punktile M_0 (mööda graafikut) läheneb neid punkte läbiva sirge ja selle tasandi vaheline nurk nullile ehk, teisisõnu, tähistades $P := (x, y)$, vektori

$$\overrightarrow{M_0M} = \big(x - x_0, y - y_0, f(P) - f(P_0)\big)$$

ja tasandi (1.12) normaalvektori

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), -1\right)$$

vaheline nurk $\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big)$ läheneb täisnurgale $\frac{\pi}{2}$ protsessis $P \to P_0$. Tähistame

$$\rho := d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Kuna piirprotsess $P \to P_0$ tähendab, et $\rho \to 0$, ning

$$\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \to \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \to 0,$$

siis jääb meil näidata, et $\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Selleks märgime, et

$$\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) = \frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|\,|\vec{n}|}$$

(sümbolid $\big|\overrightarrow{M_0M}\big|$, $|\vec{n}|$ ning $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}$ tähistavad vastavalt vektorite $\overrightarrow{M_0M}$ ja $\vec{n}$ pikkusi ning nende skalaarkorrutist). Kuna funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,(y-y_0) - \big(f(P)-f(P_0)\big) = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \to 0,$$

siis

$$\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\big) = \frac{1}{|\vec{n}|}\,\frac{o(\rho)}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|} = \frac{1}{|\vec{n}|}\,\frac{\rho}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}\,\frac{o(\rho)}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

(sest

$$\big|\overrightarrow{M_0M}\big| = \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 + \big|f(P)-f(P_0)\big|^2} = \sqrt{\rho^2 + \big|f(P)-f(P_0)\big|^2} \geqslant \rho$$

ning seega $0 \leqslant \frac{\rho}{|\overrightarrow{M_0M}|} \leqslant 1$), nagu soovitud.

Teiselt poolt, eksisteerigu funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikul z-teljega mitteparalleelne puutujatasand punktis M_0; olgu selle puutujatasandi võrrand

$$z - f(P_0) = A\,(x-x_0) + B\,(y-y_0). \tag{1.13}$$

Märgime, et $\vec{m} := (A, B, -1)$ on selle puutujatasandi normaalvektor.

Märkides, nagu eelnevaski $P := (x, y)$, $\rho := d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ja $M = \big(x, y, f(x, y)\big) = \big(x, y, f(P)\big)$, piisab funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis P_0 näidata, et

$$\frac{A\,(x-x_0) + B\,(y-y_0) - \big(f(P)-f(P_0)\big)}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

ehk, teisisõnu, $\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Kuna

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\rho} = |\vec{m}|\,\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|\,|\vec{m}|}\,\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho} = |\vec{m}|\,\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M},\vec{m}\big)\,\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho},$$

kusjuures $\cos\angle\big(\overrightarrow{M_0M},\vec{m}\big) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ (sest tasand (1.13) on funktsiooni f graafiku puutujatasand), siis, veendumaks, et $\frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, piisab näidata, et

$$\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho} = O(1) \quad \text{protsessis } \rho\to 0.$$

Selleks, arvestades, et

$$\frac{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|}{\rho} = \frac{\sqrt{\rho^2+\big|f(P)-f(P_0)\big|^2}}{\rho} = \sqrt{1+\left|\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}\right|^2},$$

piisab näidata, et

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho} = O(1) \quad \text{protsessis } \rho\to 0.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned}
&\big|f(P)-f(P_0)\big| \\
&\quad\leqslant \big|f(P)-f(P_0)-A\,(x-x_0)-B\,(y-y_0)\big| + |A|\,|x-x_0| + |B|\,|y-y_0| \\
&\quad= \big|\overrightarrow{ML}\big| + |A|\,|x-x_0| + |B|\,|y-y_0|,
\end{aligned}$$

kus punkt $L := \big(x, y, A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+f(P_0)\big)$ on punkti M läbiva z-teljega paralleelse sirge ja puutujatasandi (1.13) lõikepunkt.

Tähistades tähega N punkti M ristprojektsiooni puutujatasandile (1.13), paneme tähele, et kõik (täisnurksed) kolmnurgad $\triangle MLN$ on sarnased (sest kõik hüpotenuusid ML on paralleelsed – nad on paralleelsed z-teljega – ning kõik kaatetid MN on paralleelsed – nad on risti puutujatasandiga (1.13)), seega leidub konstant $\kappa > 0$ nii, et alati $\big|\overrightarrow{ML}\big| = \kappa\big|\overrightarrow{MN}\big|$. Tähistades tähega ψ punkte M ja M_0 läbiva sirge ja puutujatasandi (1.13) vahelise nurga, saame nüüd, et

$$\frac{\big|\overrightarrow{ML}\big|}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|} = \kappa\,\frac{\big|\overrightarrow{MN}\big|}{\big|\overrightarrow{M_0M}\big|} = \kappa\,\sin\psi \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Siit järeldub, et “piisavalt väikeste” ρ väärtuste korral

$$\big|\overrightarrow{ML}\big| \leqslant \frac{1}{2}\big|\overrightarrow{M_0M}\big| = \frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\big|f(P)-f(P_0)\big|^2} \leqslant \frac{\rho+\big|f(P)-f(P_0)\big|}{2},$$

seega

$$\big|f(P) - f(P_0)\big| \leqslant |A|\,|x - x_0| + |B|\,|y - y_0| + \frac{\rho}{2} + \frac{\big|f(P) - f(P_0)\big|}{2}$$

ning järelikult

$$\frac{\big|f(P) - f(P_0)\big|}{\rho} \leqslant 2|A|\,\frac{|x - x_0|}{\rho} + 2|B|\,\frac{|y - y_0|}{\rho} + 1 \leqslant 2|A| + 2|B| + 1.$$

□

1.5. Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.5. Avaldist

$$du(P_0) := df(P_0) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(P_0)\,\Delta x_m$$

nimetatakse funktsiooni f *(esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks) täisdiferentsiaaliks* punktis P_0, mis vastab argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutudele $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on diferentseeruv hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P, siis, fikseerides argumentide $x_1, \dots, x_m$ muutude väärtused $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ (s.t. lugedes need muudud fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \dots, x_m$) funktsioonina $du = du(P)$ (ehk, teisiti tähistades, $df = df(P)$):

$$du = du(P) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(P)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(P)\,\Delta x_m$$

ehk (jättes eelnevas esituses argumendi P kirjutamata)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\,\Delta x_m.$$

Iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral nimetame *argumendi x_i diferentsiaaliks dx_i* tema muutu Δx_i, s.t.

$$dx_i := \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

See tähistus on motiveeritud järgneva aruteluga: kui tõlgendada argumendi x_i diferentsiaali dx_i (m muutuja) funktsiooni $v = x_i$ diferentsiaalina, siis

$$\begin{aligned} dx_i = dv &= v'_{x_1}\,\Delta x_1 + \cdots + v'_{x_{i-1}}\,\Delta x_{i-1} + v'_{x_i}\,\Delta x_i + v'_{x_{i+1}}\,\Delta x_{i+1} + \cdots + v'_{x_m}\,\Delta x_m \\ &= 0\,\Delta x_1 + \cdots + 0\,\Delta x_{i-1} + 1\,\Delta x_i + 0\,\Delta x_{i+1} + \cdots + 0\,\Delta x_m \\ &= \Delta x_i. \end{aligned}$$

Vastavalt sellele tähistusele

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\,dx_m.$$

Märkus 1.7. Vahetult on kontrollitav, et kui funktsioonid $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ ja $v = g(P) = g(x_1, \ldots, x_m)$ on diferentseeruvad punktis $P_0 \in \mathbb{R}^m$, siis mis tahes arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral ka funktsioon $\alpha\, f + \beta\, g$ on diferentseeruv selles punktis, kusjuures

$$d(\alpha\, f + \beta\, g)(P_0) = \alpha\, df(P_0) + \beta\, dg(P_0).$$

1.6. Mitme muutuja liitfunktsioonide diferentseerimine

Olgu funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^l$ määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) &&= \phi_1(t_1, \ldots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) &&= \phi_2(t_1, \ldots, t_l), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots &&\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_m &= \phi_m(Q) &&= \phi_m(t_1, \ldots, t_l) \end{aligned}$$

sellised, et

$$\mathcal{D} \supset \big\{(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)) : Q \in \Delta\big\}.$$

Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$\begin{aligned} u = g(Q) = g(t_1, \ldots, t_l) &:= f\big(\phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q)\big) \\ &= f\big(\phi_1(t_1, \ldots, t_l), \ldots, \phi_m(t_1, \ldots, t_l)\big), \quad Q = (t_1, \ldots, t_l) \in \Delta. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Teoreem 1.8. *Olgu funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_m$ diferentseeruvad punktis*

$$Q_0 = (t_1^0, \ldots, t_l^0) \in \Delta$$

ning olgu funktsioon f diferentseeruv punktis

$$P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) = \big(\phi_1(Q_0), \ldots, \phi_m(Q_0)\big) \in \mathcal{D}.$$

Siis ka liitfunktsioon (1.14) *on diferentseeruv punktis Q_0. Seejuures iga $j \in \{1, \ldots, l\}$ korral*

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}(Q_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\,\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0).$$

TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et funktsiooni $u = g(Q)$ muut punktis Q_0, mis vastab argumentide $t_1, \ldots, t_l$ muutudele $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_l$,

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l) - g(t_1^0, \ldots, t_l^0) \\ &= f\big(\phi_1(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l), \ldots, \phi_m(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_l^0 + \Delta t_l)\big) \\ &\qquad\qquad - f\big(\phi_1(t_1^0, \ldots, t_l^0), \ldots, \phi_m(t_1^0, \ldots, t_l^0)\big) \end{aligned}$$

esitub kujul

$$\Delta u = C_1\,\Delta t_1 + \cdots + C_l\,\Delta t_l + \gamma_1\,\Delta t_1 + \cdots + \gamma_l\,\Delta t_l,$$

kus iga $j \in \{1,\ldots,l\}$ korral

$$C_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\,\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0)$$

ning, tähistades $r := \sqrt{\Delta t_1^2 + \cdots + \Delta t_l^2}$, funktsioon $\gamma_j = \gamma_j(\Delta t_1,\ldots,\Delta t_l)$ rahuldab tingimust $\gamma_j \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0 esitub argumentide $x_1,\ldots,x_m$ muutudele $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$ vastav funktsiooni f muut punktis P_0 valemiga

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)\,\Delta x_m + \alpha_1\,\Delta x_1 + \cdots + \alpha_m\,\Delta x_m,$$

kus $P = (x_1 + \Delta x_1,\ldots,x_m + \Delta x_m)$ ning iga $i \in \{1,\ldots,m\}$ korral funktsioon $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ (siin, nagu kõikjal, $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$). Tähistame edaspidises

$$\Delta x_i := \phi_i(t_1^0 + \Delta t_1,\ldots,t_l^0 + \Delta t_l) - \phi_i(t_1^0,\ldots,t_l^0), \quad i = 1,\ldots,m.$$

Kuna funktsioonid $\phi_1,\ldots,\phi_m$ on diferentseeruvad punktis Q_0, siis iga $i \in \{1,\ldots,m\}$ korral

$$\Delta x_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t_1}(Q_0)\,\Delta t_1 + \cdots + \frac{\partial \phi_i}{\partial t_l}(Q_0)\,\Delta t_l + \beta_1^i\,\Delta t_1 + \cdots + \beta_l^i\,\Delta t_l,$$

kus iga $j \in \{1,\ldots,l\}$ korral funktsioon $\beta_j^i = \beta_j^i(\Delta t_1,\ldots,\Delta t_l)$ rahuldab tingimust $\beta_j^i \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ (siin, nagu ennegi, $r = \sqrt{\Delta t_1^2 + \cdots + \Delta t_l^2}$). Niisiis,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i\right)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) + \beta_j^i\right)\Delta t_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\,\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0)\right)\Delta t_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i\right)\beta_j^i + \alpha_i\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0)\right)\right)\Delta t_j \\
&= C_1\,\Delta t_1 + \cdots + C_l\,\Delta t_l + \gamma_1\,\Delta t_1 + \cdots + \gamma_l\,\Delta t_l,
\end{aligned}$$

kus

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i\right)\beta_j^i + \alpha_i\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0)\right), \quad j = 1,\ldots,l.$$

Teoreemi tõestuseks jääb veenduda, et funktsioonid $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ rahuldavad tingimust $\gamma_j \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, $j = 1, \ldots, l$. Selleks piisab näidata, et iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral $\alpha_i \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, milleks arvestades, et $\alpha_i \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, piisab näidata, et $\rho \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Kuna funktsioonide $\phi_1, \ldots, \phi_m$ diferentseeruvusest punktis Q_0 järeldub nende funktsioonide pidevus selles punktis, siis iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral $\Delta x_i \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, järelikult $\rho \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, nagu soovitud. □

Konkreetsuse mõttes sõnastame teoreemi 1.8 eraldi juhu jaoks, kus $m = 3$ ja $l = 2$.

Olgu funktsioon
$$w = f(P) = f(x, y, z)$$
määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ning olgu hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ määratud funktsioonid
$$x = x(Q) = x(u, v), \quad y = y(Q) = y(u, v), \quad z = z(Q) = z(u, v) \tag{1.15}$$
sellised, et
$$\mathcal{D} \supset \Big\{\big(x(Q), y(Q), z(Q)\big) \colon Q \in \Delta\Big\}.$$
Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni
$$w = g(Q) = g(u, v) := f\big(x(Q), y(Q), z(Q)\big) = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big), \\ Q = (u, v) \in \Delta. \tag{1.16}$$

Teoreem 1.9. *Olgu funktsioonid* (1.15) *diferentseeruvad punktis* $Q_0 = (u_0, v_0) \in \Delta$ *ning olgu funktsioon* f *diferentseeruv punktis*
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(x(Q_0), y(Q_0), z(Q_0)\big) \in \mathcal{D}.$$
Siis ka liitfunktsioon (1.16) *on diferentseeruv punktis* Q_0*. Seejuures*
$$\frac{\partial g}{\partial u}(Q_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\frac{\partial x}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\frac{\partial y}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,\frac{\partial z}{\partial u}(Q_0),$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(Q_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\frac{\partial x}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\frac{\partial y}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,\frac{\partial z}{\partial v}(Q_0).$$

Järeldus 1.10 (Lagrange'i keskväärtusteoreem mitme muutuja funktsioonide jaoks)**.** *Olgu funktsioon* $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *pidev punktides* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0), P = (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$*, kus* $P \neq P_0$*, ja diferentseeruv neid punkte ühendava sirglõigu igas punktis, välja arvatud, võib-olla, punktides* P_0 *ja* P *endis. Siis leidub reaalarv* $\theta \in (0, 1)$ *nii, et*
$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)\,\Delta x_i$$
ehk, teisissõnu, punkte P_0 *ja* P *ühendaval sirglõigul leidub punkt* R *nii, et*
$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(R)\,\Delta x_i.$$

TÕESTUS. Vaatleme funktsiooni

$$\Phi(t) = f(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m) = f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big), \quad t \in [0,1],$$

kus $\phi_i(t) = x_i^0 + t\,\Delta x_i$, $i = 1, \dots, m$; siis $f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0)$. Funktsioon Φ rahuldab lõigus $[0,1]$ kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi – ta on selles lõigus pidev ning, vastavalt teoreemile 1.8, vahemikus $(0,1)$ diferentseeruv, sest mis tahes $t \in (0,1)$ korral funktsioonid $\phi_1, \dots, \phi_m$ on diferentseeruvad punktis t ning funktsioon f on diferentseeruv punktis

$$P_t := \big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big) = (x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m);$$

seejuures

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_t)\,\phi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_t)\,\phi_m'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t)\,\Delta x_i.$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub arv $\theta \in (0,1)$ nii, et $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)$ ning järelikult, tähistades $R := P_\theta = (x_1^0 + \theta\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta\,\Delta x_m)$,

$$f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_\theta)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(R)\,\Delta x_i.$$

□

Jaotise (ja ühtlasi paragrahvi) lõpetuseks tõestame järeldusena Lagrange'i keskväärtusteoreemist mitme muutuja funktsioonide jaoks (s.t. järeldusest 1.10) järgneva teoreemi 1.11, millel on (läbi lause V.5.5, (cc)) oluline roll muutuja vahetuse valemi (teoreemi V.5.3)) tõestuses kordse integraali jaoks.

Teoreem 1.4 ütleb (muuhulgas), et kui m muutuja funktsioon f on diferentseeruv punktis $P = (x_1, \dots, x_m)$, siis, tähistades $\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ ja $P + \Delta P := (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$, vahe

$$\alpha(P, \Delta P) := f(P + \Delta P) - f(P) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P)\,\Delta x_m\right)$$

rahuldab tingimust $\frac{\alpha(P,\Delta P)}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, kus $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$. Järgnev teoreem 1.11 ütleb, et kui funktsioonil f eksisteerivad pidevad osatuletised lahtises hulgas $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, siis mis tahes tõkestatud (ruumis $\mathbb{R}^m$) kinnise alamhulga $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ korral on see koonduvus ühtlane punktide $P \in \mathcal{K}$ suhtes.

Teoreem 1.11. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ lahtises hulgas $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ pidevad osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) kõigi argumentide järgi ning olgu tõkestatud alamhulk $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ kinnine ruumis $\mathbb{R}^m$. Tähistame punktide $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ korral $P + \Delta P := (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$. Siis*

$$\frac{f(P + \Delta P) - f(P) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P)\,\Delta x_m\right)}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

ühtlaselt punktide $P \in \mathcal{K}$ suhtes.

TÕESTUS. Olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et mis tahes punkti $\Delta P = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ korral, mis rahuldab tingimust $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \delta$, kehtib tingimus

$$f(P + \Delta P) - f(P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\,\Delta x_i < \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\Delta x_i|^2} \quad \text{iga } P \in \mathcal{K} \text{ korral.} \tag{1.17}$$

Selleks valime reaalarvu $\gamma > 0$ nii, et $\overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$ iga $P \in \mathcal{K}$ korral (meenutame, et sümbol $\overline{B}(P, \gamma)$ tähistab kinnist kera ruumis $\mathbb{R}^m$ keskpunktiga $P \in \mathbb{R}^m$ ja raadiusega $\gamma > 0$, s.t. $\overline{B}(P, \gamma) := \{Q \in \mathbb{R}^m \colon d(P, Q) \leqslant \gamma\}$); siis ühend $\mathcal{D} := \bigcup_{P \in \mathcal{K}} \overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$ on (ruumis $\mathbb{R}^m$) kinnine tõkestatud hulk (nii sellise reaalarvu $\gamma > 0$ olemasolu kui ka ühendi $\mathcal{D}$ kinnisus ja tõkestatus on tõestatud ülesandes I.2.6).

Olgu $\Delta P = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ selline, et $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \gamma$ ning olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{K}$ suvaline. Siis Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal mitme muutuja funktsioonide jaoks (s.t. järelduse 1.10 põhjal) leidub reaalarv $\theta \in (0, 1)$ nii, et

$$f(P + \Delta P) - f(P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P + \theta \Delta P)\,\Delta x_i,$$

kus $P + \theta \Delta P := (x_1 + \theta \Delta x_1, \ldots, x_m + \theta \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$. Seega Rogers–Hölderi võrratuse põhjal (vt teoreemi I.1.2)

$$\begin{aligned} f(P + \Delta P) - f(P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P + \theta \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \right) \Delta x_i \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(P + \theta \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \right|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\Delta x_i|^2}. \end{aligned}$$

Cantori teoreemi I.4.9 põhjal leidub reaalarv $\delta_0 > 0$ nii, et

$$\Big[Q, R \in \mathcal{D},\ d(Q, R) < \delta_0\Big] \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(R) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Arvestades, et $d(P, P + \theta \Delta P) = \theta \rho < \rho$, järeldub eelnevast, et kui punkt $\Delta P = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ rahuldab tingimust $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \min\{\gamma, \delta_0\} =: \delta$. siis kehtib tingimus (1.17) (PÕHJENDADA!). □

§ 2. Tuletis etteantud suunas. Gradient

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning läbigu punkti P_0 suunatud telg l, mille suund on määratud vektoriga $\vec{s} = (a_1, \dots, a_m)$. Olgu $\vec{s_0} = (c_1, \dots, c_m)$ vektori $\vec{s}$ suunaline ühikvektor, s.t. $\vec{s}_0 := \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$, kus sümbol $|\vec{s}|$ tähistab vektori $\vec{s}$ pikkust.

Märkus 2.1. Kui $m = 2$ või $m = 3$, siis vektori $\vec{s}$ suunalise (ja ühtlasi telje l suunalise) ühikvektori $\vec{s_0} = (c_1, \dots, c_m)$ koordinaadid on vastavalt vektori $\vec{s}$ ja x_1-telje, vektori $\vec{s}$ ja x_2-telje jne vaheliste nurkade koosinused:

$$c_i = \cos\alpha_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

kus α_i on nurk vektori $\vec{s}$ ja x_i-telje vahel (ehk, teisisõnu, nurk telje l ja x_i-telje vahel ehk nurk vektori $\vec{s}_0$ ja x_i telje vahel).

Veendume selles. Vaatleme ainult juhtu, kus $m = 3$ (juhtu, kus $m = 2$, käsitletakse analoogiliselt). Tähistades sümbolitega $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ ja $\vec{x}_3$ vastavalt x_1-, x_2- ja x_3-telje suunalised ühikvektorid, s.t. $\vec{x}_1 := (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 := (0, 1, 0)$ ja $\vec{x}_3 := (0, 0, 1)$, saame ühelt poolt

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{x}_1 = c_1\, 1 + c_2\, 0 + c_3\, 0 = c_1,$$

teiselt poolt aga

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{x}_1 = |\vec{s}_0|\, |\vec{x}_1|\, \cos\alpha_1 = \cos\alpha_1;$$

niisiis $c_1 = \cos\alpha_1$. Võrdused $c_2 = \cos\alpha_2$ ja $c_3 = \cos\alpha_3$ tõestatakse analoogiliselt.

Definitsioon 2.1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks punktis* P_0 *telje* l *suunas* (või *vektori* $\vec{s}$ *suunas*) ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(P_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_1^0, \dots, x_m^0), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}(x_1^0, \dots, x_m^0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_1^0, \dots, x_m^0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(x_1^0, \dots, x_m^0).$$

Toome välja mõned (vahetult definitsioonist 2.1 järelduvad) edasises kasulikuks osutuda võivad valemid tuletise $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0)$ arvutamiseks: kui see tuletis eksisteerib, siis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + tc_1, \dots, x_m^0 + tc_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x_1^0 + \tau|\vec{s}|c_1, \dots, x_m^0 + \tau|\vec{s}|c_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\tau|\vec{s}|} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + ta_1, \dots, x_m^0 + ta_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t|\vec{s}|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}) - f(P_0)}{t|\vec{s}|}.
\end{aligned}$$

Märkus 2.2. Vahetult definitsioonist järeldub, et funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ osatuletised punktis P_0 vastavalt muutujate $x_1, \dots, x_m$ järgi on funktsiooni f tuletised punktis P_0 vastavalt x_1-telje, x_2-telje jne suunas. (Eriti selgelt on see näha eelneva võrratusteahela teisest võrdusest.)

Definitsioon 2.2. Vektorit

$$\mathrm{grad} f(P_0) := \nabla f(P_0) := \big(f'_{x_1}(P_0), \dots, f'_{x_m}(P_0)\big)$$

nimetatakse funktsiooni f *gradiendiks* punktis P_0.

Sümbolit ∇ loetakse: "nabla" või "atled". Nimetus "nabla" tuleb heebreakeelsest sõnast vanaaegse harfisarnase muusikariista kohta – elava fantaasiaga lugeja suudab kindlasti leida teatava sarnasuse selle sümboli ja harfi vahel; "atled" on "delta" loetuna tagant ettepoole, sümbol ∇ on tagurpidi sümbol Δ!

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsioonil f eksisteerib punktis P_0 tuletis mis tahes vektori $\vec{s} \neq \vec{0} := (\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ arvu } 0})$ suunas, kusjuures see tuletis on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ ja vektori $\vec{s}$ suunalise ühikvektori skalaarkorrutisega:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}. \tag{2.1}$$

Esitame teoreemile 2.1 kaks tõestust, millest esimene toetub vahetult funktsiooni diferentseeruvuse definitsioonile ning teine liitfunktsiooni diferentseerimise reeglile teoreemile 1.8.

Teoreemi 2.1 tõestus, mis toetub funktsiooni diferentseeruvuse definitsioonile. Olgu $\vec{s}_0 = (c_1, \dots, c_m)$ vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunaline ühikvektor, s.t. $\vec{s}_0 = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$. Teoreemi tõestuseks tuleb näidata, et

$$\frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} f'_{x_1}(P_0)\, c_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\, c_m. \tag{2.2}$$

Funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis P_0 esitub selle funktsiooni muut punktis P_0, mis vastab argumentide muutudele $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, kasutades tähistust $\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$, valemiga

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = f'_{x_1}(P_0)\, \Delta x_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\, \Delta x_m + \alpha(\Delta P), \tag{2.3}$$

kus funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust

$$\frac{\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0 \tag{2.4}$$

(siin, nagu kõikjal, $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$). Valemi (2.3) põhjal, arvestades, et $t\vec{s}_0 = (tc_1, \dots, tc_m)$,

$$\begin{aligned} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t} &= \frac{f'_{x_1}(P_0)\, tc_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\, tc_m + \alpha(tc_1, \dots, tc_m)}{t} \\ &= f'_{x_1}(P_0)\, c_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\, c_m + \frac{\alpha(tc_1, \dots, tc_m)}{t}. \end{aligned}$$

Kuna $\dfrac{\alpha(tc_1,\ldots,tc_m)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ (see järeldub koonduvusest (2.4) (PÕHJENDADA!)), siis (2.2) kehtib. $\square$

TEOREEMI 2.1 TÕESTUS, MIS TOETUB LIITFUNKTSIOONI DIFERENTSEERIMISE REEGLILE. Olgu $\vec{s}_0 = (c_1,\ldots,c_m)$ vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunaline ühikvektor, s.t. $\vec{s}_0 = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$. Defineerime funktsiooni

$$g(t) := f(P_0 + t\vec{s}_0) = f(x_1^0 + tc_1, \ldots, x_m^0 + tc_m).$$

Kuna funktsioon f on määratud punkti P_0 mingis ümbruses, siis funktsioon g on määratud punkti $t = 0$ teatavas ümbruses. Kuna $g(0) = f(P_0)$, siis tuletis $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t}$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib tuletis $g'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(t) - g(0)}{t}$; seejuures need kaks tuletist on võrdsed. Seega piisab teoreemi tõestuseks näidata, et eksisteerib tuletis $g'(0)$, kusjuures $g'(0) = \nabla f(P_0) \cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$.

Funktsioon g on tõlgendatav liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)\big),$$

kus $\phi_i(t) = x_i^0 + tc_i$, $i = 1, \ldots, m$. Kuna

- funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_m$ on diferentseeruvad punktis 0, kusjuures $\phi_i'(0) = c_i$, $i = 1, \ldots, m$;
- funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) = \big(\phi_1(0), \ldots, \phi_m(0)\big)$,

siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi 1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$g'(0) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(P_0)\, \phi_i'(0) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(P_0)\, c_i = \nabla f(P_0) \cdot \vec{s}_0 = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|},$$

nagu soovitud. $\square$

Märkus 2.3. Kui teoreemis 2.1 loobuda eeldusest funktsiooni f diferentseeruvuse kohta punktis P_0, siis valem (2.1) üldjuhul ei kehti.

Näide 2.1. Vaatleme kolme muutuja funktsiooni

$$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}.$$

Sellel funktsioonil on punktis $(0,0,0)$ olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui $\vec{s} = (a, b, c)$ on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb, 0 + tc) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{ta\,tb\,tc}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt[3]{abc}}{t} = \sqrt[3]{abc}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0,0,0)$ lõplikud osatuletised muutujate x, y ja z järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt x-, y- ja z-telje suunas), kusjuures

$$f'_x(0,0,0) = f'_y(0,0,0) = f'_z(0,0,0) = 0;$$

niisiis $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$. Seega mis tahes ühikvektori $\vec{s} = (a,b,c)$ korral

$$\nabla f(0,0,0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b + 0c = 0,$$

kuid $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0,0) = \sqrt[3]{abc} \neq 0$, kui $a,b,c \neq 0$.

Näide 2.2. Vaatleme kahe muutuja funktsiooni

$$z = f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

Sellel funktsioonil on punktis $(0,0)$ olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui $\vec{s} = (a,b)$ on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 a^2\, tb}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt[3]{a^2 b}}{t} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil f eksisteerivad punktis $(0,0)$ lõplikud esimest järku osatuletised muutujate x ja y järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt vektorite $(1,0)$ ja $(0,1)$ suunas), kusjuures

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0;$$

niisiis $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Seega mis tahes ühikvektori $\vec{s} = (a,b)$ korral

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b = 0,$$

kuid $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = \sqrt[3]{a^2 b} \neq 0$, kui $a,b \neq 0$.

Teoreem 2.2. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1,\ldots,x_m)$ diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsiooni f tuletis punktis P_0 mis tahes suunas ei ületa tema tuletist selles punktis gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas (ehk, teisisõnu, tuletis gradiendi suunas on kõikvõimalikes suundades võetud tuletiste maksimaalne väärtus). Funktsiooni f tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkusega $|\nabla f(P_0)|$.*

Tõestus. Funktsiooni f tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on teoreemi 2.1 põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f(P_0)}(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} = \frac{|\nabla f(P_0)|^2}{|\nabla f(P_0)|} = |\nabla f(P_0)|,$$

s.t. see tuletis on võrdne gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkusega.

Mis tahes $\vec{s} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{s} \neq \vec{0}$, korral, defineerides $\vec{s}_0 = (c_1,\ldots,c_m) := \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ (s.t. $\vec{s}_0$ on vektori $\vec{s}$ suunaline ühikvektor), on funktsiooni f tuletis punktis P_0 vektori $\vec{s}$ suunas teoreemi 2.1 ja Rogers–Hölderi võrratuse (vt teoreemi I.1.2) põhjal

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) &= \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \nabla f(P_0) \cdot \vec{s}_0 = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0)\, c_i \leqslant \sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(P_0)|\, |c_i| \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(P_0)|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m |c_i|^2} = |\nabla f(P_0)|\, |\vec{s}_0| = |\nabla f(P_0)|,\end{aligned} \tag{2.5}$$

s.t. see tuletis ei ületa funktsiooni f tuletist punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas. □

Märkus 2.4. Võrratusteahelast (2.5) ja ülesandest I.1.2 järeldub, et teoreemis 2.2 (s.t. punktis P_0 diferentseeruva funktsiooni f korral) punktis P_0 kõikvõimalikes suundades võetud (funktsiooni f) tuletiste maksimaalne väärtus $\left|\nabla f(P_0)\right|$ (gradiendi $\nabla f(P_0)$ pikkus) saavutatakse *parajasti* gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas.

Märkus 2.5. Kui $m = 2$ või $m = 3$, siis võime teoreemi 2.2 tõestuses Rogers–Hölderi võrratuse asemel toetuda trigonomeetria-alastele teadmistele. Esitame niisuguse tõestuse.

TEOREEMI 2.2 TÕESTUS JUHTUDE $m = 2$ JA $m = 3$ JAOKS, MIS EI KASUTA ROGERS–HÖLDERI VÕRRATUST. Funktsiooni f tuletis punktis P_0 vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ suunas on teoreemi 2.1 põhjal, tähistades sümboliga θ nurga selle vektori ja gradiendi $\nabla f(P_0)$ vahel,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\left|\nabla f(P_0)\right| |\vec{s}| \cos\theta}{|\vec{s}|} = \left|\nabla f(P_0)\right| \cos\theta.$$

Näeme, et sellel tuletisel on suurim võimalik väärtus parajasti juhul, kui $\cos\theta = 1$, s.t. $\theta = 0$ ehk, teisisõnu, vektori $\vec{s}$ ja gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunad ühtivad. Eelnevast võrdusteahelast näeme ka, et tuletis punktis P_0 gradiendi $\nabla f(P_0)$ suunas on

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f(P_0)}(P_0) = \left|\nabla f(P_0)\right| \cos 0 = \left|\nabla f(P_0)\right|.$$

□

§ 3. Kõrgemat järku osatuletised ja diferentsiaalid

3.1. Kõrgemat järku osatuletised

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kui funktsioonil f eksisteerib igas punktis P punkti P_0 mingist ümbrusest $\mathcal{U}$ lõplik osatuletis $f'_{x_i}(P)$, siis selles ümbruses on määratud osatuletisfunktsioon

$$f'_{x_i} \colon \mathcal{U} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 3.1. Olgu $j \in \{1, \ldots, m\}$. Kui osatuletisfunktsioonil f'_{x_i} eksisteerib punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) osatuletis muutuja x_j järgi $(f'_{x_i})'_{x_j}(P_0)$, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *osatuletiseks punktis* P_0 *(muutujate* x_i *ja* x_j *järgi)* ning tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}(P_0), \quad f''_{x_i x_j}(P_0), \quad u''_{x_i x_j}(P_0), \quad f_{x_i x_j}(P_0), \quad u_{x_i x_j}(P_0) \tag{3.1}$$

või

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad f''_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u''_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$
$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_m^0).$$

Seejuures, kui $j \neq i$, siis seda teist järku osatuletist nimetatakse *segaosatuletiseks.*

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik teist järku osatuletis $f''_{x_i x_j}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(teist järku) osatuletisfunktsioon (argumentide* x_i *ja* x_j *järgi)*

$$f''_{x_i x_j} \colon \mathcal{D} \ni P \longmapsto f''_{x_i x_j}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni f) *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *osatuletiseks (argumentide* x_i *ja* x_j *järgi).* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}, \quad f''_{x_i x_j}, \quad u''_{x_i x_j}, \quad f_{x_i x_j}, \quad u_{x_i x_j}. \tag{3.2}$$

Tähistused (3.1) on tähistustega (3.2) hästi kooskõlas: (lõplik) teist järku osatuletis antud punktis on vastava osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Üldiselt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big)}{\partial x_j}, \quad f''_{x_i x_j} = (f'_{x_i})'_{x_j}, \quad u''_{x_i x_j} = (u'_{x_i})'_{x_j},$$
$$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j}, \quad u_{x_i x_j} = (u_{x_i})_{x_j}.$$

Me kasutame tähistusi (juhu $j = i$ jaoks)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_i} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_i} =: \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \begin{aligned} f''_{x_ix_i} &=: f''_{x_i^2}, \quad u''_{x_ix_i} =: u''_{x_i^2}, \\ f_{x_ix_i} &=: f_{x_i^2}, \quad u_{x_ix_i} =: u_{x_i^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Näide 3.1. Leiame funktsiooni

$$u = f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

teist järku osatuletised. Kui $(x,y) \neq (0,0)$, saame vahetult diferentseerides

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

millest sümmeetria põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2};$$

seega, jällegi vahetult diferentseerides,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)'_x = \frac{-4x^3y^3 + 12xy^5}{(x^2+y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3},$$

millest sümmeetria põhjal vastavalt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-12x^5y + 4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Leiame funktsiooni f esimest järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Nüüd saame leida funktsiooni f teist järku osatuletised punktis $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^5}{h^5} = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Üldiselt, (m muutuja) funktsiooni *kõrgemat järku osatuletised* defineeritakse rekurrentselt, sarnaselt teist järku osatuletistega. Haarame järgnevas kaasa ka (eelnevas juba defineeritud) teist järku osatuletiste juhu.

Olgu $n \geqslant 2$, kusjuures eeldame, et meil on defineeritud m muutuja funktsiooni $(n-1)$-järku osatuletisfunktsioonid.

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses ning olgu $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$. Eksisteerigu funktsioonil f igas punktis P punkti P_0 mingist ümbrusest $\mathcal{U}$ lõplik $(n-1)$-järku osatuletis $f^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}}(P)$ (muutujate $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}$ järgi). Siis selles ümbruses on määratud $(n-1)$-järku osatuletisfunktsioon

$$f^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}} : \mathcal{U} \ni P \longmapsto f^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}}(P) \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 3.2. Kui $(n-1)$-järku osatuletisfunktsioonil $f^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}}$ eksisteerib punktis P_0 (lõplik või lõpmatu) osatuletis muutuja x_{i_n} järgi $\big(f^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}}\big)'_{x_{i_n}}(P_0)$, siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni f *n-ndat järku* (ehk lihtsalt *n-ndaks*) *osatuletiseks punktis P_0 (muutujate $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi)* ja tähistatakse sümbolitega

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0), \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0), \quad f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(P_0), \quad u^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(P_0), \\ &\qquad\qquad f_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(P_0), \quad u_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(P_0) \end{aligned} \tag{3.4}$$

või

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \\ &\qquad f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \\ &\qquad\qquad f_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad u_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(x_1^0, \ldots, x_m^0). \end{aligned}$$

Seejuures, kui mõned indeksitest $i_1, \ldots, i_n$ pole omavahel võrdsed (s.t. tegemist pole olukorraga, kus $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ on üks ja sama muutuja), siis seda n-ndat järku osatuletist nimetatakse *segaosatuletiseks.*

Kui mingi hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P eksisteerib lõplik n-ndat järku osatuletis $f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(P)$, siis hulgas $\mathcal{D}$ on määratud *(n-ndat järku) osatuletisfunktsioon (argumentide $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi)*

$$f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}} : \mathcal{D} \ni P \longmapsto f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni f) *n-ndat järku* (ehk lihtsalt *n-ndaks*) *osatuletiseks (argumentide $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi).* Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}, \quad f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}, \quad u^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}, \quad f_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}, \quad u_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}. \tag{3.5}$$

Tähistused (3.4) on tähistustega (3.5) hästi kooskõlas: (lõplik) n-ndat järku osatuletis antud punktis on vastava osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

Üldiselt,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right)}{\partial x_{i_n}},\quad \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right)}{\partial x_{i_n}},$$

$$f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}=(f^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}})'_{x_{i_n}},\quad u^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}=(u^{(n-1)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}})'_{x_{i_n}},$$

$$f_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}=(f_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}},\quad u_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}=(u_{x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}}.$$

Märkus 3.1. Märkimaks funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ n-ndat järku osatuletist muutujate $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ järgi, kasutatakse tähistuste (3.5) kõrval sageli ka tähistusi

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}f \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^n}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}u;$$

niisiis (kooskõlas märkuses 1.1 kirjeldatud tähistustega)

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}f=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}f\right).$$

Mitme muutuja funktsioonide kõrgemat järku osatuletiste märkimisel kasutatakse teist järku osatuletiste puhul kasutatavate lihtsustavate tähistuste (3.3) analooge: näiteks kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, x)$ korral

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial x}=:\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\quad f'''_{xxx}=:f'''_{x^3},$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x\,\partial z\,\partial z\,\partial x\,\partial y}=:\frac{\partial^5 f}{\partial x\,\partial z^2\,\partial x\,\partial y},\quad f^{(5)}_{yxzzx}=:f^{(5)}_{yxz^2x},$$

$$\frac{\partial^6 f}{\partial y\,\partial y\,\partial y\,\partial x\,\partial z\,\partial z}=:\frac{\partial^6 f}{\partial y^3\,\partial x\,\partial z^2},\quad f^{(6)}_{zzxyyy}=:f^{(6)}_{z^2xy^3}.$$

Definitsioon 3.3. Olgu $n \geqslant 2$. Öeldakse, et m muutuja funktsioon f on n *korda diferentseeruv* punktis $P \in \mathbb{R}^m$, kui funktsioonil f eksisteerivad selle punkti mingis ümbruses kõikvõimalikud $(n-1)$-järku osatuletised, kusjuures need osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) on punktis P diferentseeruvad.

3.2. Piisavaid tingimusi segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast

Eelneva punkti näite 3.1 funktsiooni $u = f(x, y)$ puhul kehtis väljaspool punkti $(0, 0)$ võrdus $f''_{xy} = f''_{yx}$, s.t. samade muutujate järgi võetud segaosatuletis ei sõltunud diferentseerimise järjekorrast. Samas pole see mitte alati nii: selles samas näites $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Selles punktis anname mõned piisavad tingimused segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast.

Teoreem 3.1. *Olgu funktsioon* $u = f(P) = f(x, y)$ *kaks korda diferentseeruv punktis* $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Siis*

$$f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P).$$

Tõestus. Teoreemi eeldustel leidub reaalarv $d > 0$, mille korral funktsioonil f eksisteerivad (esimest järku) osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) f'_x ja f'_y punkti $P = (x, y)$ ümbruses $(x - d, x + d) \times (y - d, y + d)$. Defineerime funktsiooni

$$\Phi(h) = f(x + h, y + h) - f(x + h, y) - \big(f(x, y + h) - f(x, y)\big), \quad h \in (-d, d). \tag{3.6}$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et, ühelt poolt,

$$\Phi(h) = f''_{xy}(x, y)\, h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \to 0 \tag{3.7}$$

ning, teiselt poolt,

$$\Phi(h) = f''_{yx}(x, y)\, h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \to 0, \tag{3.8}$$

sest nende esituste kehtides $f''_{xy}(x, y) + \frac{o(h^2)}{h^2} = f''_{yx}(x, y) + \frac{o(h^2)}{h^2}$ protsessis $h \to 0$, millest järeldub, et $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Esituse (3.7) saamiseks fikseerime vabalt $h \in (-d, d)\backslash\{0\}$ ja defineerime funktsiooni

$$\phi(\xi) = f(\xi, y + h) - f(\xi, y), \quad \xi \in (x - d, x + d); \tag{3.9}$$

siis

$$\Phi(h) = \phi(x + h) - \phi(x).$$

Kuna funktsioon ϕ rahuldab lõigus $[x, x + h]$ (või lõigus $[x + h, x]$, kui $h < 0$) kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi, kusjuures

$$\phi'(\xi) = f'_x(\xi, y + h) - f'_x(\xi, y),$$

siis leidub arv $\theta \in (0, 1)$ nii, et

$$\Phi(h) = \phi(x+h) - \phi(x) = \phi'(x+\theta h)\, h = \big(f'_x(x+\theta h, y+h) - f'_x(x+\theta h, y)\big)\, h. \tag{3.10}$$

Kuna osatuletis(funktsioon) f'_x on diferentseeruv punktis $P = (x, y)$, siis tema muut punktis P esitub kujul

$$\begin{aligned} &f'_x(x + \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x, y) \\ &\qquad = f''_{xx}(x, y)\, \Delta x + f''_{xy}(x, y)\, \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\, \Delta y, \end{aligned}$$

kus funktsioonid α_1 ja α_2 rahuldavad tingimust $\alpha_i(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0$, $i = 1, 2$. Seega

$$\begin{aligned} &f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x + \theta h, y) \\ &\qquad = f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x, y) - \big(f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)\big) \\ &\qquad = f''_{x^2}(x, y)\, \theta h + f''_{xy}(x, y)\, h + \alpha_1(\theta h, h)\, \theta h + \alpha_2(\theta h, h)\, h \\ &\qquad\qquad - \big(f''_{x^2}(x, y)\, \theta h + \alpha_1(\theta h, 0)\, \theta h\big) \\ &\qquad = f''_{xy}(x, y)\, h + \alpha_1(\theta h, h)\, \theta h + \alpha_2(\theta h, h)\, h - \alpha_1(\theta h, 0)\, \theta h. \end{aligned}$$

Niisiis, arvestades, et $\alpha_1(\theta h, h)\,\theta h + \alpha_2(\theta h, h)\,h - \alpha_1(\theta h, 0)\,\theta h = o(h)$ protsessis $h \to 0$,

$$\Phi(h) = \big(f''_{xy}(x,y)\,h + o(h)\big)h = f''_{xy}(x,y)\,h^2 + o(h)\,h = f''_{xy}(x,y)\,h^2 + o(h^2)$$
$$\text{protsessis } h \to 0.$$

Esitus (3.8) saadakse sümmeetria põhjal. □

Järgnev teoreem ütleb, et teoreemi 2.1 väide jääb kehtima ka veidi teistsuguste eelduste korral.

Teoreem 3.2. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x,y)$ punkti $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses segaosatuletised f''_{xy} ja f''_{yx}, kusjuures need osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) on pidevad punktis P. Siis*

$$f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P).$$

Tõestus. Teoreemi tõestus on oma üldideelt sarnane teoreemi 3.1 tõestusega. Tehtud eeldustel leidub reaalarv $d > 0$, mille korral funktsioonil f eksisteerivad punkti $P = (x,y)$ ümbruses $\mathcal{D} := (x-d, x+d) \times (y-d, y+d)$ teist järku osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) f''_{xy} ja f''_{yx} (ning seega ühtlasi ka esimest järku osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) f'_x ja f'_y). Defineerides funktsiooni (3.6), piisab (analoogiliselt teoreemi 3.1 tõestusele) saada esitused (3.7) ja (3.8).

Täpselt nagu ka teoreemi 3.1 tõestuses defineeritakse esituse (3.7) saamiseks kõigepealt funktsioon (3.9) ning seejärel saadakse (ühe muutuja funktsiooni) Lagrange'i keskväärtusteoreemile toetudes esitus (3.10). Kuna funktsioonil f eksisteerib ristkülikus $\mathcal{D}$ lõplik segaosatuletis f''_{xy}, siis funktsioon

$$v(\eta) = f'_x(x + \theta h, \eta), \quad \eta \in (y-d, y+d),$$

rahuldab lõigus $[y, y+h]$ (või lõigus $[y+h, y]$, kui $h < 0$) kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi, kusjuures

$$v'(\eta) = f''_{xy}(x + \theta h, \eta),$$

järelikult leidub arv $\widehat{\theta} \in (0,1)$ nii, et

$$\begin{aligned} f'_x(x+\theta h, y+h) - f'_x(x+\theta h, y) &= v(y+h) - v(y) = v'(y + \widehat{\theta} h)\,h \\ &= f''_{xy}(x + \theta h, y + \widehat{\theta} h)\,h. \end{aligned}$$

Osatuletise f''_{xy} pidevuse tõttu punktis (x,y)

$$f''_{xy}(x+\theta h, y + \widehat{\theta} h) = f''_{xy}(x,y) + o(1) \quad \text{protsessis } h \to 0,$$

seega

$$\Phi(h) = \big(f''_{xy}(x,y) + o(1)\big)\,h^2 = f''_{xy}(x,y)\,h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \to 0.$$

Esitus (3.8) saadakse sümmeetria põhjal. □

Selle punkti lõpetuseks tõestame ühe olulise järelduse teoreemist 3.1.

Järeldus 3.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ n korda diferentseeruv punktis $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Siis funktsiooni f n-ndat järku osatuletised punktis P ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.*

Tõestus. Tõestame järelduse induktsiooni abil funktsiooni f diferentseeruvuse järgu n järgi. Juhul $n = 2$ kehtib järeldus teoreemi 3.1 põhjal. Eeldame nüüd, et $n > 2$ ning et järeldus kehtib, kui seal arv n asendada arvuga $n-1$. Näitame, et niisugusel eeldusel kehtib järeldus ka ülaltrükitud kujul.

Niisiis, eeldame, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ on n korda diferentseeruv punktis $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Olgu $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ ning olgu $j_1, \ldots, j_n$ indeksite $1, \ldots, n$ mingi ümberjärjestus (s.t. hulkadena $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$). Järelduse tõestuseks peame näitama, et

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P) = f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{i_{j_n}}}(P). \tag{3.11}$$

Selleks märgime, et

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}}\big)'_{x_{i_n}}(P) \quad \text{ja} \quad f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{i_{j_n}}}(P) = \big(f^{(n-1)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{i_{j_{n-1}}}}\big)'_{x_{i_{j_n}}}(P). \tag{3.12}$$

Kui $j_n = n$, siis $j_1, \ldots, j_{n-1}$ on indeksite $1, \ldots, n-1$ ümberjärjestus, seega tehtud eelduse põhjal $n-1$ korda diferentseeruva funktsiooni $(n-1)$-järku segaosatuletiste sõltumatusest diferentseerimise järjekorrast kehtib punkti P teatavas ümbruseses võrdus $f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}} = f^{(n-1)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{i_{j_{n-1}}}}$ ning järelikult kehtib ka (3.11).

Eeldame nüüd, et $j_n \neq n$, s.t. $j_n \in \{1, \ldots, n-1\}$ ja $n \in \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$, ning märgime $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{j_n\} = \{k_1, \ldots, k_{n-2}\}$; siis ka $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\} \setminus \{n\} = \{k_1, \ldots, k_{n-2}\}$. Tehtud eelduse põhjal $n-1$ korda diferentseeruva funktsiooni $(n-1)$-järku segaosatuletiste sõltumatusest diferentseerimise järjekorrast kehtivad punkti P teatavas ümbruses võrdused

$$f^{(n-1)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}}} = f^{(n-1)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}} x_{i_{j_n}}} = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_{j_n}}}$$

ja

$$f^{(n-1)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{j_{n-1}}} = f^{(n-1)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}} x_{i_n}} = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{k_{i_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_n}},$$

millest võrduste (3.12) põhjal saame, et

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P) = \Big(\big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_{j_n}}}\Big)'_{x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_{j_n}} x_{i_n}}(P)$$

ja

$$f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{i_{j_n}}}(P) = \Big(\big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)'_{x_{i_n}}\Big)'_{x_{i_{j_n}}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_n} x_{i_{j_n}}}(P),$$

millest, arvestades, et teoreemi 3.1 põhjal antud punktis kaks korda diferentseeruva funktsiooni teist järku segaosatuletised selles punktis ei sõltu diferentseeruvuse järjekorrast,

$$f^{(n)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_{j_n}} x_{i_n}}(P) = \big(f^{(n-2)}_{x_{i_{k_1}} \ldots x_{i_{k_{n-2}}}}\big)''_{x_{i_n} x_{i_{j_n}}}(P) = f^{(n)}_{x_{i_{j_1}} \ldots x_{i_{j_n}}}(P),$$

s.t kehtib võrdus (3.11), nagu soovitud. □

3.3. Kõrgemat järku diferentsiaalid

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ diferentseeruv hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis P. Fikseerides argumentide $x_1, \dots, x_m$ diferentsiaalide väärtused $dx_1, \dots, dx_m$ (s.t. lugedes need diferentsiaalid fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \dots, x_m$) funktsioonina $du = du(P)$:

$$du = du(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P)\, dx_m.$$

Eeldame nüüd, et funktsioon f on fikseeritud punktis $P \in \mathcal{D}$ kaks korda diferentseeruv (s.t. osatuletisfunktsioonid $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ on diferentseeruvad punktis P). Siis (vt. märkust 1.7) ka selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal du (tõlgendatuna eespool kirjeldatud viisil m muutuja funktsioonina) on diferentseeruv punktis P, kusjuures tema täisdiferentsiaal selles punktis avaldub kujul

$$d(du)(P) = d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)(P)\, dx_1 + \dots + d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Big)(P)\, dx_m = \sum_{i=1}^{m} d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(P)\, dx_i.$$

Tähistades selles võrduses osatuletisfunktsioonide $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ täisdiferentsiaalide avaldistes argumentide $x_1, \dots, x_m$ diferentsiaalid (selguse huvides) sümbolitega $\delta x_1, \dots, \delta x_m$ (eristamaks neid fikseeritud väärtustest $dx_1, \dots, dx_m$), s.t.

$$d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_i}(P)\, \delta x_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m\, \partial x_i}(P)\, \delta x_m, \quad i = 1, \dots, m,$$

saame

$$d(du)(P) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P)\, \delta x_j\Big) dx_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P)\, \delta x_j\, dx_i.$$

Selle diferentsiaali väärtust (s.t. funktsiooni f esimest järku täisdiferentsiaali du täisdiferentsiaali $d(du)$ väärtust punktis P), kui $\delta x_i = dx_i$, $i = 1, \dots, m$, nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk lihtsalt *teiseks*) *täisdiferentsiaaliks* punktis P ja tähistatakse sümboliga $d^2u(P)$ või $d^2 f(P)$:

$$d^2u(P) := d^2 f(P) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P)\, dx_i\, dx_j. \tag{3.13}$$

Kui funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis kaks korda diferentseeruv, siis analoogiliselt esimest järku täisdiferentsiaali juhuga võime argumentide $x_1, \dots, x_m$ diferentsiaalide $dx_1, \dots, dx_m$ fikseeritud väärtuste korral funktsiooni f teist järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja P (ehk siis m muutuja $x_1, \dots, x_m$) funktsioonina $d^2u = d^2u(P)$; seejuures esitusest (3.13) (jättes seal argumendi P kirjutamata) saame, et

$$d^2u = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\, dx_i\, dx_j.$$

Juhime tähelepanu, et funktsiooni f kaks korda diferentseeruvuse tõttu hulgas $\mathcal{D}$ (järelduse 3.3 põhjal)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad \text{kõikide } i, j \in \{1, \ldots, m\} \text{ korral.}$$

Nii näiteks kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$dz = df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2,$$

kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$\begin{aligned} du = df = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,dz^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\,dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\,dx\,dz \end{aligned}$$

jne.

Funktsiooni kolmandat ja kõrgemat järku täisdiferentsiaalid defineeritakse analoogiliselt. Üldiselt, kui $n \geqslant 2$, siis n korda diferentseeruva funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *n-ndat järku täisdiferentsiaal* $d^n u$ defineeritakse rekurrentselt võrdusega $d^n u = d(d^{n-1}u)$, kus $(n-1)$-järku täisdiferentsiaali $d^{n-1}u$ avaldises argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalid $dx_1, \ldots, dx_m$ loetakse fikseeritud konstantideks ja seda täisdiferentsiaali tõlgendatakse m muutuja $x_1, \ldots, x_m$ funktsioonina ning selle funktsiooni täisdiferentsiaalis $d(d^{n-1}u)$ võetakse argumentide $x_1, \ldots, x_m$ diferentsiaalid $\delta x_1, \ldots, \delta x_m$ võrdseks vastavalt diferentsiaalidega $dx_1, \ldots, dx_m$.

Nii näiteks funktsiooni $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ kolmandat järku täisdiferentsiaal on

$$\begin{aligned} d^3 u &= d(d^2 u)\big|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m} = d\bigg(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\bigg)\bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(d\bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\bigg)\bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m} \right) dx_i\,dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,\delta x_k \bigg|_{\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m} \right) dx_i\,dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\,dx_k \end{aligned}$$

ja, analoogiliselt, neljandat järku täisdiferentsiaal on

$$d^4 u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^4 f}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_i}\,dx_i\,dx_j\,dx_k\,dx_l$$

ning, üldiselt, n-ndat järku täisdiferentsiaal on

$$d^n u = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m}}_{n \text{ summamärki}} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} \, dx_{i_1} \cdots dx_{i_n}.$$

Arvestades, et n korda diferentseeruva funktsiooni n-ndat järku segaosatuletised ei sõltu diferentseerimise järjekorrast, saame siit näiteks valemid kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ kõrgemat järku täisdiferentsiaalide jaoks:

$$\begin{aligned} d^3 z &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \, dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \, \partial x^2} \, dx^2 \, dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \, \partial x} \, dx \, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \, dy^3, \\ d^4 z &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \, dx^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial y \, \partial x^3} \, dx^3 \, dy + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \, \partial x^2} \, dx^2 \, dy^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^3 \, \partial x} \, dx \, dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \, dy^4 \end{aligned}$$

jne. Sarnasuse tõttu binoomvalemiga esitatakse üldine valem kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ n-ndat järku täisdiferentsiaali jaoks kujul

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \, dx + \frac{\partial}{\partial y} \, dy \right)^n f.$$

§ 4. Taylori valem mitme muutuja funktsiooni jaoks

Teoreem 4.1 (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul). *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$$

n korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Siis mis tahes punkti $P = (x_1, \dots, x_m)$ jaoks punkti P_0 teatavast ümbrusest $\mathcal{U}$ kehtib valem

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \alpha_n \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \alpha_n, \end{aligned}$$

kus diferentsiaalide $df(P_0), \dots, d^n f(P_0)$ avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i := x_i - x_i^0, \quad i = 1, \dots, m,$$

ning, tähistades

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0),$$

funktsioon $\alpha_n = \alpha_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha_n = o(\rho^n)$ protsessis $\rho \to 0$.

TÕESTUS. Tõestame teoreemi induktsiooni abil funktsiooni f diferentseeruvuse järgu n järgi. Kui $n = 1$, siis teoreem kehtib teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(iii) põhjal. Eeldame nüüd, et $n \geqslant 2$ ning et teoreem kehtib, kui seal arv n asendada arvuga $n-1$. Näitame, et niisugusel eeldusel kehtib teoreem ka ülaltrükitud kujul. Üleskirjutuste lihtsustamiseks kasutame järgmisi tähistusi: etteantud arvude $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, h_1, \dots, h_m \in \mathbb{R}$ korral tähistame $\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $h := (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ ning

$$\begin{aligned} P_0 + \Delta P &:= (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m, \\ P_0 + \Delta P + h &:= (x_1^0 + \Delta x_1 + h_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m + h_m) \in \mathbb{R}^m, \\ \Delta P + h &:= (\Delta x_1 + h_1, \dots, \Delta x_m + h_m) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Niisiis, eeldame, et funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ on n korda diferentseeruv punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Teoreemi tõestuseks tuleb näidata, et funktsioon $\alpha_n = \alpha_n(\Delta P) = \alpha_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$, kus

$$\begin{aligned} \alpha_n(\Delta P) &:= f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} \\ &= f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}, \end{aligned}$$

rahuldab tingimust $\alpha_n(\Delta P) = o(\rho^n)$ protsessis $\rho \to 0$, kus $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$.

Olgu $\varepsilon > 0$ selline, et funktsioon f on diferentseeruv punkti P_0 ε-ümbruses $\mathcal{U} := \{P \in \mathbb{R}^m \colon d(P, P_0) < \varepsilon\}$. Näitame, et funktsioon α_n on diferentseeruv punkti $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ε-ümbruses $\mathcal{U}_0 := \{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \colon \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\}$. Selleks märgime kõigepealt, et

$$\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathcal{U}_0 \iff P_0 + \Delta P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{U}.$$

Olgu $\Delta P = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \in \mathcal{U}_0$. Kui $h := (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ on selline, et $\Delta P + h \in \mathcal{U}_0$, siis

$$\begin{aligned}
&\alpha_n(\Delta P + h) - \alpha_n(\Delta P) \\
&\quad = f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, h_i \\
&\quad\quad - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\big((\Delta x_{i_1} + h_{i_1}) \cdots (\Delta x_{i_k} + h_{i_k}) - \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}\big).
\end{aligned}$$

Kuna $P_0 + \Delta P \in \mathcal{U}$, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis $P_0 + \Delta P$, seega

$$f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0 + \Delta P)\, h_i + \beta(h),$$

kus funktsioon $\beta = \beta(h) = \beta(h_1, \ldots, h_m)$ rahuldab tingimust $\beta(h) = o(r)$ protsessis $r := \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_m^2} \to 0$, järelikult

$$\begin{aligned}
&f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, h_i \\
&\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0 + \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \right) h_i + \beta(h).
\end{aligned}$$

Iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral esimest järku osatuletisfunktsioon $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ on $n-1$ korda diferentseeruv punktis P_0, seega tehtud eelduse põhjal teoreemi kehtivusest juhul, kui seal arv n on asendatud arvuga $n-1$, saame, et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0 + \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})(P_0)}{k!} + \gamma_i(\Delta P) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} + \gamma_i(\Delta P),
\end{aligned}$$

kus funktsioon $\gamma_i = \gamma_i(\Delta P)$ rahuldab tingimust $\gamma_i(\Delta P) = o(\rho^{n-1})$ protsessis $\rho \to 0$, seega

$$\begin{aligned}
&f(P_0 + \Delta P + h) - f(P_0 + \Delta P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\, h_i \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} + \gamma_i(\Delta P) \right) h_i + \beta(h) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} \right) h_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\Delta P)\, h_i + \beta(h).
\end{aligned}$$

Teiselt poolt, iga $k \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $w\colon \mathbb{R}^k \ni (z_1, \ldots, z_k) \mapsto z_1 \cdots z_k \in \mathbb{R}$ diferentseeruv, kusjuures $\dfrac{\partial w}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_k) = z_1 \cdots z_{j-1} z_{j+1} \cdots z_k$ iga $j \in \{1, \ldots, k\}$ korral, seega, tähistades $\Delta z := (\Delta z_1, \ldots, \Delta z_k)$,

$$\begin{aligned}
(z_1 + \Delta z_1) \cdots (z_k + \Delta z_k) - z_1 \cdots z_k &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial w}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_k)\, \Delta z_j + \psi_k(\Delta z) \\
&= \sum_{j=1}^{k} z_1 \cdots z_{j-1}\, \Delta z_j\, z_{j+1} \cdots z_k + \psi_k(\Delta z),
\end{aligned}$$

kus, märkides $\sigma := \sqrt{\Delta z_1^2 + \cdots + \Delta z_k^2}$, funktsioon $\psi_k = \psi_k(\Delta z)$ rahuldab tingimust $\psi_k(\Delta z) = o(\sigma)$ protsessis $\sigma \to 0$. Seega mis tahes $k \in \{2, \ldots, n\}$ ja $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$\begin{aligned}(\Delta x_{i_1} + h_{i_1}) \cdots (\Delta x_{i_k} + h_{i_k}) - \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}&\\ = \sum_{j=1}^{k} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{j-1}}\, h_{i_j}\, \Delta x_{i_{j+1}} \cdots \Delta x_{i_k} + \beta_{i_1,\ldots,i_k}(h),&\end{aligned}$$

kus funktsioon $\beta_{i_1,\ldots,i_k} = \beta_{i_1,\ldots,i_k}(h)$ rahuldab tingimust $\beta_{i_1,\ldots,i_k}(h) = o(r)$ protsessis $r \to 0$. Mis tahes $k \in \{2, \ldots, n\}$ ja $j \in \{1, \ldots, k\}$ korral, tähistades summeerimisindeksi i_j ümber indeksiks i ja summeerimisindeksid $i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k$ vastavalt indeksiteks $i_1, \ldots, i_{k-1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{j-1}}\, h_{i_j}\, \Delta x_{i_{j+1}} \cdots \Delta x_{i_k}&\\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{m} \frac{\partial^{k-1}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{k-1}}\, h_i,&\end{aligned}$$

järelikult

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(P_0)\big((\Delta x_1 + h_1) \cdots (\Delta x_1 + h_1) - \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k}\big)\\ &\quad = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(P_0)\bigg(\sum_{j=1}^{k} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{j-1}}\, h_{i_j}\, \Delta x_{i_{j+1}} \cdots \Delta x_{i_k} + \beta_{i_1,\ldots,i_k}(h)\bigg)\\ &\quad = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\, k \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{m} \frac{\partial^{k-1}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{k-1}}\, h_i + o(r)\\ &\quad = \sum_{i=1}^{m} \bigg(\sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{1}{\kappa!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_\kappa=1}^{m} \frac{\partial^{\kappa}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_{i_\kappa} \cdots \partial x_{i_1}}(P_0)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_\kappa}\bigg) h_i + o(r)\end{aligned}$$

protsessis $r \to 0$.

Eelnevast järeldub, et

$$\alpha_n(\Delta P + h) - \alpha_n(\Delta P) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\Delta P)\, h_i + o(r) \quad \text{protsessis } r \to 0. \tag{4.1}$$

Sellega oleme tõestanud, et funktsioon α_n on punkti $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ümbruses $\mathcal{U}_0$ diferentseeruv; seejuures esitusest (4.1) järeldub, et selles ümbruses iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i}(\Delta P) = \gamma_i(\Delta P) = o(\rho^{n-1}) \quad \text{protsessis } \rho \to 0.$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal mitme muutuja funktsioonide jaoks (s.t. järelduse 1.10 põhjal) leidub iga punkti $\Delta P = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \in \mathcal{U}_0$ jaoks arv $\theta \in (0, 1)$, mille korral, tähistades $\theta\Delta P := (\theta\Delta x_1, \ldots, \theta\Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\alpha_n(\Delta P) = \alpha_n(\Delta P) - \alpha_n(0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\theta\Delta P)\, \Delta x_i$$

(rõhutame, et selline arv θ sõltub üldjuhul punktist ΔP). Rogers–Hölderi võrratusest juhul $p = q = 2$ (vt. teoreemi I.1.2) järeldub nüüd, et

$$|\alpha_n(\Delta P)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\theta\Delta P)^2}\, \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\theta\Delta P)^2}\, \rho.$$

Kuna $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(\theta\Delta P)^2} = o(\rho^{n-1})$ protsessis $\rho \to 0$, siis

$$|\alpha_n(\Delta P)| = o(\rho^{n-1})\,\rho = o(\rho^n) \quad \text{protsessis } \rho \to 0,$$

mida oligi tarvis tõestada. □

Teoreem 4.2 (Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

$n+1$ korda diferentseeruv punkti $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ mingis ε-ümbruses $\mathcal{U}$. Siis iga punkti $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$ jaoks kehtib valem

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!} \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

kus diferentsiaalide $df(P_0), \ldots, d^n f(P_0)$ ja $d^{n+1} f(R)$ avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

ja

$$R = (x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \theta\Delta x_m)$$

mingi $\theta \in (0,1)$ korral (mis sõltub punktist P).

Tõestus. Olgu $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$. Defineerime iga $t \in \mathbb{R}$ korral punkti

$$P_t := (x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{4.3}$$

kus arvud $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$ on defineeritud võrdustega (4.2). Paneme tähele, et punkt P_0 eeskirja (4.3) järgi arvutatuna (s.t. punkt P_t, kus $t = 0$) on meie esialgne punkt P_0 ja $P_1 = P$ ning et leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $P_t \in \mathcal{U}$ iga $t \in (-\delta, 1+\delta)$ korral. Defineerime funktsiooni

$$\Phi(t) := f(P_t) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m) = f\big(\phi_1(t) \ldots, \phi_m(t)\big), \qquad t \in (-\delta, 1+\delta),$$

kus

$$\phi_i(t) = x_i^0 + t\Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

Funktsioon Φ on liitfunktsiooni diferentseerimise reegli põhjal $n+1$ korda diferentseeruv vahemikus $(-\delta, 1+\delta)$, kusjuures iga $t \in (-\delta, 1+\delta)$ korral

$$
\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi_1(t) \dots, \phi_m(t)\big)\, \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi_1(t) \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t)\, \Delta x_i, \\
\Phi''(t) &= \sum_{i=1}^{m} \bigg(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi_1(t) \dots, \phi_m(t)\big)\bigg)'_t \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \bigg(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)}{\partial x_j}\big(\phi_1(t) \dots, \phi_m(t)\big)\, \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(t)\bigg)\, \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\big(\phi_1(t) \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_i \Delta x_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_t)\, \Delta x_i \Delta x_j
\end{aligned}
$$

ning, üldiselt, iga $k \in \{1, \dots, n+1\}$ korral

$$
\Phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(P_t)\, \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_k} = d^k f(P_t),
$$

kus diferentsiaali $d^k f(P_t)$ avaldises kehtivad võrdused (4.2). Nüüd ühe muutuja funktsiooni Taylori valemi põhjal jääkliikmega Lagrange'i kujul leidub $\theta \in (0,1)$ nii, et, tähistades $R := P_\theta$,

$$
\begin{aligned}
f(P) = \Phi(1) &= \Phi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}\,(1-0)^k + \frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \\
&= f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!},
\end{aligned}
$$

nagu soovitud. □

§ 5. II peatüki lisa. Kujutuste $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, diferentseeruvus

Toome kõigepealt sisse selles paragrahvis kasutatavad tähistused.

Kõikjal selles paragrahvis on m ja n fikseeritud naturaalarvud, s.t. $m, n \in \mathbb{N}$. Punkti $x \in \mathbb{R}^m$ korral me eeldame, et tema koordinaadid on $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, s.t. $x = (x_1, \ldots, x_m) =: (x_j)_{j=1}^m$, ning, teiselt poolt, etteantud arvude $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ korral me kasutame tähistust (ilma seda tähistust eraldi sisse toomata) $x := (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. (Analoogilisi tähistusi me kasutame ka ruumi $\mathbb{R}^m$ või $\mathbb{R}^n$ punktide y, z, h, k, u, v, w, a, b jms. jaoks.) Ruumi $\mathbb{R}^m$ elementi $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ tõlgendame me sobival juhul ka üheveerulise maatriksina

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

ja, vastupidi, üheveerulist maatriksit (5.1) tõlgendame sobival juhul järjendina $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Punkti $x \in \mathbb{R}^m$ ja reaalarvu $t \neq 0$ korral me kasutame kirjaviisi

$$\frac{x}{t} := \frac{1}{t}\,x = \Big(\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_m}{t}\Big).$$

Eukleidilist normi ruumis $\mathbb{R}^m$ tähistame sümboliga $|\cdot|$, s.t.

$$|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^m |x_j|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Paneme tähele, et mis tahes $x, u \in \mathbb{R}^m$ korral

$$d(x, u) = |x - u|.$$

Lahtist ja kinnist kera ruumis $\mathbb{R}^m$ keskpunktiga $a \in \mathbb{R}^m$ ja raadiusega $r > 0$ tähistame me vastavalt sümbolitega $B(a, r)$ ja $\overline{B}(a, r)$, s.t.

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x - a| < r\} \qquad \text{ja} \qquad \overline{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x - a| \leqslant r\}.$$

Funktsiooni $f \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, korral on $f_1, \ldots, f_n \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ alati funktsiooni f määravad nn. *koordinaatfunktsioonid*, s.t.

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \quad \text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral}, \tag{5.2}$$

ja, vastupidi, etteantud funktsioonide $f_1, \ldots, f_n \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ korral loeme funktsiooni $f \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ defineerituks võrdusega (5.2).

5.1. Funktsiooni $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, kus $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, piirväärtus

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, olgu $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ ning olgu $x_0 \in \mathbb{R}^m$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt. Kasutame funktsiooni f argumendina muutujat x.

Definitsioon 5.1. Öeldakse, et punkt $c \in \mathbb{R}^n$ on funktsiooni f *piirväärtus* punktis x_0 (või piirväärtus protsessis $x \to x_0$) või et funktsioon f *koondub* punktiks c protsessis $x \to x_0$ (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile x_0) ja kirjutatakse

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c \quad \text{või} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} c,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Big[x \in \mathcal{D},\ 0 < |x - x_0| < \delta\Big] \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Pole raske näha, et funktsiooni f koonduvus on samaväärne tema koordinaatfunktsioonide koonduvusega:

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} c \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_i(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Kirjutades funktsiooni $\phi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ korral

$$f(x) = o\big(\phi(x)\big) \quad \text{protsessis } x \to x_0,$$

mõistame me selle all, et

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ arvu } 0}).$$

5.2. Funktsiooni $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, diferentseeruvuse mõiste

Definitsioon 5.2. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk, olgu $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ning olgu $x \in \mathcal{U}$. Öeldakse, et funktsioon f on *diferentseeruv* punktis x, kui leidub lineaarne kujutus $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nii, et

$$\frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{5.3}$$

Kujutust A nimetatakse seejuures funktsiooni f *(Fréchet') tuletiseks* punktis x ja tähistatakse sümboliga $f'(x)$ (allpool veendume, et operaatori f tuletis punktis x on üheselt määratud):

$$f'(x) := A.$$

Tähistades $\mathcal{W} := \big\{h \in \mathbb{R}^m\colon x + h \in \mathcal{U}\big\}$ ja defineerides funktsiooni $\alpha\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(h) = f(x+h) - f(x) - Ah, \quad h \in \mathcal{W},$$

võime valemi (5.3) kirjutada kujul

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h), \quad \text{kus } \alpha(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0. \tag{5.4}$$

Märkus 5.1. Märgime, et siin hulk $\mathcal{W}$ on lahtine. Tõepoolest, $\mathcal{W} \neq \varnothing$, sest hulk $\mathcal{U}$ on lahtine ja seega x on tema sisepunkt. Fikseerime vabalt $h \in \mathcal{W}$. Hulga $\mathcal{W}$ lahtisuseks piisab näidata, et h on hulga $\mathcal{W}$ sisepunkt, s.t. mingi $r > 0$ korral $B(h,r) \subset \mathcal{W}$. Hulga $\mathcal{W}$ definitsiooni põhjal $x + h \in \mathcal{U}$. Kuna $\mathcal{U}$ on lahtine, siis $x + h$ on hulga $\mathcal{U}$ sisepunkt, seega leidub $r > 0$ nii, et $B\big(x + h, r\big) \subset \mathcal{U}$. Väite tõestuseks jääb nüüd näidata, et $B(h,r) \subset \mathcal{W}$. Selleks, fikseerides vabalt punkti $z \in B(h,r)$, piisab näidata, et $z \in \mathcal{W}$, s.t. $x + z \in \mathcal{U}$, milleks omakorda piisab näidata, et $x + z \in B\big(x + h, r\big)$, s.t. $\big|x + z - (x + h)\big| < r$. Veendume selles:

$$\big|x + z - (x + h)\big| = \big|x + z - x - h\big| = |z - h| < r$$

(sest kuna $z \in B(h,r)$, siis $|z - h| < r$), nagu soovitud.

Teine võimalus hulga $\mathcal{W}$ lahtisuse tõestamiseks on panna tähele, et $\mathcal{W} = -x + \mathcal{U}$, ja kasutada fakti, et lahtise hulga nihe on lahtine.

Järgnev lause 5.1 ütleb, et operaator A eelnevast definitsioonist (s.t. funktsiooni f tuletis $f'(x)$ punktis x) on üheselt määratud. (Sellise operaatori ühesus järeldub ka lausest 5.2 allpool, mille tõestus ei kasuta lauset 5.1.)

Lause 5.1. *Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk, olgu $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ning olgu $x \in \mathcal{U}$. Siis leidub ülimalt üks tingimust* (5.3) *rahuldav lineaarne kujutus $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.*

TÕESTUS. Rahuldagu lineaarsed kujutused $A, B\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vastavalt tingimusi (5.4) ja

$$f(x + h) - f(x) = Bh + \beta(h), \quad \text{kus } \beta(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0.$$

Lause tõestuseks piisab näidata, et $A = B$, milleks, fikseerides vabalt $z \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, piisab näidata, et $Az = Bz$. Selleks märgime, et "piisavalt väikeste" $t > 0$ korral (täpsemalt, selliste $t > 0$ korral, mis rahuldavad tingimust $x + tz \in \mathcal{U}$)

$$A(tz) + \alpha(tz) = B(tz) + \beta(tz),$$

seega ka

$$\frac{A(tz)}{|tz|} + \frac{\alpha(tz)}{|tz|} = \frac{B(tz)}{|tz|} + \frac{\beta(tz)}{|tz|},$$

millest, arvestades, et operaatorite A ja B lineaarsuse tõttu

$$\frac{A(tz)}{|tz|} = \frac{tAz}{t|z|} = \frac{Az}{|z|} \qquad \text{ja} \qquad \frac{B(tz)}{|tz|} = \frac{tBz}{t|z|} = \frac{Bz}{|z|},$$

saame, et

$$\frac{Az}{|z|} + \frac{\alpha(tz)}{|tz|} = \frac{Bz}{|z|} + \frac{\beta(tz)}{|tz|}. \tag{5.5}$$

Kuna $|tz| \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$, siis tehtud eelduste põhjal funktsioonide α ja β kohta

$$\frac{\alpha(tz)}{|tz|} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\beta(tz)}{|tz|} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0;$$

seega järeldub võrdusest (5.5) protsessis $t \to 0+$, et $\dfrac{Az}{|z|} = \dfrac{Bz}{|z|}$, millest $Az = Bz$, nagu soovitud. $\square$

5.3. Funktsiooni $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, diferentseeruvuse mõiste kooskõla funktsiooni $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferentseeruvuse mõistega

Selles punktis veendume, et ülaltoodud diferentseeruvuse definitsioon 5.2 on kooskõlas funktsiooni $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (s.t. tavalise m muutuja funktsiooni) diferentseeruvuse definitsiooniga 1.2, s.t. veendume definitsioonide 5.2 ja 1.2 samaväärsuses juhul $n = 1$.

Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk ning olgu $x \in \mathcal{U}$.

Ühelt poolt, oletame, et funktsioon $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x definitsiooni 1.2 mõttes. See tähendab, et leiduvad arvud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nii, et

$$\frac{f(x+h) - f(x) - (a_1 h_1 + \cdots + a_m h_m)}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \tag{5.6}$$

Defineerime kujutuse $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$Ah = a_1 h_1 + \cdots + a_m h_m, \quad h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m; \tag{5.7}$$

siis A on lineaarne kujutus, kusjuures kehtib (5.3). Seega f on diferentseeruv punktis x definitsiooni 5.2 mõttes.

Teiselt poolt, olgu funktsioon $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferentseeruv punktis x definitsiooni 5.2 mõttes. See tähendab, et leidub lineaarne kujutus $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nii, et kehtib (5.3). Algebra kursusest teame, et leiduvad üheselt määratud arvud $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ nii, et kehtib (5.7), niisiis kehtib (5.6). Seega f on diferentseeruv punktis x definitsiooni 1.2 mõttes.

5.4. Funktsiooni $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, ja teda määravate funktsioonide $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferentseeruvuse vahekord

Lause 5.2. *Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk, olgu $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ning olgu $x \in \mathcal{U}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punktis x;*

(ii) *funktsiooni f defineerivad funktsioonid $f_1, \ldots, f_n: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big), \quad x \in \mathcal{U},$$

on diferentseeruvad punktis x.

Seejuures

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis $x \in \mathcal{U}$, s.t. (definitsiooni 5.2 põhjal) leidub lineaarne kujutus $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nii, et kehtib (5.4). Algebra kursusest teame, et lineaarne kujutus $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on üheselt määratud (reaal)arvmaatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

kus iga $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ korral

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^m a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \right).$$

Olgu $\alpha_1, \dots, \alpha_n\colon \mathcal{W} := \{h \in \mathbb{R}^m \colon x + h \in \mathcal{U}\} \to \mathbb{R}$ funktsiooni $\alpha\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}^n$ määravad funktsioonid (tingimuses (5.4)), s.t.

$$\alpha(h) = \big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big), \quad h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathcal{W}. \tag{5.9}$$

Tingimus $\alpha(h) = o(|h|)$ protsessis $h \to 0$ tähendab, et

$$\frac{\alpha(h)}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ehk

$$\left(\frac{\alpha_1(h)}{|h|}, \dots, \frac{\alpha_n(h)}{|h|} \right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

s.t. iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\frac{\alpha_i(h)}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ehk, teisisõnu,

$$\alpha_i(h) = o(|h|) \quad \text{protsessis } h \to 0. \tag{5.10}$$

Kuna iga $h \in \mathcal{W}$ korral

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \big(f_1(x+h), \dots, f_n(x+h)\big) - \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \\ &= \big(f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)\big) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} Ah + \alpha(h) &= \left(\sum_{j=1}^m a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \right) + \big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m a_{1j}h_j + \alpha_1(h), \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j + \alpha_n(h) \right), \end{aligned}$$

siis tingimus (5.4) tähendab, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \dots + a_{im}h_m + \alpha_i(h), \quad \text{kus } \alpha_i(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0. \tag{5.11}$$

Tingimus (5.11) tähendab, et funktsioon $f_i\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ on diferentseeruv punktis x; seejuures

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{iga } j \in \{1, \dots, m\} \text{ korral,}$$

s.t. kehtib (5.8).

(ii)⇒(i). Eeldame, et funktsioonid $f_1, \dots, f_n$ on diferentseeruvad punktis x, s.t. iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral leiduvad arvud $a_{i1}, \dots a_{im} \in \mathbb{R}$ nii, et

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \dots + a_{im}h_m + \alpha_i(h) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}h_j + \alpha_i(h),$$

kus funktsioon $\alpha_i \colon \mathcal{W} := \big\{h \in \mathbb{R}^m : x + h \in \mathcal{U}\big\} \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $\alpha_i(h) = o(|h|)$ protsessis $h \to 0$. Nüüd

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \big(f_1(x+h), \dots, f_n(x+h)\big) - \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \\
&= \big(f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)\big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}h_j + \alpha_1(h), \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{nj}h_j + \alpha_n(h)\Big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{nj}h_j\Big) + \big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big) \\
&= Ah + \alpha(h),
\end{aligned}$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ja funktsioon $\alpha \colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}^n$ on defineeritud võrdusega (5.9).

Funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis x jääb näidata, et

$$\alpha(h) = o(|h|) \quad \text{protsessis } h \to 0.$$

Viimane tingimus on implikatsiooni (i)⇒(ii) tõestuses sisalduva arutelu põhjal samaväärne tingimusega (5.10) iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral, mis kehtib eespool tehtud eelduse põhjal. □

III peatükk.
Ilmutamata funktsioonide teooria

§ 1. Jacobi maatriksid ja determinandid

Olgu funktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{1.1}$$

määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Siis süsteem (1.1) määrab kujutuse $\Phi\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(P) = \big(u_1(P), \ldots, u_n(P)\big) \in \mathbb{R}^n, \quad P \in \mathcal{D}. \tag{1.2}$$

Teiselt poolt, mis tahes kujutus $\Phi\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ määrab ühesel viisil funktsioonid (1.1), mis rahuldavad tingimust (1.2): sellise omadusega funktsioonid (1.1) on defineeritud võrdustega

$$u_j(P) = u_j, \quad P \in \mathcal{D}, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{kus } \Phi(P) = (u_1, \ldots, u_n).$$

Niisiis, *hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ määratud funktsioonide süsteemid* (1.1) *ja kujutused $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ on üksüheses vastavuses.*

Eeldame nüüd, et funktsioonid (1.1) on diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.1. Maatriksit

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

nimetatakse süsteemi (1.1) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$) *Jacobi*[1] *maatriksiks.*

[1]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) — saksa matemaatik.

Rõhutame, et Jacobi maatriks pole arvmaatriks – tema elemendid on funktsioonid. Jacobi maatriksi (1.3) väärtus konkreetses punktis $P \in \mathcal{D}$ on arvmaatriks (mille elemendid on Jacobi maatriksi (1.3) elementide väärtused punktis $P \in \mathcal{D}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m}(P) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m}(P) \end{pmatrix}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $n = m$, s.t. süsteem (1.1) omandab kuju

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = u_m(P) = u_m(x_1, \ldots, x_m). \end{cases} \tag{1.4}$$

Definitsioon 1.2. Süsteemi (1.4) Jacobi maatriksi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

determinanti

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

nimetatakse süsteemi (1.4) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$) *Jacobi determinandiks* ehk *jakobiaaniks.*

Rõhutame jällegi, et Jacobi determinant pole mitte arv, vaid funktsioon (Jacobi determinandi väärtus konkreetses punktis on arv).

Tõestame ühe Jacobi maatriksite olulise omaduse: *kujutuste korrutise Jacobi maatriks on nende kujutuste Jacobi maatriksite korrutis.*

Teoreem 1.1. *Olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{1.5}$$

diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *ning olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(t_1, \ldots, t_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(t_1, \ldots, t_l) \end{cases} \tag{1.6}$$

diferentseeruvad hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^l$, *kusjuures süsteemiga* (1.6) *määratud kujutuse* $\Delta \to \mathbb{R}^m$ *väärtuste hulk sisaldub funktsioonide* (1.5) *määramispiirkonnas:*

$$\Big\{\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \colon\ Q \in \Delta\Big\} \subset \mathcal{D}.$$

Siis liitfunktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = F_1(Q) = F_1(t_1, \ldots, t_l) := u_1\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = F_n(Q) = F_n(t_1, \ldots, t_l) := u_n\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \end{cases} \tag{1.7}$$

on diferentseeruvad hulgas Δ, *kusjuures süsteemi* (1.7) *Jacobi maatriks on süsteemide* (1.5) *ja* (1.6) *Jacobi maatriksite korrutis:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1} & \frac{\partial F_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial t_l} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t_1} & \frac{\partial F_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial t_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial t_1} & \frac{\partial F_n}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial t_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_l} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial t_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \frac{\partial x_m}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_m}{\partial t_l} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(siin osatuletised $\dfrac{\partial F_j}{\partial t_k}$ *ja* $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ning osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}$*).*

TÕESTUS. Liitfunktsioonide (1.7) diferentseeruvus järeldub vahetult liitfunktsioonide diferentseerimise reeglist (teoreemist II.1.8); seejuures kõikide $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $k \in \{1, \ldots, l\}$ korral

$$\frac{\partial F_j}{\partial t_k}(Q) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big)\, \frac{\partial x_i}{\partial t_k}(Q) \quad \text{iga } Q \in \Delta \text{ korral;}$$

niisiis võrdus (1.8) kehtib. □

Kuna (ruut)maatriksite korrutise determinant on nende maatriksite determinantide korrutis, siis järeldub teoreemist 1.1 juhul $n = m = l$

Järeldus 1.2. *Olgu teoreemis 1.1* $n = m = l$. *Siis süsteemi* (1.7) *jakobiaan on süsteemide* (1.5) *ja* (1.6) *jakobiaanide korrutis:*

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}$$

(siin determinantides $\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}$ *ja* $\dfrac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}$ *osatuletised* $\dfrac{\partial F_j}{\partial t_k}$ *ja* $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ning determinandis* $\dfrac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ *osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big)$*).*

Järeldus 1.3. *Olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \dots, x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = u_m(P) = u_m(x_1, \dots, x_m) \end{cases} \tag{1.9}$$

diferentseeruvad hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ *ning olgu funktsioonid*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(u_1, \dots, u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(u_1, \dots, u_m) \end{cases} \tag{1.10}$$

diferentseeruvad hulgas $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, *kusjuures süsteemiga* (5.5) *määratud kujutuse* $\Delta \to \mathbb{R}^m$ *väärtuste hulk sisaldub funktsioonide* (1.9) *määramispiirkonnas:*

$$\Big\{\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) : \ Q \in \Delta\Big\} \subset \mathcal{D} \tag{1.11}$$

ning

$$\Big(u_1\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big), \dots, u_m\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big)\Big) = Q \quad \text{iga } Q \in \Delta \text{ korral.} \tag{1.12}$$

Siis nende süsteemide jakobiaanide korrutis on samaselt võrdne arvuga 1*:*

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = 1, \tag{1.13}$$

s.t.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = 1$$

(siin osatuletised $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ja osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}$*).*

TÕESTUS. Defineerime iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral funktsiooni $F_j\colon\ \Delta \to \mathbb{R}$,

$$F_j(Q) = u_j\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big), \quad Q \in \Delta;$$

siis järelduse 1.2 põhjal

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)}.$$

Tingimuse (1.12) põhjal iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$F_j(u_1, \dots, u_m) = u_j \quad \text{iga } (u_1, \dots, u_m) \in \Delta \text{ korral;}$$

seega

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

niisiis samasus (1.13) kehtib. □

Vahetult eelnevast järeldusest 1.3 järeldub, et *kujutuse ja tema pöördkujutuse jakobiaanide korrutis on samaselt võrdne arvuga* 1.

Järeldus 1.4. *Olgu süsteemid* (1.9) *ja* (5.5) *poolt määratud kujutused teineteise pöördkujutused, s.t. lisaks tingimustele* (1.11) *ja* (1.12) *kehtivad ka*

$$\Big\{\big(u_1(P), \dots, x_m(P)\big)\colon\ P \in \mathcal{D}\Big\} \subset \Delta$$

ja

$$\Big(x_1\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big), \dots, x_m\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big)\Big) = P \quad \textit{iga } P \in \mathcal{D} \textit{ korral.}$$

Siis kehtib samasus (1.13) *(siin vaadeldavates jakobiaanides osatuletised* $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ *arvutatakse punktides* $Q \in \Delta$ *ja osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *vastavates punktides* $\big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}$ *või, sümmeetriliselt, osatuletised* $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ *arvutatakse punktides* $P \in \mathcal{D}$ *ja osatuletised* $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ *vastavates punktides* $\big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big) \in \Delta$*).*

§ 2. Ühe võrrandiga antud ilmutamata funktsioonid

2.1. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni mõiste

Sisaldagu kahe muutuja funktsiooni $u = F(x,y)$ määramispiirkond ristkülikut

$$I_1 \times I_2 = \big\{(x,y)\colon\ x \in I_1,\ y \in I_2\big\},$$

kus $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x,y) = 0. \tag{2.1}$$

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et võrrand (2.1) määrab ristkülikus $I_1 \times I_2$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x), \tag{2.2}$$

kui mis tahes fikseeritud $x \in I_1$ korral võrrandil (2.1) eksisteerib parajasti üks lahend $y \in I_2$.

Kõnealune funktsioon (2.2)

$$I_1 \ni x \mapsto y(x) \in I_2$$

on määratud võrdusega

$$F\big(x, y(x)\big) = 0;$$

see funktsioon seab punktile $x \in I_1$ vastavusse võrrandi (2.1) ainsa lahendi $y \in I_2$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.2) on antud võrrandiga (2.1) *ilmutamata kujul.*

Näide 2.1. Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2.3}$$

Märgime, et

- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[-1,1]\times[0,1]$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina $y = y(x)$, sest iga fikseeritud väärtuse $x \in [-1,1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend y lõigust $[0,1]$ (see lahend on $y = \sqrt{1-x^2}$; niisiis $y(x) = \sqrt{1-x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[-1,1]\times[0,1]$ muutujat x muutuja y (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $y \in [0,1)$ korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit lõigust $[-1,1]$ (need lahendid on $x = \sqrt{1-y^2}$ ja $x = -\sqrt{1-y^2}$);
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[-1,1]\times[-1,0]$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina $y = y(x)$, sest iga fikseeritud väärtuse $x \in [-1,1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend y lõigust $[-1,0]$ (see lahend esitub kujul $y = -\sqrt{1-x^2}$; niisiis $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[-1,1]\times[-1,1]$ muutujat y muutuja x (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (-1,1)$ korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit y lõigust $[-1,1]$ (need lahendid on $y = \sqrt{1-x^2}$ ja $y = -\sqrt{1-x^2}$);
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $(-1,1)\times[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ muutujat y muutuja x funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ korral puudub võrrandil (2.3) lahend y lõigus $[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$;
- võrrand (2.3) ei määra ristkülikus $[1,2]\times(-\infty,\infty)$ muutujat y muutuja x funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $x \in (1,2]$ korral võrrandil (2.3) puudub lahend;
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus $[0,1]\times[-1,1]$ muutuja x muutuja y (ühese) funktsioonina $x = x(y)$, sest mis tahes fikseeritud väärtuse $y \in [-1,1]$ korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend x lõigust $[0,1]$ (see lahend on $x = \sqrt{1-y^2}$; niisiis $x(y) = \sqrt{1-y^2}$).

2.2. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja pidevus

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasoluks ja pidevuseks.

Teoreem 2.1. *Eeldame, et*

(1) *funktsioon* $u = F(x, y)$ *on määratud ja pidev mingis ristkülikus* $\mathcal{D}$ *keskpunktiga* (x_0, y_0)*:*

$$\mathcal{D} := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \qquad (\alpha, \beta > 0);$$

(2) $F(x_0, y_0) = 0$*;*

(3) *iga fikseeritud* $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *korral on funktsioon* $h_x(y) := F(x, y)$ *rangelt monotoonne (s.t. see (argumendi* y*) funktsioon on kas rangelt kasvav või rangelt kahanev) lõigus* $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$.

Siis

(a) *punkti* (x_0, y_0) *teatavas ristkülikukujulises ümbruses määrab võrrand* $F(x, y) = 0$ *muutuja* y *muutuja* x *(ühese) funktsioonina* $y = y(x)$*;*

(b) $y(x_0) = y_0$*;*

(c) *funktsioon* $y = y(x)$ *on punkti* x_0 *teatavas ümbruses pidev.*

TÕESTUS. Väidete (a) ja (b) tõestuseks piisab veenduda, et muutuja x iga väärtuse korral teatavast lõigust $[x_0-\alpha_0, x_0+\alpha_0] \subset [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ on väärtused $F(x, y_0-\beta)$ ja $F(x, y_0+\beta)$ erimärgilised. Niisugusel juhul mis tahes fikseeritud $x \in [x_0-\alpha_0, x_0+\alpha_0]$ korral järeldub võrrandi

$$h_x(y) = F(x, y) = 0$$

lahendi (muutuja y suhtes) olemasolu Bolzano–Cauchy esimesest teoreemist (märgime, et funktsioon h_x on pidev lõigus $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$); selle lahendi ühesus järeldub funktsiooni h_x monotoonsusest.

Oletame konkreetsuse mõttes, et funktsioon $h_{x_0}(y) = F(x_0, y)$ on rangelt kasvav. (Selle funktsiooni range kahenemise juhtu käsitletakse analoogiliselt.) Siis

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta),$$

s.t.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < 0 < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Kuna funktsioon F on pidev ristkülikus $\mathcal{D}$, siis on ta pidev ka punktides $(x_0, y_0-\beta)$ ja $(x_0, y_0+\beta)$ ning järelikult (teoreemi I.4.1 põhjal pideva funktsiooni märgi säilimisest) leidub reaalarv $\alpha_0 > 0$ nii, et

$$x \in [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \quad \Longrightarrow \quad F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta).$$

Väited (a) ja (b) on tõestatud.

Näitame, et funktsioon $y = y(x)$ on pidev vahemikus $(x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$. Fikseerime vabalt punkti $\widetilde{x} \in (x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ ning tähistame $\widetilde{y} = y(\widetilde{x})$. Me peame leidma reaalarvu $\delta > 0$ nii, et

$$\widetilde{x} - \delta < x < \widetilde{x} + \delta \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{y} - \varepsilon < y(x) < \widetilde{y} + \varepsilon.$$

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $[\widetilde{y} - \varepsilon, \widetilde{y} + \varepsilon] \subset [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ (PÕHJENDADA!). Sel eeldusel piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et mis tahes $x \in (\widetilde{x} - \delta, \widetilde{x} + \delta)$ korral on väärtused $F(x, \widetilde{y} - \varepsilon)$ ja $F(x, \widetilde{y} + \varepsilon)$ nullist erinevad ja erimärgilised, sest niisugusel juhul (muutuja y) funktsiooni $h_x(y) := F(x, y)$ range monotoonsuse ja pidevuse tõttu lõigus $[\widetilde{y} - \varepsilon, \widetilde{y} + \varepsilon]$ (Bolzano–Cauchy esimese teoreemi põhjal) võrrandi $F(x, y) = 0$ lahend y — s.t. väärtus $y(x)$ — paikneb arvude $\widetilde{y} - \varepsilon$ ja $\widetilde{y} + \varepsilon$ vahel.

Kuna funktsioon $u(y) = F(\widetilde{x}, y)$ on kasvav, siis

$$F(\widetilde{x}, \widetilde{y} - \varepsilon) < F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < F(\widetilde{x}, \widetilde{y} + \varepsilon),$$

s.t.,

$$F(\widetilde{x}, \widetilde{y} - \varepsilon) < 0 < F(\widetilde{x}, \widetilde{y} + \varepsilon),$$

Kuna funktsioon F on pidev punktides $(\widetilde{x}, \widetilde{y} - \varepsilon)$ ja $(\widetilde{x}, \widetilde{y} + \varepsilon)$, siis (teoreemi I.4.1 põhjal pideva funktsioon märgi säilimisest) leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\widetilde{x} - \delta < x < \widetilde{x} + \delta \quad \Longrightarrow \quad F(x, \widetilde{y} - \varepsilon) < 0 < F(x, \widetilde{y} + \varepsilon).$$

Teoreem on tõestatud. □

2.3. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni diferentseeruvus

Tugevdades teoreemi 2.1 eeldusi, anname piisavad tingimused ilmutamata funktsiooni tuletise olemasoluks.

Teoreem 2.2. *Eeldame, et*

(1) *funktsioon $u = F(x, y)$ on määratud punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses $\mathcal{U}$;*

(2) $F(x_0, y_0) = 0$;

(3) *osatuletised F'_x ja F'_y eksisteerivad ja on pidevad ümbruses $\mathcal{U}$;*

(4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Siis kehtivad teoreemi 2.1 väited (a)–(c). *Veelgi enam,*

(d) *funktsioonil $y = y(x)$ eksisteerib punkti x_0 teatavas ümbruses pidev tuletis, kusjuures selles ümbruses*

$$y'(x) = -\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}; \tag{2.4}$$

niisiis

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x\big(x_0, y(x_0)\big)}{F'_y\big(x_0, y(x_0)\big)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

TÕESTUS. Konkreetsuse mõttes eeldame, et $F'_y(x_0, y_0) > 0$ (juhtu, kus $F'_y(x_0, y_0) < 0$, käsitletakse analoogiliselt).

Kuna osatuletis F'_y eksisteerib ümbruses $\mathcal{U}$ ning on pidev punktis (x_0, y_0), siis iga punkti (x, y) korral teatavast ristkülikust

$$\mathcal{D} := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset \mathcal{U} \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

kehtib $F'_y(x, y) > 0$. Siit järeldub, et muutuja x iga fikseeritud väärtuse korral lõigust $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ on funktsioon $h_x(y) := F(x, y)$ rangelt kasvav lõigus $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. Niisiis, funktsioon F rahuldab ristkülikus $\mathcal{D}$ teoreemi 2.1 eeldusi (1)–(3) ning järelikult kehtivad selle teoreemi väited (a)–(c).

Olgu I mingi punkti x_0 sisaldav vahemik, milles funktsioon $y = y(x)$ on pidev. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et funktsioonil $y = y(x)$ eksisteerib lõplik tuletis vahemikus I, kusjuures vastav tuletisfunktsioon on selles vahemikus pidev.

Fikseerime vabalt punkti $x \in I$ ning vaatleme funktsiooni y argumendi muutusid Δx, mille korral $x + \Delta x \in I$. Tähistame

$$y = y(x) \quad \text{ja} \quad \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x);$$

siis $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$ ning järelikult

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0 - 0 = 0.$$

Funktsioon F on diferentseeruv ümbruse $\mathcal{U}$ igas punktis (sest sellel funktsioonil eksisteerivad selles ümbruses pidevad osatuletised), seega

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x, y)\,\Delta x + F'_y(x, y)\,\Delta y + \lambda\,\Delta x + \mu\,\Delta y, \quad (2.5)$$

kus funktsioonid $\lambda = \lambda(\Delta x, \Delta y)$ ja $\mu = \mu(\Delta x, \Delta y)$ rahuldavad tingimusi

$$\lambda \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0 \quad \text{ja} \quad \mu \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0.$$

Funktsiooni $y = y(x)$ pidevuse tõttu $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$ ning järelikult ka $\lambda, \mu \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$. Võrdusest (2.5) järeldub nüüd, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \lambda}{F'_y(x, y) + \mu} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Siit järeldub, et

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}.$$

Tuletisfunktsiooni y' pidevus järeldub funktsioonide F'_x, F'_y ja y pidevusest. Teoreem on tõestatud. □

Märkus 2.1. Kui lisaks teoreemi 2.2 eelduste täidetusele funktsioon F on kaks korda diferentseeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon $y = y(x)$ on kaks korda diferentseeruv punkti x_0

teatavas ümbruses, kusjuures selles ümbruses valemi (2.4) põhjal, märkides üleskirjutuste lihtsustamiseks

$$\begin{gathered} F := F\big(x, y(x)\big), \quad F'_x := F'_x\big(x, y(x)\big), \quad F'_y := F'_y\big(x, y(x)\big), \\ F''_{x^2} := F''_{x^2}\big(x, y(x)\big), \quad F''_{y^2} := F''_{y^2}\big(x, y(x)\big), \\ F''_{xy} = F''_{yx} := F''_{xy}\big(x, y(x)\big) = F''_{yx}\big(x, y(x)\big) \end{gathered}$$

ning $y := y(x)$ ja $y' := y'(x)$,

$$\begin{aligned} y''(x) &= \big(y'(x)\big)' = \left(-\frac{F'_x\big(x, y(x)\big)}{F'_y\big(x, y(x)\big)}\right)' \\ &= -\frac{\Big(F'_x\big(x, y(x)\big)\Big)' F'_y\big(x, y(x)\big) - F'_x\big(x, y(x)\big)\Big(F'_y\big(x, y(x)\big)\Big)'}{F'_y\big(x, y(x)\big)^2} \\ &= -\frac{\big(F''_{x^2} + F''_{xy}\, y'\big)F'_y - F'_x\big(F''_{yx} + F''_{y^2}\, y'\big)}{\big(F'_y\big)^2} \\ &= \frac{F'_x\, F''_{yx} - F'_y\, F''_{x^2} + \big(F'_x\, F''_{y^2} - F'_y\, F''_{xy}\big)\, y'}{\big(F'_y\big)^2} \\ &= \frac{F'_x\, F''_{yx} - F'_y\, F''_{x^2} + \big(F'_x\, F''_{y^2} - F'_y\, F''_{xy}\big)\left(-\dfrac{F'_x}{F'_y}\right)}{\big(F'_y\big)^2} \\ &= \frac{F'_x\, F'_y\, F''_{yx} - \big(F'_y\big)^2 F''_{x^2} - \big(F'_x\big)^2 F''_{y^2} + F'_x\, F'_y\, F''_{xy}}{\big(F'_y\big)^3} \\ &= -\frac{\big(F'_x\big)^2 F''_{y^2} - 2F'_x\, F'_y\, F''_{yx} + \big(F'_y\big)^2 F''_{x^2}}{\big(F'_y\big)^3}. \end{aligned}$$

Näeme, et kui funktsiooni F teist järku osatuletised on pidevad punkti P_0 mingis ümbruses, siis ka teine tuletis(funktsioon) y'' on pidev punkti x_0 teatavas ümbruses.

Funktsiooni $y = y(x)$ kõrgemat järku tuletised saab leida analoogiliselt (eeldusel, et funktsioon F on punkti P_0 mingis ümbruses vastav arv kordi diferentseeruv).

Näide 2.2. Leiame võrrandiga

$$x^3 - 6x^2y + y^3 = 31 \tag{2.6}$$

punkti $(2, -1)$ ümbruses määratud funktsiooni $y = y(x)$ esimest ja teist järku tuletised punktis $x = 2$.

Selleks märgime, et võrrand (2.6) on samaväärne võrrandiga $F(x, y) = 0$, kus

$$F(x, y) = x^3 - 6x^2y + y^3 - 31.$$

Leiame funktsiooni F osatuletised:

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 12xy, \quad F'_y(x, y) = -6x^2 + 3y^2.$$

Näeme, et funktsiooni F osatuletised on kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ pidevad, kusjuures

$$F'_y(2,-1) = -21 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et $F(2,-1) = 0$) teoreemi 2.2 põhjal punkti $(2,-1)$ teatavas ümbruses võrrand (2.6) määrab muutuja y muutuja x diferentseeruva funktsioonina $y = y(x)$; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes $y := y(x)$, valemi (2.4) põhjal

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{3x^2-12xy}{6x^2-3y^2} = \frac{x^2-4xy}{2x^2-y^2}, \tag{2.7}$$

millest, arvestades, et $y(2) = -1$, saame

$$y'(2) = \frac{4+8}{8-1} = \frac{12}{7}.$$

Kuna punkti $x = 2$ teatavas ümbruses kehtiva samasuse (2.7) parem pool on diferentseeruv (sest funktsioon $y = y(x)$ on selles ümbruses diferentseeruv), siis selle samasuse mõlemat poolt diferentseerides saame

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^2-4xy}{2x^2-y^2}\right)' = \frac{(x^2-4xy)'(2x^2-y^2)-(x^2-4xy)(2x^2-y^2)'}{(2x^2-y^2)^2} \\ &= \frac{(2x-4y-4xy')(2x^2-y^2)-(x^2-4xy)(4x-2yy')}{(2x^2-y^2)^2}, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $y(2) = -1$ ja $y'(2) = \frac{12}{7}$,

$$y''(2) = \frac{\left(4+4-\frac{96}{7}\right)7-12\left(8-\frac{24}{7}\right)}{49} = \frac{56-96-96-\frac{288}{7}}{49} = \frac{1240}{343}.$$

2.4. Mitme muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja diferentseeruvus

Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid defineeritakse analoogiliselt ühe muutuja ilmutamata funktsioonide juhuga.

Sisaldagu $m+1$ muutuja funktsiooni $u = F(x_1,\dots,x_m,y)$ määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \cdots \times I_m \times I = \big\{(x_1,\dots,x_m,y)\colon\ x_1 \in I_1,\dots,x_m \in I_m,\ y \in I\big\},$$

kus $I_1,\dots,I_m, I \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x_1,\dots,x_m,y) = 0. \tag{2.8}$$

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et võrrand (2.8) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutuja y muutujate $x_1,\dots,x_m$ (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x_1,\dots,x_m), \tag{2.9}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in I_1,\dots,x_m \in I_m$ korral võrrandil (2.8) eksisteerib parajasti üks lahend $y \in I$.

Kõnealune funktsioon (2.9)

$$I_1 \times \cdots \times I_m \ni (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto y(x_1, \ldots, x_m) \in I$$

on määratud võrdusega

$$F\big(x_1, \ldots, x_m, y(x_1, \ldots, x_m)\big) = 0:$$

see funktsioon seab punktile $(x_1, \ldots, x_m) \in I_1 \times \cdots \times I_m$ vastavusse võrrandi (2.8) ainsa lahendi $y \in I$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.9) on antud võrrandiga (2.8) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 2.3. *Eeldame, et*

(1) *($m + 1$ muutuja) funktsioon $u = F(x_1, \ldots, x_m, y)$ on määratud mingis risttahukas $\mathcal{D}$ keskpunktiga $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_0)$:*

$$\mathcal{D} := (x_1^0 - \alpha_1, x_1^0 + \alpha_1) \times \cdots \times (x_m^0 - \alpha_m, x_m^0 + \alpha_m) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$$

(siin $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta > 0$);

(2) *$F(P_0) = 0$;*

(3) *osatuletised $F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_m}$ ja F'_y eksisteerivad ja on pidevad risttahukas $\mathcal{D}$;*

(4) *$F'_y(P_0) \neq 0$.*

Siis

(a) *punkti P_0 teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab võrrand*

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = 0$$

muutuja y muutujate $x_1, \ldots, x_m$ (ühese) funktsioonina $y = y(x_1, \ldots, x_m)$;

(b) *$y(x_1^0, \ldots, x_m^0) = y_0$;*

(c) *funktsioon $y = y(x_1, \ldots, x_m)$ on punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidev;*

(d) *funktsioonil $y = y(x_1, \ldots, x_m)$ eksisteerivad punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised $y'_{x_1}, \ldots, y'_{x_m}$, kusjuures selles ümbruses*

$$y'_{x_i}(x_1, \ldots, x_m) = -\frac{F'_{x_i}\big(x_1, \ldots, x_m, y(x_1, \ldots, x_m)\big)}{F'_y\big(x_1, \ldots, x_m, y(x_1, \ldots, x_m)\big)}; \tag{2.10}$$

niisiis

$$y'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0) = -\frac{F'_{x_i}(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

Teoreemi 2.3 tõestus on täiesti analoogiline teoreemi 2.2 tõestusega (seejuures väidete (a)–(c) tõestus kasutab teoreemi 2.1 analoogi mitme muutuja ilmutamata funktsioonide jaoks – mille tõestus on jällegi täiesti analoogiline teoreemi 2.1 tõestusega), seepärast jätame ta siin ära toomata.

Märkus 2.2. Kui lisaks teoreemi 2.3 eelduste täidetusele funktsioon F on kaks korda diferentseeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon $y = y(x_1, \ldots, x_m)$ on kaks korda diferentseeruv punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses; seejuures tema teist järku osatuletised saab leida võttes osatuletised (punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses kehtivate) samasuste (2.10) mõlemast poolest.

Näide 2.3. Leiame võrrandiga

$$x^3z^2 - yz^3 - x = 2 \tag{2.11}$$

punkti $(1, 2, -1)$ ümbruses määratud funktsiooni $z = z(x, y)$ esimest ja teist järku osatuletised punktis $(x, y) = (1, 2)$.

Selleks märgime, et võrrand (2.11) on samaväärne võrrandiga $F(x, y, z) = 0$, kus

$$F(x, y.z) = x^3z^2 - yz^3 - x - 2.$$

Leiame funktsiooni F osatuletised:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2z^2 - 1, \quad F'_y(x, y, z) = -z^3, \quad F'_z(x, y, z) = 2x^3z - 3yz^2.$$

Näeme, et funktsiooni F osatuletised on kogu ruumis $\mathbb{R}^2$ pidevad, kusjuures

$$F'_z(1, 2, -1) = -8 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et $F(1, 2, -1) = 0$) teoreemi 2.3 põhjal punkti $(1, 2, -1)$ teatavas ümbruses võrrand (2.11) määrab muutuja z muutujate x ja y diferentseeruva funktsioonina $z = z(x, y)$; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes $z := z(x, y)$, valemi (2.10) põhjal

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{z^3}{2x^3z - 3yz^2} = \frac{z^2}{2x^3 - 3yz}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

millest, arvestades, et $z(1, 2) = -1$, saame

$$z'_x(1, 2) = \frac{-3 + 1}{-2 - 6} = \frac{1}{4}, \quad z'_y(1, 2) = \frac{1}{2 + 6} = \frac{1}{8}.$$

Kuna punkti $(x, y) = (1, 2)$ teatavas ümbruses kehtivate samasuste (2.12) paremad pooled on diferentseeruvad (sest funktsioon $z = z(x, y)$ on selles ümbruses diferentseeruv), siis neid samasusi diferentseerides saame

$$\begin{aligned}
z''_{x^2} &= \left(\frac{-3x^2z^2+1}{2x^3z-3yz^2}\right)'_x = \frac{(-3x^2z^2+1)'_x(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(2x^3z-3yz^2)'_x}{(2x^3z-3yz^2)^2}\\
&= \frac{(-6xz^2-6x^2zz'_x)(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(6x^2z+2x^3z'_x-6yzz'_x)}{(2x^3z-3yz^2)^2},\\
z''_{xy} &= \left(\frac{-3x^2z^2+1}{2x^3z-3yz^2}\right)'_y = \frac{(-3x^2z^2+1)'_y(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(2x^3z-3yz^2)'_y}{(2x^3z-3yz^2)^2}\\
&= \frac{(-6x^2zz'_y)(2x^3z-3yz^2)-(-3x^2z^2+1)(2x^3z'_y-3z^2-6yzz'_y)}{(2x^3z-3yz^2)^2},\\
z''_{yx} &= \left(\frac{z^2}{2x^3-3yz}\right)'_x = \frac{(z^2)'_x(2x^3-3yz)-z^2(2x^3-3yz)'_x}{(2x^3-3yz)^2}\\
&= \frac{2zz'_x(2x^3-3yz)-z^2(6x^2-3yz'_x)}{(2x^3-3yz)^2},\\
z''_{y^2} &= \left(\frac{z^2}{2x^3-3yz}\right)'_y = \frac{(z^2)'_y(2x^3-3yz)-z^2(2x^3-3yz)'_y}{(2x^3-3yz)^2}\\
&= \frac{2zz'_y(2x^3-3yz)-z^2(-3z-3yz'_y)}{(2x^3-3yz)^2},
\end{aligned}$$

millest, arvestades, et $z(1,2)=-1$, $z'_x(1,2)=\frac{1}{4}$, $z'_y(1,2)=\frac{1}{8}$,

$$\begin{aligned}
z''_{x^2}(1,2) &= \frac{(-6+\frac{6}{4})(-8)-(-3+1)(-6+\frac{2}{4}+\frac{12}{4})}{(-2-6)^2} = \frac{31}{64},\\
z''_{xy}(1,2) &= \frac{\frac{6}{8}(-8)-(-3+1)(\frac{2}{8}-3+\frac{12}{8})}{(-2-6)^2} = -\frac{17}{128},\\
z''_{yx}(1,2) &= \frac{-\frac{2}{4}(2+6)-(6-\frac{6}{4})}{(2+6)^2} = -\frac{17}{128},\\
z''_{y^2}(1,2) &= \frac{-\frac{2}{8}(2+6)-(3-\frac{6}{8})}{(2+6)^2} = -\frac{17}{256}.
\end{aligned}$$

Eelnevas võinuksime ühe osatuletistest z''_{xy} ja z''_{yx} rehkendamata jätta – samasustest (2.12) näeme, et funktsiooni z osatuletised on punkti $(x,y)=(1,2)$ teatavas ümbruses diferentseeruvad, s.t. funktsioon z on kaks korda diferentseeruv selles ümbruses ning järelikult selles ümbruses funktsiooni z teist järku segaosatuletised ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.

§ 3. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

3.1. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Sisaldagu $m+n$ muutuja funktsioonide

$$u_j = F_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \cdots \times I_m \times J_1 \times \cdots \times J_n,$$

kus $I_1, \ldots, I_m, J_1, \ldots, J_n \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et süsteem (3.2) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutujad $y_1, \ldots, y_n$ muutujate $x_1, \ldots, x_m$ (üheste) funktsioonidena:

$$y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_m), \quad \ldots\ldots, \quad y_n = y_n(x_1, \ldots, x_m), \tag{3.3}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in I_1, \ldots, x_m \in I_m$ korral süsteemil (3.2) eksisteerib parajasti üks lahend $(y_1, \ldots, y_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$.

Kõnealused funktsioonid (3.3)

$$I_1 \times \cdots \times I_m \ni (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto y_j(x_1, \ldots, x_m) \in J_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

on määratud võrdustega

$$F\big(x_1, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)\big) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

s.t. iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral funktsioon $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_m)$ seab punktile $(x_1, \ldots, x_m) \in I_1 \times \cdots \times I_m$ vastavusse muutuja y_j väärtuse süsteemi (3.2) ainsast lahendist $(y_1, \ldots, y_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$.

Seejuures öeldakse, et funktsioonid (3.3) on antud süsteemiga (3.2) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 3.1. *Eeldame, et*

(1) *($m+n$ muutuja) funktsioonid* (3.1) *on määratud mingis risttahukas $\mathcal{D}$ keskpunktiga $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$:*

$$\mathcal{D} := (x_1^0 - \alpha_1, x_1^0 + \alpha_1) \times \cdots \times (x_m^0 - \alpha_m, x_m^0 + \alpha_m) \\ \times (y_1^0 - \beta_1, y_1^0 + \beta_1) \times \cdots \times (y_n^0 - \beta_n, y_n^0 + \beta_n)$$

(siin $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots \beta_n > 0$);

(2) $F_j(P_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$;

(3) *iga* $k \in \{1, \dots, n\}$ *korral osatuletised* $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial F_k}{\partial x_m}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial F_k}{\partial y_n}$ *eksisteerivad ning on pidevad risttahukas* $\mathcal{D}$;

(4) $$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(P_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Siis

(a) *punkti* P_0 *teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab süsteem* (3.2) *muutujad* $y_1, \dots, y_n$ *muutujate* $x_1, \dots, x_m$ *(üheste) funktsioonidena* (3.3);

(b) $y_j(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_j^0$, $j = 1, \dots, n$;

(c) *funktsioonid* (3.3) *on punkti* $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ *teatavas ümbruses pidevad;*

(d) *funktsioonidel* (3.3) *eksisteerivad punkti* $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ *teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide* $j \in \{1, \dots, n\}$ *ja* $i \in \{1, \dots, m\}$ *korral*

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = -\frac{\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \dots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}} \tag{3.4}$$

(siin võrdusmärgist paremal olevates determinantides arvutatakse osatuletised $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_l}$ *punktis* $\big(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big)$*).*

TÕESTUS. Viime tõestuse läbi induktsioonina võrrandite arvu n järgi süsteemis (3.2). Juhul $n = 1$ on meil teoreem tõestatud – see on teoreem 2.3. Eeldame nüüd, et kehtib teoreemi analoog $n-1$ võrrandist koosnevate süstemide jaoks ning näitame, et sel juhul kehtib teoreem ka n võrrandist koosnevate süsteemide jaoks.

Eelduse (4) põhjal erineb vähemalt üks korrutistest

$$\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)}(P_0)\ \frac{\partial F_n}{\partial y_j}(P_0), \quad j = 1, \dots, n,$$

nullist. Konkreetsuse mõttes oletame, et

$$\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(P_0)\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \neq 0$$

Siis süsteemi (3.2) viimane võrrand rahuldab teoreemi 2.3 eeldusi ($m+n$ muutuja funktsiooni jaoks), seega teoreemi 2.3 põhjal punkti P_0 teatavas ristkülikukujulises ümbruses

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 := (x_1^0-\alpha_1^0, x_1^0+\alpha_1^0)\times\cdots\times(x_m^0-\alpha_m^0, x_m^0+\alpha_m^0)\\ \times(y_1^0-\beta_1^0, y_1^0+\beta_1^0)\times\cdots\times(y_n^0-\beta_n^0, y_n^0+\beta_n^0)\end{aligned}$$

määrab süsteemi (3.2) viimane võrrand muutuja y_n muutujate $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1}$ (ühese) funktsioonina

$$y_n = \phi(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1}), \tag{3.5}$$

mis on pidev ja diferentseeruv punkti $A_0 := (x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_{n-1}^0)\in\mathbb{R}^{m+n-1}$ ümbruses

$$\begin{aligned}\Delta_0 := (x_1^0-\alpha_1^0, x_1^0+\alpha_1^0)\times\cdots\times(x_m^0-\alpha_m^0, x_m^0+\alpha_m^0)\\ \times(y_1^0-\beta_1^0, y_1^0+\beta_1^0)\times\cdots\times(y_{n-1}^0-\beta_{n-1}^0, y_{n-1}^0+\beta_{n-1}^0)\end{aligned}$$

kusjuures $\phi(A_0)=\phi(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_{n-1}^0)=y_n^0$; seejuures punkti A_0 ümbruses kehtib samasus

$$F_n\big(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1},\phi(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1})\big)=0. \tag{3.6}$$

Defineerime iga $j\in\{1,\dots,n-1\}$ korral funktsiooni

$$\Phi_j(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1}) := F_j\big(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1},\phi(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1})\big);$$

siis süsteem (3.2) on risttahukas $\mathcal{D}_0$ samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1})=0,\\ \Phi_2(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1})=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Phi_{n-1}(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{n-1})=0,\end{cases} \tag{3.7}$$

millele on lisatud võrrand (3.5). Paneme tähele, et süsteem (3.7) rahuldab punkti A_0 risttahukakujulises ümbruses Δ_0 teoreemi analoogi eeldusi $n-1$ võrrandist koosnevate süsteemide jaoks. Tõepoolest,

(1) funktsioonid $\Phi_1,\dots,\Phi_{n-1}$ on pidevad risttahukas Δ_0;

(2) iga $j\in\{1,\dots,n-1\}$ korral

$$\begin{aligned}\Phi_j(A_0) &= F_j\big(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_{n-1}^0,\phi(A_0)\big)\\ &= F_j(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_{n-1}^0,y_n^0)=F_j(P_0)=0;\end{aligned}$$

(3) iga $j\in\{1,\dots,n-1\}$ korral osatuletised $\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x_m},\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y_1},\dots,\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y_{n-1}}$ eksisteerivad ja on pidevad risttahukas Δ_0; seejuures kõikide $i\in\{1,\dots,m\}$, $k\in$

$\{1, \dots, n-1\}$ ja $A = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Delta_0$ korral

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(A) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(P) + \frac{\partial F_j}{\partial y_n}(P)\,\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(A),$$
$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k}(A) = \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(P) + \frac{\partial F_j}{\partial y_n}(P)\,\frac{\partial \phi}{\partial y_k}(A),$$

kus $P := \big(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}, \phi(A)\big) \in \mathcal{D}_0$.

(4) Veendume, et

$$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(A_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

(siin ja edaspidi võetakse kõik osatuletised $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ ja $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}$ punktis P_0 ja kõik osatuletised $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$ punktis A_0). Selleks tähistame

$$J(P_0) := \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Liites viimases determinandis iga $j \in \{1, \dots, n-2\}$ korral j-ndale veerule $\dfrac{\partial \phi}{\partial y_j}$-kordse viimase veeru, saame

$$J(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Paneme tähele, et viimase determinandi viimase rea $n-1$ esimest elementi on nullid: tõepoolest, need elemendid on saadud (punkti A_0 ümbruses kehtiva) samasuse (3.6) diferentseerimisel vastavalt muutujate $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}$ järgi. Seega

$$J(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\dfrac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}(A_0)\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0).$$

Kuna eelduse põhjal $J(P_0) \neq 0$, siis ka $\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}(A_0) \neq 0$, nagu soovitud.

Tehtud eelduse põhjal teoreemi analoogi kehtivuse kohta $n-1$ võrrandist koosnevate süsteemide jaoks

(a) punkti A_0 teatavas ristkülikukujulises ümbruses määrab süsteem (3.7) muutujad $y_1, \ldots, y_{n-1}$ muutujate $x_1, \ldots, x_m$ (üheste) funktsioonidena

$$y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_m), \quad \ldots\ldots, \quad y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \ldots, x_m); \tag{3.8}$$

(b) $y_j(x_1^0, \ldots, x_m^0) = y_j^0,\ \ j = 1, \ldots, n-1;$

(c) funktsioonid (3.8) on punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad;

(d) funktsioonidel (3.8) eksisteerivad punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide $j = 1, \ldots, n-1$ ja $i = 1, \ldots, m$ korral

$$(y_j)'_{x_i}(x_1, \ldots, x_m) = -\frac{\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \ldots, y_{n-1})}}{\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}}.$$

Defineerides täiendavalt funktsiooni

$$y_n(x_1, \ldots, x_m) := \phi\big(x_1, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_{n-1}(x_1, \ldots, x_m)\big),$$

näeme, et teoreemi väited (a)–(c) ilmselt kehtivad; lisaks eksisteerivad funktsioonidel $y_1, \ldots, y_n$ punkti P_0 teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide $x_1, \ldots, x_m$ järgi. Jääb veenduda vaid valemi(te) (3.4) kehtivuses. Selleks märgime, et punkti $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ teatavas ümbruses kehtib iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral samasus

$$F_j\big(x_1, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)\big) = 0,$$

mida mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral muutuja x_i järgi diferentseerides saame

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0$$

(siin osatuletised $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ arvutatakse punktis $(x_1, \ldots, x_m)$ ning osatuletised $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ ja $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}$ punktis $(x_1, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)))$. Osatuletise $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$ saame seega leida süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_n}{\partial x_i}, \end{cases}$$

millest Crameri reegli järgi saamegi valemi (3.4). □

3.2. Kujutuse $\mathbb{R}^m \supset \Delta \to \mathbb{R}^m$ lokaalne pööratavus

Teoreem 3.2. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(Q) = x_1(u_1, ..., u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = x_m(Q) = x_m(u_1, ..., u_m) \end{cases} \tag{3.9}$$

pidevad osatuletised punkti $Q_0 := (u_1^0, ..., u_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *mingis ümbruses.*

Kui süsteemi (3.9) *jakobiaan*

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

erineb nullist punktis Q_0, siis leiduvad punkti Q_0 lahtine ümbrus $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^m$ ja punkti $P_0 := (x_1^0, \ldots, x_m^0) := \big(x_1(Q_0), \ldots, x_m(Q_0)\big) \in \mathbb{R}^m$ lahtine ümbrus $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$ nii, et süsteem (3.9) *määrab pööratava kujutuse*

$$\Delta_0 \ni (u_1, \ldots, u_m) = Q \longmapsto \big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}_0, \tag{3.11}$$

kusjuures selle kujutuse pöördkujutust $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$ määravatel funktsioonidel

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, ..., x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = u_m(x_1, ..., x_m) \end{cases} \tag{3.12}$$

eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}_0$ pidevad osatuletised.

Märkus 3.1. Funktsioonide (3.12) osatuletised võib leida järgmise mõttekäigu abil. Süsteemi (3.12) poolt määratud kujutus $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$ on süsteemi (3.9) poolt määratud kujutuse $\Delta_0 \to \mathcal{D}_0$ pöördkujutus, seega nende kujutuste $\Delta_0 \to \mathcal{D}_0$ ja $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$

korrutis on hulga Δ_0 ühikteisendus; järelikult teoreemi 1.1 põhjal nende süsteemide Jacobi maatriksite korrutis on hulga Δ_0 ühikteisenduse Jacobi maatriks, s.t. ühikmaatriks:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Siin süsteemi (3.9) Jacobi maatriks arvutatakse punktides $Q = (u_1, \dots, u_m) \in \Delta_0$ ja süsteemi (3.12) Jacobi maatriks vastavates punktides $P = \big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}_0$.

Niisiis süsteemi (3.12) Jacobi maatriks on süsteemi (3.9) Jacobi maatriksi pöördmaatriks:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}^{-1},$$

s.t. mis tahes $i, j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = (-1)^{j+i} \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_{j-1}}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} \\ 0\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_{i-1}} & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}}.$$

Siin, arvutades osatuletisi $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ punktis $P = \big(x_1(Q), \dots, x_m(Q)\big) \in \mathcal{D}_0$, kus $Q \in \Delta_0$, tuleb osatuletised $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_l}$ arvutada punktis Q ehk, sümmeetriliselt, arvutades osatuletisi $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ punktis $P \in \mathcal{D}_0$, tuleb osatuletised $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_l}$ arvutada vastavas punktis $Q = \big(u_1(P), \dots, u_m(P)\big) \in \Delta_0$.

Märkus 3.2. On selge, et teoreemis 3.2 (ning seega ka tema erijuhus teoreemis 3.4) saame me ümbruse Δ_0 valida sidusa. Sel juhul on ka ümbrus $\mathcal{D}_0$ sidus.

Ülesanne 3.1. Olgu funktsioonid

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{3.13}$$

pidevad sidusas hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Tõestada, et süsteemi (3.13) poolt määratud kujutuse $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ kujutishulk

$$\Big\{\big(u_1(P), \ldots, u_n(P)\big) \colon\ P \in \mathcal{D}\Big\} \subset \mathbb{R}^n$$

on sidus.

Teoreemi 3.2 tõestus kasutab järgnevat lemmat (mille loomulik kodu (nagu ka teoreemil 3.2) on vektorfunktsioonide – kujutuste $\mathbb{R}^m \supset \Delta \to \mathbb{R}^n$ teoorias).

Lemma 3.3. *Olgu punkti* $P_0 := (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *mingis ümbruses määratud funktsioonid*

$$\begin{cases} u_1 = u_1(P) = u_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(P) = u_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{3.14}$$

pidevad punktis P_0. *Siis punkti* $Q_0 := (u_1^0, \ldots, u_n^0) := \big(u_1(P_0), \ldots, u_n(P_0)\big) \in \mathbb{R}^n$ *iga ümbruse* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ *korral leidub punkti* P_0 *ümbrus* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, *mille süsteemi* (3.14) *poolt määratud kujutus kujutab ümbrusesse* $\mathcal{V}$*:*

$$\Big\{\big(u_1(P), \ldots, u_n(P)\big) \colon\ P \in \mathcal{U}\Big\} \subset \mathcal{V}.$$

Tõestus. Olgu $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ punkti Q_0 ümbrus. Siis ümbrus $\mathcal{V}$ sisaldab mingi risttahukakujulise ümbruse

$$\mathcal{V}_0 := (u_1^0 - \alpha_1, u_1^0 + \alpha_1) \times \cdots \times (u_m^0 - \alpha_m, u_m^0 + \alpha_m).$$

Funktsioonide (3.14) pidevuse tõttu punktis P_0 iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral leidub punkti P_0 ümbrus $\mathcal{U}_j$ nii, et

$$P \in \mathcal{U}_j \quad \Longrightarrow \quad |u_j(P) - u_j(P_0)| = |u_j(P) - u_0| < \alpha_j.$$

Niisiis, kui $P \in \bigcap \mathcal{U}_j =: \mathcal{U}$, siis

$$\big(u_1(P), \ldots, u_m(P)\big) \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V},$$

nagu soovitud. □

Üleskirjutuste lihtsuse mõttes esitame teoreemi 3.2 tõestuse ainult erijuhu $m = 2$ jaoks (teoreemi 3.2 tõestus üldjuhul on täiesti analoogiline). Kuna me kasutame edaspidises (ka?) just seda konkreetset erijuhtu, siis parema viidatavuse huvides sõnastame ta.

Teoreem 3.4. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$\begin{cases} x = x(Q) = x(u,v), \\ y = y(Q) = y(u,v) \end{cases} \tag{3.15}$$

pidevad osatuletised punkti $Q_0 := (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ *mingis ümbruses.*

Kui süsteemi (3.15) *jakobiaan*

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

erineb nullist punktis Q_0*, siis leiduvad punkti* Q_0 *lahtine ümbrus* $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^2$ *ja punkti* $P_0 := (x_0, y_0) := \big(x(Q_0), y(Q_0)\big) \in \mathbb{R}^2$ *lahtine ümbrus* $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$ *nii, et süsteem* (3.15) *määrab pööratava kujutuse*

$$\Delta_0 \ni (u,v) = Q \longmapsto \big(x(Q), y(Q)\big) \in \mathcal{D}_0,$$

kusjuures selle kujutuse pöördkujutust $\mathcal{D}_0 \to \Delta_0$ *määravatel funktsioonidel*

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{3.17}$$

eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}_0$ *pidevad osatuletised; seejuures*

$$u'_x = \frac{y'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \qquad u'_y = \frac{-x'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \qquad v'_x = \frac{-y'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \qquad v'_y = \frac{x'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}$$

(siin osatuletised x'_u, x'_v, y'_u, y'_v *arvutatakse punktidele* $P \in \mathcal{D}_0$ *vastavates punktides* $Q = \big(u(P), v(P)\big) \in \Delta_0$*).*

Tõestus. Olgu jakobiaan (3.16) nullist erinev punktis Q_0. Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) := -x + x(u,v) = 0, \\ F_2(x,y,u,v) := -y + y(u,v) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Funktsioonidel (3.18) eksisteerivad punkti $R_0 := (x_0, y_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^4$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures selle süsteemi Jacobi maatriks on

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_y & (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y & (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & x'_u & x'_v \\ 0 & -1 & y'_u & y'_v \end{pmatrix};$$

(siin osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v arvutatakse punktides (u,v)). Kuna punktis R_0

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

(siin osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v arvutatakse punktis $(u_0,v_0)=Q_0$), kusjuures $F_1(R_0)=F_2(R_0)=0$, siis teoreemi 3.1 põhjal leidub punkti R_0 risttahukakujuline ümbrus $\mathcal{D}_1\times\Delta_1$, kus $\mathcal{D}_1$ ja Δ_1 on vastavalt punktide P_0 ja O_0 ristkülikukujulised ümbrused, milles süsteem (3.18) määrab muutujad u ja v muutujate x ja y üheste funktsioonidena (3.17), millel eksisteerivad ristkülikus $\mathcal{D}_1$ pidevad osatuletised

$$u'_x=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & x'_v\\ 0 & y'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}}=\frac{y'_v}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}},$$

$$u'_y=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & x'_v\\ -1 & y'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}}=\frac{-x'_v}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}},$$

$$v'_x=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}x'_u & -1\\ y'_u & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}}=\frac{-y'_u}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}},$$

$$v'_y=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}x'_u & 0\\ y'_u & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}}=\frac{x'_u}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}}$$

(siin, arvutades osatuletisi u'_x, v'_x, u'_y ja v'_y punktis (x,y), tuleb osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v arvutada punktis $(u,v)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$).

Märgime, et mis tahes $P=(x,y)\in\mathcal{D}_1$ korral

$$\begin{cases}x=x\big(u(x,y),v(x,y)\big),\\ y=y\big(u(x,y),v(x,y)\big),\end{cases}$$

seega kui $\Phi\colon\ \Delta_1\to\mathbb{R}^2$ ja $\Psi\colon\ \mathcal{D}_1\to\Delta_1$ on vastavalt süsteemidega (3.15) ja (3.17) määratud kujutused, s.t.

$$\Phi(Q)=\big(x(Q),y(Q)\big),\quad Q\in\Delta_1,\qquad\text{ja}\qquad\Psi(P)=\big(u(P),v(P)\big),\quad P\in\mathcal{D}_1,$$

siis

$$P=\Phi\Psi(P)\quad\text{iga } P\in\mathcal{D}_1 \text{ korral.}\tag{3.19}$$

Nüüd vaatleme süsteemi

$$\begin{cases}G_1(x,y,u,v):=-u+u(x,y)=0,\\ G_2(x,y,u,v):=-v+v(x,y)=0.\end{cases}\tag{3.20}$$

Funktsioonidel (3.20) eksisteerivad punkti R_0 teatavas ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures selle süsteemi Jacobi maatriks on

$$\begin{pmatrix}(G_1)'_x & (G_1)'_y & (G_1)'_u & (G_1)'_v\\ (G_2)'_x & (G_2)'_y & (G_2)'_u & (G_2)'_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'_x & u'_y & -1 & 0\\ v'_x & v'_y & 0 & -1\end{pmatrix};$$

(siin osatuletised u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y arvutatakse punktides (x, y)). Kuna järelduse 1.3 põhjal punktis R_0

$$\frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} \neq 0$$

(siin osatuletised u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y arvutatakse punktis $(x_0, y_0) = P_0$ ning osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v vastavas punktis $(u_0, v_0) = Q_0$), kusjuures $\Psi_1(R_0) = \Psi_2(R_0) = 0$, siis leidub punkti R_0 risttahukakujuline ümbrus $\mathcal{D}_2 \times \Delta_2$, kus $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ ja $\Delta_2 \subset \Delta_1$ on vastavalt punktide P_0 ja Q_0 ristkülikukujulised ümbrused, milles süsteem (3.20) määrab muutujad x ja y muutujate u ja v üheste funktsioonidena

$$\begin{cases} x = \widehat{x}(u, v), \\ y = \widehat{y}(u, v). \end{cases} \tag{3.21}$$

Seejuures mis tahes $Q = (u, v) \in \Delta_2$ korral

$$\begin{cases} u = u\big(\widehat{x}(u, v), \widehat{y}(u, v)\big), \\ v = v\big(\widehat{x}(u, v), \widehat{y}(u, v)\big), \end{cases}$$

seega kui $\widehat{\Phi}\colon \Delta_2 \to \mathcal{D}_2$ on süsteemi (3.21) poolt määratud kujutus, s.t. $\widehat{\Phi}(Q) = \big(\widehat{x}(Q), \widehat{y}(Q)\big)$, $Q \in \Delta_2$, siis

$$Q = \Psi\widehat{\Phi}(Q) \quad \text{iga } Q \in \Delta_2 \text{ korral.} \tag{3.22}$$

Paneme tähele, et mis tahes $Q \in \Delta_2$ korral $\Phi(Q) = \widehat{\Phi}(Q)$, sest ühelt poolt (3.22) põhjal

$$\Phi\Psi\widehat{\Phi}(Q) = \Phi\big(\Psi\widehat{\Phi}(Q)\big) = \Phi(Q),$$

teiselt poolt (arvestades, et $\widehat{\Phi}(Q) \in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$) tingimuse (3.19) põhjal

$$\Phi\Psi\widehat{\Phi}(Q) = \Phi\Psi\big(\widehat{\Phi}(Q)\big) = \widehat{\Phi}(Q).$$

Tähistame $\Delta_0 := \Delta_2$ ja $\mathcal{D}_0 := \Phi(\Delta_0) = \big\{\Phi(Q)\colon\ Q \in \Delta_0 = \Delta_2\big\} \subset \mathcal{D}_2$; siis kujutuse Φ ahend $\Phi|_{\Delta_0}\colon\ \Delta_0 \to \mathcal{D}_0$ on pealekujutus, kusjuures $\Phi|_{\Delta_0}$ on ka üksühene, sest kui $Q_1, Q_2 \in \Delta_0 = \Delta_2$ on sellised, et $\Phi(Q_1) = \Phi(Q_2)$, siis

$$Q_1 = \Psi\widehat{\Phi}(Q_1) = \Psi\big(\widehat{\Phi}(Q_1)\big) = \Psi\big(\Phi(Q_1)\big) = \Psi\big(\Phi(Q_2)\big) = \Psi\big(\widehat{\Phi}(Q_2)\big) = \Psi\widehat{\Phi}(Q_2) = Q_2.$$

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\mathcal{D}_0$ on lahtine hulk. Olgu $P_1 \in \mathcal{D}_0$, s.t. $P_1 = \Phi(Q_1)$ mingi $Q_1 \in \Delta_0$ korral. Hulga Δ_0 lahtisuse tõttu leidub punkti Q_1 ümbrus $\mathcal{V} \subset \Delta_0$. Lemma 3.3 põhjal leidub punkti P_1 ümbrus $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ nii, et

$$\Psi(\mathcal{U}) = \big\{\Psi(P)\colon\ P \in \mathcal{U}\big\} \subset \mathcal{V}.$$

Nüüd mis tahes $P \in \mathcal{U}$ korral (arvestades, et $\Psi(P) \in \mathcal{V}$)

$$P = \Phi\Psi(P) = \Phi\big(\Psi(P)\big) \in \Phi(\mathcal{V}) \subset \Phi(\Delta_0) = \mathcal{D}_0,$$

seega $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}_0$, järelikult P_1 on hulga $\mathcal{D}_0$ sisepunkt; niisiis hulk $\mathcal{D}$ on lahtine. □

Märkus 3.3. Eelnevas tõestuses võinuksime osatuletised u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y välja rehkendada ka märkusele 3.1 tuginedes, s.t. arvestades, et süsteemi (3.17) Jacobi maatriks on süsteemi (3.15) Jacobi maatriksi pöördmaatriks. Siin, arvutades osatuletisi u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y punktis $P = (x, y) \in \mathcal{D}_0$, tuleb osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v süsteemi (3.15) Jacobi maatriksis arvutada vastavas punktis $Q = \big(u(P), v(P)\big) \in \Delta_0$ ehk, sümmeetriliselt, arvutades osatuletisi u'_x, u'_y, v'_x ja v'_y punktis $P = \big(x(Q), y(Q)\big) \in \mathcal{D}_0$, kus $Q \in \Delta_0$, tuleb osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v süsteemi (3.15) Jacobi maatriksis arvutada vastavas punktis Q.

Järeldus 3.5. *Eksisteerigu funktsioonidel* (3.9) *pidevad osatuletised lahtises hulgas* $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, *kusjuures hulga* Δ *igas punktis jakobiaan* (3.10) *erineb nullist. Siis süsteemiga* (3.9) *määratud kujutuse* $\Delta \to \mathbb{R}^m$ *kujutishulk*

$$\mathcal{D} := \Big\{\big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \colon \ Q \in \Delta\Big\} \subset \mathbb{R}^m$$

on lahtine.

TÕESTUS. Järelduse tõestuseks tuleb näidata, et hulga $\mathcal{D}$ iga punkt on tema sisepunkt. Olgu $P_0 \in \mathcal{D}$, s.t. mingi $Q_0 \in \Delta$ korral $P_0 = \big(x_1(Q_0), \ldots, x_m(Q_0)\big)$. Teoreemi 3.2 põhjal leiduvad punkti Q_0 lahtine ümbrus $\Delta_0 \subset \Delta$ ja punkti P_0 lahtine ümbrus $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$ nii, et süsteem (3.9) määrab pööratava kujutuse (3.11), aga siit järeldub, et punkti P_0 lahtine ümbrus $\mathcal{D}_0$ sisaldub kujutishulgas $\mathcal{D}$; niiisis P_0 on hulga $\mathcal{D}$ sisepunkt, nagu soovitud. $\square$

IV peatükk.
Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid

§ 1. Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

1.1. Lokaalse ekstreemumi mõiste. Tarvilik tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Olgu funktsioon $u = f(P)$ määratud punkti $P_0 \in \mathbb{R}^m$ mingis ümbruses.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0

- *lokaalne maksimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) \leqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral;}$$

- *lokaalne miinimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Seejuures punkti P_0 nimetatakse vastavalt funktsiooni f *lokaalseks maksimumpunktiks* ja *lokaalseks miinimumpunktiks.*

Teisisõnu, funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne maksimum (või, vastavalt, lokaalne miinimum), kui sellel punktil leidub ümbrus, milles $f(P_0)$ on selle funktsiooni suurim väärtus (või, vastavalt, vähim väärtus).

Lokaalset maksimumi ja lokaalset miinimumi nimetatakse *lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_0

- *range lokaalne maksimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) < f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \backslash \{P_0\} \text{ korral;}$$

- *range lokaalne miinimum,* kui punktil P_0 leidub ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et

$$f(P) > f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U}\backslash\{P_0\} \text{ korral.}$$

Ranget lokaalset maksimumi ja ranget lokaalset miinimumi nimetatakse *rangeteks lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Teoreem 1.1. *Eksisteerigu funktsioonil $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ punktis $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide järgi. Kui funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne ekstreemum, siis selle funktsiooni kõik esimest järku osatuletised punktis P_0 on võrdsed nulliga, s.t.*

$$f'_{x_i}(P_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

TÕESTUS. Konkreetsuse mõttes eeldame, et funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne miinimum (juhtu, kus funktsioonil f on punktis P_0 lokaalne maksimum, käsitletakse analoogiliselt), s.t. leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et

$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad \text{iga } P \in U_\varepsilon(P_0) \text{ korral.}$$

Olgu $i \in \{1, \dots, m\}$. Vaatleme funktsiooni

$$g(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0).$$

Paneme tähele, et

(1) funktsioon g on määratud vahemikus $(x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$;

(2) funktsioonil g on punktis $t = x_i^0$ lokaalne miinimum;

(3) funktsioon g on diferentseeruv punktis $t = x_i^0$, kusjuures $g'(x_i^0) = f'_{x_i}(P_0)$.

Tõepoolest, tähistame iga $t \in \mathbb{R}$ korral $Q_t := (x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$; siis iga $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ korral $d(Q_t, P_0) = |t - x_i^0| < \varepsilon$, s.t. $Q_t \in U_\varepsilon(P_0)$, seega Q_t kuulub funktsiooni f määramispiirkonda ehk, teisisõnu, funktsioon g on määratud punktis t. Seejuures iga $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ korral

$$g(t) = f(Q_t) \geqslant f(P_0) = g(x_i^0);$$

niisiis, funktsioonil g on punktis x_i^0 lokaalne miinimum.

Väidetest (3) ja (2) järeldub Fermat' teoreemi põhjal, et $f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0) = 0$, nagu soovitud. □

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et punkt P_0 on funktsiooni f

- *statsionaarne punkt,* kui sellel funktsioonil eksisteerivad selles punktis osatuletised kõikide muutujate järgi, kusjuures kõik need osatuletised on võrdsed nulliga;

- *kriitiline punkt,* kui see punkt on kas funktsiooni f statsionaarne punkt või selle funktsiooni mingi osatuletis selles punktis kas ei eksisteeri või on lõpmatu.

Teoreemist 1.1 järeldub, et

- *mis tahes funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni kriitilises punktis;*
- *diferentseeruval funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni statsionaarses punktis.*

Märkus 1.1. Punkti statsionaarsus ei ole piisav tingimus funktsiooni lokaalse ekstreemumi olemasoluks selles punktis (isegi juhul, kui funktsioon on diferentseeruv selles statsionaarses punktis).

Näide 1.1. Veendume, et funktsioonil $z = f(x, y) := xy$ ei ole lokaalset ekstreemumit tema statsionaarses punktis $(0, 0)$.

Kõigepealt märgime, et punkt $(0, 0)$ on tõepoolest funktsiooni f statsionaarne punkt, sest selle funktsiooni osatuletised on

$$f'_x(x, y) = (xy)'_x = y \quad \text{ja} \quad f'_y(x, y) = (xy)'_y = x$$

ning seega $f'_x(0, 0) = 0$ ja $f'_y(0, 0) = 0$. Lisaks, funktsioon f on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, sest tema osatuletised on pidevad kogu tasandil.

Veendumaks, et funktsioonil f ei ole punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit, märgime, et punkti $(0, 0)$ mis tahes ümbrus sisaldab punkte (x, y), kus x ja y on nullist erinevad ja samamärgilised ning seega $f(x, y) = xy > 0 = f(0, 0)$, samuti punkte (x, y), kus x ja y on nullist erinevad ja erimärgilised ning seega $f(x, y) = xy < 0 = f(0, 0)$.

1.2. Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks

1.2.1. Ruutvormi mõiste ja määratus

Definitsioon 1.4. Olgu $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Summat

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} z_i z_j =: \Phi(z_1, \ldots, z_m) \tag{1.1}$$

nimetatakse *ruutvormiks* muutujatest $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$. Arvusid a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$, nimetatakse selle ruutvormi *kordajateks.*

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et ruutvorm (1.1) on

- *positiivselt määratud,* kui

$$\Phi(z_1, \ldots, z_m) > 0 \quad \text{kõikide } z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R},\ z_1^2 + \cdots + z_m^2 \neq 0, \text{ korral;}$$

- *negatiivselt määratud,* kui

$$\Phi(z_1, \ldots, z_m) < 0 \quad \text{kõikide } z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R},\ z_1^2 + \cdots + z_m^2 \neq 0, \text{ korral.}$$

Positiivselt määratud ja negatiivselt määratud ruutvorme nimetatakse *määratud ruutvormideks.*

Ruutvormi (1.1) nimetatakse *määramata ruutvormiks,* kui tal esineb nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

Definitsioon 1.6. Maatriksit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} =: (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$$

nimetatakse *ruutvormi* (1.1) *maatriksiks.*

Determinante

$$A_1 := a_{11}, \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

nimetatakse ruutvormi (1.1) *peamiinoriteks.*

Järgnev algebra kursusest tuttav teoreem võimaldab teha kindlaks ruutvormi määratuse selle ruutvormi peamiinorite märkide põhjal.

Teoreem 1.2 (Sylvesteri[1] tunnus). (a) *Ruutvorm* (1.1) *on positiivselt määratud parajasti siis, kui kõik tema peamiinorid on positiivsed, s.t.*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots\dots, \quad A_m > 0.$$

(b) *Ruutvorm* (1.1) *on negatiivselt määratud parajasti siis, kui tema peamiinorite märgid vahelduvad, kusjuures $A_1 < 0$, s.t.*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \dots .$$

1.2.2. Üldine (s.t. m muutuja funktsiooni) juht

Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv punktis $P_0 \in \mathbb{R}$.

Definitsioon 1.7. Ruutvormi

$$\sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(P_0)\, z_i z_j \tag{1.2}$$

nimetatakse funktsiooni f *Hesse*[2] *(ruut)vormiks* (punktis P_0) (muutujatest $z_1, \dots, z_m$). Selle ruutvormi maatriksit $\left(f''_{x_i x_j}(P_0)\right)_{i,j=1}^{m}$ nimetatakse funktsiooni f *Hesse maatriksiks* (punktis P_0).

Nii Hesse ruutvormile kui ka Hesse maatriksile viidatakse terminiga *hessiaan.*

[2]Ludwig Otto Hesse (1811–1874) — saksa matemaatik.

Märkus 1.2. Siinkohal on oluline märkida, et funktsiooni f Hesse maatriks on sümmeetriline, s.t. mis tahes $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ korral $f''_{x_i x_j}(P_0) = f''_{x_j x_i}(P_0)$ (see järeldub teoreemi II.3.1 põhjal eeldusest, et funktsioon f on kaks korda diferentseeruv punktis P_0.)

Funktsiooni f teist järku täisdiferentsiaali

$$d^2u(P_0) = \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(P_0)\, dx_i dx_j$$

võib tõlgendada kui selle funktsiooni hessiaani punktis P_0 (muutujatest $dx_1, \ldots, dx_m$), mistõttu sobivas kontekstis viidataksegi sellele diferentsiaalile kui hessiaanile.

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks ja mitteolemasoluks kaks korda diferentseeruva funktsiooni statsionaarses punktis.

Teoreem 1.3. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$.*

(a) *Kui funktsiooni f hessiaan punktis P_0 on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.*

(b) *Kui funktsiooni f hessiaan punktis P_0 on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.*

(c) *Kui funktsiooni f hessiaan punktis P_0 on määramata ruutvorm, siis funktsioonil f ei ole lokaalset ekstreemumit punktis P_0.*

TÕESTUS. Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et funktsioon f on määratud punkti P_0 δ-ümbruses $\mathcal{U}$. Kui $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{U} \backslash \{P_0\}$, siis Taylori valemi põhjal (jääkliikmega Peano kujul; vt. teoreemi II.4.1)

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{1}{2}\, d^2 f(P_0) + \alpha = \frac{1}{2}\, d^2 f(P_0) + \alpha$$

(siin arvestasime, et kuna P_0 on funktsiooni f statsionaarne punkt, siis $df(P_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(P_0)\, dx_i = 0$), kus diferentsiaalide $df(P_0)$ ja $d^2 f(P_0)$ avaldistes $dx_i = \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, m$, ning funktsioon $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ rahuldab tingimust $\alpha = o(\rho^2)$ protsessis $\rho \to 0$, kus $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0)$. Tähistame

$$a_{ij} := f''_{x_i x_j}(P_0), \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

ja $h_i := \dfrac{\Delta x_i}{\rho}$, $i = 1, \ldots, m$ (märgime, et $h_1^2 + \cdots + h_m^2 = 1$); siis

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= \frac{1}{2}\, d^2 u(P_0) + \alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(P_0)\, \Delta x_i\, \Delta x_j + \alpha \\ &= \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i h_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

(a). Eeldame, et funktsiooni f hessiaan punktis P_0 (s.t ruutvorm (1.2)) on positiivselt määratud ruutvorm. Siis

$$\Phi(h_1,\ldots,h_m) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i h_j > 0, \qquad \text{kui} \quad h_1^2+\cdots+h_m^2 \neq 0.$$

Funktsioon $\Phi = \Phi(h_1,\ldots,h_m)$ on pidev tõkestatud kinnises hulgas

$$S := \big\{(h_1,\ldots,h_m)\in\mathbb{R}^m\colon\ h_1^2+\cdots+h_m^2 = 1\big\},$$

järelikult Weierstrassi teise teoreemi I.4.8 põhjal leidub punkt $(h_1^0,\ldots,h_m^0)\in S$, milles see funktsioon Φ saavutab oma miinimumi hulgas S. Seejuures

$$\mu := \min_{(h_1,\ldots,h_m)\in S}\Phi(h_1,\ldots,h_m) = \Phi(h_1^0,\ldots,h_m^0) > 0.$$

Mis tahes $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$ korral (mille puhul $0<\rho<\delta$)

$$f(P)-f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i h_j + \frac{2\alpha}{\rho^2}\right) \geqslant \frac{\rho^2}{2}\left(\mu - \frac{2|\alpha|}{\rho^2}\right).$$

Seega, valides reaalarvu ε nii, et $0<\varepsilon<\delta$ ja

$$0<\rho<\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \frac{|\alpha|}{\rho^2} < \frac{\mu}{4},$$

saame mis tahes $P\in U_\varepsilon(P_0)\backslash\{P_0\}$ korral (sel juhul $\rho = d(P,P_0)<\varepsilon$)

$$f(P)-f(P_0) \geqslant \frac{\rho^2}{2}\left(\mu-\frac{2|\alpha|}{\rho^2}\right) > \frac{\rho^2}{2}\left(\mu-\frac{\mu}{2}\right) = \frac{\mu\rho^2}{4} > 0,$$

järelikult funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.

Väite (b) tõestus on analoogiline väite (a) tõestusega.

(c). Eeldame nüüd, et hessiaan (1.2) on määramata ruutvorm, s.t. leiduvad reaalarvud $h_1',\ldots,h_m'$ ja $h_1'',\ldots,h_m''$ nii, et

$$q' := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i' h_j' > 0 \quad \text{ja} \quad q'' := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i'' h_j'' < 0.$$

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et ${h_1'}^2+\cdots+{h_m'}^2 = 1$ ja ${h_1''}^2+\cdots+{h_m''}^2 = 1$ (PÕHJENDADA!). Tähistame iga reaalarvu $\rho>0$ korral

$$P_\rho' := (x_1^0+\rho h_1',\ldots,x_m^0+\rho h_m') \quad \text{ja} \quad P_\rho'' := (x_1^0+\rho h_1'',\ldots,x_m^0+\rho h_m'').$$

Kui $\rho<\delta$, siis $P_\rho', P_\rho''\in\mathcal{U}$ (sest $d(P_\rho',P_0) = d(P_\rho',P_0) = \rho$) ning valemi (1.3) põhjal

(võttes tõestuse alguse arutelus vastavalt $\Delta x_i = \rho h_i'$, $i = 1, \ldots, m$, ja $\Delta x_i = \rho h_i''$, $i = 1, \ldots, m$)

$$f(P_\rho') - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i'\, h_j' + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) = \frac{\rho^2}{2} \left(q' + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) \geqslant \frac{\rho^2}{2} \left(q' - \frac{2|\alpha|}{\rho^2} \right),$$
$$f(P_\rho'') - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, h_i''\, h_j'' + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) = \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{2\alpha}{\rho^2} - |q''| \right) \leqslant \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{2|\alpha|}{\rho^2} - |q''| \right)$$

(PÕHJENDADA!). Valides reaalarvu ε nii, et $0 < \varepsilon < \delta$ ja (kasutades tähistust $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$)

$$0 < \rho < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\alpha|}{\rho^2} < \frac{1}{4} \min\{q', |q''|\},$$

saame mis tahes positiivse reaalarvu $\rho < \varepsilon$ korral

$$f(P_\rho') - f(P_0) > \frac{\rho^2}{2} \left(q' - \frac{q'}{2} \right) = \frac{\rho^2 q'}{4} > 0$$

ja

$$f(P_\rho') - f(P_0) < \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{|q''|}{2} - |q''| \right) = -\frac{\rho^2 |q''|}{4} < 0,$$

seega funktsioonil f ei ole punktis P_0 lokaalset ekstreemumit (PÕHJENDADA!). □

Järgnev teoreem on vahetu järeldus teoreemidest 1.2 (s.t. Sylvesteri tunnusest) ja 1.3.

Teoreem 1.4. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Tähistame*

$$a_{ij} := f''_{x_i x_j}(P_0), \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

ja

$$A_1 := a_{11}, \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad A_m := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

(a) *Kui kõik miinorid $A_1, \ldots, A_m$ on positiivsed, s.t. kui*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \ldots\ldots, \quad A_m > 0,$$

siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.

(b) *Kui miinorite $A_1, \ldots, A_m$ märgid vahelduvad, kusjuures A_1 on negatiivne, s.t. kui*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \ldots,$$

siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.

1.2.3. Kahe muutuja funktsiooni juht

Teoreem 1.5. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x,y)$ kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Tähistame*

$$a_{11} := f''_{x^2}(P_0), \quad a_{22} := f''_{y^2}(P_0), \quad a_{12} := a_{21} := f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$

ning

$$A_1 := a_{11} \quad ja \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2.$$

(a) *Kui $A_1 > 0$ ja $A_2 > 0$, siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne miinimum.*

(b) *Kui $A_1 < 0$ ja $A_2 > 0$, siis funktsioonil f on punktis P_0 range lokaalne maksimum.*

(c) *Kui $A_2 < 0$, siis funktsioonil f ei ole punktis P_0 lokaalset ekstreemumit.*

TÕESTUS. (a) ja (b) järelduvad vahetult teoreemi 1.4 vastavatest väidetest.

(c). Olgu $A_2 < 0$. Lokaalse ekstreemumi puudumiseks punktis P_0 piisab teoreemi 1.3, (c), põhjal näidata, et hessiaan

$$a_{11}\, z_1^2 + 2a_{12}\, z_1\, z_2 + a_{22} z_2^2 =: \Phi(z_1, z_2)$$

on määramata ruutvorm (muutujate z_1 ja z_2 suhtes).

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $a_{11} \neq 0$. Sel juhul, kui võtta $z_1 = 1$ ja $z_2 = 0$, siis $\operatorname{sgn} \Phi(z_1, z_2) = \operatorname{sgn} a_{11}$. Teiselt poolt, kui võtta $z_1 = a_{12}$ ja $z_2 = -a_{11}$, siis

$$\Phi(z_1, z_2) = a_{11}\, a_{12}^2 - 2a_{11}\, a_{12}^2 + a_{11}^2\, a_{22} = a_{11}(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}\, A_2$$

ning seega $\operatorname{sgn} \Phi(z_1, z_2) = -\operatorname{sgn} a_{11}$. Niisiis, $\Phi(z_1, z_2)$ on määramata ruutvorm.

Nüüd eeldame, et $a_{11} = 0$. Paneme tähele, et $a_{12} \neq 0$ (sest vastasel juhul oleks $A_2 = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = 0$). Kui $z_2 \neq 0$, siis

$$\Phi(z_1, z_2) = 2a_{12}\, z_1\, z_2 + a_{22} z_2^2 = z_2^2 \Big(2a_{12} \frac{z_1}{z_2} + a_{22}\Big).$$

Kui lisaks $z_1 \neq 0$, siis “piisavalt väikeste” positiivsete muutuja z_2 väärtuste korral on avaldise $\Phi(z_1, z_2)$ väärtusel sama märk, mis korrutisel $2a_{12}\, z_1$ (PÕHJENDADA!), järelikult see avaldis omandab nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi ehk, teisisõnu, hessiaan $\Phi(z_1, z_2)$ on määramata ruutvorm. □

Näide 1.2. Leiame funktsiooni $z = x^4 + x^3 - 3x - 2x^2 y + y^2$ lokaalsed ekstreemumid.

Teoreemi 1.1 põhjal saab funktsioonil lokaalne ekstreemum esineda ainult tema kriitilistes punktides. Leiame funktsiooni z osatuletised:

$$z'_x = (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2 y + y^2)'_x = 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy,$$
$$z'_y = (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2 y + y^2)'_y = -2x^2 + 2y;$$

seega funktsiooni z statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy = 0, \\ -2x^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi esimesest võrrandist tundmatu y väärtuse $y = x^2$ teise võrrandisse, saame, et $3x^2 = 3$ ehk $x^2 = 1$, millest $x = -1$ või $x = 1$. Selle süsteemi lahendid (ja ühtlasi funktsiooni z statsionaarsed punktid ning funktsiooni z diferentseeruvuse tõttu ainsad selle funktsiooni kriitilised punktid) on $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$.

Leiame funktsiooni z teist järku osatuletised:

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_x = 12x^2 + 6x - 4y, \\ z''_{xy} = z''_{yx} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_y = -4x, \\ z''_{y^2} &= (-2x^2 + 2y)'_y = 2 \end{aligned}$$

ning tähistame

$$A_1 := z''_{x^2} = 12x^2 + 6x - 4y, \qquad A_2 := \begin{vmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 6x - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{vmatrix}.$$

Statsionaarses punktis $(-1, 1)$

$$A_1 = 2 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

seega (teoreemi 1.5, (c), põhjal) funktsioonil z ei ole punktis $(-1, 1)$ lokaalset ekstreemumit.

Statsionaarses punktis $(1, 1)$

$$A_1 = 14 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

seega (teoreemi 1.5, (a), põhjal) funktsioonil z on punktis $(1, 1)$ range lokaalne miinimum $z(1, 1) = -2$.

§ 2. Mitme muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid

Olgu funktsioon f määratud hulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 2.1. Funktsiooni f

- suurimat väärtust hulgas $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f *globaalseks maksimumiks* (hulgas $\mathcal{D}$);
- vähimat väärtust hulgas $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f *globaalseks miinimumiks* (hulgas $\mathcal{D}$).

Teisisõnu, funktsiooni f globaalne maksimum ja globaalne miinimum hulgas $\mathcal{D}$ on vastavalt väärtused $\max\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$ ja $\min\limits_{P\in\mathcal{D}} f(P)$.

Globaalset maksimumi ja globaalset miinimumi nimetatakse ühise nimetusega *globaalsed ekstreemumid.*

Pole raske tuua näiteid (isegi pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta), kus funktsioonil puuduvad (tema määramispiirkonna mingis alamhulgas) globaalsed ekstreemumid. Teiselt poolt, Weierstrassi teisest teoreemist I.4.8 järeldub, et *tõkestatud kinnises hulgas pideval funktsioonil eksisteerivad selles hulgas globaalsed ekstreemumid.*

Kui funktsioonil f eksisteerib tema määramispiirkonna alamhulgas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ mingi globaalne ekstreemum, siis see globaalne ekstreemum võib olla hulga $\mathcal{D}$ sisepunktis või hulga $\mathcal{D}$ rajapunktis; seejuures, kui see globaalne ekstreemum saavutatakse hulga $\mathcal{D}$ sisepunktis, siis selles punktis on funktsioonil f ka vastav lokaalne ekstreemum, järelikult see punkt on funktsiooni f kriitiline punkt. Seega, kui me teame, et funktsioonil f eksisteerivad tema määramispiirkonna alamhulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid, siis nende globaalsete ekstreemumite leidmiseks võime kasutada järgmist eeskirja:

(1) leiame funktsiooni f väärtused tema kriitilistes punktides (hulga $\mathcal{D}$ sisemuses);

(2) leiame funktsiooni f väärtused tema võimalikes ekstreemumpunktides hulga $\mathcal{D}$ rajal;

(3) neist leitud väärtustest suurim on funktsiooni f globaalne maksimum hulgas $\mathcal{D}$ ning vähim on funktsiooni f globaalne miinimum hulgas $\mathcal{D}$.

Näide 2.1. Leiame funktsiooni $z = x^3 + y^3 - 3xy$ suurima ja vähima väärtuse ristkülikus

$$\mathcal{D} := [0,2] \times [-1,2] := \{(x,y)\colon\ x \in [0,2],\ y \in [-1,2]\}.$$

Kõigepealt märgime, et kuna funktsioon z on pidev ning hulk $\mathcal{D}$ on kinnine ja tõkestatud, siis Weierstrassi teise teoreemi I.4.8 põhjal eksisteerivad funktsioonil f hulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid.

Leiame funktsiooni z kriitilised punktid hulga $\mathcal{D}$ sisemuses $\mathcal{D}^\circ$. Kuna funktsioon z on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, siis tema ainsad kriitilised punktid on statsionaarsed punktid. Leiame funktsiooni z osatuletised:

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x;$$

seega funktsiooni z statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \qquad \text{ehk} \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi esimesest võrrandist tundmatu y väärtuse $y = x^2$ teise võrrandisse, saame, et $x^4 - x = 0$ ehk $x(x^3 - 1) = 0$, millest $x = 0$ või $x = 1$. Selle süsteemi lahendid on seega $(0,0)$ ja $(1,1)$. Kuna $(0,0) \notin \mathcal{D}^\circ$, siis funktsiooni z ainus statsionaarne (ning seega ka ainus kriitiline) punkt hulga $\mathcal{D}$ sisemuses $\mathcal{D}^\circ$ on $(1,1)$; seejuures

$$z(1,1) = -1.$$

Hulga $\mathcal{D}$ rajajoon $\partial\mathcal{D}$ esitub ühendina

$$\partial\mathcal{D} = \big\{(0,-1),(2,-1),(2,2),(0,2)\big\} \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

kus

$$L_1 := \big\{(x,y)\colon\ x \in (0,2),\ y = -1\big\}, \qquad L_2 := \big\{(x,y)\colon\ x = 2,\ y \in (-1,2)\big\},$$
$$L_3 := \big\{(x,y)\colon\ x \in (0,2),\ y = 2\big\}, \qquad L_4 := \big\{(x,y)\colon\ x = 0,\ y \in (-1,2)\big\}.$$

Rajajoone osal L_1 omandab funktsioon z kuju

$$z = x^3 - 1 + 3x =: f_1(x), \quad x \in (0,2).$$

Kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_1 punktis (x,y), siis funktsioonil f_1 oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_1 diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni f_1 statsionaarne punkt, s.t. $f_1'(x) = 0$. Leiame funktsiooni f_1 tuletise:

$$f_1'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Näeme, et tuletisel f_1' nullkohti pole, seega rajajoone osal L_1 funktsioonil z globaalseid ekstreemumeid ei ole.

Rajajoone osal L_3 omandab funktsioon z kuju

$$z = x^3 + 8 - 6x =: f_3(x), \quad x \in (0,2).$$

Leiame funktsiooni f_3 tuletise:

$$f_3'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise f_3' nullkohad on $x = -\sqrt{2}$ ja $x = \sqrt{2}$, kusjuures $-\sqrt{2} \notin (0,2)$; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal L_3 on $(\sqrt{2}, 2)$; seejuures

$$z(\sqrt{2}, 2) = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_3 punktis (x,y), siis funktsioonil f_3 oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_3 diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni f_3 statsionaarne punkt, s.t. $f_3'(y) = 0$.)

Rajajoone osal L_2 omandab funktsioon z kuju

$$z = 8 + y^3 - 6y =: f_2(y), \quad y \in (-1,2).$$

Leiame funktsiooni f_2 tuletise:

$$f_2'(y) = 3y^2 - 6 = 3(y^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise f_2' nullkohad on $y = -\sqrt{2}$ ja $y = \sqrt{2}$, kusjuures $-\sqrt{2} \notin (-1, 2)$; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal L_2 on $(2, \sqrt{2})$; seejuures

$$z(2, \sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_2 punktis (x, y), siis funktsioonil f_2 oleks punktis y lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni f_2 diferentseeruvuse tõttu peaks y olema funktsiooni f_2 statsionaarne punkt, s.t. $f_2'(y) = 0$.)

Rajajoone osal L_4 omandab funktsioon z kuju

$$z = y^3 =: f_4(y), \quad y \in (-1, 2).$$

Funktsioon f_4 on kasvav vahemikus $(-1, 2)$, seega rajajoone osal L_4 võimalikke ekstreemumpunkte ei ole. (Siin jällegi, kui funktsioonil z oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa L_4 punktis (x, y), siis funktsioonil f_4 oleks punktis $y \in (-1, 2)$ lokaalne ekstreemum; kuna aga funktsioon f_4 on kasvav vahemikus $(-1, 2)$, siis tal selles vahemikus lokaalseid ekstreemumeid ei ole, seega rajajoone osal L_4 funktsioonil z globaalseid ekstreemumeid ei ole.)

Leiame funktsiooni z väärtused rajajoone $\partial\mathcal{D}$ ülejäänud võimalikes ekstreemumpunktides:

$$z(0, -1) = -1, \quad z(2, -1) = 8 - 1 + 6 = 13, \quad z(2, 2) = 8 + 8 - 12 = 4, \quad z(0, 2) = 8.$$

Valides eelnevas leitud võimalikest ekstreemumitest suurima ja vähima, saame

$$\max_{P \in \mathcal{D}} z(P) = z(2, -1) = 13 \quad \text{ja} \quad \min_{P \in \mathcal{D}} z(P) = z(1, 1) = z(0, -1) = -1.$$

Mõnikord võib globaalsete ekstreemumite leidmisel olla abi alljärgnevast teoreemist 2.1, mille tarvis toome sisse *kumera hulga* mõiste.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et hulk $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ on *kumer,* kui tema mis tahes kahte punkti ühendav sirglõik sisaldub selles hulgas, s.t. mis tahes punktide $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0), P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}$ korral neid punkte P_0 ja P ühendav sirglõik

$$P_0P := \big\{(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m) \colon\ t \in [0, 1]\big\} \subset \mathcal{D},$$

kus $\Delta x_i := x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, m$.

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ kaks korda diferentseeruv lahtise kumera hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ igas punktis ning olgu $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ funktsiooni f statsionaarne punkt, s.t.*

$$f'_{x_1}(P_0) = \cdots = f'_{x_m}(P_0) = 0. \tag{2.1}$$

(a) *Kui iga punkti $Q \in \mathcal{D}$ korral hessiaan $d^2 f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum (s.t. $f(P) > f(P_0)$ iga $P \in \mathcal{D} \backslash \{P_0\}$ korral).*

(b) *Kui iga punkti $Q \in \mathcal{D}$ korral hessiaan $d^2 f(Q)$ on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne maksimum (s.t. $f(P) < f(P_0)$ iga $P \in \mathcal{D} \backslash \{P_0\}$ korral).*

Teoreem II.4.2 (mitme muutuja funktsiooni Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul) jääb kehtima, kui temas vaadelda punkti P_0 ε-ümbruste asemel selle punkti mis tahes kumeraid lahtisi ümbrusi. Teoreem 2.1 on üsna otsene järeldus teoreemist II.4.2 (täpsemalt, selle teoreemi mainitud viisil tugevdatud variandist).

TEOREEMI 2.1 TÕESTUS, MIS TOETUB TAYLORI VALEMILE. (a). Eeldame, et iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ suhtes). Teoreemi II.4.2 (kumerate ümbruste versiooni) põhjal mis tahes punkti $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \backslash \{P_0\}$ korral

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{d^2 f(Q)}{2},$$

kus diferentsiaalide $df(P_0)$ ja $d^2 f(Q)$ avaldistes $dx_i = \Delta x_i := x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, m$, ning Q on mingi punkt punkte P_0 ja P ühendavalt sirglõigult. Kuna P_0 on funktsiooni f statsionaarne punkt, siis

$$df(P_0) = f'_{x_1}(P_0)\,\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\,\Delta x_m = 0\,\Delta x_1 + \cdots + 0\,\Delta x_m = 0;$$

kuna tehtud eelduse põhjal on $d^2 f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm, siis $d^2 f(Q) > 0$; seega $f(P) - f(P_0) = \frac{d^2 f(Q)}{2} > 0$, järelikult $f(P) > f(P_0)$; niisiis funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum. Teoreemi väide (a) on tõestatud.

Väide (b) tõestatakse analoogiliselt. □

Järgnevalt anname teoreemile 2.1 ühe tõestuse, mis on eelnevast tõestusest küll mõnevõrra pikem, kuid ei kasuta mitme muutuja funktsiooni Taylori valemit.

TEOREEMI 2.1 TÕESTUS, MIS EI KASUTA TAYLORI VALEMIT. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.)

Eeldame, et iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f(Q)$ on positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1, \ldots, dx_m$ suhtes). Fikseerime vabalt punkti $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D} \backslash \{P_0\}$. Veendumaks, et funktsioonil f on punktis P_0 range globaalne miinimum, piisab näidata, et $f(P) > f(P_0)$. Selleks tähistame $\Delta x_i := x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, m$, ja defineerime funktsiooni

$$g(t) := f(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m).$$

Kuna hulk $\mathcal{D}$ on kumer ning (hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu) punktid P_0 ja P on funktsiooni f määramispiirkonna $\mathcal{D}$ sisepunktid (ning järelikult funktsioon f on määratud punktide P_0 ja P teatavas ümbruses), siis mingi $\varepsilon > 0$ korral funktsioon g on määratud vahemikus $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Tõepoolest, tähistades iga $t \in \mathbb{R}$ korral $P_t := (x_1^0 + t\,\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)$, peame leidma $\varepsilon > 0$ nii, et iga $t \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ korral $P_t \in \mathcal{D}$ (sest sel juhul on funktsioon f määratud punktis P_t ehk, teisisõnu, funktsioon g on määratud punktis t). Kõigepealt, hulga $\mathcal{D}$ kumeruse tõttu mis tahes $t \in [0, 1]$ korral $P_t \in \mathcal{D}$.

Olgu nüüd $\varepsilon > 0$ suvaline. Kui $t \in (-\varepsilon, 0)$, siis

$$d(P_t, P_0) = \sqrt{(t\,\Delta x_1)^2 + \cdots + (t\,\Delta x_m)^2} = |t|\sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\, d(P, P_0),$$

kui aga $t \in (1, 1+\varepsilon)$, siis (arvestades, et $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$)

$$d(P_t, P) = \sqrt{\big((t-1)\,\Delta x_1\big)^2 + \cdots + \big((t-1)\,\Delta x_m\big)^2} = |t-1|\sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \varepsilon\, d(P, P_0).$$

Kuna hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu on P_0 ja P hulga $\mathcal{D}$ sisepunktid, siis leiduvad $r_0, r > 0$ nii, et $B(P_0, r_0) \subset \mathcal{D}$ ja $B(P, r) \subset \mathcal{D}$, s.t.

$$d(Q, P_0) < r_0 \implies Q \in \mathcal{D} \qquad \text{ja} \qquad d(Q, P) < r \implies Q \in \mathcal{D}.$$

Niisiis, valides $\varepsilon > 0$ nii, et $\varepsilon\, d(P, P_0) < \min\{r_0, r\}$, kehtib iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral $P_t \in \mathcal{D}$.

Kuna $g(0) = f(P_0)$ ja $g(1) = f(P)$, siis jääb näidata, et $g(1) > g(0)$. Selleks piisab näidata, et

(1) funktsioon g on diferentseeruv vahemikus $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$;

(2) $g'(t) > 0$ iga $t \in (0,1)$ korral,

sest tingimuse (1) kehtides Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub punkt $\xi \in (0,1)$ nii, et $g(1) - g(0) = g'(\xi)\,(1-0) = g'(\xi)$; tingimuse (2) kehtides $g'(\xi) > 0$, seega $g(1) - g(0) > 0$, s.t. $g(1) > g(0)$, nagu soovitud.

Funktsiooni g diferentseeruvuseks märgime, et g esitub liitfunktsioonina

$$g(t) = f\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big),$$

kus nii f kui ka $\phi_i(t) := x_i^0 + t\,\Delta x_i$, $i = 1, \dots, m$, on diferentseeruvad funktsioonid; seega liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon g on diferentseeruv, kusjuures tema tuletis esitub valemiga

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^m f'_{x_i}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \phi_i'(t) \\ &= \sum_{i=1}^m f'_{x_i}\big(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)\big)\, \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x_1^0 + t\,\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\,\Delta x_m)\, \Delta x_i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Siit näeme, et võrduste (2.1) tõttu

$$g'(0) = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0)\, \Delta x_i = 0.$$

Niisiis piisab väite (2) tõestuseks näidata, et tuletisfunktsioon g' on rangelt kasvav, milleks omakorda piisab veenduda, et funktsioon g on kaks korda diferentseeruv, kusjuures $g''(t) > 0$ iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral. Funktsiooni g kaks korda diferentseeruvus järeldub liitfunktsiooni diferentseeruvuse reegli (teoreemi II.1.8) põhjal võrdusest (2.2) (funktsiooni f kaks korda diferentseeruvuse ning funktsioonide $\phi_1, \dots, \phi_m$

diferentseeruvuse tõttu); seejuures mis tahes $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}\big(\phi_1(t),\dots,\phi_m(t)\big)\,\Delta x_i\,\phi'_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}\big(\phi_1(t),\dots,\phi_m(t)\big)\,\Delta x_i\,\Delta x_j \\ &= d^2 f\big(\phi_1(t),\dots,\phi_m(t)\big). \end{aligned}$$

Kuna teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f\big(\phi_1(t),\dots,\phi_m(t)\big)$ on positiivselt määratud ruutvorm, siis järeldub eelnevast võrdusteahelast, et $g''(t) > 0$, nagu soovitud. $\square$

Märkus 2.1. Teoreemi 2.1 võib tõestada ka toetudes ühe muutuja funktsiooni Taylori valemile jääkliikmega Lagrange'i kujul, millega lugeja tutvus (või vähemalt oleks pidanud tutvuma) kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs".

Teoreem 2.2 ((ühe muutuja funktsiooni) Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul)**.** *Eksisteerigu (ühe muutuja) funktsioonil f mingis punkti $a \in \mathbb{R}$ sisaldavas vahemikus $\mathcal{U}$ lõplik $(n+1)$-järku tuletis ($n \in \mathbb{N}$). Siis iga $x \in \mathcal{U}$ korral kehtib Taylori valem*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

kus punkt ξ paikneb punktide a ja x vahel.

Tõepoolest, kehtigu teoreemi 2.1 eeldused ning olgu iga $Q \in \mathcal{D}$ korral teist järku täisdiferentsiaal $d^2 f(Q)$ positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide $dx_1,\dots,dx_m$ suhtes). Fikseerides vabalt punkti $P = (x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{D}\backslash\{P_0\}$ ja defineerides funktsiooni g (nagu ülaltoodud tõestuseski), piisab (jälle nagu ülaltoodud tõestuseski) väite (a) tõestuseks näidata, et $g(1) > g(0)$. Selleks märgime (jälle nagu ülaltoodud tõestuseski), et funktsioon g on kaks korda diferentseeruv vahemikus $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, kusjuures $g'(0) = 0$ ning $g''(t) > 0$ iga $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ korral. Seega saame Taylori valemist (s.t. teoreemist 2.2, võttes seal $f = g$, $a = 0$, $\mathcal{U} = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ja $n = 1$) mingi $\xi \in (0,1)$ korral

$$g(1) - g(0) = g'(0)\,(1-0) + \frac{g''(\xi)}{2}\,(1-0)^2 = \frac{g''(\xi)}{2} > 0,$$

nagu soovitud. Väite (b) saab tõestada analoogiliselt.

Märgime, et eelnevat tõestusskeemi on raske iseseisvaks tõestuseks lugeda, sest selles tuletatakse implitsiitselt mitme muutuja funktsiooni teist järku Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul, niisiis see tõestus on sisuliselt sama, mis tõestus, millele me viitasime kui "teoreemi 2.1 tõestusele, mis toetub Taylori valemile".

V peatükk.
Kordsed integraalid

§ 1. Kahekordne integraal üle ristküliku

1.1. Riemanni integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y) = f(P)$ määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Jagame lõigud $[a, b]$ ja $[c, d]$ omakorda mingiteks m ja n osalõiguks

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{m-1}, x_m] \qquad \text{ja} \qquad [y_0, y_1], \ldots, [y_{n-1}, y_n], \tag{1.1}$$

kus $m, n \in \mathbb{N}$ ning

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d. \tag{1.2}$$

Siis ristkülik $\mathcal{D}$ jaotub mn ristkülikuks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Ristküliku $\mathcal{D}$ *jaotusviisi* ristkülikuteks (1.3) tähistame tähega T. Punktidele (1.2) viitame järgnevas kui *jaotusviisi T määravatele punktidele* ning lõikudele (1.1) kui *jaotusviisi T määravatele lõikudele.*

Kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1},$$

s.t. Δx_i ja Δy_j on osaristküliku $\mathcal{D}_{ij}$ külgede pikkused, ning

$$\Delta(T) := \max\big\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\big\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11},\ \ldots,\ P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n},\ \ldots\ldots,\ P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1},\ \ldots,\ P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \tag{1.4}$$

(s.t. kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral valime mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$).

Definitsioon 1.1. Summat

$$\begin{aligned}\sigma := \sigma_f &:= \sigma_f(T; P_{11}, \ldots, P_{1n}, \ldots, P_{m1}, \ldots, P_{mn}) \\ &:= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j\end{aligned}$$

nimetatakse funktsiooni f *integraalsummaks* ehk *Riemanni summaks,* mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T ja punktide valikule (1.4).

Juhime tähelepanu, et korrutis $\Delta x_i\, \Delta y_j$ Riemanni summa definitsioonis on ristküliku $\mathcal{D}_{ij}$ pindala.

Definitsioon 1.2. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f *integraalsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma = I \quad \text{või lihtsalt} \quad \lim \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim \sigma = I,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni f integraalsumma σ korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma - I\big| < \varepsilon,$$

s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni f integraalsummad arvust I vähem kui ε (sõltumata punktide valikust (1.4) selle jaotusviisi osaristkülikutest).

Definitsioon 1.3. Kui funktsiooni f integraalsummadel on olemas piirväärtus ristkülikus $\mathcal{D}$, siis öeldakse, et funktsioon f on *Riemanni mõttes integreeruv* (ehk lihtsalt *integreeruv*) ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures tema integraalsummade piirväärtust

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \sigma =: R\text{-}\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy =: \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy$$

nimetatakse *(kahekordseks) Riemanni integraaliks* (ehk lihtsalt *(kahekordseks) integraaliks*) funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$.

Märkus 1.1. Sageli esitatakse integraalsummade piirväärtuse definitsioon (ehk siis sisuliselt Riemanni integraali definitsioon) definitsioonist 1.2 mõnevõrra erineval, kuid sellega siiski samaväärsel moel. See "erinev" definitsioon kasutab hulga diameetri mõistet.

Definitsioon 1.4. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ning olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ tõkestatud hulk. Hulga $\mathcal{D}$ *diameetriks* nimetatakse selle hulga punktide vaheliste kauguste hulga ülemist raja.

Hulga $\mathcal{D}$ diameetrit tähistatakse sümboliga $\operatorname{diam}\mathcal{D}$; niisiis vastavalt definitsioonile

$$\operatorname{diam}\mathcal{D} = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}} d(P,Q).$$

Esitame nüüd selle "definitsioonist 1.2 mõnevõrra erineva" integraalsummade piirväärtuse definitsiooni. Jaotusviisi T ristkülikute maksimaalse diameetri tähistame sümboliga $d(T)$.

Definitsioon 1.5. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f *integraalsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$), kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni f integraalsumma σ korral)

$$d(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sigma - I\right| < \varepsilon,$$

s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne diameeter on väiksem kui δ, erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni f integraalsummad arvust I vähem kui ε (sõltumata punktide valikust (1.4) selle jaotusviisi osaristkülikutest).

Pole raske näha, et definitsioonid 1.2 ja 1.5 on samaväärsed (s.t. arv I on funktsiooni f integraalsummade piirväärtus neist definitsioonidest ühe järgi parajasti siis, kui ta on seda teise definitsiooni järgi).

Ülesanne 1.1. Tõestada, et definitsioonid 1.2 ja 1.5 on samaväärsed.

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et ristküliku diameeter on selle ristküliku diagonaali pikkus.

Näide 1.1. Ristkülikus $\mathcal{D}$ määratud konstantne kahe muutuja funktsioon $f(x,y) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) on integreeruv selles ristkülikus, kusjuures

$$\int_{\mathcal{D}} \alpha \, dx \, dy = \alpha \, (b-a) \, (d-c) = \alpha \, S_{\mathcal{D}} \tag{1.5}$$

(sümbol $S_{\mathcal{D}}$ tähistab ristküliku $\mathcal{D}$ pindala).

Tõepoolest, konstantse funktsiooni $f(x,y) = \alpha$ mis tahes integraalsumma

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}) \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \alpha \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \, (d-c) = \alpha \, (d-c) \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \alpha \, (d-c) \, (b-a) = \alpha \, S_{\mathcal{D}},\end{aligned}$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on $\alpha \, S_{\mathcal{D}}$, s.t. kehtib (1.5).

Järgnev teoreem ütleb, et *antud ristkülikus Riemanni mõttes integreeruv funktsioon on tõkestatud selles ristkülikus.*

Teoreem 1.1. *Ristkülikus $\mathcal{D}$ tõkestamata funktsioon ei ole Riemanni mõttes integreeruv selles ristkülikus.*

TÕESTUS. Olgu funktsioon f tõkestamata ristkülikus $\mathcal{D}$ ning olgu selle ristküliku jaotusviis T määratud punktidega (1.2). Tähistame kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $\Delta_{ij} := \Delta x_i \, \Delta y_j$. Veendumaks, et funktsioon f pole integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, piisab näidata, et

($\circ$) iga reaalarvu $M \geqslant 0$ korral leiduvad punktid (1.4) selliselt, et

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m,n} f(P_{ij}) \, \Delta_{ij} \right| > M.$$

Tõepoolest, kehtigu väide ($\circ$). Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$. Tähistame $I := R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) \, dx \, dy$. Siis funktsiooni f mis tahes integraalsumma σ korral, mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ mingile piisavalt "peenele" jaotusviisile,

$$|\sigma - I| < 1 \quad \text{ehk, teisisõnu,} \quad I - 1 < \sigma < I + 1$$

ning seega

$$|\sigma| < \max\{|I-1|, |I+1|\}.$$

Oleme saanud vastuolu väitega (∘).

Jääb veel tõestada väide (∘). Fikseerime vabalt reaalarvu $M \geqslant 0$. Kuna funktsioon f on tõkestamata ristkülikus $\mathcal{D}$, siis ta on tõkestamata mingis osaristkülikus $\mathcal{D}_{kl}$. Valime iga $(i,j) \in \big(\{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}\big) \setminus \{(k,l)\}$ korral mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$ ja tähistame

$$\alpha := \Bigg|\sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(k,l)}}^{m,n} f(P_{ij})\,\Delta_{ij}\Bigg|.$$

Siis mis tahes $P \in \mathcal{D}_{kl}$ korral

$$\Bigg|f(P)\,\Delta_{kl} + \sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(k,l)}}^{m,n} f(P_{ij})\,\Delta_{ij}\Bigg| \geqslant |f(P)\,\Delta_{kl}| - \Bigg|\sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(k,l)}}^{m,n} f(P_{ij})\,\Delta_{ij}\Bigg| = |f(P)|\,\Delta_{kl} - \alpha.$$

Järelikult, kui valida punkt $P_{kl} \in \mathcal{D}_{kl}$ nii, et

$$|f(P_{kl})| > \frac{M+\alpha}{\Delta_{kl}}$$

(niisugune valik on võimalik, sest funktsioon f on tõkestamata osaristkülikus $\mathcal{D}_{kl}$), siis

$$\Bigg|\sum_{i,j=1}^{m,n} f(P_{ij})\,\Delta_{ij}\Bigg| \geqslant |f(P_{kl})|\,\Delta_{kl} - \alpha > \frac{M+\alpha}{\Delta_{kl}}\,\Delta_{kl} - \alpha = M.$$

□

1.2. Darboux' summad. Darboux' integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y) = f(P)$ tõkestatud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d].$$

Järgides jaotise 1.1 tähistusi, tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,$$

kus $m, n \in \mathbb{N}$ ning

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d. \tag{1.6}$$

Tähistame kõikide $i \in \{1,\ldots,m\}$ ja $j \in \{1,\ldots,n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}, \qquad M_{ij} := \sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P).$$

Definitsioon 1.6. Summasid

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \qquad \text{ja} \qquad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

nimetatakse funktsiooni f *Darboux' ülemsummaks* ja *Darboux' alamsummaks,* mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T.

Kõneldes järgnevas Darboux' ülem- ja alamsummadest, mõistame me selle all funktsiooni f Darboux' summasid, mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele.

Vahetult vastavatest definitsioonidest järeldub

Lause 1.2. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$. Siis ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T vastavad funktsiooni f Darboux' ülemsumma $S(T)$ ja alamsumma $s(T)$ on sellele jaotusviisile vastavate funktsiooni f integraalsummade ülemine ja alumine raja:*

$$S(T) = \sup \sigma \qquad \text{ja} \qquad s(T) = \inf \sigma,$$

kus supreemum ja infiimum võetakse üle kõikvõimalike jaotusviisile T vastavate integraalsummade σ, s.t. üle kõikvõimalike punktide valikute (1.4).

Edasises kasutame me korduvalt järgnevat tähelepanekut: kuna mis tahes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \big(-f(P)\big) = -\inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = -m_{ij} \quad \text{ja} \quad \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \big(-f(P)\big) = -\sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = -M_{ij},$$

siis

$$S_{(-f)}(T) = -s_f(T) \quad \text{ja} \quad s_{(-f)}(T) = -S_f(T). \tag{1.7}$$

Tõestame mõned lihtsad Darboux' summade omadused.

Lause 1.3. (a) *Kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravate lõikude* (1.1) *edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks, siis*

$$S(T') \leqslant S(T) \qquad \text{ja} \qquad s(T') \geqslant s(T),$$

s.t. jaotusviisi peenendamisel Darboux' ülemsummad ei kasva ning Darboux' alamsummad ei kahane.

(b) *Ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviiside T ja T' korral*

$$S(T) \geqslant s(T'),$$

s.t. ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem mitte ühestki Darboux' alamsummast.

(c) *Funktsiooni f kõikvõimalike Darboux' ülemsummade hulk on alt tõkestatud ning Darboux' alamsummade hulk on ülalt tõkestatud.*

TÕESTUS. (a). Väite tõestuseks üldisel juhul piisab tõestada väide juhu jaoks, kus jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.6) ühe uue punkti $u \in [a, b]$ või $v \in [c, d]$ lisamise teel. Oletame konkreetsuse mõttes, et jaotusviis T' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.6) uue punkti $u \in [a, b]$ lisamisel, kusjuures see uus punkt kuulub lõigu $[a, b]$ k-ndasse osalõiku: $u \in [x_{k-1}, x_k]$, kus $k \in \{1, \dots, m\}$, s.t. jaotusviis T' on saadud jaotusviisist T ristkülikute

$$\mathcal{D}_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j], \quad j = 1, \dots, n,$$

Joonis??

asendamisel uute ristkülikutega

$$\mathcal{D}'_{kj} = [x_{k-1}, u] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}''_{kj} = [u, x_k] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad j = 1, \dots, n.$$

Jaotusviisile T' vastav Darboux' ülemsumma on

$$S(T') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \big(M'_{kj}\, \Delta x'_k\, \Delta y_j + M''_{kj}\, \Delta x''_k\, \Delta y_j \big), \tag{1.8}$$

kus $\Delta x'_k := u - x_{k-1}$ ja $\Delta x''_k := x_k - u$ ning ning iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$M'_{kj} = \sup_{P \in \mathcal{D}'_{kj}} f(P) \quad \text{ja} \quad M''_{kj} = \sup_{P \in \mathcal{D}''_{kj}} f(P).$$

Iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral, arvestades, et $M'_{kj} \leqslant M_{kj}$ ja $M''_{kj} \leqslant M_{kj}$ (sest $\mathcal{D}'_{kj} \subset \mathcal{D}_{kj}$ ja $\mathcal{D}''_{kj} \subset \mathcal{D}_{kj}$),

$$\begin{aligned} M'_{kj}\, \Delta x'_k\, \Delta y_j + M''_{kj}\, \Delta x''_k\, \Delta y_j &\leqslant M_{kj}\, \Delta x'_k\, \Delta y_j + M_{kj}\, \Delta x''_k\, \Delta y_j \\ &= M_{kj} (\Delta x'_k + \Delta x''_k)\, \Delta y_j = M_{kj}\, \Delta x_k\, \Delta y_j. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Valemitest (1.9) ja (1.8) saame, et

$$S(T') \leqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j + \sum_{j=1}^{n} M_{kj}\, \Delta x_k\, \Delta y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j = S(T).$$

Võrdustest (1.7) järeldub nüüd, et

$$s(T') = -S_{(-f)}(T') \geqslant -S_{(-f)}(T) = s(T).$$

(b). Tähistame sümboliga T'' ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi T määravate osalõikude (1.1) edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi T' määravate punktidega; siis väite (a) põhjal $S(T) \geqslant S(T'')$. Jaotusviis T'' on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi T' määravate osalõikude edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi T määravate punktidega (1.6); järelikult väite (a) põhjal $s(T'') \geqslant s(T')$. Seega

$$S(T) \geqslant S(T'') \geqslant s(T'') \geqslant s(T').$$

(c). Väite (b) põhjal

- funktsiooni f mis tahes Darboux' alamsumma on selle funktsiooni Darboux' ülemsummade hulga alumine tõke;
- funktsiooni f mis tahes Darboux' ülemsumma on selle funktsiooni Darboux' alamsummade hulga ülemine tõke.

□

Definitsioon 1.7. Funktsiooni f (ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' ülemsummade alumist raja nimetatakse *Darboux' ülemiseks integraaliks* funktsioonist f (üle ristküliku $\mathcal{D}$) ja tähistatakse sümboliga $\overline{I}_{\mathcal{D}}f$:

$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f := \inf\big\{S(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\big\}.$$

Funktsiooni f (ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' alamsummade ülemist raja nimetatakse *Darboux' alumiseks integraaliks* funktsioonist f (üle ristküliku $\mathcal{D}$) ja tähistatakse sümboliga $\underline{I}_{\mathcal{D}}f$:

$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f := \sup\big\{s(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\big\}.$$

Darboux' integraalide olemasolu järeldub lausest 1.3, (c), pidevuse aksioomi põhjal; seejuures lausest 1.3, (b), järeldub, et

$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f \geqslant \underline{I}_{\mathcal{D}}f.$$

Vahetult võrdustest (1.7) järeldub, et

$$\overline{I}_{\mathcal{D}}f = \inf_T S_f(T) = \inf_T\big(-s_{(-f)}(T)\big) = -\sup_T s_{(-f)}(T) = -\underline{I}_{\mathcal{D}}(-f) \tag{1.10}$$

ja

$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f = \sup_T s_f(T) = \sup_T\big(-S_{(-f)}(T)\big) = -\inf_T S_{(-f)}(T) = -\overline{I}_{\mathcal{D}}(-f),$$

kus kõik infiimumid ja supreemumid võetakse üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T.

Ülesanne 1.2. Olgu $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon ning olgu $\alpha \in \mathbb{R}$. Tõestada, et

(a) $\underline{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha\underline{I}_{\mathcal{D}}f$ ja $\overline{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha\overline{I}_{\mathcal{D}}f$, kui $\alpha \geqslant 0$, ning $\underline{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha\overline{I}_{\mathcal{D}}f$ ja $\overline{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha\underline{I}_{\mathcal{D}}f$, kui $\alpha < 0$;

(b) $\underline{I}_{\mathcal{D}}f + \underline{I}_{\mathcal{D}}g \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}}(f+g)$ ja $\overline{I}_{\mathcal{D}}(f+g) \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}}f + \overline{I}_{\mathcal{D}}g$;

(c) kui $f(P) \leqslant g(P)$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral, siis $\underline{I}_{\mathcal{D}}f \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}}g$ ja $\overline{I}_{\mathcal{D}}f \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}}g$.

Definitsioon 1.8. Kui Darboux' ülemine ja alumine integraal funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$ on võrdsed, siis öeldakse, et funktsioon f on ristkülikus $\mathcal{D}$ *Darboux' mõttes integreeruv.* Seejuures funktsiooni f Darboux' ülemise ja alumise integraali ühist väärtust

$$I_{\mathcal{D}}f := \overline{I}_{\mathcal{D}}f = \underline{I}_{\mathcal{D}}f$$

nimetatakse *Darboux' integraaliks* funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$.

1.3. Darboux' summade piirväärtus. Darboux' lemma

Eeldame endiselt, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y) = f(P)$ on tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$.

Ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T puhul osaristkülikuteks, mis on määratud punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d, \tag{1.11}$$

tähistame $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, ja $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, ning

$$\Delta(T) := \max\bigl\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Definitsioon 1.9. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni f

- *Darboux' ülemsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

  $$I = \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim S(T),$$

  kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

  $$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|S(T) - I\bigr| < \varepsilon$$

  (s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust I vähem kui ε);

- *Darboux' alamsummade piirväärtuseks* (ristkülikus $\mathcal{D}$) ja kirjutatakse

  $$I = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim s(T),$$

  kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

  $$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|s(T) - I\bigr| < \varepsilon$$

  (s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui δ, erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust I vähem kui ε).

Järgnevast teoreemist järeldub, et Darboux' summadel eksisteerib alati piirväärtus.

Teoreem 1.4 (Darboux' lemma). (a) *Darboux' ülemine integraal funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$ on funktsiooni f Darboux' ülemsummade piirväärtus (ristkülikus $\mathcal{D}$):*

$$\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} S(T).$$

(b) *Darboux' alumine integraal funktsioonist f üle ristküliku $\mathcal{D}$ on funktsiooni f Darboux' alamsummade piirväärtus (ristkülikus $\mathcal{D}$):*

$$\underline{I}_{\mathcal{D}} f = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T).$$

Darboux' lemma tõestus toetub järgmisele abitulemusele.

Lemma 1.5. *Olgu ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T' saadud selle ristküliku jaotusviisi T määravatele punktidele* (1.11) *p uue punkti lisamise teel ($p \in \mathbb{N}$). Tähistame*

$$\beta := \sup_{P\in\mathcal{D}} f(P), \quad \alpha := \inf_{P\in\mathcal{D}} f(P) \quad \textit{ja} \quad \lambda := \max\bigl\{b-a, d-c\bigr\}.$$

Siis

$$0 \leqslant S(T) - S(T') \leqslant p\,(\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T).$$

Ülesanne 1.3. Järeldada lemmast 1.5, et selle lemma eeldustel $0 \leqslant s(T')-s(T) \leqslant p\,(\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T)$.

LEMMA 1.5 TÕESTUS. Lemma tõestuseks piisab näidata, et

($\circ$) kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T'' on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.11) ühe uue punkti lisamise teel, siis

$$0 \leqslant S(T) - S(T'') \leqslant (\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T).$$

Tõepoolest, kehtigu väide ($\circ$) ning olgu jaotusviis T' saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.11) uute punktide $u_1,\dots,u_p$ lisamise teel (siin iga $r \in \{1,\dots,p\}$ korral punkt u_r lisatakse punktidele $x_0,\dots,x_m$ või punktidele $y_0,\dots,y_n$). Tähistame $T_0 := T$ ning, edasi, iga $r \in \{1,\dots,p\}$ korral tähistame sümboliga T_r jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi T_{r-1} määravatele punktidele punkti u_r lisamise teel. Siis jaotusviis T_p langeb kokku jaotusviisiga T' ning seega väite ($\circ$) põhjal

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S(T) - S(T') &= S(T_0) - S(T_p) = \sum_{r=1}^{p}\bigl(S(T_{r-1}) - S(T_r)\bigr) \\ &\leqslant \sum_{r=1}^{p}(\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T_{r-1}) \leqslant \sum_{r=1}^{p}(\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T) = p\,(\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T). \end{aligned}$$

Jääb veel tõestada väide ($\circ$). Olgu ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T'' saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.11) ühe uue punkti u lisamise teel, kusjuures oletame konkreetsuse mõttes, et see uus punkt on lisatud lõigu $[a,b]$ k-ndasse osalõiku: $u \in [x_{k-1}, x_k]$, kus $k \in \{1,\dots,m\}$. Tähistame $\Delta x_k' := u - x_{k-1}$ ja $\Delta x_k'' := x_k - u$ ning iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\mathcal{D}_{kj}' := [x_{k-1}, u] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}_{kj}'' := [u, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$$

ja

$$M_{kj}' = \sup_{P\in\mathcal{D}_{kj}'} f(P) \quad \text{ja} \quad M_{kj}'' = \sup_{P\in\mathcal{D}_{kj}''} f(P).$$

Siis

$$\begin{aligned}
S(T) - S(T') &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \\
&\quad - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M'_{kj}\,\Delta x'_k\,\Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M''_{kj}\,\Delta x''_k\,\Delta y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_{kj}\,\Delta x_k\,\Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M'_{kj}\,\Delta x'_k\,\Delta y_j - \sum_{j=1}^{n} M''_{kj}\,\Delta x''_k\,\Delta y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\big(M_{kj}\,\Delta x_k - M'_{kj}\,\Delta x'_k - M''_{kj}\,\Delta x''_k\big)\,\Delta y_j.
\end{aligned}$$

Iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\begin{aligned}
M_{kj}\,\Delta x_k - M'_{kj}\,\Delta x'_k - M''_{kj}\,\Delta x''_k &= M_{kj}\,(\Delta x'_k + \Delta x''_k) - M'_{kj}\,\Delta x'_k - M''_{kj}\,\Delta x''_k \\
&= (M_{kj} - M'_{kj})\,\Delta x'_k + (M_{kj} - M''_{kj})\,\Delta x''_k \\
&\leqslant (\beta-\alpha)\,\Delta x'_k + (\beta-\alpha)\,\Delta x''_k \\
&= (\beta-\alpha)\,(\Delta x'_k + \Delta x''_k) = (\beta-\alpha)\,\Delta x_k \\
&\leqslant (\beta-\alpha)\,\Delta(T);
\end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned}
S(T) - S(T') &\leqslant \sum_{j=1}^{n}(\beta-\alpha)\,\Delta(T)\,\Delta y_j = (\beta-\alpha)\,\Delta(T)\sum_{j=1}^{n}\Delta y_j \\
&= (\beta-\alpha)\,\Delta(T)\,(d-c) \leqslant (\beta-\alpha)\,\lambda\,\Delta(T).
\end{aligned}$$

□

Teoreemi 1.4 tõestus. (a). Tähistame $\overline{I} := \overline{I}_{\mathcal{D}} f$. Väite tõestuseks peame näitama, et iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \overline{I} - \varepsilon < S(T) < \overline{I} + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Kuna ristküliku $\mathcal{D}$ iga jaotusviisi T korral $\overline{I} \leqslant S(T)$ (sest $\overline{I}$ on ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisidele T vastavate Darboux' ülemsummade $S(T)$ alumine raja), siis piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad S(T) < \overline{I} + \varepsilon. \tag{1.12}$$

Valime ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T'' selliselt, et

$$S(T'') < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu nüüd T ristküliku $\mathcal{D}$ suvaline jaotusviis. Olgu T' ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis, mis on saadud jaotusviisi T määravatele punktidele (1.11) jaotusviisi T'' määravate punktide juurdelisamise teel; seejuures nende juurdelisatavate punktide arv on ülimalt

$p := p_1 + p_2 - 2$, kus p_1 ja p_2 vastavalt jaotusviisi T'' määravate lõigu $[a, b]$ osalõikude ja lõigu $[c, d]$ osalõikude arv; niisiis lemma 1.5 põhjal

$$S(T) \leqslant S(T') + p\,(\beta - \alpha)\,\lambda\,\Delta(T).$$

Jaotusviis T' on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi T'' määravatele punktidele teatavate uute (jaotusviisi T määravate) punktide juurdelisamise teel (või äärmisel juhul jaotusviisid T' ja T'' ühtivad), seega $S(T') \leqslant S(T'')$ ning järelikult

$$S(T) \leqslant S(T'') + p\,(\beta - \alpha)\,\lambda\,\Delta(T) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} + p\,(\beta - \alpha)\,\lambda\,\Delta(T).$$

Näeme, et kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T rahuldab tingimust $p\,(\beta - \alpha)\,\lambda\,\Delta(T) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, siis $S(T) < \overline{I} + \varepsilon$. Seega, tähistades $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2p\,(\beta - \alpha)\,\lambda}$, kehtib (1.12).

(b). Kuna ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral võrduste (1.7) ja (1.10) põhjal

$$\left|s_f(T) - \underline{I}_{\mathcal{D}} f\right| = \left|-S_{(-f)}(T) + \overline{I}_{\mathcal{D}}(-f)\right| = \left|S_{(-f)}(T) - \overline{I}_{\mathcal{D}}(-f)\right|,$$

siis piisab väite tõestuseks veenduda, et $\overline{I}_{\mathcal{D}}(-f) = \lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S_{(-f)}(T)$, mis kehtib juba tõestatud väite (a) põhjal. □

1.4. Riemanni ja Darboux' mõttes integreeruvuse samaväärsus. Tarvilikke ja piisavaid tingimusi integreeruvuseks

Darboux' lemma võimaldab tõestada Riemanni ja Darboux' mõttes integreeruvuse samaväärsuse ning nende integraalide võrdsuse ning ühtlasi anda mitu kasulikku tarvilikku ja piisavat tingimust funktsiooni integreeruvuseks.

Teoreem 1.6. *Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y) = f(P)$ tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(ii) *funktsioon f on Darboux' mõttes integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$;*

(iii) *funktsiooni f Darboux' ülemsummade piirväärtus ja Darboux' alamsummade piirväärtus ristkülikus $\mathcal{D}$ on võrdsed, s.t*

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \lim_{\Delta(T)\to 0} s(T) =: J; \tag{1.13}$$

(iv) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad S(T) - s(T) < \varepsilon \tag{1.14}$$

(s.t. ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral, mis rahuldab tingimust $\Delta(T) < \delta$, erinevad sellele jaotusviisile vastavad Darboux' summad teineteisest vähem kui ε); teisisõnu,

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \Big(S(T) - s(T)\Big) = 0;$$

(v) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral*

$$S(T) - s(T) < \varepsilon; \tag{1.15}$$

teisisõnu, $\inf\Big\{S(T) - s(T)\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\Big\} = 0.$

Seejuures, kui kehtib ükskõik milline väidetest (i)–(v) *(sel juhul eelneva põhjal kehtivad kõik need väited), siis*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \overset{(1)}{=} \lim_{\Delta(T)\to 0} S_f(T) \overset{(2)}{=} \lim_{\Delta(T)\to 0} s_f(T) \overset{(3)}{=} \underline{I}_{\mathcal{D}} f \overset{(4)}{=} \overline{I}_{\mathcal{D}} f \overset{(5)}{=} I_{\mathcal{D}} f; \tag{1.16}$$

muuhulgas Riemanni integraal ja Darboux' integraal funktsioonist f (üle ristküliku $\mathcal{D}$) on võrdsed: $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = I_{\mathcal{D}} f$.

Märkus 1.2. Kuna (jaotise 1.2 alguses tutvustatud tähistusi kasutades)

$$\begin{aligned} S(T) - s(T) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j, \end{aligned}$$

kus kõikide $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\omega_{ij} := M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} f(P) = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{ij}} \big(f(P) - f(Q)\big) = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{ij}} \big|f(P) - f(Q)\big|$$

(arvu ω_{ij} nimetatakse funktsiooni f *võnkumiseks* osaristkülikus $\mathcal{D}_{ij}$), siis võib teoreemi 1.6 väited (iv) ja (v) formuleerida ka järgmisel (sagedasti kasutataval) kujul:

(iv') $\displaystyle\lim_{\Delta(T)\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = 0;$

(v') $\displaystyle\inf\Bigg\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\colon\ T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\Bigg\} = 0.$

Teoreemi 1.6 tõestus. (ii)$\Rightarrow$ $\big[$(iii)&(1.16)$^{(2)-(5)}\big]$. Kui kehtib (ii), siis vastavalt definitsioonile kehtivad (1.16)$^{(4)-(5)}$, järelikult Darboux' lemma põhjal kehtivad ka (1.16)$^{(2)-(3)}$; muuhulgas kehtib ka (iii).

(iii)$\Rightarrow$ $\big[$(i)&(1.16)$^{(1)-(2)}\big]$. Kehtigu (iii) ning olgu $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava Riemanni summa σ korral

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad J - \varepsilon < \sigma < J + \varepsilon. \tag{1.17}$$

Võrduste (1.13) tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad s(T) > J - \varepsilon \qquad \text{ja} \qquad \Delta(T) < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad S(T) < J + \varepsilon.$$

Kuna iga jaotusviisile T vastava Riemanni summa σ korral $s(T) \leqslant \sigma \leqslant S(T)$, siis, tähistades $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, kehtib (1.17).

(i)⇒(iv). Kehtigu (i); tähistame $I := \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$. Olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava Riemanni summa σ korral

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{4};$$

seega lause 1.2 põhjal (märgime, et teoreemi 1.1 põhjal on funktsioon f tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$)

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant s(T) \leqslant S(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kuna eelneva implikatsiooni paremast poolest järeldub, et $S(T) - s(T) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, siis kehtib implikatsioon (1.14).

(iv)⇒(v) on ilmne.

(v)⇒(ii). Kehtigu (v) ning olgu $\varepsilon > 0$. Eelduse (v) põhjal leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mis rahuldab tingimust (1.15). Arvestades, et

$$s(T) \leqslant \underline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant \overline{I}_{\mathcal{D}} f \leqslant S(T),$$

järeldub tingimusest (1.15), et

$$\left|\overline{I}_{\mathcal{D}} f - \underline{I}_{\mathcal{D}} f\right| \leqslant S(T) - s(T) < \varepsilon,$$

millest arvu $\varepsilon > 0$ suvalisuse tõttu järeldub, et $\overline{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f$, s.t. funktsioon f on Darboux' mõttes integreeruv. □

§ 2. Kahekordne integraal üle mis tahes tõkestatud hulga

2.1. Integraali definitsioon

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y) = f(P)$ määratud tõkestatud hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$.

Definitsioon 2.1. Sisaldagu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ hulka $\mathcal{A}$, s.t. $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$.

Öeldakse, et funktsioon f on *(Riemanni mõttes) integreeruv hulgas* $\mathcal{A}$, kui kahe muutuja funktsioon $z = \widehat{f}(x,y) = \widehat{f}(P)$, kus

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}, \end{cases} \tag{2.1}$$

on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$. Seejuures integraali

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\, dx\, dy := \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\, dx\, dy$$

nimetatakse *(kahekordseks) (Riemanni) integraaliks funktsioonist f üle hulga $\mathcal{A}$.*

Siinkohal kerkib loomulik küsimus eelneva definitsiooni korrektsusest, nimelt: kas funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ ja integraali $\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\, dx\, dy$ väärtus on sõltumatu (hulka $\mathcal{A}$ sisaldava) ristküliku $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ valikust? Vastus sellele küsimusele on: jah, on küll sõltumatu ning seega on eelnev definitsioon korrektne. Veendumaks selles, piisab, eeldades, et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$ on hulka $\mathcal{A}$ sisaldavad ristkülikud ning funktsioonid $\widehat{f}_1 \colon \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ ja $\widehat{f}_2 \colon \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdustega

$$\widehat{f}_1(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{A}, \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \widehat{f}_2(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{A}, \end{cases}$$

näidata, et

(1) funktsioon $\widehat{f}_1$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_1$ parajasti siis, kui funktsioon $\widehat{f}_2$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}_2$;

(2) $\iint_{\mathcal{D}_1} \widehat{f}_1(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}_2} \widehat{f}_2(x,y)\, dx\, dy$ (seda muidugi funktsioonide $\widehat{f}_1$ ja $\widehat{f}_2$ integreeruvuse korral).

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et funktsioon f on tõkestatud, s.t. leidub reaalarv $M > 0$ nii, et

$$|f(P)| \leqslant M \quad \text{iga } P \in \mathcal{A} \text{ korral}$$

(sest vastasel juhul on ka funktsioonid $\widehat{f}_1$ ja $\widehat{f}_2$ tõkestamata ning seega teoreemi 1.1 põhjal pole kumbki neist funktsioonidest integreeruv).

Väidete (1) ja (2) kehtivuseks piisab näidata, et

$$\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2, \tag{2.2}$$

kus $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1$ ja $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2$ tähistavad Darboux' ülemisi integraale vastavalt funktsioonidest $\widehat{f}_1$ ja $\widehat{f}_2$ vastavalt üle ristkülikute $\mathcal{D}_1$ ja $\mathcal{D}_2$.

Tõepoolest, kehtigu võrdus (2.2). Siis (vaadeldes eelnevas arutelus kõikjal funktsiooni f asemel funktsiooni $-f$) ka $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}(-\widehat{f}_1) = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}(-\widehat{f}_2)$, järelikult

$$\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 = -\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}(-\widehat{f}_1) = -\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}(-\widehat{f}_2) = \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2,$$

kus $\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1$ ja $\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2$ tähistavad Darboux' alumisi integraale vastavalt funktsioonidest $\widehat{f}_1$ ja $\widehat{f}_2$ vastavalt üle ristkülikute $\mathcal{D}_1$ ja $\mathcal{D}_2$. Seega

$$\text{funktsioon } \widehat{f}_1 \text{ on integreeruv ristkülikus } \mathcal{D}_1 \iff \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1$$
$$\iff \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2 = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2 \iff \text{funktsioon } \widehat{f}_2 \text{ on integreeruv ristkülikus } \mathcal{D}_2,$$

kusjuures $\iint_{\mathcal{D}_1} \widehat{f}_1(x,y)\,dx\,dy = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2 = \iint_{\mathcal{D}_2} \widehat{f}_2(x,y)\,dx\,dy$, nagu soovitud.

Võrduse (2.2) tõestamisel võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\mathcal{D}_1 \subset (\mathcal{D}_2)^\circ$ (sümbol $(\mathcal{D}_2)^\circ$ tähistab hulga $\mathcal{D}_2$ sisemust), sest võrduse (2.2) kehtivuse korral sellel lisaeeldusel, valides ristküliku $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}^\circ$, ning defineerides funktsiooni $\widehat{f}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ võrdusega (2.1), kehtib

$$\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\widehat{f} = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2.$$

Niisiis, eeldame järgnevas, et $\mathcal{D}_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1] \subset [a_2, b_2] \times [c_2, d_2] = \mathcal{D}_2$ ning, veelgi enam, $\mathcal{D}_1 \subset (a_2, b_2) \times (c_2, d_2) = (\mathcal{D}_2)^\circ$, s.t. $a_2 < a_1$, $b_1 < b_2$, $c_2 < c_1$, $d_1 < d_2$. Võrduse (2.2) tõestuseks näitame, et

$$[\mathrm{I}] \quad \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2 \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 \qquad \text{ja} \qquad [\mathrm{II}] \quad \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2.$$

[I]. Olgu T_1 ristküliku $\mathcal{D}_1$ suvaline jaotusviis ning olgu $\varepsilon > 0$ suvaline (positiivne) reaalarv. Veendumaks, et $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2 \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1$, piisab leida ristküliku $\mathcal{D}_2$ jaotusviis T_2 nii, et $S_{\widehat{f}_2}(T_2) < S_{\widehat{f}_1}(T_1) + \varepsilon$ (PÕHJENDADA, MIKS NIISUGUSE JAOTUSVIISI T_2 OLEMASOLUST JÄRELDUB VÕRRATUS $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2 \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1$!). Edasises kirjutame $S_{\widehat{f}_2}(T_2)$ ja $S_{\widehat{f}_1}(T_1)$ asemel lihtsalt vastavalt $S(T_2)$ ja $S(T_1)$.

Olgu jaotusviis T_1 määratud punktidega

$$a_1 = x_0' < x_1' < \cdots < x_m' = b_1 \quad \text{ja} \quad c_1 = y_0' < y_1' < \cdots < y_n' = d_1 \tag{2.3}$$

(siin $m, n \in \mathbb{N}$). Olgu reaalarv $d > 0$ selline, et

$$\alpha := a_1 - d > a_2, \quad \beta := b_1 + d < b_2, \quad \gamma := c_1 - d > c_2, \quad \delta := d_1 + d < d_2.$$

Tähistame sümboliga T_2 ristküliku $\mathcal{D}_2$ jaotusviisi, mis on määratud punktidega

$$a_2 < \alpha < a_1 = x_0' < x_1' < \cdots < x_m' = b_1 < \beta < b_2$$

ja

$$c_2 < \gamma < c_1 = y_0' < y_1' < \cdots < y_n' = d_1 < \delta < d_2$$

(vt JOONIST). Tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta x_i' := x_i' - x_{i-1}', \qquad \Delta y_j' := y_j' - y_{j-1}', \qquad M_{ij}' = \sup_{P \in [x_{i-1}', x_i'] \times [y_{j-1}', y_j']} \widehat{f}_2(P) \tag{2.4}$$

ning

$$M_\alpha^{[j]} := \sup_{P \in [\alpha, a_1] \times [y_{j-1}', y_j']} \widehat{f}_2(P), \qquad M_\beta^{[j]} := \sup_{P \in [b_1, \beta] \times [y_{j-1}', y_j']} \widehat{f}_2(P), \tag{2.5}$$

$$M_{[i]}^\gamma := \sup_{P \in [x_{i-1}', x_i'] \times [\gamma, c_1]} \widehat{f}_2(P), \qquad M_{[i]}^\delta := \sup_{P \in [x_{i-1}', x_i'] \times [d_1, \delta]} \widehat{f}_2(P) \tag{2.6}$$

ja

$$M_{\alpha,\gamma} := \sup_{P \in [\alpha, a_1] \times [\gamma, c_1]} \widehat{f}_2(P), \qquad M_{\beta,\gamma} := \sup_{P \in [b_1, \beta] \times [\gamma, c_1]} \widehat{f}_2(P), \tag{2.7}$$

$$M_{\alpha,\delta} := \sup_{P \in [\alpha, a_1] \times [d_1, \delta]} \widehat{f}_2(P), \qquad M_{\beta,\delta} := \sup_{P \in [b_1, \beta] \times [d_1, \delta]} \widehat{f}_2(P). \tag{2.8}$$

Siis, arvestades, et väljaspool lahtist ristkülikut $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ on funktsiooni $\widehat{f}_2$ väärtus 0,

$$\begin{aligned} S(T_2) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij}' \,\Delta x_i' \,\Delta y_j' + M_{\alpha,\gamma}\, d^2 + M_{\beta,\gamma}\, d^2 + M_{\alpha,\delta}\, d^2 + M_{\beta,\delta}\, d^2 && (2.9)\\ &\quad + \sum_{j=1}^n M_\alpha^{[j]}\, d\,\Delta y_j' + \sum_{j=1}^n M_\beta^{[j]}\, d\,\Delta y_j' + \sum_{i=1}^m M_{[i]}^\gamma \,\Delta x_i'\, d + \sum_{i=1}^m M_{[i]}^\delta \,\Delta x_i'\, d \\ &= S(T_1) + \sigma, && (2.10) \end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned} \sigma :=& (M_{\alpha,\gamma} + M_{\beta,\gamma} + M_{\alpha,\delta} + M_{\beta,\delta})\, d^2 \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(M_\alpha^{[j]} + M_\beta^{[j]}\right) d\,\Delta y_j' + \sum_{i=1}^m \left(M_{[i]}^\gamma + M_{[i]}^\delta\right) \Delta x_i'\, d. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Paneme tähele, et

$$|\sigma| < 4Md^2 + 2Md(d_1 - c_1) + 2Md(b_1 - a_1) = 2Md(2d + d_1 - c_1 + b_1 - a_1) \tag{2.12}$$

(PÕHJENDADA!). Kuna $S(T_2) \leqslant S(T_1) + |\sigma|$, siis hinnangust (2.12) näeme, et kui valida arv $d > 0$ algusest peale piisavalt väike, näiteks

$$d < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2M(2 + d_1 - c_1 + b_1 - a_1)}\right\}, \tag{2.13}$$

siis kehtib soovitud võrratus $S(T_2) < S(T_1) + \varepsilon$.

[II]. Olgu T'' ristküliku $\mathcal{D}_2$ suvaline jaotusviis ning olgu $\varepsilon > 0$ suvaline (positiivne) reaalarv. Veendumaks, et $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_1}\widehat{f}_1 \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}_2}\widehat{f}_2$, piisab leida ristküliku $\mathcal{D}_1$ jaotusviis T_1 nii, et $S(T_1) < S(T'') + \varepsilon$. Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et punktid a_1 ja b_1 ning c_1 ja d_1 on jaotusviisi T'' määravate punktide

$$a_2 = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_{m''} = b_2 \quad \text{ning} \quad c_2 = y''_0 < y''_1 < \cdots < y''_{n''} = b_2 \tag{2.14}$$

(siin $m'', n'' \in \mathbb{N}$) hulgas (PÕHJENDADA!). Olgu $k, m, l, n \in \mathbb{N}$ sellised, et $a_1 = x''_k$, $b_1 = x''_{k+m}$, $c_1 = y''_l$, $d_1 = y''_{l+n}$. Valime reaalarvu $d > 0$ nii, et

$$\alpha := a_1 - d > x''_{k-1}, \quad \beta := b_1 + d < x''_{k+m+1}, \quad \gamma := c_1 - d > y''_{l-1}, \quad \delta := d_1 + d < y''_{l+n+1},$$

ja tähistame sümboliga T_2 ristküliku $\mathcal{D}_2$ jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi T'' määravatele punktidele (2.14) vastavalt punktide α ja β ning γ ja δ lisamisel. Siis $S(T_2) \leqslant S(T'')$, seega piisab meil leida ristküliku $\mathcal{D}_1$ jaotusviis T_1 nii, et $S(T_1) < S(T_2) + \varepsilon$. Tähistame sümboliga T_1 ristküliku $\mathcal{D}_1$ jaotusviisi, mis on määratud punktidega (2.3), kus $x'_i := x''_{k+i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, ja $y'_j := y''_{l+j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ (vt JOONIST). Järgides tähistusi (2.4)–(2.8) ja (2.11), saame võrdused (2.9) ja (2.10) (arvestades jälle, et väljaspool lahtist ristkülikut $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ on funktsiooni $\widehat{f}_2$ väärtus 0). Kuna $S(T_1) \leqslant S(T_2) + |\sigma|$, siis hinnangust (2.12) näeme, et kui valida arv $d > 0$ algusest peale piisavalt väike, näiteks tingimust (2.13) rahuldav, siis kehtib soovitud võrratus $S(T_1) < S(T_2) + \varepsilon$.

Jaotise lõpetuseks tõestame ühe olulise tarviliku tingimuse funktsiooni integreeruvuseks.

Lause 2.1. *Hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ integreeruv kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y) = f(P)$ on tõkestatud selles hulgas.*

Tõestus. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab võrdusega (2.1) defineeritud funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$. Funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvusest ristkülikus $\mathcal{D}$ järeldub teoreemi 1.1 põhjal tema tõkestatus selles ristkülikus, millest omakorda järeldub funktsiooni f tõkestatus hulgas $\mathcal{A}$. □

2.2. Hulga mõõtuvus Jordani mõttes

Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$.

Definitsioon 2.2. Funktsiooni $\chi_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kus

$$\chi_{\mathcal{A}}(P) = \begin{cases} 1, & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in (\mathbb{R}^2) \backslash \mathcal{A}, \end{cases}$$

nimetatakse hulga $\mathcal{A}$ *karakteristlikuks funktsiooniks* või ka (eriti tõenäosusteoorias) hulga $\mathcal{A}$ *indikaatorfunktsiooniks.*

Eeldame nüüd, et hulk $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ on tõkestatud.

Definitsioon 2.3. Öeldakse, et hulk $\mathcal{A}$ on *Jordani mõttes mõõtuv,* kui tema karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, s.t., valides ristküliku $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$, karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$. Seejuures integraali

$$\mu(\mathcal{A}) := S_{\mathcal{A}} := \iint\limits_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy$$

nimetatakse hulga $\mathcal{A}$ *Jordani mõõduks* ehk *pindalaks.*

Kõneldes selle peatüki paragrahvides 2–6 edaspidi lihtsalt *mõõtuvatest* hulkadest, mõistame me selle all Jordani mõttes mõõtuvaid hulki tasandil $\mathbb{R}^2$.

Rõhutame, et eelnevas punktis tõestatu põhjal ei sõltu karakteristliku funktsiooni $\chi_{\mathcal{A}}$ integreeruvus ja integraal $\iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy$ ning seega ka hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuvus ja Jordani mõõt hulka $\mathcal{A}$ sisaldava ristküliku $\mathcal{D}$ valikust definitsioonis 2.3 . Rõhutame samuti, et hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõõdust (ehk, teisisõnu, pindalast) saame kõnelda vaid Jordani mõttes mõõtuva hulga $\mathcal{A}$ puhul.

Märkus 2.1. Eelnev Jordani mõõdu definitsioon ei lähtu vahetult meie eelmatemaatilisest arusaamast pindalast. Seosed nimetatud definitsiooni ja arusaama vahel hakkavad selginema, kui analüüsida hulga karakteristliku funktsiooni integreeruvust Darboux' summade terminites. On mõistlik lükata see analüüs edasi paragrahvi 4, kus meie käsutuses on oluliselt rohkem teadmisi integraalist ja Jordani mõõdust. Paragrahvis 4 tõestame hulga Jordani mõttes mõõtuvuse jaoks ühe tarviliku ja piisava tingimuse (teoreem 4.2), mis selgitab (vt märkust 4.1), et *eelnev Jordani mõõdu definitsioon 2.3 on igati kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast.*

Näide 2.1. *Ristkülik $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ on Jordani mõttes mõõtuv hulk,* kusjuures tema Jordani mõõt

$$\mu(\mathcal{D}) = (b-a)(d-c),$$

s.t. ristküliku Jordani mõõt on võrdne tema elementaargeomeetrilistest kaalutlustest lähtudes arvutatud pindalaga.

Tõepoolest, ristküliku $\mathcal{D}$ Jordani mõttes mõõtuvuseks piisab (võttes definitsioonis 2.3 nii hulga $\mathcal{A}$ kui ka teda sisaldava ristküliku $\mathcal{D}$ rolli meie vaadeldava ristküliku $\mathcal{D}$), veenduda, et selle ristküliku karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{D}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, aga see järeldub näitest 1.1 (sest karakteristilik funktsioon $\chi_{\mathcal{D}}$ on selles ristkülikus konstantne: $(\chi_{\mathcal{D}})|_{\mathcal{D}} = 1$); seejuures (jällegi näites 1.1 leitu põhjal)

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{D}}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy = (b-a)(d-c).$$

Järgnevad näide 2.2 ja lause 2.4 annavad näiteid *nullmõõduga hulkadest* tasandil, s.t. niisugustest Jordani mõttes mõõtuvatest hulkadest (tasandil $\mathbb{R}^2$), mille Jordani mõõt on null. Eelnevalt on otstarbekas tõestada järgnevad kaks tulemust, millest lemma 2.2 annab tarvilikke ja piisavaid tingimusi hulga nullmõõdulisuseks (mida nende lihtsuse tõttu kasutame edaspidi sageli ilma sellele lemmale viitamata) ning lause 2.3 ütleb, et nullmõõduga hulkade lõplik ühend on nullmõõduga hulk.

Lemma 2.2. *Olgu (tõkestatud) hulk $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ ja ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ sellised, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mathcal{A}$ on nullmõõduga hulk;*

(ii) $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = 0$;

(iii) $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} \leqslant 0$;

(iv) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T nii, et $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$ (sümbol $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)$ tähistab karakteristliku funktsiooni $\chi_{\mathcal{A}}$ Darboux' ülemsummat (ristkülikus $\mathcal{D}$), mis vastab jaotusviisile T);*

(v) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral hulka $\mathcal{A}$ lõikavate osaristkülikute pindalade summa on väiksem kui ε, s.t., tähistades $\widehat{\Gamma} := \{(i,j) \in \Gamma \colon \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing\}$, kehtib võrratus*

$$\sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} \mu(\mathcal{D}_{ij}) = \sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon.$$

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Hulga $\mathcal{A}$ nullmõõdulisus tähendab, et tema karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures integraal temast üle selle ristküliku on null, aga sellisel juhul $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) on ilmne.

(iii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iii). Siis $0 \leqslant \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} \leqslant 0$ (selle ahela esimene võrratus järeldub karakteristliku funktsiooni $\chi_{\mathcal{A}}$ mittenegatiivsusest), seega $\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = 0$. See tähendab, et karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures integraal temast üle selle ristküliku on null; see omakorda aga tähendab, et hulk $\mathcal{A}$ on Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures tema Jordani mõõt on null.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) on ilmne.

(iv)$\Leftrightarrow$(v) on ilmne, sest ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisile T vastav karakteristliku funktsiooni $\chi_{\mathcal{A}}$ Darboux' ülemsumma $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)$ on selle jaotusviisi selliste osaristkülikute pindalade summa, mis lõikavad hulka $\mathcal{A}$. □

Järgnevat lauset vajame me näites 2.2 tõestamaks, et lõplik hulk (tasandil) on nullmõõduline, aga samuti jaotises 2.3 (koos teoreemiga 2.5 ja lausega 2.4) lause 2.7 – pidevate funktsioonidega määratud kõvertrapetsi mõõtuvuse – tõestamisel.

Lause 2.3. *Nullmõõduga hulkade lõplik ühend (tasandil) on nullmõõduga hulk.*

LAUSE 2.3 TÕESTUS. Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ nullmõõduga hulgad. Lause tõestuseks piisab näidata, et ühend $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ on nullmõõduga hulk. Selleks, valides ristküliku $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, piisab veenduda, et $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} \leqslant 0$.

Kuna $\chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} \leqslant \chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}}$, siis ülesande 1.2 põhjal

$$\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}(\chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}}) \leqslant \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{B}} = 0,$$

sest hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ nullmõõdulisuse tõttu $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{B}} = 0$. □

Lause 2.3 tõestus lihtsustuks veelgi, kui selles kasutada lauset 3.7. Niisugune tõestus on esitatud jaotises 3.4 lk 165 lause 3.7 tõestuse järel.

Näide 2.2. *Lõplik hulk tasandil $\mathbb{R}^2$ on nullmõõduga hulk.* Kuna iga mittetühi lõplik hulk on ühepunktiliste hulkade lõplik ühend, siis lause 2.3 põhjal piisab lõpliku hulga nullmõõdulisuseks veenduda, et ühepunktiline hulk tasandil $\mathbb{R}^2$ on nullmõõduga hulk. Olgu $P \in \mathbb{R}^2$ ja olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \{P\}$ (ehk teisisõnu $P \in \mathcal{D}$), ning olgu $\varepsilon > 0$. Lemma 2.2 põhjal piisab hulga $\{P\}$ nullmõõdulisuseks leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral punkti P sisaldavate osaristkülikute pindalade summa on väiksem kui ε. Sellise jaotusviisi olemasolu on ilmne.

Lause 2.4. (a) *Lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni $y = f(x)$ graafik*

$$L := \{(x,y) \colon x \in [a,b],\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

on nullmõõduga hulk.

(b) *Lõigus $[c,d]$ pideva funktsiooni $x = g(y)$ graafik*

$$\{(x,y) \colon y \in [c,d],\ x = g(y)\} \subset \mathbb{R}^2$$

on nullmõõduga hulk.

Lause 2.4 (mis on ka eraldi vaadelduna huvipakkuv) leiab rakendust jaotise 2.3 lõpus lause 2.7 – pidevate funktsioonidega määratud kõvertrapetsi mõõtuvuse – tõestamisel.

Järgnevas tõestuses, kõneldes ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisist T, toetume me konspektis läbivalt kasutatavatele kokkulepetele/tähistustele, mida on tutvustatud näiteks jaotise 1.2 alguses lk 132. Lisaks tähistame $\Gamma := \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$ ja $\widehat{\Gamma}_L := \{(i,j) \in \Gamma \colon \mathcal{D}_{ij} \cap L \neq \varnothing\}$.

Lause 2.4 tõestus. (a). Weierstrassi teoreemi ?? põhjal leiduvad arvud $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, nii, et $c \leqslant f(x) \leqslant d$ iga $x \in [a,b]$ korral. Tähistame $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$; siis $\mathcal{D} \supset L$. Lemma 2.2 põhjal piisab graafiku L nullmõõdulisuseks, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T, mille korral $\sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}_L} \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon$.

Jagame lõigu $[c,d]$ punktidega $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ võrdse pikkusega osalõikudeks $[y_{j-1}, y_j]$, mille pikkused δ_0 on väiksemad kui $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, s.t. $\delta_0 := \Delta y_1 = \cdots = \Delta y_n < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Cantori teoreemi ?? põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$x, x' \in [a,b],\ |x - x'| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - f(x')| < \delta_0.$$

Jagame lõigu $[a,b]$ punktidega $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ osalõikudeks $[x_{i-1}, x_i]$, mille pikkused on väiksemad kui δ. Iga $i \in \{1,\ldots,m\}$ korral tähistame $\Gamma_i := \{j \in \{1,\ldots,n\} \colon L \cap \mathcal{D}_{ij} \neq \varnothing\}$ (s.t. Γ_i on nende indeksite $j \in \{1,\ldots,n\}$ hulk, mille korral graafik L lõikab osaristkülikut $\mathcal{D}_{ij}$) ning sümboliga $|\Gamma_i|$ tähistame hulga Γ_i elementide arvu; siis $|\Gamma_i| \leqslant 3$ (s.t. lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ lõikab graafik L ülimalt kolme ristkülikut $\mathcal{D}_{ij}$) (PÕHJENDADA!). JOONIS! (Kuhu täpselt?)

Tõepoolest, olgu $i \in \{1,\ldots,m\}$ ning olgu $j \in \{1,\ldots,n\}$ selline, et $y_{j-1} \leqslant f(x_i) \leqslant y_j$. Siis mis tahes $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral $|x - x_i| \leqslant \Delta x_i < \delta$ ning seega $|f(x) - f(x_i)| < \delta_0$, aga nüüd

$$y_{j-2} = y_{j-1} - \delta_0 \leqslant f(x_i) - \delta_0 < f(x) < f(x_i) + \delta_0 \leqslant y_j + \delta_0 = y_{j+1}$$

(siin juhtudel $j = 1$ ja $j = n$ saame vastavalt alumiseks ja ülemiseks hinnanguks $y_{j-1} = y_0 = c \leqslant f(x)$ ja $f(x) \leqslant d = y_n = y_j$), aga siit järeldub, et $\Gamma_i \subset \{j-1, j, j+1\}$.

Aga nüüd (tähistades tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi, mis on määratud punktidega $x_0, x_1, \ldots, x_m$ ja $y_0, y_1, \ldots, y_n$)

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\hat{\Gamma}_L} \Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in\Gamma_i} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j\in\Gamma_i} \Delta y_j = \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i |\Gamma_i| \delta_0 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i 3\delta_0 = 3\delta_0 \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = 3(b-a)\delta_0 < 3(b-a)\,\frac{\varepsilon}{3(b-a)} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(b). Väite tõestus on sümmeetriline väite (a) tõestusega. □

2.3. Tarvilik ja piisav tingimus hulga Jordani mõttes mõõtuvuseks tema raja nullmõõdulisuse kaudu

Teoreem 2.5. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mathcal{A}$ on Jordani mõttes mõõtuv;*

(ii) *$\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$, s.t. hulga $\mathcal{A}$ raja $\partial\mathcal{A}$ Jordani mõõt on null.*

Teoreemi 2.5 tõestuses on mugav toetuda järgnevale abitulemusele.

Lemma 2.6. *Olgu hulk $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ ja ristkülik $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ sellised, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks*

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

kus $m, n \in \mathbb{N}$ ning $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ ja $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Tähistame $\Gamma := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ ning

$$\begin{aligned}&\hat{\Gamma} := \{(i,j) \in \Gamma \colon \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing\}, &\qquad &\check{\Gamma} := \{(i,j) \in \Gamma \colon \mathcal{D}_{ij} \subset \mathcal{A}\},\\ &\bar{\Gamma} := \hat{\Gamma} \backslash \check{\Gamma}, & &\tilde{\Gamma} := \{(i,j) \in \Gamma \colon \mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{A} \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

Siis

(a) *$S_{\chi_\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j)\in\hat{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s_{\chi_\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j)\in\check{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j;$*

(b) *$S_{\chi_\mathcal{A}}(T) - s_{\chi_\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j;$*

(c) *$S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) = \sum_{(i,j)\in\tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j;$*

(d) *$\bar{\Gamma} \subset \tilde{\Gamma}$.*

Kui $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^\circ$ (s.t. hulga $\mathcal{A}$ sulund sisaldub ristküliku $\mathcal{D}$ sisemuses), siis ka

(e) $\partial\mathcal{A} \subset \bigcup_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \mathcal{D}_{ij}$;

(f) $|\tilde{\Gamma}| \leqslant 9|\bar{\Gamma}|$, *kus sümbolid* $|\tilde{\Gamma}|$ *ja* $|\bar{\Gamma}|$ *tähistavad vastavalt hulkade* $\tilde{\Gamma}$ *ja* $\bar{\Gamma}$ *elementide arvu.*

Tõestus. (a). Mis tahes $(i,j) \in \Gamma$ korral

$$M_{ij}(\chi_{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing, \ \text{ s.t. } (i,j) \in \hat{\Gamma}; \\ 0, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} = \varnothing, \ \text{ s.t. } (i,j) \in \Gamma \backslash \hat{\Gamma}, \end{cases}$$

$$m_{ij}(\chi_{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \subset \mathcal{A}, \ \text{ s.t. } (i,j) \in \check{\Gamma}; \\ 0, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \cap (\mathcal{D} \backslash \mathcal{A}) \neq \varnothing, \ \text{ s.t. } (i,j) \in \Gamma \backslash \check{\Gamma}. \end{cases}$$

Tõestatavad võrdused on nüüd ilmsed.

(b). Tõestatav võrdus järeldub vahetult väitest (a).

(c). Tõestatav võrdus järeldub väite (a) esimesest võrdusest.

(d). Olgu $(i,j) \in \bar{\Gamma}$. Siis $\mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$, seega leidub $P \in \mathcal{D}_{ij}$ nii, et $P \in \mathcal{A}$. Teiselt poolt, kuna $(i,j) \notin \check{\Gamma}$, siis $\mathcal{D}_{ij} \not\subset \mathcal{A}$, seega leidub $Q \in \mathcal{D}_{ij}$ nii, et $Q \notin \mathcal{A}$. Nüüd punkte P ja Q ühendaval sirglõigul leidub punkt $R \in \partial\mathcal{A}$ (vt. ülesande I.1.4 näpunäidet; siin me eeldame üldisust kitsendamata, et $\mathcal{A} \neq \varnothing$). Kuna punkte P ja Q ühendav sirglõik sisaldub ristkülikus $\mathcal{D}_{ij}$, siis $R \in \mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{A}$ ning seega $\mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{A} \neq \varnothing$, s.t $(i,j) \in \tilde{\Gamma}$. Oleme näidanud, et $\bar{\Gamma} \subset \tilde{\Gamma}$.

Eeldame järgnevas täiendavalt, et $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^{\circ}$.

(e). Olgu $P \in \partial\mathcal{A}$. Tähistame $\Gamma_P := \{(i,j) \in \Gamma \colon P \in \mathcal{D}_{ij}\}$. Siis hulk $\mathcal{U} := \bigcup_{(i,j)\in\Gamma_P} \mathcal{D}_{ij}$ on punkti P ümbrus (PÕHJENDADA!) (siin me kasutasime eeldust, et $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^{\circ}$), järelikult, arvestades, et P on hulga $\mathcal{A}$ rajapunkt, leiduvad $(k,l), (r,s) \in \Gamma_P$ nii, et $\mathcal{D}_{kl} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$ ja $\mathcal{D}_{rs} \cap (\mathcal{D} \backslash \mathcal{A}) \neq \varnothing$ (PÕHJENDADA!). Nüüd, kui $P \in \mathcal{A}$, siis $(r,s) \in \bar{\Gamma}$, kui aga $P \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{A}$, siis $(k,l) \in \bar{\Gamma}$ (PÕHJENDADA!). Siit näeme, et igal juhul $P \in \bigcup_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \mathcal{D}_{ij}$ (PÕHJENDADA!).

(f). Kõikjal väite tõestuses kasutame järgnevaid tähistusi. Kui $\Gamma_0 \subset \Gamma$, siis sümbol $|\Gamma_0|$ tähistab hulga Γ_0 elementide arvu. Iga $(i,j) \in \Gamma$ korral tähistame $\Gamma_{ij} := \{(k,l) \in \Gamma \colon \mathcal{D}_{kl} \cap \mathcal{D}_{ij} \neq \varnothing\}$; siis ilmselt $|\Gamma_{ij}| \leqslant 9$.

Väite tõestuseks piisab näidata, et $\tilde{\Gamma} \subset \bigcup_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Gamma_{ij}$, sest selle sisalduvuse kehtides

$$|\tilde{\Gamma}| \leqslant \Big| \bigcup_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Gamma_{ij} \Big| \leqslant \sum_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} |\Gamma_{ij}| \leqslant 9|\bar{\Gamma}|$$

(PÕHJENDADA!). Tõestame sisalduvuse $\tilde{\Gamma} \subset \bigcup_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Gamma_{ij}$. Olgu $(k,l) \in \tilde{\Gamma}$; siis leidub $P \in \mathcal{D}_{kl} \cap \partial\mathcal{A}$. Väite (e) põhjal leidub $(i,j) \in \bar{\Gamma}$ nii, et $P \in \mathcal{D}_{ij}$; niisiis $P \in \mathcal{D}_{kl} \cap \mathcal{D}_{ij}$ ja seega $(k,l) \in \Gamma_{ij}$. $\square$

TEOREEMI 2.5 TÕESTUS. Olgu ristkülik $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

(ii)⇒(i). Olgu $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuvuseks piisab leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T selliselt, et $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$.

Kuna $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$, siis saame jaotusviisi T valida selliselt, et $S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$ (PÕHJENDADA!). Lemma 2.6, (b), (d) ja (c), põhjal

$$S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = \sum_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j \leqslant \sum_{(i,j)\in\tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon.$$

(i)⇒(ii). Olgu hulk $\mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuv ning olgu $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks (s.t. võrduseks $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$) piisab leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T selliselt, et $S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$ (PÕHJENDADA!). Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et ristkülik $\mathcal{D}$ on ruut, kusjuures $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^\circ$ (PÕHJENDADA!).

Olgu T ruudu $\mathcal{D}$ niisugune jaotusviis, mille kõik osaristkülikud on võrdse küljepikkusega ruudud; olgu nende osaruutude küljepikkus κ. Siis lemma 2.6, (c), (f) ja (b), põhjal

$$S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) = \sum_{(i,j)\in\tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = |\tilde{\Gamma}|\kappa^2 \leqslant 9|\bar{\Gamma}|\kappa^2 = 9 \sum_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = 9\big(S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)\big).$$

Kuna hulk $\mathcal{A}$ on Jordani mõttes mõõtuv, siis saame ruudu $\mathcal{D}$ jaotusviisi T võrdse küljepikkusega osaruutudeks valida nii, et $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \frac{\varepsilon}{9}$ (PÕHJENDADA!), aga niisuguse jaotusviisi T korral $S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$, nagu soovitud. □

Jaotise lõpetuseks tõestame järeldusena teoreemist 2.5 (ning lausetest 2.3 ja 2.4), et pidevate funktsioonidega määratud kõvertrapets on Jordani mõttes mõõtuv hulk.

Lause 2.7. (a) *Olgu $y = \alpha(x)$ ja $y = \beta(x)$ lõigus $[a,b]$ pidevad funktsioonid, kusjuures $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Siis kõvertrapets*

$$\mathcal{A} := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b],\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\}$$

on Jordani mõttes mõõtuv hulk (tasandil $\mathbb{R}^2$).

(b) *Olgu $x = \gamma(y)$ ja $x = \delta(y)$ lõigus $[c,d]$ pidevad funktsioonid, kusjuures $\gamma(y) \leqslant \delta(y)$ iga $y \in [c,d]$ korral. Siis kõvertrapets*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [c,d],\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\big\}$$

on Jordani mõttes mõõtuv hulk (tasandil $\mathbb{R}^2$).

JOONIS!

LAUSE 2.7 TÕESTUS. (a). Teoreemi 2.5 põhjal piisab kõvertrapetsi $\mathcal{A}$ mõõtuvuseks näidata, et tema rajajoon $\partial\mathcal{A}$ on nullmõõduline. Rajajoon $\partial\mathcal{A}$ esitub ühendina $\partial\mathcal{A} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, kus

$$L_1 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b],\ y = \alpha(x)\big\},\quad L_3 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = a,\ \alpha(a) \leqslant y \leqslant \beta(a)\big\},$$
$$L_2 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b],\ y = \beta(x)\big\},\quad L_4 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = b,\ \alpha(b) \leqslant y \leqslant \beta(b)\big\},$$

seega lause 2.3 põhjal piisab tema nullmõõdulisuseks näidata, et hulgad L_1, L_2, L_3 ja L_4 on nullmõõdulised. Hulkade L_1 ja L_2 ning L_3 ja L_4 nullmõõdulisus järeldub vastavalt lausest 2.4, (a) ning (b) (on võimalik ka juht, kus üks või mõlemad hulkadest L_3 ja L_4 on ühepunktilised, aga ühepunktiline hulk on nullmõõduline näite 2.2 põhjal).

(b). Väite tõestus on sümmeetriline väite (a) tõestusega. □

2.4. Mõõtuvas kinnises hulgas pideva kahe muutuja funktsiooni integreeruvus

Kõiki selles jaotises kasutatavaid tähistusi (nt Γ, $\widehat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}$) on selgitatud lemmas 2.6.

Teoreem 2.8. *Jordani mõttes mõõtuvas kinnises hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ pidev kahe muutuja funktsioon on integreeruv selles hulgas.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuv kinnine hulk ning olgu $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Kuna Jordani mõttes mõõtuv hulk on tõkestatud, siis leidub ristkülik $\mathcal{D} := [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab lk 142 valemiga (2.1) defineeritud funktsiooni $\widehat{f}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$. Seega, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab teoreemi tõestuseks leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T nii, et, tähistades $\omega_{ij}(\widehat{f}) := \sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \widehat{f}(P) - \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \widehat{f}(P)$,

$$S_{\widehat{f}}(T) - s_{\widehat{f}}(T) = \sum_{(i,j)\in\Gamma} \omega_{ij}(\widehat{f})\Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon.$$

Olgu T ristküliku $\mathcal{D}$ suvaline jaotusviis. Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal on funktsioon f tõkestatud hulgas $\mathcal{A}$, seega funktsioon $\widehat{f}$ on tõkestatud, s.t. leidub reaalarv $M > 0$ nii, et $|\widehat{f}(P)| \leqslant M$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral. Arvestades, et iga $(i,j) \in \Gamma\backslash\widehat{\Gamma}$ korral $\omega_{ij}(\widehat{f}) = 0$ ning et iga $(i,j) \in \Gamma$ korral $\omega_{ij}(\widehat{f}) \leqslant 2M$ (PÕHJENDADA!),

$$\begin{aligned}
S_{\widehat{f}}(T) - s_{\widehat{f}}(T) &= \sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} \omega_{ij}(\widehat{f})\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \omega_{ij}(\widehat{f})\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{(i,j)\in\check{\Gamma}} \omega_{ij}(\widehat{f})\Delta x_i \Delta y_j \\
&\leqslant 2M \sum_{(i,j)\in\bar{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j + \max_{(i,j)\in\check{\Gamma}} \omega_{ij}(\widehat{f}) \sum_{(i,j)\in\check{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j \\
&\leqslant 2M \sum_{(i,j)\in\tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j + \max_{(i,j)\in\check{\Gamma}} \omega_{ij}(\widehat{f})\ \mu(\mathcal{D}) \\
&= 2M\, S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) + \max_{(i,j)\in\check{\Gamma}} \omega_{ij}(\widehat{f})\ \mu(\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

Hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuvuse tõttu on tema raja nullmõõduga hulk (vt. teoreemi 2.5), seega leidub reaalarv $\delta_1 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Cantori teoreemi I.4.9 põhjal kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni ühtlasest pidevusest leidub reaalarv $\delta_2 > 0$ nii, et

$$P, P' \in \mathcal{A},\ d(P, P') < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |f(P) - f(P')| < \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{D})}.$$

Kui nüüd $\Delta(T) < \frac{\delta_2}{\sqrt{2}}$, siis mis tahes $(i,j) \in \check{\Gamma}$ ja mis tahes $P, P' \in \mathcal{D}_{ij}$ korral $d(P, P') < \delta_2$ (PÕHJENDADA!) ning seega $\omega_{ij}(\widehat{f}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{D})}$. Niisiis, kui $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{\sqrt{2}}\}$, siis

$$S_{\widehat{f}}(T) - s_{\widehat{f}}(T) < 2M\,\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{D})}\,\mu(\mathcal{D}) = \varepsilon,$$

nagu soovitud. □

2.5. Integraal üle nullmõõduga hulga

Teoreem 2.9. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes nullmõõduga hulk ning olgu $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Siis funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

TÕESTUS. Olgu ristkülik $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Me kasutame standardseid tähistusi: kõneldes ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisist T, mõistame me selle all jaotusviisi, mis on määratud punktidega $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ ja $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ $(m, n \in \mathbb{N})$; kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$ ja $\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Lisaks tähistame $\Gamma := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ ja $\widehat{\Gamma} := \{(i, j) \in \Gamma\colon \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing\}$.

Olgu funktsioon $\widehat{f}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ defineeritud valemiga (2.1) ning olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et kui ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T rahuldab tingimust $\Delta(T) < \delta$ (meenutame, et $\Delta(T)$ tähistab jaotusviisi T osaristkülikute maksimaalset küljepikkust), siis mis tahes sellele jaotusviisile vastav funktsiooni $\widehat{f}$ Riemanni summa σ rahuldab tingimust $|\sigma| < \varepsilon$.

Olgu T ristküliku $\mathcal{D}$ suvaline jaotusviis ning olgu

$$P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Tähistame $\sigma := \sum_{(i,j)\in\Gamma} \widehat{f}(P_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$. Funktsiooni f tõkestatuse tõttu on ka funktsioon $\widehat{f}$ tõkestatud, s.t. leidub reaalarv $M > 0$ nii, et $|\widehat{f}(P)| \leqslant M$ iga $P \in \mathcal{D}$ korral. Seega, arvestades, et $\widehat{f}(P_{ij}) = 0$ iga $(i, j) \in \Gamma \backslash \widehat{\Gamma}$ korral,

$$|\sigma| = \Bigg|\sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} \widehat{f}(P_{ij})\Delta x_i \Delta y_j\Bigg| \leqslant \sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} |\widehat{f}(P_{ij})|\Delta x_i \Delta y_j \leqslant M \sum_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = M S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T).$$

Kuna $\mathcal{A}$ on nullmõõduga hulk, s.t. $\iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = 0$, siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Eelnevast näeme, et kui jaotusviis T rahuldab tingimust $\Delta(T) < \delta$, siis mis tahes punktide valiku (2.15) korral integraalsumma σ rahuldab tingimust $|\sigma| < \varepsilon$, nagu soovitud. $\square$

Siinkohal on sobilik juhtida tähelepanu jaotise 3.1 lõpus tõestatavale järeldusele 3.3 (teoreemidest 2.9 ja 3.1, (b)), mis ütleb, et kui muuta integreeruva funktsiooni väärtusi nullmõõduga hulgal, jääb see "muudetud" funktsioon endiselt integreeruvaks ning selle "muudetud" funktsiooni integraali väärtus jääb samaks, mis esialgsel.

§ 3. Kahekordse integraali omadusi

Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y) = f(P)$ määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Järgides eelmiste paragrahvide tähistusi, tähistame tähega T ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

kus $m, n \in \mathbb{N}$ ning

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1},$$

s.t. Δx_i ja Δy_j on osaristküliku $\mathcal{D}_{ij}$ külgede pikkused, ning

$$\Delta(T) := \max\bigl\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\bigr\},$$

s.t. $\Delta(T)$ on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11},\ \dots,\ P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n},\ \dots\dots,\ P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1},\ \dots,\ P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \tag{3.1}$$

(s.t. kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral valime mingi punkti $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$).

Me tähistame

$$\sigma := \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \dots, P_{1n}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{mn}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

s.t. $\sigma = \sigma_f$ on funktsiooni f integraalsumma (ehk Riemanni summa), mis vastab ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T ja punktide valikule (3.1).

Kui funktsioon $u = f(x, y) = f(P)$ on tõkestatud ristkülikus $\mathcal{D}$, siis tähistame kõikide $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$M_{ij} := M_{ij}(f) := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := m_{ij}(f) := \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P)$$

ja

$$\omega_{ij} := \omega_{ij}(f) := M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) = \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} \bigl(f(P) - f(Q)\bigr)$$

ning

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \qquad \text{ja} \qquad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j,$$

s.t. $S(T) = S_f(T)$ ja $s(T) = s_f(T)$ on vastavalt funktsiooni f Darboux' ülemsumma ja Darboux' alamsumma, mis vastavad ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisile T.

Hulgas $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ määratud kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y) = f(P)$ korral defineerime funktsiooni $\widehat{f}\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ võrdustega

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{A}. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud aritmeetiliste tehetega

Teoreem 3.1. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = f(x,y) = f(P)$ ja $v = g(x,y) = g(P)$ integreeruvad hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ ning olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siis*

(a) *korrutis αf on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy;$$

(b) *funktsioonide f ja g summa $f+g$ ja vahe $f-g$ on integreeruvad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy;$$

(c) *funktsioon $\alpha f + \beta f$ on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy;$$

(d) *funktsioonide f ja g korrutis fg on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$.*

Omadustele (a), (b) (summa kohta) ja (c) teoreemist 3.1 viidatakse vastavalt kui kahekordse integraali *homogeensusele, aditiivsusele* ja *lineaarsusele.*

Enne teoreemi 3.1 tõestamist toome ära ühe olulise järelduse tema väitest (a).

Järeldus 3.2. *Mõõtuvas hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ määratud konstantne kahe muutuja funktsioon $f(x,y) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ on integreeruv selles hulgas, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha\,dx\,dy = \alpha\,\mu(\mathcal{A})$$

(sümbol $\mu(\mathcal{A})$ tähistab hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõõtu ehk pindala).

TÕESTUS. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Antud juhul $\widehat{f} = \alpha\,\chi_{\mathcal{A}}$ ristkülikus $\mathcal{D}$. Hulga $\mathcal{A}$ mõõtuvuse tõttu tema karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{A}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, seega teoreemi 3.1 väite (a) põhjal ka funktsioon $\alpha\,\chi_{\mathcal{A}} = \widehat{f}$ on integreeruv selles ristkülikus, s.t. funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejuures

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{A}} \alpha\,dx\,dy &= \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \alpha\,\chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy = \alpha\,\mu(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

□

TEOREEMI 3.1 TÕESTUS. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Tähistame

$$I := I_f := \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{ja} \qquad I_g := \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

(a). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b]\times[c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ning mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni αf integraalsumma $\sigma_{\alpha f}$ korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - \alpha I\right| = |\alpha|\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I\right| \\ &= |\alpha|\,\left|\sigma_f - I\right|.\end{aligned}$$

Juhul, kui $\alpha = 0$, on järelduse väite kehtivus ilmne. Eeldame järgnevas, et $\alpha \neq 0$. Siis funktsiooni f integreeruvuse tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sigma_f - I\right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|},$$

aga nüüd võrratuse $\Delta(T) < \delta$ kehtides $\left|\sigma_{\alpha f} - \alpha I\right| < |\alpha|\,\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$, nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A} = \mathcal{D}$). Sel juhul, arvestades, et funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$, ülaltõestatu põhjal funktsioon $\alpha\widehat{f} = \widehat{\alpha f}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, aga see tähendab, et funktsioon αf on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejuures

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \alpha\widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(b). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ning mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni $f \pm g$ integraalsumma $\sigma_{f\pm g}$ korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \bigl|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\bigr| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned}
\bigl|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\bigr| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bigl(f(P_{ij}) \pm g(P_{ij})\bigr)\,\Delta x_i\,\Delta y_j - (I_f \pm I_g)\right| \\
&= \left|\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_f\right) \pm \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_g\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_f\right| + \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j - I_g\right| \\
&= \bigl|\sigma_f - I_f\bigr| + \bigl|\sigma_g - I_g\bigr|.
\end{aligned}$$

Funktsioonide f ja g integreeruvuse tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad \bigl|\sigma_f - I_f\bigr| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad \Delta(T) < \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \bigl|\sigma_g - I_g\bigr| < \frac{\varepsilon}{2};$$

niisiis võrratuse $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ kehtides $\bigl|\sigma_{f\pm g} - (I_f \pm I_g)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A} = \mathcal{D}$). Sel juhul, arvestades, et funktsioonide f ja g integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab vastavalt funktsioonide $\widehat{f}$ ja $\widehat{g}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$, ülaltõestatu põhjal funktsioon $\widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f+g}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, aga see tähendab, et funktsioon $f+g$ on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejuures

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{A}} \bigl(f(x,y) \pm g(x,y)\bigr)\,dx\,dy &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \bigl(\widehat{f}(x,y) \pm \widehat{g}(x,y)\bigr)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{g}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

nagu soovitud.

(c). Väite (a) põhjal on funktsioonid αf ja βg integreeruvad hulgas $\mathcal{A}$, seega väite (b) põhjal on ka summa $\alpha f + \beta g$ integreeruv hulgas $\mathcal{A}$; seejures

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{A}} \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,dx\,dy &= \iint\limits_{\mathcal{A}} \alpha f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{A}} \beta g(x,y)\,dx\,dy \\ &= \alpha \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

(d). Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab teoreemi 1.6 põhjal (vt märkust 1.2) väite tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(fg)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T, mis tahes $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$ ning mis tahes $P, Q \in \mathcal{D}_{ij}$ korral

$$\begin{aligned}f(P)\,g(P) - f(Q)\,g(Q) &= f(P)\,\big(g(P) - g(Q)\big) + g(Q)\,\big(f(P) - f(Q)\big) \\ &\leqslant |f(P)|\,\big|g(P) - g(Q)\big| + |g(Q)|\,\big|f(P) - f(Q)\big| \\ &\leqslant L_f\,\omega_{ij}(g) + L_g\,\omega_{ij}(f),\end{aligned}$$

kus $L_f := \sup_{P\in\mathcal{D}} |f(P)|$ ja $L_g := \sup_{P\in\mathcal{D}} |g(P)|$ (märgime, et funktsioonid f ja g on teoreemi 1.1 põhjal tõkestatud), järelikult $\omega_{ij}(fg) \leqslant L_f\,\omega_{ij}(g) + L_g\,\omega_{ij}(f)$. Seega

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(fg)\,\Delta x_i\,\Delta y_j \leqslant L_f \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(g)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + L_g \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j.$$

Eeldades üldisust kitsendamata, et $L_f, L_g \neq 0$ (vastasel korral oleks f või g nullfunktsioon ning seega ka nende korrutis oleks nullfunktsioon), leiduvad funktsioonide f ja g integreeruvuse tõttu teoreemi 1.6 põhjal (vt märkust 1.2) reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2\,L_g}$$

ja

$$\Delta(T) < \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(g)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2\,L_f}.$$

Niisiis, kui $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(fg)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < L_f\,\frac{\varepsilon}{2\,L_f} + L_g\,\frac{\varepsilon}{2\,L_g} = \varepsilon.$$

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A} = \mathcal{D}$). Sel juhul, arvestades, et funktsioonide f ja g integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab vastavalt funktsioonide $\widehat{f}$ ja $\widehat{g}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$, ülaltõestatu põhjal funktsioon $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{fg}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, aga see tähendab, et funktsioon fg on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$. □

Märkus 3.1. Teoreemi 3.1 väidete (a), (b) ja (d) tõestusi saanuks lühendada juhtude, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ ning kus see võrdus ei tarvitse kehtida, eraldi vaatlemise arvelt. Nimelt, nende väidete tõestusteks võinuksime järgida tõestust juhul $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, kuid võtta funktsioonide αf, $f+g$ ja fg rolli vastavalt funktsioonid $\widehat{\alpha f} = \alpha\widehat{f}$, $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$ ja $\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Selle punkti lõpetuseks tõestame jaotise 2.5 lõpus väljareklaamitud järelduse 3.3 (teoreemidest 2.9 ja 3.1, (b)), mis ütleb, et kui muuta integreeruva funktsiooni väärtusi nullmõõduga hulgal, jääb see "muudetud" funktsioon endiselt integreeruvaks ning selle "muudetud" funktsiooni integraali väärtus jääb samaks, mis esialgsel.

Järeldus 3.3. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk, olgu $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ integreeruv funktsioon ning olgu $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ (Jordani mõttes) nullmõõduga hulk ja $g\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, kusjuures $g(P) = f(P)$ iga $P \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_0$ korral. Siis ka funktsioon g on integreeruv, kusjuures $\iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy$.*

Tõestus. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Defineerime funktsiooni $h_0 := (g-f)|_{\mathcal{A}_0}$ ning funktsioonid $\widehat{f}, \widehat{g}, \widehat{h}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vastavalt võrdustega (2.1) ja

$$\widehat{g}(P) = \begin{cases} g(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{A}, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \widehat{h}(P) = \begin{cases} h(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}_0, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{A}_0. \end{cases}$$

Teoreemi 2.9 põhjal on funktsioon h_0 integreeruv hulgas $\mathcal{A}_0$, s.t. funktsioon $\widehat{h}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures $\iint_{\mathcal{D}} \widehat{h}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}_0} h_0(x,y)\,dx\,dy = 0$. Kuna ka funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, siis teoreemi 3.1, (b), põhjal on funktsioon $\widehat{g} = \widehat{f} + \widehat{h}$ integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, s.t. funktsioon g on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{\mathcal{D}} \widehat{g}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{D}} \widehat{h}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

□

3.2. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud järjestusega

Teoreem 3.4. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = f(x,y) = f(P)$ ja $v = g(x,y) = g(P)$ integreeruvad hulgas $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$.*

(a) *Kui* $f(P) \geqslant 0$ *iga* $P \in \mathcal{A}$ *korral, siis*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0.$$

(b) *Kui* $f(P) \geqslant g(P)$ *iga* $P \in \mathcal{A}$ *korral, siis*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy. \tag{3.3}$$

(c) *Funktsiooni* f *absoluutväärtus* $|f|$ *(s.t. funktsioon* $w = |f(x,y)| = |f(P)|$*) on integreeruv hulgas* $\mathcal{A}$*, kusjuures*

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} \bigl|f(x,y)\bigr|\,dx\,dy. \tag{3.4}$$

(d) (Kahekordse integraali keskväärtusteoreem.) *Olgu hulk* $\mathcal{A}$ *Jordani mõttes mõõtuv. Siis leidub arv* $\gamma \in \mathbb{R}$ *nii, et*

$$\inf_{P\in\mathcal{A}} f(P) =: \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta := \sup_{P\in\mathcal{A}} f(P) \tag{3.5}$$

ja

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \gamma\,\mu(\mathcal{A}) \tag{3.6}$$

($\mu(\mathcal{A})$ *tähistab hulga* $\mathcal{A}$ *Jordani mõõtu); kui hulk* $\mathcal{A}$ *on kinnine ja sidus ning funktsioon* f *on pidev hulgas* $\mathcal{A}$*, siis leidub punkt* $C \in \mathcal{A}$ *nii, et*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = f(C)\,\mu(\mathcal{A}). \tag{3.7}$$

Omadustele (a) ja (b) teoreemist 3.4 viidatakse kui kahekordse integraali *monotoonsusele.*

TEOREEMI 3.4 TÕESTUS. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$.

(a). Kui $f(P) \geqslant 0$ iga $P \in \mathcal{A}$ korral, siis funktsiooni $\widehat{f}$ kõik Darboux' summad on mittenegatiivsed, järelikult

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy = \inf_{T} S_{\widehat{f}}(T) \geqslant 0,$$

kus infiimum on võetud üle ristküliku $\mathcal{D}$ kõikvõimalike jaotusviiside T osaristkülikuteks ja $S_{\widehat{f}}(T)$ tähistab jaotusviisile T vastavat funktsiooni $\widehat{f}$ Darboux' ülemsummat.

(b). Kui $f(P) \geqslant g(P)$ iga $P \in \mathcal{A}$ korral, siis $f(P) - g(P) \geqslant 0$ iga $P \in \mathcal{A}$ korral, seega teoreemi 3.1, (b), ja väite (a) põhjal

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} \big(f(x,y) - g(x,y)\big)\,dx\,dy \geqslant 0,$$

millest järeldub (3.3).

(c). Veendume kõigepealt, et funktsioon $|f|$ on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$.

Vaatleme alguses juhtu, kus $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (s.t. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab teoreemi 1.6 põhjal (vt märkust 1.2) funktsiooni $|f|$ integreeruvuseks hulgas $\mathcal{A}$ leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviis T nii, et

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\big(|f|\big)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Selleks märgime, et ristküliku $\mathcal{D}$ mis tahes jaotusviisi T ning mis tahes $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\omega_{ij}\big(|f|\big) = \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{ij}} \Big(\big|f(P)\big| - \big|f(Q)\big|\Big) \leqslant \sup_{P,Q\in\mathcal{D}_{ij}} \big|f(P) - f(Q)\big| = \omega_{ij}(f). \tag{3.9}$$

Funktsiooni f integreeruvuse tõttu saame teoreemi 1.6 põhjal (vt märkust 1.2) leida ristküliku $\mathcal{D}$ jaotusviisi T nii, et

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(f)\,\Delta x_i\,\Delta y_j < \varepsilon,$$

aga võrratuse (3.9) põhjal rahuldab selline jaotusviis T ka tingimust (3.8).

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\mathcal{A} = \mathcal{D}$). Sel juhul, arvestades, et funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{A}$ tähendab funktsiooni $\widehat{f}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$, ülaltõestatu põhjal funktsioon $\big|\widehat{f}\big| = \widehat{|f|}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, aga see tähendab, et funktsioon $|f|$ on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$.

Võrratus (3.4) on samaväärne võrratusteahelaga

$$-\iint\limits_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy. \tag{3.10}$$

Selle ahela esimene võrratus on samaväärne võrratusega

$$-\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} \big(-f(x,y)\big)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy,$$

mis, samuti nagu ka võrratusteahela (3.10) teine võrratus, järeldub väitest (b), sest

$$-f(x,y) \leqslant \big|f(x,y)\big| \quad \text{ja} \quad f(x,y) \leqslant \big|f(x,y)\big| \qquad \text{iga } (x,y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

(d). Väite tõestus sarnaneb ühe muutuja funktsiooni Riemanni integraali keskväärtusteoreemi tõestusega. Järelduse 3.2 ja väite (b) põhjal

$$\alpha\,\mu(\mathcal{A}) = \iint\limits_{\mathcal{A}} \alpha\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{\mathcal{A}} \beta\,dx\,dy = \beta\,\mu(\mathcal{A}).$$

Siit näeme, et kui $\mu(\mathcal{A}) = 0$, siis ka $\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$ ning seega sobib arvu γ rolli mis tahes arv arvude α ja β vahelt; kui aga $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$, siis tähistades

$$\gamma := \frac{\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy}{\mu(\mathcal{A})},$$

kehtivad (3.5) ja (3.6).

Eeldame nüüd lisaks, et hulk $\mathcal{A}$ on kinnine ja sidus ning et funktsioon f on pidev hulgas $\mathcal{A}$. Rahuldagu arv $\gamma \in \mathbb{R}$ tingimusi (3.5) ja (3.6) (sellise arvu γ olemasolu oleme juba tõestanud). Kuna hulk $\mathcal{A}$ on kinnine, siis Weierstrassi teoreeemi I.4.8 põhjal leiduvad punktid $A, B \in \mathcal{A}$ nii, et

$$f(A) = \inf_{P\in\mathcal{A}} f(P) = \alpha \quad \text{ja} \quad f(B) = \sup_{P\in\mathcal{A}} f(P) = \beta.$$

Kuna hulk $\mathcal{A}$ on sidus, siis Bolzano–Cauchy teoreemi I.4.6 põhjal, arvestades, et $f(A) \leqslant \gamma \leqslant f(B)$, leidub punkt $C \in \mathcal{A}$ nii, et $f(C) = \gamma$, aga nüüd kehtib (3.7). □

3.3. Kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi

Teoreem 3.5. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk, olgu funktsioon $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ integreeruv (hulgas $\mathcal{A}$) ning olgu $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuv alamhulk. Siis funktsioon f on integreeruv ka hulgas $\mathcal{C}$ (s.t. ahend $f|_{\mathcal{C}}$ on integreeruv (hulgas $\mathcal{C}$)).*

Tõestus. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Defineerime funktsioonid $\widehat{f}, \widehat{f_{\mathcal{C}}}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ võrdustega

$$\widehat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{A}, \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \widehat{f_{\mathcal{C}}}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{C}. \end{cases}$$

Siis funktsiooni f integreeruvus hulgas $\mathcal{C}$ tähendab funktsiooni $\widehat{f_{\mathcal{C}}}$ integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$. Kuna funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A}$, siis funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$; kuna hulk $\mathcal{C}$ on Jordani mõttes mõõtuv, siis tema karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathcal{C}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$; seega teoreemi 3.1, (d), põhjal on korrutis $\widehat{f}\chi_{\mathcal{C}}$ integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$. Teoreemi tõestuseks jääb nüüd vaid märkida, et $\widehat{f_{\mathcal{C}}} = \widehat{f}\chi_{\mathcal{C}}$. □

Teoreem 3.6 (kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi)**.** *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulgad, kusjuures nende ühisosa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ Jordani mõõt on null, ning olgu funktsioon $f\colon \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ integreeruv hulkades $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Siis funktsioon f on integreeruv ka ühendis $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, kusjuures*

$$\iint\limits_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

TÕESTUS. Kuna hulgad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on tõkestatud, siis ka ühend $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ on tõkestatud, seega leidub ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$. Kõikjal tõestuses kasutame järgnevat tähistust: kui $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, siis funktsioon $\widehat{f}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega

$$\widehat{f}_{\mathcal{C}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kui } (x,y) \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{kui } (x,y) \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{C}. \end{cases}$$

Kõneldes funktsiooni $\widehat{f}_{\mathcal{C}}$ integreeruvusest, peame me silmas tema integreeruvust ristkülikus $\mathcal{D}$. Funktsiooni f integreeruvus ühendis $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tähendab selle tähistuse kohaselt funktsiooni $\widehat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$ integreeruvust (ristkülikus $\mathcal{D}$).

Paneme tähele, et $\widehat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \widehat{f}_{\mathcal{A}} + \widehat{f}_{\mathcal{B}} - \widehat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$. Kuna funktsioonid $\widehat{f}_{\mathcal{A}}$, $\widehat{f}_{\mathcal{B}}$ ning $\widehat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ on integreeruvad (sest funktsiooni f integreeruvus hulkades $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tähendab vastavalt funktsioonide $\widehat{f}_{\mathcal{A}}$ ja $\widehat{f}_{\mathcal{B}}$ integreeruvust ning funktsioon $\widehat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ on integreeruv teoreemi 2.9 põhjal), siis funktsioon $\widehat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$ on integreeruv (sest teoreemi 3.1, (b), põhjal on integreeruvate funktsioonide summa ja vahe integreeruvad), s.t. funktsioon f on integreeruv hulgas $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Seejuures (jällegi teoreemi 3.1, (b), põhjal)

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \big(\widehat{f}_{\mathcal{A}}(x,y) + \widehat{f}_{\mathcal{B}}(x,y) - \widehat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x,y)\big)\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy, \end{aligned}$$

sest teoreemi 2.9 põhjal $\iint_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$. □

3.4. Jordani mõttes mõõtuvate hulkade põhiomadused

3.4.1. Jordani mõttes mõõtuvate hulkade omadused, mis on seotud hulgateoreetiliste tehetega

Lause 3.7. *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuvad hulgad. Siis ka nende hulkade ühend $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, ühisosa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ja hulgateoreetiline vahe $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuvad. Seejuures*

(a) *kui $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, siis $\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B})$;*

(b) *kui $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, siis $\mu(\mathcal{A}) \leqslant \mu(\mathcal{B})$;*

(c) *kui $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, siis $\mu(\mathcal{B} \backslash \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$;*

(d) *$\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leqslant \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B})$.*

Omadustele (a)–(d) viidatakse vastavalt kui Jordani mõõdu *aditiivsusele, monotoonsusele, subtraktiivsusele* ja *subaditiivsusele.*

Lause 3.7 tõestus. Olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$. Kuna $\chi_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}}\chi_{\mathcal{B}}$, siis funktsioon $\chi_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$ (sest hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ mõõtuvus tähendab vastavalt karakteristlike funktsioonide $\chi_{\mathcal{A}}$ ja $\chi_{\mathcal{B}}$ integreeruvust ning teoreemi 3.1, (d), põhjal on integreeruvate funktsioonide korrutis integreeruv); see aga tähendab, et hulk $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ on Jordani mõttes mõõtuv.

Edasi, kuna $\chi_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{D}} - \chi_{\mathcal{A}}$, siis funktsioon $\chi_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}}$ on integreeruv (sest teoreemi 3.1, (b), põhjal on integreeruvate funktsioonide vahe integreeruv), see aga tähendab, et hulk $\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}$ on mõõtuv. Siit järeldub, et ka hulk $\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}$ on mõõtuv.

Kuna $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{D}\setminus\mathcal{B})$, siis eelneva põhjal on hulk $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$ mõõtuv (sest vahe $\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}$ on mõõtuv ning mõõtuvate hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}$ ühisosa on mõõtuv).

Lõpuks, De Morgani valemite põhjal

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \big(\mathcal{D}\setminus(\mathcal{D}\setminus\mathcal{A})\big) \cup \big(\mathcal{D}\setminus(\mathcal{D}\setminus\mathcal{B})\big) = \mathcal{D}\setminus\big((\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}) \cap (\mathcal{D}\setminus\mathcal{B})\big),$$

seega eelneva põhjal on hulk $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mõõtuv.

Tõestame nüüd väited (a)–(d).

(a). Olgu $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Siis $\chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}}$ ning seega teoreemi 3.1, (b), põhjal

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \big(\chi_{\mathcal{A}}(x,y) + \chi_{\mathcal{B}}(x,y)\big)\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{B}}(x,y)\,dx\,dy = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}).\end{aligned}$$

(b) ja (c). Olgu $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Kuna $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$, kusjuures $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}) = \varnothing$, siis väite (a) põhjal

$$\mu(\mathcal{B}) = \mu\big(\mathcal{A} \cup (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})\big) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}) \geqslant \mu(\mathcal{A}).$$

Eelnevast näeme ka, et $\mu(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$.

(d). Kuna $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$, kusjuures $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}) = \varnothing$, ja $\mathcal{B}\setminus\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, siis väidete (a) ja (b) põhjal

$$\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mu\big(\mathcal{A} \cup (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})\big) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}) \leqslant \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}).$$

□

Ülesanne 3.1. Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuvad hulgad. Tõestada, et ka hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ *sümmeetriline vahe* $\mathcal{A}\triangle\mathcal{B} := (\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}) \cup (\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$ on Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures $|\mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{B})| \leqslant \mu(\mathcal{A}\triangle\mathcal{B})$.

Lause 2.3 tõestus, mis toetub lausele 3.7. Olgu $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^2$ $(n \in \mathbb{N})$ nullmõõduga hulgad, (s.t. Jordani mõttes mõõtuvad hulgad, mille Jordani mõõt on null). Lause 3.7 põhjal on ka ühend $\mathcal{A} := \bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures Jordani mõõdu subaditiivsuse (lause 3.7, (d)) põhjal $\mu(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(\mathcal{A}_k) = 0$. Kuna hulga Jordani mõõt ei saa olla negatiivne, siis järeldub siit, et $\mu(\mathcal{A}) = 0$. □

§ 4. Teine vaatenurk Jordani mõõdule ja kahekordsele integraalile

4.1. Jordani mõõdu alternatiivne (samaväärne) definitsioon

Tähistame iga $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ korral

$$\mathfrak{C}_n := \Big\{ I \times J \subset \mathbb{R}^2 \colon I = \big[\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n}\big] \text{ ja } J = \big[\tfrac{j-1}{2^n}, \tfrac{j}{2^n}\big] \text{ mingite } i, j \in \mathbb{Z} \text{ korral} \Big\}.$$

Kogumi $\mathfrak{C}_n$ hulkadele viitame kui *diaadilistele ruutudele* küljepikkusega $\frac{1}{2^n}$.

Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk. Tähistame iga $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ korral

$$\widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n \colon \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing\} \quad \text{ja} \quad \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n \colon \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\},$$

ning

$$\widehat{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C} \quad \text{ja} \quad \check{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C}.$$

Sümbolitega $S(\widehat{\mathcal{A}}_n)$ ja $S(\check{\mathcal{A}}_n)$ tähistame vastavalt hulkade $\widehat{\mathcal{A}}_n$ ja $\check{\mathcal{A}}_n$ pindalad: need hulgad esituvad paarikaupa lõikumatute sisemustega (diaadiliste) ruutude ühenditena; nende hulkade pindalad defineerime kui vastavate ruutude pindalade summad; ruudu pindala defineerime kui tema küljepikkuse ruudu. Arvestades, et hulgad $\widehat{\mathcal{A}}_n$ ja $\check{\mathcal{A}}_n$ on vastavalt kogumite $\widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ ja $\check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ ruutude ühendid, kusjuures nimetatud kogumite ruutude sisemused on paarikaupa lõikumatud ning nende ruutude küljepikkused on $\frac{1}{2^n}$ ja pindalad seega $\frac{1}{2^{2n}}$, saame, et

$$\begin{aligned} S(\widehat{\mathcal{A}}_n) &= \frac{1}{2^{2n}} \times \text{ruutude arv kogumis } \widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}), \\ S(\check{\mathcal{A}}_n) &= \frac{1}{2^{2n}} \times \text{ruutude arv kogumis } \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\widehat{\mathcal{A}}_0 \supset \widehat{\mathcal{A}}_1 \supset \widehat{\mathcal{A}}_2 \supset \cdots \quad \text{ja} \quad \check{\mathcal{A}}_0 \subset \check{\mathcal{A}}_1 \subset \check{\mathcal{A}}_2 \subset \cdots \tag{4.1}$$

ja

$$S(\widehat{\mathcal{A}}_0) \geqslant S(\widehat{\mathcal{A}}_1) \geqslant S(\widehat{\mathcal{A}}_2) \geqslant \cdots \quad \text{ja} \quad S(\check{\mathcal{A}}_0) \leqslant S(\check{\mathcal{A}}_1) \leqslant S(\check{\mathcal{A}}_2) \leqslant \cdots . \tag{4.2}$$

Ülesanne 4.1. Tõestada sisalduvused (4.1) ja võrratused (4.2).

Seega eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{n\to\infty} S(\widehat{\mathcal{A}}_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} S(\widehat{\mathcal{A}}_n) =: \mu^*(\mathcal{A}) \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} S(\check{\mathcal{A}}_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} S(\check{\mathcal{A}}_n) =: \mu_*(\mathcal{A}).$$

Neid piirväärtusi (ehk, teisisõnu, rajasid) $\mu^*(\mathcal{A})$ ja $\mu_*(\mathcal{A})$ nimetatakse vastavalt hulga $\mathcal{A}$ *Jordani välismõõduks* ja hulga $\mathcal{A}$ *Jordani sisemõõduks.*

Teoreem 4.1. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ning olgu ristkülik $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ selline, et $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$. Siis*

(a) $\mu^*(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$, *s.t. hulga $\mathcal{A}$ Jordani välismõõt $\mu^*(\mathcal{A})$ on võrdne Darboux' ülemise integraaliga $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$ tema karakteristlikust funktsioonist $\chi_{\mathcal{A}}$ üle ristküliku $\mathcal{D}$;*

(b) $\mu_*(\mathcal{A}) = \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$, *s.t. hulga $\mathcal{A}$ Jordani sisemõõt $\mu_*(\mathcal{A})$ on võrdne Darboux' alumise integraaliga $\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$ tema karakteristlikust funktsioonist $\chi_{\mathcal{A}}$ üle ristküliku $\mathcal{D}$.*

TEOREEMI 4.1 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Järgnev teoreem on vahetu järeldus Jordani mõttes mõõtuvuse definitsioonist 2.3 ja teoreemist 4.1.

Teoreem 4.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *hulk $\mathcal{A}$ on Jordani mõttes mõõtuv;*

(ii) *hulk $\mathcal{A}$ on* kvadreeruv, *s.t. tema Jordani sisemõõt $\mu_*(\mathcal{A})$ ja Jordani välismõõt $\mu^*(\mathcal{A})$ on võrdsed: $\mu_*(\mathcal{A}) = \mu^*(\mathcal{A})$.*

Seejuures (s.t. hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuvuse juhul) hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõõt $\mu(\mathcal{A})$ (ehk, teisisõnu, pindala $S_{\mathcal{A}}$) on võrdne tema Jordani sisemõõdu $\mu_*(\mathcal{A})$ ja Jordani välismõõdu $\mu^*(\mathcal{A})$ ühise väärtusega:

$$S_{\mathcal{A}} = \mu(\mathcal{A}) = \mu_*(\mathcal{A}) = \mu^*(\mathcal{A}). \tag{4.3}$$

Jaotise lõpetuseks demonstreerime veel üht võimalust Jordani välis- ja sisemõõdu defineerimiseks (loomulikult eelnevaga samaväärsel moel). Selleks toome kõigepealt sisse ristküliksumma ja selle pindala mõisted.

Ristküliksumma all mõistame me järgnevas (koordinaat)ristkülikute lõplikku ühendit. Teisisõnu, ristküliksumma on hulk $\mathcal{Q}$ ruumis $\mathbb{R}^2$, mis esitub kujul

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \times [c_j, d_j],$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ning $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, \in \mathbb{R}$, kusjuures $a_j < b_j$ ja $c_j < d_j$ iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral.

Iga ristküliksumma $\mathcal{Q}$ esitub paarikaupa lõikumatute sisemustega ristkülikute lõpliku ühendina. Ristküliksumma $\mathcal{Q}$ *pindala* $S(\mathcal{Q})$ defineeritakse kui niisuguste (paarikaupa lõikumatute sisemustega) ristkülikute pindalade summa. (Ristküliku $\mathcal{R} := [a, b] \times [c, d]$ pindala $S(\mathcal{R})$ defineeritakse kui tema külgede pikkuste korrutis: $S(\mathcal{R}) = (b - a)\,(d - c)$.)

Teoreem 4.3. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk.*

(a) *Hulga $\mathcal{A}$ Jordani välismõõt on seda hulka sisaldavate ristküliksummade pindalade hulga alumine raja:*

$$\mu^*(\mathcal{A}) = \inf\Big\{ S(\mathcal{Q})\colon \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2 \text{ on ristküliksumma, } \mathcal{Q} \supset \mathcal{A} \Big\}. \tag{4.4}$$

(b) *Hulga $\mathcal{A}$ Jordani sisemõõt on selles hulgas sisalduvate ristküliksummade pindalade hulga ülemine raja; seejuures, kui hulk $\mathcal{A}$ ei sisalda ühtegi ristküliksummat (niisugune olukord leiab aset parajasti siis, kui hulga $\mathcal{A}$ sisemus $\mathcal{A}^\circ$ on tühi hulk), on hulga $\mathcal{A}$ Jordani sisemõõt võrdne nulliga:*

$$\mu_*(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \textit{kui } \mathcal{A}^\circ = \varnothing; \\ \sup\Big\{S(\mathcal{Q})\colon \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2 \textit{ on ristküliksumma, } \mathcal{Q} \subset \mathcal{A}\Big\}, & \textit{kui } \mathcal{A}^\circ \neq \varnothing. \end{cases} \tag{4.5}$$

Teoreem 4.3 esitab veel ühe viisi Jordani välis- ja sisemõõdu defineerimiseks (eelnevaga samaväärsel moel): tõkestatud hulga $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani välis- ja sisemõõt defineeritakse kirjanduses sageli kui vastavalt võrduste (4.4) ja (4.4) parem pool.

TEOREEMI 4.3 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Märkus 4.1. Kui me hakkaksime defineerima tõkestatud hulga $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ pindala $S_\mathcal{A}$ lähtudes oma eelmatemaatilistest arusaamadest, siis oleks loomulik nõuda, et iga hulgas $\mathcal{A}$ sisalduva ristküliksumma $\check{\mathcal{Q}}$ ja iga hulka $\mathcal{A}$ sisaldava ristküliksumma $\hat{\mathcal{Q}}$ korral $S_{\check{\mathcal{Q}}} \leqslant S_\mathcal{A} \leqslant S_{\hat{\mathcal{Q}}}$ (sümbolid $S_{\check{\mathcal{Q}}}$ ja $S_{\hat{\mathcal{Q}}}$ tähistavad vastavalt ristküliksummade $\check{\mathcal{Q}}$ ja $\hat{\mathcal{Q}}$ pindalasid – ristküliksumma pindala on meil "loomulikul viisil" defineeritud). Arvuhulga rajade definitsiooni põhjal peaksid seega kehtima võrratused $\mu_*(\mathcal{A}) \leqslant S_\mathcal{A} \leqslant \mu^*(\mathcal{A})$, s.t. pindala $S_\mathcal{A}$ peaks olema mingi arv hulga $\mathcal{A}$ Jordani sisemõõdu $\mu_*(\mathcal{A})$ ja välismõõdu $\mu^*(\mathcal{A})$ vahel. Jääb lahtiseks küsimus: millise arvu väärtuste $\mu_*(\mathcal{A})$ ja $\mu^*(\mathcal{A})$ vahelt me ikkagi peaksime pindalaks $S_\mathcal{A}$ valima? Igati loomulik on *"to play it safe"* ning defineerida pindala $S_\mathcal{A}$ ainult selliste hulkade $\mathcal{A}$ jaoks, mille Jordani sisemõõt ja välismõõt on võrdsed, kusjuures niisugusel juhul defineerida hulga $\mathcal{A}$ pindala kui nende sisemõõdu ja välismõõdu ühine väärtus. Teoreem 4.2 ütleb, et just niimoodi (tõsi küll, implitsiitselt) me hulga $\mathcal{A}$ pindala defineerisimegi.

Kirjanduses tavaliselt defineeritaksegi tõkestatud hulga $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuvus kui tema *kvadreeruvus* (vt teoreemi 4.2 tingimust (ii)), kusjuures hulga $\mathcal{A}$ Jordani mõõt $\mu(\mathcal{A})$ (ehk pindala $S_\mathcal{A}$) defineeritakse võrdusega (4.3).

4.2. Kahekordse integraali alternatiivne (samaväärne) definitsioon

Paljudes allikates defineeritakse kahe muutuja funktsiooni Riemanni mõttes integreeruvus ja (kahekordne) Riemanni integraal käesolevas konspektis toodust erineval moel. Selles punktis toome ära ühe niisuguse alternatiivse, kuid käesolevas konspektis tooduga samaväärse definitsiooni. Täpsemalt, eeldades, et $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ on Jordani mõttes mõõtuv hulk ning $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, defineerime me funktsiooni f R-integreeruvuse ja R-integraali temast üle hulga $\mathcal{A}$ ning näitame, et need R-integreeruvus ja R-integraal on täpselt sama, mis käesoleva peatüki paragrahvis 2 defineeritud Riemanni mõttes integreeruvus ja Riemanni integraal (üle hulga $\mathcal{A}$). Niisiis, need R-integreeruvuse ja R-integraali definitsioonid ongi üks võimalik versioon Riemanni mõttes integreeruvuse ja Riemanni integraali alternatiivsetest, kuid käesolevas konspektis tooduga samaväärsetest definitsioonidest.

Niisiis, olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuv hulk ning olgu $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Jaotame hulga $\mathcal{A}$ lõplikuks arvuks paarikaupa lõikumatute sisemustega Jordani mõttes mõõtuvateks hulkadeks $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j, \quad \text{kus } \mathcal{A}_j^\circ \cap \mathcal{A}_k^\circ = \varnothing, \text{ kui } j \neq k. \tag{4.6}$$

Hulga $\mathcal{A}$ esitusele (4.6) viitame kui hulga $\mathcal{A}$ *jaotusviisile* (4.6) ((Jordani mõttes mõõtuvateks) hulkadeks $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$). Hulkadele $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ viitame kui selle jaotusviisi hulkadele. Fikseerime iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral mingi punkti $P_j \in \mathcal{A}_j$. Summale

$$\sigma := \sigma(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n; P_1, \ldots, P_n) := \sum_{j=1}^{n} f(P_j)\, \mu(\mathcal{A}_j)$$

viitame kui funktsiooni f *R-integraalsummale* (hulgas $\mathcal{A}$), mis vastab hulga $\mathcal{A}$ jaotusviisile (4.6) ja punktide valikule $P_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Defineerimaks R-integreeruvuse ja R-integraali mõistet, on otstarbekas kõigepealt eraldi defineerida R-integraalsummade piirväärtuse mõiste. See definitsioon kasutab hulga diameetri mõistet, mis defineeriti definitsioonis 1.4.

Definitsioon 4.1. Me ütleme, et arv $I \in \mathbb{R}$ on funktsiooni f *R-integraalsummade piirväärtus* (hulgas $\mathcal{A}$), kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et hulga $\mathcal{A}$ mis tahes jaotusviisi (4.6) korral, mille hulkade diameetrid on kõik väiksemad kui δ, s.t.

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{diam} \mathcal{A}_j < \delta,$$

erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni f R-integraalsummad arvust I vähem kui ε, s.t.

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(P_j)\, \mu(\mathcal{A}_j) - I \right| < \varepsilon \quad \text{mis tahes punktide } P_j \in \mathcal{A}_j,\ j = 1, \ldots, n, \text{ korral.}$$

Definitsioon 4.2. Kui funktsiooni f R-integraalsummadel (hulgas $\mathcal{A}$) eksisteerib piirväärtus $I \in \mathbb{R}$, siis me ütleme, et funktsioon f on *R-integreeruv* (hulgas $\mathcal{A}$). Seejuures R-integraalsummade piirväärtust I nimetame me *R-integraaliks* funktsioonist f üle hulga $\mathcal{A}$ ja tähistame sümboliga $R\text{-}\int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy$:

$$R\text{-}\int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy := I.$$

Järgnev teoreem ütleb, et R-integreeruvus ja R-integraal on sama, mis Riemanni mõttes integreeruvus ja (kahekordne) Riemanni integraal; niisiis võinuksime Riemanni mõttes integreeruvuse ja (kahekordne) Riemanni integraali definitsioonina kasutada (R-integreeruvus ja R integraali) definitsiooni 4.2 (selleks pidanuksime muidugi eelnevalt defineerima hulga Jordani mõttes mõõtuvuse, näiteks tema Jordani välis- ja sisemõõdu võrduse kaudu).

Teoreem 4.4. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuv hulk ning olgu $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Siis funktsioon f on R-integreeruv hulgas $\mathcal{A}$ parajasti siis, kui ta on Riemanni mõttes integreeruv selles hulgas; seejuures (s.t. funktsiooni f R-integreeruvuse juhul) R-integraal funktsioonist f üle hulga $\mathcal{A}$ on võrdne (kahekordse) Riemanni integraaliga funktsioonist f üle hulga $\mathcal{A}$:*

$$R\text{-}\int_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teoreemi 4.4 me käesolevas kursuses ei tõesta. □

§ 5. Kahekordse integraali arvutamine

Kõikjal selles paragrahvis kasutame eelmiste paragrahvidega sarnaseid tähistusi. Muuhulgas, kui

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \tag{5.1}$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d, \tag{5.2}$$

siis tähistame kõikide $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

5.1. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku

Teoreem 5.1. *Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ integreeruv ristkülikus*

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) *Eksisteerigu iga $x \in [a, b]$ korral integraal*

$$g(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) *Eksisteerigu iga $y \in [c, d]$ korral integraal*

$$h(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d h(y)\, dy.$$

Tõestus. Tõestame ainult väite (a). Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.

Tähistame

$$I := \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy$$

ja fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et alati kui punktid (5.1) rahuldavad tingimust

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Delta x_i < \delta, \tag{5.3}$$

siis mis tahes punktide $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$, korral

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Selleks paneme tähele, et mis tahes punktide (5.1) ja (5.2) ning $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$, ja $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \dots, n$, korral

$$\begin{aligned}&\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| \\ &\qquad \leqslant \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| + \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| \Delta x_i.\end{aligned}$$

Funktsiooni f integreeruvuse tõttu ristkülikus $\mathcal{D}$ leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| I - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rahuldagu nüüd punktid (5.1) tingimust (5.3) ning olgu punktid $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$, suvalised. Kuna funktsioonid $\psi_i(y) := f(\xi_i, y)$, $i = 1, \dots, m$, on integreeruvad lõigus $[c, d]$, siis iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral leidub reaalarv $\delta_i > 0$ nii, et kui punktid (5.2) rahuldavad tingimust $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta y_j < \delta_i$, siis mis tahes $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \dots, n$, korral

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Niisiis, kui valida punktid (5.2) nii, et $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta y_j < \max\{\delta_1, \dots, \delta_m, \delta\}$, ning valida vabalt $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \dots, n$, siis

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

□

5.2. Kahekordse integraali arvutamine üle kõvertrapetsi

Teoreem 5.2. (a) *Olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x) \quad \textit{ja} \quad \beta = \beta(x), \qquad x \in [a, b],$$

pidevad lõigus $[a, b]$, *kusjuures*

$$\alpha(x) \leqslant \beta(x) \quad \textit{iga } x \in [a, b] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{A} := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in [a,b],\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\},$$

kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy, \tag{5.4}$$

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) *Olgu funktsioonid*

$$\gamma = \gamma(y) \quad \textit{ja} \quad \delta = \delta(y), \qquad y \in [c,d],$$

pidevad lõigus $[c,d]$, kusjuures

$$\gamma(y) \leqslant \delta(y) \quad \textit{iga } y \in [c,d] \textit{ korral.}$$

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{B} := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \in [c,d],\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\big\},$$

kusjuures iga $y \in [c,d]$ korral eksisteerib integraal

$$h(y) := \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx,$$

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d h(y)\,dy.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) tõestatakse analoogiliselt).

Weierstrassi teoreemi ?? põhjal leiduvad arvud $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, nii, et $c \leqslant \alpha(x) \leqslant \beta(x) \leqslant d$ iga $x \in [a,b]$ korral. Tähistame $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$; siis $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$.

Olgu funktsioon f integreeruv kõvertrapetsis $\mathcal{A}$, kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal (5.4). Siis (lk 156 valemiga (3.2) defineeritud) funktsioon $\widehat{f}$ on integreeruv ristkülikus $\mathcal{D}$, kusjuures iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

Seega teoreemi 5.1 väite (a) põhjal

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \widehat{f}(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d \widehat{f}(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,\end{aligned}$$

nagu soovitud. $\square$

5.3. Muutuja vahetus kahekordses integraalis

5.3.1. Regulaarsed teisendused ruumis $\mathbb{R}^m$

Kujutusi $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, nimetame *teisendusteks*[1] ruumis $\mathbb{R}^m$.

Paragrahvis III.1 veendusime, et teisendused $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, ja hulgas $\mathcal{U}$ määratud funktsioonide süsteemid

$$x_i = x_i(Q) = x_i(u_1, \ldots, u_m), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.5}$$

on üksüheses vastavuses: süsteem (5.5) määrab kujutuse $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, kus

$$\Phi(Q) = \big(x_1(Q), \ldots, x_m(Q)\big) \in \mathbb{R}^m, \quad Q \in \mathcal{U}; \tag{5.6}$$

teiselt poolt, mis tahes kujutus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ määrab ühesel viisil funktsioonid (5.5), mis rahuldavad tingimust (5.6): sellise omadusega funktsioonid (5.5) on defineeritud võrdustega

$$x_i(Q) = x_i, \quad Q \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{kus } \Phi(Q) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Edasises, viidates võrrandite süsteemile (5.5) kui teisendusele (5.5), mõistame me selle teisenduse all selle süsteemiga määratud teisendust $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$.

Definitsioon 5.1. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk. Öeldakse, et süsteemiga (5.5) määratud teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ on *regulaarne,* kui

(1) teisendus Φ on üksühene;

(2) teisendust Φ määravatel funktsioonidel (5.5) eksisteerivad hulgas $\mathcal{U}$ pidevad esimest järku osatuletised;

(3) selle teisenduse jakobiaani väärtus erineb hulgas $\mathcal{U}$ nullist, s.t.

$$\det \Phi'(Q) := \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)}(Q) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}(Q) & \ldots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m}(Q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1}(Q) & \ldots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m}(Q) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{iga } Q \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Seejuures, kui $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ ja $\mathcal{D} = \Phi[\mathcal{A}] := \{\Phi(Q)\colon Q \in \mathcal{A}\}$, siis öeldakse, et Φ teisendab hulga $\mathcal{A}$ regulaarselt hulgaks $\mathcal{D}$.

5.3.2. Üldine muutuja vahetuse valem kahekordses integraalis

Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ lahtine hulk ning olgu teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ määratud süsteemiga

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{5.7}$$

[1] Tavaliselt mõistetakse mingi hulga teisenduste all kujutusi sellest hulgast sellesse samasse hulka. Meie nimetame teisendusteks ruumis $\mathbb{R}^m$ kujutusi ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulkadest ruumi $\mathbb{R}^m$.

Tähistame

$$J(u,v) := \det \Phi'(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u.v) = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix},$$

s.t. $J(u,v)$ on selle süsteemi jakobiaan punktis (u,v).

Järgnev teoreem esitab üldise muutuja vahetuse valemi kahekordse (Riemanni) integraali jaoks.

Teoreem 5.3. *Kui*

(1) *võrranditega* (5.7) *määratud teisendus* $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ *on regulaarne;*

(2) $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ *on (Jordani mõttes) mõõtuv (tasandil* $\mathbb{R}^2$*) kinnine alamhulk;*

(3) *kahe muutuja funktsioon* $z = f(x,y)$ *on pidev kujutishulgas* $\Phi[\mathcal{A}]$ *(xy-tasandil),*

siis

$$\iint\limits_{\Phi[\mathcal{A}]} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv. \tag{5.8}$$

Lükkame teoreemi 5.3 tõestamise edasi alajaotisse 5.3.5, selle tõestuse mugavamaks esitamiseks toome vahepealsetes alajaotistes välja regulaarsete teisenduste olulisemad omadused.

Alajaotise lõpetuseks esitame muutuja vahetuse teoreemi 5.3 rakendamiseks sobivamal kujul ning toome ühe näite selle rakendamisest. Nimelt, tüübilises olukorras on meil vaja etteantud mõõtuva kinnise hulga $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ja pideva funktsiooni $f\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ korral leida kahekordne integraal $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$. Kui hulk $\mathcal{D}$ on "ebamugava" struktuuriga, nii et teoreemides 5.1 ja 5.2 antud arvutusvalemeid pole võimalik rakendada (või see on ebamugav), siis on sageli abiks muutuja vahetuse teoreem 5.3: kui meil õnnestub leida regulaarne teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, kus $\mathcal{U}$ on ruumi $\mathbb{R}^2$ lahtine alamhulk, ja "lihtsa struktuuriga" kinnine mõõtuv alamhulk $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ (näiteks kõvertrapets) nii, et $\Phi[\mathcal{A}] = \mathcal{D}$, siis integraali $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$ saame leida valemist (5.8), kus võrrandid (5.7) on teisendust Φ esitavad võrrandid.

Teoreem 5.4. *Kui*

(1) *kahe muutuja funktsioon* $z = f(x,y)$ *on pidev (xy-tasandi) kinnises mõõtuvas hulgas* $\mathcal{D}$*;*

(2) *võrrandid* (5.7) *määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab (uv-tasandi) kinnise mõõtuva hulga* $\mathcal{A}$ *hulgaks* $\mathcal{D}$*,*

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv. \tag{5.9}$$

5.3.3. Abistavaid tulemusi teoreemi 5.3 tõestuseks I – regulaarse teisenduse omadusi

Ruumi $\mathbb{R}^m$ punktide märkimiseks kasutame kompaktsuse eesmärgil standardset tähistust $(u_j)_{j=1}^m := (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$.

Lause 5.5. *Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk ning olgu regulaarne teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ määratud süsteemiga (5.5). Tähistame $\mathcal{V} := \Phi[\mathcal{U}] = \{\Phi(Q)\colon Q \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^m$. Siis, tõlgendades teisendust Φ kujutusena $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$, võime vaadelda pöördteisendust $\Phi^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$. Olgu $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ kinnine tõkestatud alamhulk.*

(a) (aa) *Teisendus Φ kujutab hulga $\mathcal{U}$ lahtised alamhulgad hulga $\mathcal{V}$ lahtisteks alamhulkadeks; muuhulgas ka hulk $\mathcal{V}$ ise on lahtine. Pöördteisendus $\Phi^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ on regularne. Seejuures iga $Q \in \mathcal{U}$ korral pöördteisenduse Φ^{-1} Jacobi maatriks punktis $\Phi(Q) \in \mathcal{V}$ on teisenduse Φ Jacobi maatriksi punktis Q pöördmaatriks.*

(ab) *Kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on kinnine. Seejuures $\Phi[\mathcal{A}^\circ] = (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$ ja $\Phi[\partial\mathcal{A}] = \partial(\Phi[\mathcal{A}])$, s.t. Φ kujutab hulga $\mathcal{A}$ sisemuse kujutishulga $\Phi[\mathcal{A}]$ sisemuseks ja hulga $\mathcal{A}$ raja kujutishulga $\Phi[\mathcal{A}]$ rajaks.*

(ac) *Kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on tõkestatud.*

(b) *Olgu $m = 2$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n\colon \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing\}$, kus $\mathfrak{C}_n$ tähistab kõikvõimalike selliste diaadiliste ruutude kogumit, mille küljepikkus on $\frac{1}{2^n}$ (vt. jaotise 4.1 algust lk. 166), ning $\widehat{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C}\in\widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C}$.*

(ba) *Leidub arv $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\widehat{\mathcal{A}}_N \subset \mathcal{U}$.*

(bb) *Leidub reaalarv $\varkappa > 0$ nii, et*

$$\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leqslant \varkappa\, \mu^*(\mathcal{B}) \quad \text{iga alamhulga } \mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N \text{ korral} \tag{5.10}$$

(siin $\widehat{\mathcal{A}}_N$ on hulk väitest (ba) *ning $\mu^*(\mathcal{B})$ ja $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}])$ tähistavad vastavalt hulga $\mathcal{B}$ ja kujutishulga $\Phi[\mathcal{B}]$ Jordani välismõõtu).*

(bc) *Kui hulk $\mathcal{A}$ on nullmõõduline, siis ka kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on nullmõõduline.*

(bd) *Kui hulk $\mathcal{A}$ on Jordani mõttes mõõtuv, siis ka kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on Jordani mõttes mõõtuv.*

(c) *Tähistame iga $Q \in \mathcal{U}$ korral $A_Q := \Phi'(Q)$, s.t. $A_Q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ on lineaarne kujutus, mis on esitatud maatriksiga*

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\right)_{i,j=1}^m := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}(Q) & \ldots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m}(Q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1}(Q) & \ldots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_m}(Q) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

s.t.

$$A_Q(R) = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\,\eta_j\right)_{i=1}^m \quad \text{iga } R = (\eta_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

(ca) *Iga $Q \in \mathcal{U}$ korral on kujutus A_Q pööratav. Seejuures pöördkujutust $(A_Q)^{-1}$ esitav maatriks on pöördteisenduse Φ^{-1} Jacobi maatriks punktis $\Phi(Q)$.*

(cb) *Leiduvad reaalarvud $\alpha, \beta > 0$ nii, et iga $Q \in \mathcal{A}$ korral*

$$\alpha\, d(Q_1, Q_2) \leqslant d\big(A_Q(Q_1), A_Q(Q_2)\big) \leqslant \beta\, d(Q_1, Q_2) \quad \textit{mis tahes } Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^m \textit{ korral.}$$

(cc) *Tähistame punktide $Q = (u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ ja $\Delta Q = (\Delta u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ korral $Q + \Delta Q := (u_j + \Delta u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ (see tähistus on igati kooskõlas ruumi $\mathbb{R}^m$ vektorruumistruktuuriga) ja $\rho := \sqrt{\Delta u_1^2 + \cdots + \Delta u_m^2}$. Siis*

$$\frac{d\Big(\Phi(Q + \Delta Q) - \Phi(Q), A_Q(\Delta Q)\Big)}{\rho} \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{ühtlaselt } Q \in \mathcal{A} \textit{ suhtes.}$$

Märkus 5.1. Lause 5.5 tõestusest nähtub, et väited (ba) ja (bb) jäävad kehtima, kui jätta ära eeldus teisenduse Φ regulaarsuse kohta, nõudes sellelt teisenduselt vaid, et funktsioonidel (5.5) eksisteeriksid hulgas $\mathcal{U}$ pidevad osatuletised. Seda tähelepanekut kasutab teoreemi 5.7 tõestus.

Lause 5.5 tõestus. (aa). Väide on tõestatud järelduses III.3.5, teoreemis III.3.2 ja märkuses III.3.1).

(ab). Kujutishulga $\Phi[\mathcal{A}]$ kinnisuseks piisab näidata, et $\overline{\Phi[\mathcal{A}]} \subset \Phi[\mathcal{A}]$ (s.t. selle kujutishulga sulund $\overline{\Phi[\mathcal{A}]}$ sisaldub selles kujutishulgas).

Ülesanne 5.1. Tõestada, et $\overline{\Phi[\mathcal{A}]} \subset \Phi[\mathcal{A}]$.

Näpunäide. Kasutada Bolzano–Weierstrassi teoreemi I.2.5 ja fakti, et koonduvus ruumis R^m on samaväärne koordinaaditi koonduvusega (vt lauset I.2.1).

Võrdus $\Phi[\mathcal{A}^\circ] = (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$ järeldub järgnevast ülesandest.

Ülesanne 5.2. Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$. Tõestada, et $\Phi[\mathcal{E}^\circ] = (\Phi[\mathcal{E}])^\circ$.

Näpunäide. Kasutada väites (aa) tõestatud fakte, et Φ kujutab hulga $\mathcal{U}$ lahtised alamhulgad hulga $\mathcal{V}$ lahtisteks alamhulkadeks, ning et pöördteisendus Φ^{-1} on samuti regulaarne.

Väite tõestuseks jääb näidata, et $\Phi[\partial\mathcal{A}] = \partial\big(\Phi[\mathcal{A}]\big)$.

Ülesanne 5.3. Tõestada, et $\Phi[\partial\mathcal{A}] = \partial\big(\Phi[\mathcal{A}]\big)$.

Näpunäide. Kasutada hulkade $\mathcal{A}$ ja $\Phi[\mathcal{A}]$ kinnisust, teisenduse Φ üksühesust ja võrdust $\Phi[\mathcal{A}^\circ] = (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$.

(ac).

Ülesanne 5.4. Tõestada, et kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on tõkestatud.

Näpunäide. Kasutada Weierstrassi teoreemi I.4.7.

(ba). Nagu kõikjal eelnevas, tähistame lahtise ringi keskpunktiga $Q \in \mathbb{R}^2$ ja raadiusega $\delta > 0$ sümboliga $B(Q, \delta)$, s.t. $B(Q, \delta) := \big\{R \in \mathbb{R}^2 \colon d(Q, R) < \delta\big\}$.

Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et iga $Q \in \mathcal{A}$ korral $B(Q, \delta) \subset \mathcal{U}$ (sellise reaalarvu $\gamma > 0$ olemasolu on tõestatud ülesandes I.2.6). Valime arvu $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{\sqrt{2}}{2^N} < \delta$. Nüüd alati, kui $Q \in \mathcal{A}$ ja $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_N$ on sellised, et $Q \in \mathcal{C}$, siis $\mathcal{C} \subset B(Q, \delta) \subset \mathcal{U}$ (põhjendada!). Siit järeldub, et $\widehat{\mathcal{A}}_N \subset \mathcal{U}$.

(bb). Kõikjal selle väite tõestuses kirjutame funktsioonide $x_1 = x_1(u_1, u_2)$ ja $x_2 = x_2(u_1, u_2)$ asemel vastavalt $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$, s.t. me loeme, et teisendus Φ on määratud süsteemiga (5.7).

Väite tõestuseks piisab leida reaalarv $\varkappa > 0$ nii, et tingimus (5.10) kehtib lisaeeldusel, et $\mu^*(\mathcal{B}) > 0$ ning näidata seejärel, et (sellise $\varkappa$ olemasolu korral) $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) = 0$ alati, kui alamhulga $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$ Jordani mõõt on null, s.t $\mu^*(\mathcal{B}) = 0$.

Olgu alamhulk $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$ selline, et $\mu^*(\mathcal{B}) > 0$. Siis leiduvad naturaalarv $n \geqslant N$ ja (lõplik) alamhulk $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{C}_n$ nii, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{R} := \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mathcal{C} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$ ja $\mu(\mathcal{R}) \leqslant 2\mu^*(\mathcal{B})$ (PÕHJENDADA!). Olgu $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ suvaline ning olgu $P \in \Phi[\mathcal{C}]$. Siis $P = \big(x(Q), y(Q)\big)$ mingi $Q = (u, v) \in \mathcal{C}$ korral. Olgu $Q_\mathcal{C} = (u_\mathcal{C}, v_\mathcal{C})$ ruudu $\mathcal{C}$ keskpunkt; siis $\mathcal{C} = \big[u_\mathcal{C} - \frac{1}{2^{n+1}}, u_\mathcal{C} + \frac{1}{2^{n+1}}\big] \times \big[v_\mathcal{C} - \frac{1}{2^{n+1}}, v_\mathcal{C} + \frac{1}{2^{n+1}}\big]$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal mitme muutuja funktsioonide jaoks (vt järeldust II.1.10) leiduvad punkte $Q_\mathcal{C}$ ja Q ühendaval sirglõigul punktid R_1 ja R_2 nii, et

$$\begin{aligned} x(Q) - x(Q_\mathcal{C}) &= \frac{\partial x}{\partial u}(R_1)\,(u - u_\mathcal{C}) + \frac{\partial x}{\partial v}(R_1)\,(v - v_\mathcal{C}), \\ y(Q) - y(Q_\mathcal{C}) &= \frac{\partial y}{\partial u}(R_2)\,(u - u_\mathcal{C}) + \frac{\partial y}{\partial v}(R_2)\,(v - v_\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Arvestades, et $|u - u_\mathcal{C}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ ja $|v - v_\mathcal{C}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ ning et $R_1, R_2 \in \mathcal{C} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$,

$$|x(Q) - x(Q_\mathcal{C})| \leqslant \left|\frac{\partial x}{\partial u}(R_1)\right| |u - u_\mathcal{C}| + \left|\frac{\partial x}{\partial v}(R_1)\right| |v - v_\mathcal{C}| \leqslant \frac{M}{2^n}$$

ning, analoogiliselt, $|y(Q) - y(Q_\mathcal{C})| \leqslant \frac{M}{2^n}$, kus

$$M := \max\left\{ \max_{R \in \widehat{\mathcal{A}}_N} \left|\frac{\partial x}{\partial u}(R)\right|,\ \max_{R \in \widehat{\mathcal{A}}_N} \left|\frac{\partial x}{\partial v}(R)\right|,\ \max_{R \in \widehat{\mathcal{A}}_N} \left|\frac{\partial y}{\partial u}(R)\right|,\ \max_{R \in \widehat{\mathcal{A}}_N} \left|\frac{\partial y}{\partial v}(R)\right| \right\}$$

(PÕHJENDADA! MUUHULGAS PÕHJENDADA, MIKS NEED MAKSIMUMID EKSISTEERIVAD!). Sellega oleme näidanud, et kujutishulk $\Phi[\mathcal{C}]$ sisaldub (kinnises) ruudus $\mathcal{D}_\mathcal{C}$ keskpunktiga $\Phi(Q_\mathcal{C}) = \big(x(Q_\mathcal{C}), y(Q_\mathcal{C})\big)$ ja küljepikkusega $\frac{M}{2^{n-1}}$ (PÕHJENDADA!). Seega $\Phi[\mathcal{B}] \subset \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \Phi[\mathcal{C}] \subset \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mathcal{D}_\mathcal{C}$ ning järelikult

$$\begin{aligned} \mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) &\leqslant \mu\Big(\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mathcal{D}_\mathcal{C}\Big) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mu(\mathcal{D}_\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \frac{M^2}{2^{2(n-1)}} = 4M^2 \sum_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mu(\mathcal{C}) = 4M^2 \mu(\mathcal{R}) \\ &\leqslant 8M^2\, \mu^*(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Saadud hinnang $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leqslant 8M^2\, \mu^*(\mathcal{B})$ kehtib iga alamhulga $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$ korral, mis rahuldab tingimust $\mu^*(\mathcal{B}) > 0$. Niisiis me võime võtta $\varkappa = 8M^2$.

Olgu nüüd alamhulk $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$ selline, et $\mu^*(\mathcal{B}) = 0$, ning olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub ristküliksumma $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{A}}_N$ nii, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ ja $\mu^*(\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{R}) < \varepsilon$. Nüüd ka $\Phi[\mathcal{B}] \subset \Phi[\mathcal{R}]$ ning seega, arvestades, et $\mu^*(\mathcal{R}) > 0$, eelnevalt tõestatu põhjal

$$\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leqslant \mu^*(\Phi[\mathcal{R}]) \leqslant \varkappa\, \mu^*(\mathcal{R}) < \varkappa\, \varepsilon.$$

Kuna arv $\varepsilon > 0$ oli vabalt fikseeritud, siis järeldub siit, et $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) = 0$, nagu soovitud.

(bc).

Ülesanne 5.5. Olgu hulk $\mathcal{A}$ nullmõõduline. Tõestada, et siis ka kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on nullmõõduline.

NÄPUNÄIDE. Kasutada väidet (bb).

(bd).

Ülesanne 5.6. Olgu hulk $\mathcal{A}$ Jordani mõttes mõõtuv. Tõestada, et siis ka kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on Jordani mõttes mõõtuv.

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi 2.5 ning väiteid (ab) ja (bc).

(ca). Algebra kursusest teame (või vähemalt peaksime teadma), et etteantud $m \times m$-maatriksiga esitatud kujutuse $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ pööratavuseks on tarvilik ja piisav, et selle maatriksi determinant erineks nullist. Antud juhul iga $Q \in \mathcal{U}$ korral maatriksi (5.11) determinant erineb nullist teisenduse Φ regulaarsuse tõttu.

Pöördkujutust $(A_Q)^{-1}$ esitav maatriks on kujutust A_Q esitava maatriksi pöördmaatriks. Väite (aa) põhjal on see pöördmaatriks pöördteisenduse Φ^{-1} Jacobi maatriks punktis $\Phi(Q)$.

(cb). Veendume kõigepealt soovitud omadustega arvu β olemasolus. Mis tahes punktide $Q_1 = (u_j^1)_{j=1}^m, Q_2 = (u_j^2)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ korral

$$A_Q(Q_k) = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\, u_j^k\right)_{i=1}^m, \qquad k = 1, 2,$$

seega Rogers–Hölderi võrratuse põhjal (vt teoreemi I.1.2)

$$\begin{aligned} &d\big(A_Q(Q_1), A_Q(Q_2)\big) \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) u_j^1 - \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) u_j^2\right|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\right| |u_j^1 - u_j^2|\right)^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\left(\sum_{j=1}^m \left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^m |u_j^1 - u_j^2|^2\right)\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\right|^2}\, d(Q_1, Q_2) \\ &\leqslant \beta\, d(Q_1, Q_2), \end{aligned}$$

kus $\beta := \sup\limits_{Q \in \mathcal{A}} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^m \sum\limits_{i=1}^m \left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\right|^2}$. Märgime, et see supreemum on lõplik, sest osatuletisfunktsioonide $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ pidevuse tõttu on funktsioon $Q \mapsto \sqrt{\sum\limits_{j=1}^m \sum\limits_{i=1}^m \left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\right|^2}$ pidev hulgas $\mathcal{A}$ ning seega Weierstrassi teoremi I.4.7 põhjal on see funktsioon tõkestatud hulgas $\mathcal{A}$. Seejuures $\beta > 0$, sest mis tahes $Q \in \mathcal{A}$ korral erineb vähemalt üks osatuletistest $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)$ nullist – vastasel korral oleks teisenduse Φ jakobiaani väärtus punktis Q null.

Kuna iga $Q \in \mathcal{A}$ korral on kujutus A_Q pööratav, siis soovitud omadusega arvu α olemasoluks piisab leida reaalarv $\gamma > 0$ nii, et iga $Q \in \mathcal{A}$ korral

$$d\big((A_Q)^{-1}(P_1), (A_Q)^{-1}(P_2)\big) \leqslant \gamma\, d(P_1, P_2) \quad \text{mis tahes } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

Tähistame iga $P \in \mathcal{V}$ korral $B_P = (\Phi^{-1})'(P)$, s.t. $B_P\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ on lineaarne kujutus, mis on esitatad pöördteisenduse Φ^{-1} Jacobi maatriksiga punktis P. Siis iga $Q \in \mathcal{U}$ korral $(A_Q)^{-1} = B_{\Phi(Q)}$ (vt väidet (ca)). Seega jääb väite tõestuseks veenduda sellise reaalarvu $\gamma > 0$ olemasolus, et iga $P \in \Phi[\mathcal{A}]$ korral

$$d\big(B_P(P_1), B_P(P_2)\big) \leqslant \gamma\, d(P_1, P_2) \quad \text{mis tahes } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

Arvestades, et Φ^{-1} on regulaarne teisendus ning et (väidete (ab) ja (ac) põhjal) hulk $\Phi[\mathcal{A}]$ on kinnine ja tõkestatatud, järeldub sellise reaalarvu γ olemasolu ülaltõestatud väitest eespoolkirjeldatud omadustega reaalarvu β olemasolu kohta.

(cc). Nagu kõikjal eelnevas, tähistame lahtise kera keskpunktiga $Q \in \mathbb{R}^m$ ja raadiusega $\delta > 0$ sümboliga $B(Q,\delta)$, s.t. $B(Q,\delta) := \big\{R \in \mathbb{R}^m\colon d(Q,R) < \delta\big\}$.

Olgu reaalarv $\delta > 0$ selline, et iga $Q \in \mathcal{A}$ korral $B(Q,\delta) \subset \mathcal{U}$ (sellise reaalarvu γ olemasolu on tõestatud ülesandes I.2.6). Kui punkt $\Delta Q = (\Delta u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ rahuldab tingimust $\rho = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^m |\Delta u_j|^2} < \delta$, siis mis tahes punkti $Q \in \mathcal{A}$ korral $Q + \Delta Q \in \mathcal{U}$, seejuures funktsioonide (5.5) diferentseeruvuse tõttu

$$\Phi(Q + \Delta Q) - \Phi(Q) = \big(x_i(Q+\Delta Q) - x_i(Q)\big)_{i=1}^m = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\Delta u_j + \alpha_i(Q,\Delta Q)\right)_{i=1}^m,$$

kus teoreemi II.1.11 põhjal funktsioonid $\alpha_i = \alpha_i(Q,\Delta Q)$ rahuldavad tingimust

$$\frac{\alpha_i(Q,\Delta Q)}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \qquad \text{ühtlaselt } Q \in \mathcal{A} \text{ suhtes.}$$

Teiselt poolt, $A_Q(\Delta Q) = \left(\sum\limits_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)\Delta u_j\right)_{i=1}^m$, seega

$$\begin{aligned}\frac{d\Big(\Phi(Q+\Delta Q) - \Phi(Q), A_Q(\Delta Q)\Big)}{\rho} &= \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i(Q,\Delta Q)^2}}{\rho} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\alpha_i(Q,\Delta Q)}{\rho}\right)^2} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \qquad \text{ühtlaselt } Q \in \mathcal{A} \text{ suhtes}\end{aligned}$$

(PÕHJENDADA!). □

5.3.4. Abistavaid tulemusi teoreemi 5.3 tõestuseks II – lineaarteisenduse $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ "skaleerimistegur"

Olgu $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarteisendus, s.t. teisendus, mis esitub mingi (reaalarvuliste elementidega) maatriksiga

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

s.t. iga $(u, v) \in$ korral

$$\Phi(u, v) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$$

ehk, teisisõnu, teisendus Φ esitub süsteemiga

$$x = a_{11}u + a_{12}v, \quad y = a_{21}u + a_{22}v, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

s.t., samastades järjendid (x, y) veeruvektoritega $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (s.t. lugedes nad üheks ja samaks objektiks), iga $(u, v) \in \mathbb{R}$ korral

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$x'_u = a_{11}, \quad x'_v = a_{12},$$
$$y'_u = a_{21}, \quad y'_v = a_{22},$$

siis teisenduse Φ Jacobi maatriks on A; niisiis see teisendus on regulaarne parajasti siis, kui $\det A \neq 0$ (PÕHJENDADA!).

Järgnev teoreem aitab selgitada jakobiaani absoluutväärtuse $|J(u, v)|$ rolli valemis (5.8) (ja valemis (5.8)).

Teoreem 5.6. *Mis tahes mõõtuva alamhulga $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ korral on ka kujutishulk $\Phi[\mathcal{A}] \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv; seejuures selle kujutishulga Jordani mõõt on*

$$\mu\big(\Phi[\mathcal{A}]\big) = |\det A|\,\mu(\mathcal{A}).$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

5.3.5. Teoreemi 5.3 tõestus

TEOREEMI 5.3 TÕESTUS. Kehtigu tingimused (1)–(3). *First things first:* mõlemad võrduses (5.8) esinevad integraalid eksisteerivad (PÕHJENDADA!). Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n : \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing\} \quad \text{ja} \quad \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n : \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\},$$

kus $\mathfrak{C}_n$ tähistab kõikvõimalike selliste diaadiliste ruutude kogumit, mille küljepikkus on $\frac{1}{2^n}$ (vt jaotise 4.1 algust lk. 166), ning

$$\widehat{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C} \quad \text{ja} \quad \check{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C}.$$

Lause 5.5, (ba), põhjal leidub $N_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $\widehat{\mathcal{A}}_{N_0} \subset \mathcal{U}$. Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal leiduvad reaalarvud $M, L \geqslant 0$ nii, et $|f(P)| \leqslant M$ iga $P \in \Phi[\mathcal{A}]$ korral ning $|J(u, v)| \leqslant L$ iga $(u, v) \in \mathcal{A}$ korral (PÕHJENDADA!).

Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et iga naturaalarvu $N \geqslant N_0$ korral kehtib võrdus (5.8), kus hulk $\mathcal{A}$ on asendatud hulgaga $\breve{\mathcal{A}}_N$, sest sellisel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$ ja valides naturaalarvu $N \geqslant N_0$ nii, et $\mu(\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N) < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
&\left|\iint\limits_{\Phi[\mathcal{A}]} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\mathcal{A}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv\right| \\
&\quad\leqslant \iint\limits_{\Phi[\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N]} |f(x,y)|\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N} \big|f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big|\,|J(u,v)|\,du\,dv \\
&\quad\leqslant M\mu\big(\Phi[\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N]\big) + ML\mu(\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N) \leqslant M\varkappa\,\mu(\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N) + ML\mu(\mathcal{A}\backslash\breve{\mathcal{A}}_N) \\
&\quad< M(L+\varkappa)\varepsilon
\end{aligned}$$

(siin arv $\varkappa$ pärineb lausest 5.5, (bb), kus hulga A_N rollis on meie hulk A_{N_0}) (PÕHJENDADA!), millest arvu $\varepsilon > 0$ suvalisuse tõttu järeldub soovitud võrdus (5.8).

Fikseerime vabalt naturaalarvu $N \geqslant N_0$. Nagu veendusime, piisab teoreemi tõestuseks tõestada võrdus (5.8) lisaeeldusel, et $\mathcal{A} = \breve{\mathcal{A}}_N$. Eeldamegi järgnevas, et $\mathcal{A} = \breve{\mathcal{A}}_N$. Võrduse (5.8) tõestuseks tähistame iga $n \geqslant N$ ja iga $\mathcal{C} \in \breve{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ korral sümboliga $Q_\mathcal{C}$ diaadilise ruudu $\mathcal{C}$ keskpunkti ning, järgides lause 5.5, (c), tähistusi, $A_\mathcal{C} := A_{Q_\mathcal{C}} = \Phi'(Q_\mathcal{C})$, kus iga $Q \in \mathcal{U}$ korral $A_Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarne kujutus, mis on esitatud maatriksiga

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(Q) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(Q) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(Q) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(Q) \end{pmatrix},$$

s.t. iga $R = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ korral $A_Q(R) = \Big(\dfrac{\partial x}{\partial u}(Q)\,\xi + \dfrac{\partial x}{\partial v}(Q)\,\eta, \dfrac{\partial y}{\partial u}(Q)\,\xi + \dfrac{\partial y}{\partial v}(Q)\,\eta\Big)$. Arvestades, et

$$\sum_{\mathcal{C}\in\breve{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f\big(\Phi(Q_\mathcal{C})\big)\,\mu\big(\Phi[\mathcal{C}]\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint\limits_{\Phi[\mathcal{A}]} f(x,y)\,dx\,dy$$

ja

$$\sum_{\mathcal{C}\in\breve{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f\big(\Phi(Q_\mathcal{C})\big)\,|J(Q_\mathcal{C})|\,\mu(\mathcal{C}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint\limits_{\mathcal{A}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

(PÕHJENDADA!), kusjuures teoreemi 5.6 põhjal $|J(Q_\mathcal{C})|\,\mu(\mathcal{C}) = |\det A_\mathcal{C}|\,\mu(\mathcal{C}) = \mu\big(A_\mathcal{C}[\mathcal{C}]\big)$, piisab võrduse (5.8) (ja ühtlasi teoreemi) tõestuseks näidata, et

$$\sum_{\mathcal{C}\in\breve{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f\big(\Phi(Q_\mathcal{C})\big)\,\mu\big(\Phi[\mathcal{C}]\big) - \sum_{\mathcal{C}\in\breve{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f\big(\Phi(Q_\mathcal{C})\big)\,\mu\big(A_\mathcal{C}[\mathcal{C}]\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(PÕHJENDADA!), milleks omakorda piisab veenduda, et

$$\sum_{\mathcal{C}\in\breve{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \big|\mu\big(\Phi[\mathcal{C}]\big) - \mu\big(A_\mathcal{C}[\mathcal{C}]\big)\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{5.12}$$

(PÕHJENDADA!). Tähistame iga $n \geqslant N$ ja iga $\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ korral $\Delta_n := \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right] \times \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ (niisiis Δ_n on ruut keskpunktiga $(0,0)$ ja küljepikkusega $\frac{1}{2^n}$) ja $\mathcal{D}_\mathcal{C} := \Phi(Q_\mathcal{C}) + A_\mathcal{C}[\Delta_n]$; märgime, et siis $\mu(\mathcal{D}_\mathcal{C}) = \mu\big(A_\mathcal{C}[\mathcal{C}]\big)$ (PÕHJENDADA!). Koonduvuseks (5.12) piisab nüüd leida arvud $\theta_n > 0$, $n = N, N+1, \ldots$, nii, et $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ning iga $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, ja iga $\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ korral

$$\check{\mathcal{D}}_\mathcal{C} := \Phi(Q_\mathcal{C}) + A_\mathcal{C}[(1-\theta_n)\Delta_n] \subset \Phi[\mathcal{C}] \subset \Phi(Q_\mathcal{C}) + A_\mathcal{C}[(1+\theta_n)\Delta_n] =: \hat{\mathcal{D}}_\mathcal{C}.$$

Selgitame hulkade $\mathcal{D}_\mathcal{C}$, $\check{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$ ja $\hat{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$ struktuuri. Tähistame $R_\mathcal{C} := A_\mathcal{C}^{-1}\big(\Phi(Q_\mathcal{C})\big)$; siis $A_\mathcal{C}(R_\mathcal{C}) = \Phi(Q_\mathcal{C})$ ning

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mathcal{C} &= A_\mathcal{C}(R_\mathcal{C}) + A_\mathcal{C}[\Delta_n] = A_\mathcal{C}[R_\mathcal{C} + \Delta_n],\\
\check{\mathcal{D}}_\mathcal{C} &= A_\mathcal{C}(R_\mathcal{C}) + A_\mathcal{C}[(1-\theta_n)\Delta_n] = A_\mathcal{C}[R_\mathcal{C} + (1-\theta_n)\Delta_n],\\
\hat{\mathcal{D}}_\mathcal{C} &= A_\mathcal{C}(R_\mathcal{C}) + A_\mathcal{C}[(1+\theta_n)\Delta_n] = A_\mathcal{C}[R_\mathcal{C} + (1+\theta_n)\Delta_n].
\end{aligned}$$

Märgime, et hulgad $R_\mathcal{C} + \Delta_n$, $R_\mathcal{C} + (1-\theta_n)\Delta_n$ ja $R_\mathcal{C} + (1+\theta_n)\Delta_n$ on ruudud keskpunktiga $R_\mathcal{C}$ ja küljepikkustega vastavalt $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1-\theta_n}{2^n}$ ja $\frac{1+\theta_n}{2^n}$; hulgad $\mathcal{D}_\mathcal{C}$, $\check{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$ ja $\hat{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$ on rööpkülikud (vt joonist).

Tõepoolest, selliste arvude θ_n olemasolu juhul iga naturaalarvu $n \geqslant N$ ja iga $\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ korral

$$\begin{aligned}
\big|\mu\big(\Phi[\mathcal{C}]\big) - \mu\big(A_\mathcal{C}[\mathcal{C}]\big)\big| &= \big|\mu\big(\Phi[\mathcal{C}]\big) - \mu(\mathcal{D}_\mathcal{C})\big| \leqslant \mu(\hat{\mathcal{D}}_\mathcal{C}) - \mu(\check{\mathcal{D}}_\mathcal{C})\\
&= \mu\big(A_\mathcal{C}[(1+\theta_n)\Delta_n]\big) - \mu\big(A_\mathcal{C}[(1-\theta_n)\Delta_n]\big)\\
&= |\det A_\mathcal{C}|\mu\big((1+\theta_n)\Delta_n\big) - |\det A_\mathcal{C}|\mu\big((1-\theta_n)\Delta_n\big)\\
&\leqslant L\,\frac{(1+\theta_n)^2 - (1-\theta_n)^2}{2^{2n}} = 4L\theta_n\mu(\mathcal{C})
\end{aligned}$$

ning seega (5.12) kehtib, sest

$$\sum_{\mathcal{C}\in\check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \big|\mu\big(\Phi[\mathcal{C}]\big) - \mu\big(A_\mathcal{C}[\mathcal{C}]\big)\big| \leqslant 4L\theta_n \sum_{\mathcal{C}\in\mathfrak{C}_n(\mathcal{A})} \mu(\mathcal{C}) = 4L\theta_n\mu(\mathcal{A}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Tähistame iga naturaalarvu $n \geqslant N$ korral

$$\theta_n := \frac{2}{\alpha} \sup_{\substack{(u,v)\in\mathcal{A}\\ \max\{|\Delta u|,|\Delta v|\}=\frac{1}{2^{n+1}}}} \frac{d\big(\Phi(u+\Delta u, v+\Delta v), \Phi(u,v) + A_{(u,v)}(\Delta u, \Delta v)\big)}{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

(siin arv α pärineb lausest 5.5, (cb)); siis lause 5.5, (cc), põhjal $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (PÕHJENDADA!). Paneme tähele, et iga naturaalarvu $n \geqslant N$ ja iga $\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$ korral

(1) kujutishulga $\Phi[\mathcal{C}]$ mis tahes rajapunkti kaugus hulga $\mathcal{D}_\mathcal{C}$ rajast ei ületa arvu $\frac{\alpha\theta_n}{2\cdot 2^{n+1}}$;

(2) hulga $\check{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$ punktide ja hulka $\hat{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$ mittekuuluvate punktide kaugused hulga $\mathcal{D}_\mathcal{C}$ rajast on mitte väiksemad kui $\frac{\alpha\theta_n}{2^{n+1}}$.

Tõestame väited (1) ja (2). Kirjutame $Q_{\mathcal{C}} = (u, v)$.

(1). Olgu $P \in \partial(\Phi[\mathcal{C}])$ (s.t. P on hulga $\Phi[\mathcal{C}]$ rajapunkt). Siis lause 5.5, (ab), põhjal $P = \Phi(Q)$ mingi $Q \in \partial\mathcal{C}$ korral. Me saame kirjutada $Q = (u + \Delta u, v + \Delta v)$, kus Δu ja Δv rahuldavad tingimust $\max\{|\Delta u|, |\Delta v|\} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Nüüd $(\Delta u, \Delta v) \in \partial\Delta_n$, seega lause 5.5, (ab), põhjal $A_{\mathcal{C}}(\Delta u, \Delta v) \in \partial\big(A_{\mathcal{C}}[\Delta_n]\big)$ ning järelikult $P_0 := \Phi(Q_{\mathcal{C}}) + A_{\mathcal{C}}(\Delta u, \Delta v) \in \partial\big(\Phi(Q_{\mathcal{C}}) + A_{\mathcal{C}}[\Delta_n]\big)\big) = \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$. Seejuures arvu θ_n definitsiooni põhjal

NB! Kas punkti kaugus hulgast on üldse kuskil defineeritud?

$$d\big(P, \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\big) \leqslant d(P, P_0) = d\big(\Phi(u + \Delta u, v + \Delta v), \Phi(u, v) + A_{\mathcal{C}}(\Delta u, \Delta v)\big) \leqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}.$$

(2). Olgu $P_1 \in \check{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$, $P_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ ja $P_0 \in \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$. Väite (2) tõestuseks peame näitama, et $d(P_1, P_0) \geqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2^{n+1}}$ ja $d(P_2, P_0) \geqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2^{n+1}}$. Selleks märgime, et

$$P_1 = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_1), \qquad P_2 = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_2), \quad \text{ja} \quad P_0 = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_0) \tag{5.13}$$

mingite $R_1 \in (1 - \theta_n)\Delta_n$, $R_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \big((1 + \theta_n)\Delta_n\big)$ ja $R_0 \in \partial\Delta_n$ korral (PÕHJENDADA!). Kuna $d(R_1, R_0) \geqslant \frac{\theta_n}{2^{n+1}}$ ja $d(R_2, R_0) \geqslant \frac{\theta_n}{2^{n+1}}$ (PÕHJENDADA!), siis mõlema $i \in \{1, 2\}$ korral

$$d(P_i, P_0) = d\big(A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_i), A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_0)\big) \geqslant \alpha\, d(R_{\mathcal{C}} + R_i, R_{\mathcal{C}} + R_0) = \alpha\, d(R_i, R_0) \geqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2^{n+1}}.$$

Soovitud sisalduvused $\check{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \subset \Phi[\mathcal{C}] \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ järelduvad väidetest (1) ja (2).

Olgu $P_1 \in \check{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ ja $P_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$. Sisalduvuste $\check{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \subset \Phi[\mathcal{C}] \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ tõestuseks piisab näidata, et $P_1 \in \Phi[\mathcal{C}]$ ja $P_2 \notin \Phi[\mathcal{C}]$. Selleks tähistame $P_{\mathcal{C}} := \Phi(Q_{\mathcal{C}})$ ja esitame punktid P_1 ja P_2 valemites (5.13) antud kujul, kus $R_1 \in (1 - \theta_n)\Delta_n$ ja $R_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \big((1 + \theta_n)\Delta_n\big)$.

Oletame vastuväiteliselt, et $P_1 \notin \Phi[\mathcal{C}]$. Kuna $P_{\mathcal{C}} \in \Phi[\mathcal{C}]$, siis punkte $P_{\mathcal{C}}$ ja P_1 ühendaval sirglõigul leidub punkt $P \in \partial(\Phi[\mathcal{C}])$ (vt ülesande I.1.4 näpunäidet). Väite (1) põhjal $d\big(P, \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\big) \leqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}$. Teiselt poolt, kuna $P_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}})$ ja $P_1 = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_1)$, siis kujutuse $A_{\mathcal{C}}$ lineaarsuse tõttu leidub punkt R punkte $R_{\mathcal{C}}$ ja $R_{\mathcal{C}} + R_1$ ühendavalt sirglõigult nii, et $P = A_{\mathcal{C}}(R) \in \check{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ (siin viimase kuuluvuse põhjenduseks märgime, et $R = R_{\mathcal{C}} + tR_1$ mingi $t \in [0, 1]$ korral ning seega $R \in R_{\mathcal{C}} + (1 - \theta_n)\Delta_n$). Väite (2) põhjal $d\big(P, \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\big) \geqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2^{n+1}}$, vastuolu.

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et $P_2 \in \Phi[\mathcal{C}]$. Kuna hulk $\Phi[\mathcal{C}]$ on tõkestatud, siis leidub punkte $P_{\mathcal{C}}$ ja P_2 ühendaval sirgel selline punkt $P_3 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Phi[\mathcal{C}]$, et punkt P_2 jääb punktide $P_{\mathcal{C}}$ ja P_3 vahele. Punkte P_2 ja P_3 ühendaval sirglõigul leidub punkt $P \in \partial(\Phi[\mathcal{C}])$ (vt ülesande I.1.4 näpunäidet). Väite (1) põhjal $d\big(P, \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\big) \leqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}$. Teiselt poolt, kuna $P_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}})$ ja $P_2 = A_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}} + R_2)$, siis kujutuse $A_{\mathcal{C}}$ lineaarsuse tõttu leidub punkt R punkte $R_{\mathcal{C}}$ ja $R_{\mathcal{C}} + R_2$ ühendavalt sirgelt nii, et $P = A_{\mathcal{C}}(R) \notin \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ (siin viimase mittekuuluvuse põhjenduseks märgime, et $R = R_{\mathcal{C}} + tR_2$ mingi $t \geqslant 1$ korral ning seega $R \notin R_{\mathcal{C}} + (1 + \theta_n)\Delta_n$). Väite (2) põhjal $d\big(P, \partial\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\big) \geqslant \frac{\alpha\,\theta_n}{2^{n+1}}$, vastuolu. □

5.3.6. Üks teoreemi 5.3 tugevdus

Teoreem 5.3 jääb kehtima, kui temas teisenduse regulaarsuse eeldust mõnevõrra nõrgendada, nagu seda on tehtud järgnevas teoreemis.

Teoreem 5.7. *Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ kinnine mõõtuv hulk ning olgu $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ lahtine hulk ning olgu teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ antud süsteemiga*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{5.14}$$

kus funktsioonidel (5.14) *eksisteerivad hulgas $\mathcal{U}$ pidevad osatuletised. Olgu $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ ruumis $\mathbb{R}^2$ kinnine mõõtuv alamhulk, mille teisendus Φ kujutab hulgaks $\mathcal{D}$, s.t. $\Phi[\mathcal{A}] = \mathcal{D}$. Kui leidub nullmõõduga alamhulk $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ nii, et*

(1) *ahend* $\Phi|_{\mathcal{A}^\circ\setminus\mathcal{K}}$ *on üksühene (sümbol* $\mathcal{A}^\circ$ *tähistab hulga* $\mathcal{A}$ *sisemust);*

(2) $J(u,v) := \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0$ *iga* $(u,v) \in \mathcal{A}^\circ\setminus\mathcal{K}$ *korral,*

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv. \tag{5.15}$$

TÕESTUS. Leidugu nullmõõduga alamhulk $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, mis rahuldab tingimusi (1) ja (2). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et hulk $\mathcal{K}$ on kinnine ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $\mathcal{K} \supset \partial\mathcal{A}$, s.t. hulk $\mathcal{K}$ sisaldab hulga $\mathcal{A}$ raja (PÕHJENDADA!). Tähistame $\mathcal{W} := \mathcal{A}\setminus\mathcal{K}$; siis $\mathcal{W}$ on lahtine hulk (sest $\mathcal{A}\setminus\mathcal{K} = \mathcal{A}^\circ\setminus\mathcal{K}$ (PÕHJENDADA!)), kusjuures ahend $\Phi|_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ on regulaarne teisendus (PÕHJENDADA!).

Mis tahes mõõtuvate alamhulkade $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ ja $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ korral tähistame

$$I_{\mathcal{E}} = \iint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ja} \quad J_{\mathcal{B}} = \iint\limits_{\mathcal{B}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv.$$

Teoreemi tõestuseks peame näitama, et $I_{\mathcal{D}} = J_{\mathcal{A}}$.

Funktsiooni f ja funktsioonide (5.14) osatuletisfunktsioonide pidevuse tõttu hulgas $\mathcal{A}$ leidub Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal reaalarv $M \geqslant 0$ nii, et

$$|f(u,v)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\right| \leqslant M,$$
$$\left|\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right| \leqslant M \qquad \text{iga } (u,v) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Ilmselt $|J(u,v)| \leqslant 2M^2$ iga $(u,v) \in \mathcal{A}$ korral (PÕHJENDADA!). Lause 5.5, (ba) ja (bb), põhjal (vt. märkust 5.1) leidub reaalarv $\varkappa > 0$ nii, et

$$\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leqslant \varkappa\,\mu^*(\mathcal{B}) \quad \text{iga alamhulga } \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline (positiivne) reaalarv. Hulga $\mathcal{W}$ mõõtuvuse tõttu leidub kinnine mõõtuv alamhulk $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$ nii, et $\mu(\mathcal{W}) - \mu(\mathcal{L}) < \varepsilon$ (sellise kinnise mõõtuva hulga $\mathcal{L}$ rolli sobib näiteks teatav diaadiliste ruutude ühend – vt. teoreemi 4.2).

Kuna teoreemi 5.3 põhjal $I_{\Phi[\mathcal{L}]} = J_{\mathcal{L}}$, siis

$$\begin{aligned}
|I_{\mathcal{D}} - J_{\mathcal{A}}| &= \big|(I_{\Phi[\mathcal{A}]\setminus\Phi[\mathcal{L}]} + I_{\Phi[\mathcal{L}]}) - (J_{\mathcal{L}} + J_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{L}})\big| \\
&\leqslant |I_{\Phi[\mathcal{A}]\setminus\Phi[\mathcal{L}]}| + |J_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{L}}| \\
&\leqslant M\mu\big(\Phi[\mathcal{A}]\setminus\Phi[\mathcal{L}]\big) + M\,2M^2\mu(\mathcal{A}\setminus\mathcal{L}).
\end{aligned}$$

Kuna $\mu(\mathcal{W}) = \mu(\mathcal{W}) + \mu(\mathcal{K}) = \mu(\mathcal{A})$, siis

$$\mu(\mathcal{A}\setminus\mathcal{L}) = \mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{L}) = \mu(\mathcal{W}) - \mu(\mathcal{L}) < \varepsilon.$$

Kuna $\Phi[\mathcal{A}]\backslash\Phi[\mathcal{L}] \subset \Phi[\mathcal{A}\backslash\mathcal{L}]$, siis

$$\mu\big(\Phi[\mathcal{A}]\backslash\Phi[\mathcal{L}]\big) = \mu^*\big(\Phi[\mathcal{A}]\backslash\Phi[\mathcal{L}]\big) \leqslant \mu^*\big(\Phi[\mathcal{A}\backslash\mathcal{L}]\big) \leqslant \varkappa\mu^*(\mathcal{A}\backslash\mathcal{L}) < \varkappa\varepsilon.$$

Seega

$$|I_{\mathcal{D}} - J_{\mathcal{A}}| \leqslant M\varkappa\varepsilon + 2M^3\varepsilon = (M\varkappa + 2M^3)\varepsilon.$$

Kuna arvu $\varepsilon > 0$ võisime eelnevas arutelus valida suvaliselt, siis järeldub siit, et $I_{\mathcal{D}} = J_{\mathcal{A}}$, nagu soovitud. □

5.3.7. Üleminek polaarkoordinaatidele kahekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^2$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi. \end{cases} \tag{5.16}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\phi$-tasandi punktile (r,ϕ), kus $r \geqslant 0$ ja $\phi \in [0,2\pi)$, vastavusse xy-tasandi punkti, mille polaarraadius on r ja polaarnurk on ϕ, s.t. punkti, mille polaarkoordinaadid on r ja ϕ (siin me loeme pooluseks koordinaatide alguspunkti ja polaarteljeks x-telje positiivse osa). Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} x'_r &= \cos\phi, & x'_\phi &= -r\sin\phi, \\ y'_r &= \sin\phi, & y'_\phi &= r\cos\phi; \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$J(r,\phi) := \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r.$$

Näeme, et teisendus (5.16) teisendab $r\phi$-tasandi hulga

$$\big\{(r,\phi)\colon\ r \geqslant 0,\ \phi \in [0,2\pi]\big\} \tag{5.17}$$

sisemuse

$$\big\{(r,\phi)\colon\ r > 0,\ \phi \in (0,2\pi)\big\}$$

regulaarselt xy-tasandiks, millest on välja lõigatud x-telje positiivne osa (koos punktiga $(0,0)$); hulga (5.17) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r = 0$ või $\phi \in \{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus x-telje positiivseks osaks (koos punktiga $(0,0)$). Järgnev teoreem järeldub nüüd teoreemist 5.7.

Teoreem 5.8. *Kui*

(1) *kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ on pidev xy-tasandi kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{D}$;*

(2) *teisendus* (5.16) *kujutab hulgas* (5.17) *sisalduva kinnise mõõtuva hulga Δ hulgaks $\mathcal{D}$,*

siis

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} f\big(r\cos\phi, r\sin\phi\big)\,r\,dr\,d\phi.$$

§ 6. Kahekordse integraali rakendusi

6.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Järgnev teoreem sisaldub Jordani mõõdu definitsioonis 2.3.

Teoreem 6.1. *Olgu $\mathcal{D}$ mõõtuv hulk xy-tasandil. Siis tema pindala $S_{\mathcal{D}}$ avaldub valemiga*

$$S_{\mathcal{D}} = \iint\limits_{\mathcal{D}} dx\, dy.$$

6.2. Kõversilindri ruumala arvutamine

Selles punktis anname arvutusvalemi kõversilindri ruumala arvutamiseks. Keha[2] ruumala mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri; rõhutame vaid, et ruumala matemaatiliselt range definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga ruumalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale. Keha, millel on olemas ruumala (mitte igal ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulgal pole ruumala!) nimetatakse *mõõtuvaks.*

Teoreem 6.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv kinnine hulk ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x,y) \quad ja \quad \beta = \beta(x,y), \qquad (x,y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\alpha(x,y) \leqslant \beta(x,y) \quad iga\ (x,y) \in \mathcal{A}\ korral.$$

Siis kõversilinder

$$\mathcal{C} := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ (x,y) \in \mathcal{A},\ \alpha(x,y) \leqslant z \leqslant \beta(x,y)\big\},$$

on mõõtuv, kusjuures tema ruumala $V_{\mathcal{C}}$ avaldub valemiga

$$V_{\mathcal{C}} = \iint\limits_{\mathcal{A}} \big(\beta(x,y) - \alpha(x,y)\big)\, dx\, dy.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

6.3. Ruumilise pinnatüki pindala arvutamine

Selles punktis anname mõned arvutusvalemid ruumilise pinnatüki pindala arvutamiseks. Ruumilise pinnatüki pindala mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri – see matemaatiselt range definitsioon on üsna keeruline – rõhutame vaid, et see definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale.

[2]Keha ehk ruumilise kujundi all mõistame me ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulki.

Teoreem 6.3. *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

pidevad osatuletised uv-tasandi kinnises mõõtuvas piirkonnas Δ, *kusjuures*

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad \textit{piirkonnas } \Delta,$$

kus

$$A := \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \qquad C := \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix},$$

Siis parameetriliste võrranditega

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \qquad (u,v) \in \Delta,$$

antud pinnatüki Σ *pindala* S_Σ *esitub valemiga*

$$S_\Sigma = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Järeldus 6.4. *Eksisteerigu funktsioonil* $z = f(x,y)$ *pidevad osatuletised kinnises mõõtuvas hulgas* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. *Siis selle funktsiooni graafiku osa*

$$\Sigma := \Big\{ \big(x, y, f(x,y)\big) \colon\ (x,y) \in \mathcal{D} \Big\}$$

pindala S_Σ *avaldub valemiga*

$$S_\Sigma := \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\ dx\, dy.$$

TÕESTUS. Graafiku osa (pinnatükk) Σ esitub parameetriliselt võrranditega

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v), \qquad (u,v) \in \mathcal{D}. \tag{6.1}$$

Seda pinnatükki esitavatel funktsioonidel (6.1) eksisteerivad hulgas $\mathcal{D}$ pidevad osatuletised, kusjuures

$$\begin{aligned} x'_u &= 1, & x'_v &= 0, \\ y'_u &= 0, & y'_v &= 1, \\ z'_u &= f'_x, & z'_v &= f'_y, \end{aligned}$$

seega teoreemi 6.3 tähistusi kasutades

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

järelikult teoreemi 6.3 põhjal

$$S_\Sigma = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{f'_x(u,v)^2 + f'_y(u,v)^2 + 1}\, du\, dv,$$

nagu soovitud. □

§ 7. Kolmekordne integraal

7.1. Kolmekordse integraali mõiste

Kolmekordne integraal

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

kolme muutuja funktsioonist $u = f(x,y,z)$ üle hulga $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraaliga (kahe muutuja funktsioonist). Kui kahekordse integraali defineerimisel lähtuti ristküliku jaotusviisist osaristkülikuteks, siis kolmekordse integraali puhul lähtutakse risttahuka jaotusviisist osaristtahukateks; kõik teooriaarenduseks vajalikud mõisted – Riemanni summad, Riemanni integraal, Darboux' summad, Darboux' integraalid, integreeruvus, Darboux' summade piirväärtus, – defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraali juhuga; seejuures kolmekordse integraali olemasoluks tarvilikud ja piisavad tingimused ning kolmekordse integraali omadused on kahekordse integraali vastavate tingimuste ja omaduste ilmsed analoogid. Seepärast piirdume käesolevas konspektis kolmekordse integraali osas vaid olulisemate arvutusvalemite äratoomisega.

7.2. Kolmekordse integraali arvutamine

Teoreem 7.1. *Olgu kolme muutuja funktsioon $u = f(x,y,z)$ integreeruv risttahukas $\mathcal{E} := [a,b] \times [c,d] \times [e,l]$. Tähistame $\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d]$.*

(a) *Kui iga $(x,y) \in \mathcal{D}$ korral eksisteerib integraal*

$$g(x,y) := \int_e^l f(x,y,z)\,dz,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\int_e^l f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dx\,dy.$$

(b) *Kui iga $z \in [e,l]$ korral eksisteerib integraal*

$$h(z) := \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^l \left(\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\right) dz = \int_e^l h(z)\,dz.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. $\square$

Teoreem 7.2. *Olgu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ kinnine mõõtuv hulk ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x, y) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x, y), \qquad (x, y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas $\mathcal{A}$, kusjuures

$$\alpha(x, y) \leqslant \beta(x, y) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Kui kolme muutuja funktsioon $u = f(x, y, z)$ on integreeruv kõversilindris

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x, y) \in \mathcal{A},\ \alpha(x, y) \leqslant z \leqslant \beta(x, y)\},$$

kusjuures iga $(x, y) \in \mathcal{A}$ korral eksisteerib integraal

$$g(x, y) := \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y)\, dz,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{A}} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x, y)\, dx\, dy.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Teoreem 7.3. *Olgu kolme muutuja funktsioon $u = f(x, y, z)$ integreeruv hulgas*

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z \in [e, l],\ (x, y) \in \mathcal{A}(z)\},$$

kus iga $z \in [e, l]$ korral $\mathcal{A}(z)$ on mõõtuv kinnine hulk xy-tasandil. Kui iga $z \in [e, l]$ korral eksisteerib integraal

$$h(z) := \iint\limits_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy,$$

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_e^l \left(\iint\limits_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz = \int_e^l h(z)\, dz.$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

7.3. Muutuja vahetus kolmekordses integraalis

7.3.1. Üldine muutuja vahetuse valem kolmekordse integraali jaoks

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud süsteemiga

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \tag{7.1}$$

Tähistame

$$J(u, v, w) := \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u(u, v, w) & x'_v(u, v, w) & x'_w(u, v, w) \\ y'_u(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & y'_w(u, v, w) \\ z'_u(u, v, w) & z'_v(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{vmatrix},$$

s.t. $J(u, v, w)$ on selle süsteemi jakobiaan punktis (u, v, w).

Teoreem 7.4. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x, y, z)$ on pidev (xyz-ruumi) kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{E}$;*

(2) *võrrandid* (7.1) *määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab (uvw-ruumi) kinnise mõõtuva hulga Δ hulgaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &\qquad = \iiint\limits_{\Delta} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\, \big|J(u, v, w)\big|\, du\, dv\, dw. \end{aligned} \tag{7.2}$$

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

7.3.2. Üks teoreemi 7.4 tugevdus

Teoreem 7.4 jääb kehtima, kui temas teisenduse regulaarsuse eeldust mõnevõrra nõrgendada, nagu seda on tehtud järgnevas teoreemis (mis on teoreemi 5.7) loomulik analoog).

Teoreem 7.5. *Olgu $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ kinnine mõõtuv hulk ning olgu $f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ lahtine hulk ning olgu teisendus $\Phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ antud süsteemiga* (7.1)*, kus funktsioonidel* (7.1) *eksisteerivad hulgas $\mathcal{U}$ pidevad osatuletised. Olgu $\Delta \subset \mathcal{U}$ ruumis $\mathbb{R}^3$ kinnine mõõtuv alamhulk, mille teisendus Φ kujutab hulgaks $\mathcal{E}$, s.t. $\Phi[\Delta] = \mathcal{E}$. Kui leidub nullmõõduga alamhulk $\mathcal{K} \subset \Delta$ nii, et*

(1) *ahend $\Phi|_{\Delta^\circ \setminus \mathcal{K}}$ on üksühene (sümbol Δ° tähistab hulga Δ sisemust);*

(2) $J(u, v) := \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0$ *iga $(u, v) \in \Delta^\circ \setminus \mathcal{K}$ korral,*

siis kehtib valem (7.2).

SEDA TEOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

7.3.3. Üleminek silindrilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \\ z = h. \end{cases} \tag{7.3}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\phi h$-ruumi punktile (r,ϕ,h), kus $r \geqslant 0$ ja $\phi \in [0,2\pi)$, vastavusse xyz-ruumi punkti, mille silindrilised koordinaadid on r, ϕ ja h. Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} &x'_r = \cos\phi, && x'_\phi = -r\sin\phi, && x'_h = 0, \\ &y'_r = \sin\phi, && y'_\phi = r\cos\phi, && y'_h = 0, \\ &z'_r = 0, && z'_\phi = 0, && z'_h = 1, \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r,\phi,h) := \frac{D(x,y,z)}{D(r,\phi,h)} &= \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (7.3) teisendab $r\phi h$-ruumi hulga

$$\{(r,\phi,h)\colon\ r \geqslant 0,\ \phi \in [0,2\pi],\ h \in \mathbb{R}\} \tag{7.4}$$

sisemuse

$$\{(r,\phi,h)\colon\ r > 0,\ \phi \in (0,2\pi),\ h \in \mathbb{R}\}$$

regulaarselt xyz-ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand

$$\{(x,y,z)\colon\ y = 0,\ x \geqslant 0\} \tag{7.5}$$

(s.t. zx-tasandi osa, kus $x \geqslant 0$); hulga (7.4) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r = 0$ või $\phi \in \{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus pooltasandiks (7.5). Järgnev teoreem järeldub nüüd teoreemist 7.5.

Teoreem 7.6. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x,y,z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{E}$;*

(2) *teisendus (7.3) kujutab hulgas (7.4) sisalduva kinnise mõõtuva hulga Δ hulgaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Delta} f\big(r\cos\phi, r\sin\phi, h\big)\,r\,dr\,d\phi\,dh.$$

7.3.4. Üleminek sfäärilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust ruumis $\mathbb{R}^3$, mis on määratud võrranditega

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{7.6}$$

Märgime, et see teisendus seab $r\theta\phi$-ruumi punktile (r,θ,ϕ), kus $r \geqslant 0$, $\theta \in [0,\pi]$ ja $\phi \in [0,2\pi)$, vastavusse xyz-ruumi punkti, mille sfäärilised koordinaadid on r, θ ja ϕ. Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned} x'_r &= \sin\theta\cos\phi, & x'_\theta &= r\cos\theta\cos\phi, & x'_\phi &= -r\sin\theta\sin\phi, \\ y'_r &= \sin\theta\sin\phi, & y'_\theta &= r\cos\theta\sin\phi, & y'_\phi &= r\sin\theta\cos\phi, \\ z'_r &= \cos\theta, & z'_\theta &= -r\sin\theta, & z'_\phi &= 0, \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r,\theta,\phi) :&= \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi \\ &\qquad r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + r^2\sin^3\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (7.6) teisendab $r\theta\phi$-ruumi hulga

$$\{(r,\theta,\phi)\colon\ r \geqslant 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi]\} \tag{7.7}$$

sisemuse

$$\{(r,\theta,\phi)\colon\ r > 0,\ \theta \in (0,\pi),\ \phi \in (0,2\pi)\}$$

regulaarselt xyz-ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand (7.5) (s.t. zx-tasandi osa, kus $x \geqslant 0$); hulga (7.7) raja (s.t. selle hulga osa, kus $r = 0$ või $\theta \in \{0,\pi\}$ või $\phi \in \{0,2\pi\}$) kujutab see teisendus pooltasandiks (7.5). Järgnev teoreem järeldub nüüd teoreemist 7.5.

Teoreem 7.7. *Kui*

(1) *kolme muutuja funktsioon $t = f(x,y,z)$ on pidev xyz-ruumi kinnises mõõtuvas hulgas $\mathcal{E}$;*

(2) *teisendus* (7.6) *kujutab hulgas* (7.7) *sisalduva kinnise mõõtuva hulga Δ hulgaks $\mathcal{E}$,*

siis

$$\iiint\limits_{\mathcal{E}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint\limits_{\Delta} f\big(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\big)\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

7.4. Kolmekordse integraali rakendusi

7.4.1. Keha ruumala arvutamine

Teoreem 7.8. *Mõõtuva hulga $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ ruumala $V_{\mathcal{E}}$ avaldub valemiga*

$$V_{\mathcal{E}} = \iiint\limits_{\mathcal{E}} dx\,dy\,dz.$$

Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

VI peatükk.
Joonintegraalid

§ 1. Joone kaare pikkus

1.1. Tasandilise joone mõiste

Meenutame (vt alajaotist I.1.6.2), et *(pidevaks ehk Jordani) jooneks* ruumis $\mathbb{R}^m$ nimetatakse pidevat funktsiooni $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$, kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall. Hulka $\{\Phi(t)\colon t \in T\}$ ruumis $\mathbb{R}^m$ (s.t. funktsiooni Φ väärtuste hulka) nimetatakse seejuures joone Φ *jäljeks.* Funktsiooni Φ argumendile (antud juhul muutujale t) viidatakse kui *parameetrile.* Jooni ruumis $\mathbb{R}^2$ nimetatakse *tasandilisteks joonteks.* Olulisemaid joonte esitusviise (esitus parameetriliste võrranditega, tasandilise joone esitus võrrandiga $y = f(x)$ ning polaarkoordinaatides) on tutvustatud alajaotises I.1.6.3.

Joont $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on kõige lihtsam ette kujutada kui ruumis $\mathbb{R}^m$ eeskirja $u = \Phi(t)$ järgi liikuva punkti trajektoori: ajahetkel $t \in T$ asub liikuv punkt ruumis $\mathbb{R}^m$ punktis $\Phi(t)$; vt. joonist **??**.

Sageli, kõneldes joonest, peetakse tegelikult silmas hoopis teatava joone jälge. Näiteks viidates mingi joone punktidele, mõistetakse selle all hoopis kõnealuse joone jälje punkte jne. Sedalaadi terminoloogilist ebatäpsust, mis üldjuhul sisulist kaksipidimõistmist ei tekita, lubame endale käesolevas konspektis ka meie.

Kui intervall T on lõik, s.t. $T = [\alpha, \beta]$ mingite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, korral, siis nimetatakse joont $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ *kaareks.* Ruumi $\mathbb{R}^m$ punkte $\Phi(\alpha)$ ja $\Phi(\beta)$ nimetatakse seejuures vastavalt kaare Φ *alguspunktiks* ja kaare Φ *lõpp-punktiks.* Kaare algus- ja lõpp-punkti nimetatakse selle kaare *otspunktideks.* Kui $A, B \in \mathbb{R}^m$, siis kõneldes kaarest AB peetakse silmas mingit kaart, mille alguspunkti on A ja lõpp-punkt on B.

Tasandilise joone mõiste hõlmab hulgaliselt funktsioone, mille jälgi meie eelmatemaatiline arusaam tõrgub joonteks nimetamast. Näiteks tasandi $\mathbb{R}^2$ punktihulk $[0,1] \times [0,1] := \big\{(x,y)\colon\ x, y \in [0,1]\big\}$ – ruut – on teatava pideva funktsiooni $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ väärtuste hulk, (s.t. teatava tasandilise joone jälg). Niisuguseid “ebajoonelikke” jooni ühendab üks ühine omadus – *kordsete punktide* olemasolu. *Kordse punkti* all mõistetakse joone $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ punkti (või, täpsemalt, selle joone jälje punkti), mis vastab parameetri t erinevatele väärtustele, ehk, tõlgendades joont Φ tasandil eeskirja $u = \Phi(t)$ järgi liikuva punkti trajektoorina, läbib see liikuv punkt joone kordse punkti rohkem kui üks kord. Seepärast on otstarbekas sisse tuua selliste joonte klass, millel kordsed punktid puuduvad.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et joon $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^m$ on *lihtne,* kui funktsioon Φ on injektiivne, s.t. parameetri t erinevatele väärtustele vastavad selle joone erinevad punktid:

$$t, t' \in T,\ t \neq t' \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t) \neq \Phi(t')$$

(ehk, teisisõnu, joonel Φ ei ole kordseid punkte).

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et kaar $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ on *lihtne kinnine kaar,* kui

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$$

(s.t. tema otspunktid langevad kokku) ja

$$t \in [\alpha, \beta],\ t' \in (\alpha, \beta),\ t \neq t' \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t) \neq \Phi(t')$$

(s.t. peale otspunktide tal rohkem kordseid punkte pole).

Jaotise lõpetuseks lepime kokku järgmises täiendavas terminoloogias. Vaatleme tasandilist kaart $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Kui $\alpha \leqslant \gamma < \delta \leqslant \beta$, siis kaarele $\Phi|_{[\gamma,\delta]}\colon [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}^2$ viitame kui kaare Φ *osakaarele.* Kui $\alpha \leqslant \gamma < \xi < \delta \leqslant \beta$ ning $C := \Phi(\gamma)$, $P := \Phi(\xi)$, $D := \Phi(\delta)$, siis me ütleme, et punkt P asub vaadeldaval kaarel *punktide C ja D vahel.*

NB! Selle jaotise lõppu tuleks lisada lõik lk 403 algusest!

1.2. Tasandilise kaare pikkuse mõiste

Vaatleme tasandilist kaart $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Jagame lõigu $[\alpha, \beta]$ osadeks punktidega $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ ($n \in \mathbb{N}$) ning vaatleme kaare Φ (või, täpsemalt, kaare Φ jälje) punkte

$$A_0 := \Phi(t_0) = \Phi(\alpha), \quad A_1 := \Phi(t_1), \quad \ldots\ldots, \quad A_n := \Phi(t_n) = \Phi(\beta).$$

Ühendades iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral punktid A_{j-1} ja A_j sirglõiguga, saame *murdjoone*

$$A_0 A_1 \ldots A_n \tag{1.1}$$

(vt joonist **??**). Sellist murdjoont (1.1) nimetatakse kaare Φ *kõõlmurdjooneks.* Punkte A_{j-1} ja A_j ühendavatele sirglõikudele $A_{j-1}A_j$, $j = 1, \ldots, n$, viidatakse kui kaare Φ *kõõludele* või ka kui (kõõl)murdjoone (1.1) *lülidele.* Kõõlmurdjoone (1.1) *pikkuseks* nimetatakse tema lülide pikkuste summat $\sum_{j=1}^{n} |A_{j-1}A_j|$.

Märkus 1.1. Kui kaarel Φ leidub kordseid punkte, siis võib juhtuda et mingi $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral punktid A_{j-1} ja A_j langevad ühte. Sel juhul kõõl $A_{j-1}A_j$ on tegelikult ühepunktiline hulk $\{A_{j-1}\} = \{A_j\}$; selle "kõõlu" pikkus loetakse võrdseks nulliga.

Definitsioon 1.3. Kui kaare Φ kõikvõimalike kõõlmurdjoonte (1.1) pikkuste hulk on ülalt tõkestatud, siis öeldakse, et kaar Φ on *sirgestuv,* kusjuures nende kõõlmurdjoonte pikkuste hulga ülemist raja nimetatakse kaare Φ *pikkuseks.*

Kui kaar Φ esitub parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

siis iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral kõõlu $A_{j-1}A_j$ pikkus on

$$\sqrt{\left|x(t_j) - x(t_{j-1})\right|^2 + \left|y(t_j) - y(t_{j-1})\right|^2},$$

seega kõõlmurdjoone (1.1) pikkus on

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left|x(t_j) - x(t_{j-1})\right|^2 + \left|y(t_j) - y(t_{j-1})\right|^2};$$

niisiis, juhul, kui kaar Φ on sirgestuv, selle kaare pikkus s_Φ on

$$s_\Phi := \sup_{\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n =: \beta} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left|x(t_j) - x(t_{j-1})\right|^2 + \left|y(t_j) - y(t_{j-1})\right|^2}.$$

Järgnev lause esitab paar lihtsat kaare pikkuse omadust.

Lause 1.1. *Olgu AB tasandiline kaar.*

(a) *Olgu kaare AB kõõlmurdjoon l' saadud selle kaare kõõlmurdjoont*

$$l := A_0A_1 \ldots A_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

määravatele punktidele A_0, A_1, ..., A_n, kus $A_0 = A$ ja $A_n = B$, uute punktide juurdelisamise teel. Siis kõõlmurdjoone l' pikkus $s_{l'}$ ei ole väiksem kõõlmurdjoone l pikkusest s_l:

$$s_{l'} \geqslant s_l. \tag{1.2}$$

(b) *Olgu C kaare AB punkt, mis asub punktide A ja B vahel. Siis kaar AB on sirgestuv parajasti siis, kui osakaared AC ja CA on sirgestuvad; seejuures kaare AB pikkus s_{AB} on osakaarte AC ja CB pikkuste s_{AC} ja s_{CB} summa:*

$$s_{AB} = s_{AC} + s_{CB}. \tag{1.3}$$

Tõestus. (a). Väite tõestuseks piisab tõestada võrratus (1.2) juhul, kui kõõlmurdjoon l' on saadud punktidele A_0, A_1, ..., A_n ühe uue punkti juurdelisamise teel. Olgu $k \in \{1, \ldots, n\}$ selline, et see uus punkt C asub punktide A_{k-1} ja A_k vahel. Kõõlmurdjooned l ja l' koosnevad ühtedest ja samadest sirglõikudest ainsa erinevusega, et murdjoone l' koosseisu kuuluvad sirglõigu $A_{k-1}A_k$ asemel sirglõigud $A_{k-1}C$ ja CA_k. Kuna

$$|A_{k-1}C| + |CA_k| \geqslant |A_{k-1}A_k|$$

(põhjendada!), siis kehtib (1.2).

(b). Eeldame kõigepealt, et kaar AB on sirgestuv. Olgu $l_1 := AA_1 \ldots A_{k-1}C$ ja $l_2 := CB_1 \ldots B_{m-1}B$ vastavalt osakaarte AC ja CB mingid kõõlmurdjooned. Tähistame kaare AB vastava kõõlmurdjoone $AA_1 \ldots A_{k-1}CB_1 \ldots B_{m-1}B$ sümboliga l ning nende kolme murdjoone pikkused vastavalt sümbolitega s_{l_1}, s_{l_2} ning s_l; siis

$$s_{l_1} + s_{l_2} = s_l \leqslant s_{AB},$$

seega

$$\sup s_{l_1} + \sup s_{l_2} \leqslant s_{AB},$$

kus võrratuse vasakul pool olevates liidetavates on supreemum võetud vastavalt üle kaare AC kõikvõimalike kõõlmurdjoonte l_1 ja üle kaare CB kõikvõimalike kõõlmurdjoonte l_2; järelikult kaared AC ja CB on sirgestuvad, kusjuures

$$s_{AC} + s_{CB} \leqslant s_{AB}. \tag{1.4}$$

Teiselt poolt, eeldame, et kaared AC ja CB on sirgestuvad. Olgu $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ kaart AB defineeriv kujutus ning olgu $\tau \in (\alpha, \beta)$ selline, et $C = \Phi(\tau)$. Olgu $l := AA_1 \ldots A_{n-1}B$ $(n \in \mathbb{N})$ mingi kaare AB kõõlmurdjoon ja olgu $\alpha < t_1 < \cdots < t_{n-1} < \beta$ seda kõõlmurdjoont määravad punktid, s.t. $A_j = \Phi(t_j)$ iga $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral.

On kaks teineteist välistavat võimalust:

(1) mingi $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral $\tau = t_k$ (ning seega $C = A_k$);

(2) mingi $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral $t_{k-1} < \tau < t_k$ (s.t. C asub punktide A_{k-1} ja A_k vahel).

Juhul (1) tähistame sümboliga l_1 kaare AC kõõlmurdjoone $AA_1 \ldots A_{k-1}C$ ja sümboliga l_2 kaare CB kõõlmurdjoone $CA_{k+1} \ldots A_{n-1}B$; siis

$$s_l = s_{l_1} + s_{l_2} \leqslant s_{AC} + s_{CB}.$$

Juhul (2) tähistame sümboliga l_1 kaare AC kõõlmurdjoone $AA_1 \ldots A_{k-1}C$, sümboliga l_2 kaare CB kõõlmurdjoone $CA_k \ldots A_{n-1}B$ ja sümboliga l' kaare AB kõõlmurdjoone $AA_1 \ldots A_{k-1}CA_k \ldots A_{n-1}B$; siis, arvestades, et kõõlmurdjoon l' on saadud kõõlmurdjoont l määravatele punktidele uue punkti C juurdelisamise teel, väite (a) põhjal

$$s_l \leqslant s_{l'} = s_{l_1} + s_{l_2} \leqslant s_{AC} + s_{CB}.$$

Niisiis igal juhul $s_l \leqslant s_{AC} + s_{CB}$; seega

$$\sup s_l \leqslant s_{AC} + s_{CB},$$

kus võrratuse vasakul pool on supreemum võetud üle kaare AB kõikvõimalike kõõlmurdjoonte l; järelikult kaar AB on sirgestuv, kusjuures

$$s_{AB} \leqslant s_{AC} + s_{CB}. \tag{1.5}$$

Soovitud võrdus (1.3) järeldub võrratustest (1.4) ja (1.5). $\square$

Märkus 1.2. Saab näidata, et *kui tasandiline kaar Φ on lihtne, siis mis tahes lihtsa tasandilise kaare Ψ korral, mille jälg on võrdne kaare Φ jäljega, on kaar Ψ sirgestuv parajasti siis, kui kaar Φ on sirgestuv, kusjuures nende kaarte sirgestuvuse juhul on nende pikkused võrdsed.*

Lausest 1.1, (b), järeldub, et eelnev väide jääb kehtima, kui seal vaadelda lihtsate kaarte asemel kaari, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte.

Sellega on õigustatud järgnev ülesannetekogudes sagedasti esinev ülesandepüstitus: etteantud (tasandilise) punktihulga korral – millele selles ülesandes viidatakse kui kaarele – leida selle punktihulga – kaare – pikkus. Selles ülesandes peetakse "kaare" all silmas mingit kaart, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte ning mille jälg see punktihulk on; eelneva väite põhjal on kõigi niisuguste (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaarte pikkused võrdsed ning seega ei sõltu vaadeldava "kaare" pikkus sellise (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaare valikust.

Lause 1.2. *Olgu $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ sirgestuv (tasandiline) kaar. Iga $t \in [\alpha,\beta]$ korral tähistame sümboliga $s(t)$ selle kaare osakaare AC_t pikkuse, kus $A := \Phi(\alpha)$ (s.t. A on selle kaare alguspunkt) ja $C_t := \Phi(t)$; seejuures defineerime $s(\alpha) = 0$. Siis funktsioon $[\alpha,\beta] \ni t \mapsto s(t) \in \mathbb{R}$ on pidev.*

TÕESTUS. Kõigepealt näitame, et funktsioon $t \mapsto s(t)$ on vasakult pidev igas punktis $\tau \in (\alpha,\beta]$. Selleks, fikseerides vabalt punkti $\tau \in (\alpha,\beta]$ ja realaarvu $\varepsilon > 0$, piisab leida punkt $\tau_\varepsilon \in [\alpha,\tau)$ nii, et

$$\tau_\varepsilon < t < \tau \quad \Longrightarrow \quad s(t) > s(\tau) - 2\varepsilon$$

(PÕHJENDADA.!) Selleks omakorda piisab valida punkt $\tau_\varepsilon \in [\alpha,\tau)$ nii, et $s(\tau_\varepsilon) > s(\tau) - 2\varepsilon$ (PÕHJENDADA!).

Valime punktid $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \tau$ ($n \in \mathbb{N}$) nii, et, tähistades $A_j := \Phi(t_j)$, $j = 0,1,\ldots,n$, murdjoone $\ell_0 := A_0A_1\ldots A_n$ pikkus $s_{\ell_0} > s(\tau) - \varepsilon$ (PÕHJENDADA, MIKS SELLINE VALIK ON VÕIMALIK!). Fikseerime (esialgu) suvaliselt punkti $\tau_\varepsilon \in (t_{n-1},\tau)$, tähistame $C := \Phi(\tau_\varepsilon)$, murdjoone $A_0A_1\ldots A_{n-1}CA_n$ ja selle murdjoone osamurdjoone $A_0A_1\ldots A_{n-1}C$ tähistame vastavalt sümbolitega ℓ ja ℓ', nende murdjoonte pikkused tähistame sümbolitega s_ℓ ja $s_{\ell'}$ ning sirglõigu CA_n pikkuse sümboliga $|CA_n|$. Siis

$$s(\tau) - \varepsilon < s_{\ell_0} \leqslant s_\ell = s_{\ell'} + |CA_n| \leqslant s(\tau_\varepsilon) + |CA_n| = s(\tau_\varepsilon) + d\big(\Phi(\tau_\varepsilon),\Phi(\tau)\big).$$

Funktsiooni Φ pidevuse tõttu punktis τ saanuksime me punkti $\tau_\varepsilon \in (t_{n-1},\tau)$ valida algusest peale nii, et $d\big(\Phi(\tau_\varepsilon),\Phi(\tau)\big) < \varepsilon$. Niisuguse punkti τ_ε jaoks kehtib võrratus $s(\tau_\varepsilon) > s(\tau) - 2\varepsilon$, nagu soovitud.

Lause tõestuseks jääb näidata, et funktsioon $t \mapsto s(t)$ on paremalt pidev igas punktis $\tau \in [\alpha,\beta)$. Selleks, fikseerides vabalt punkti $\tau \in [\alpha,\beta)$ ja jada $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ poollõigus $(\tau,\beta]$ nii, et $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$, piisab näidata, et $s(\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} s(\tau)$.

Vaatleme kaart $\Psi\colon [0,\beta-\alpha] \ni v \mapsto \Phi(\beta - v) \in \mathbb{R}^2$. Selle kaare alguspunkt on esialgse kaare lõpp-punkt $B := \Phi(\beta)$ ja lõpp-punkt on esialgse kaare alguspunkt $A = \Phi(\alpha)$. (Piltlikult öeldes, see uus kaar on "esialgne kaar AB läbituna vastupidises suunas".) Iga punkti $v \in [0,\beta-\alpha]$ korral olgu $\sigma(v)$ selle kaare punkte B ja $D_v := \Psi(v) = \Phi(\beta - v)$ ühendava osakaare BD_v pikkus; seejuures loeme $\sigma(0) = 0$. Eelnevalt tõestatu põhjal on funktsioon $v \mapsto \sigma(v)$ vasakult pidev igas punktis $v \in (0,\beta-\alpha]$.

Paneme tähele, et iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral $s(t) + \sigma(\beta - t) = s$, kus s on kaare AB pikkus (PÕHJENDADA!). Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\beta - \tau_n \in [0, \beta - \tau)$, kusjuures $\beta - \tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta - \tau$, seega, arvestades, et funktsioon $v \mapsto \sigma(v)$ on vasakult pidev punktis $\beta - \tau$,

$$s(\tau_n) = s - \sigma(\beta - \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} s - \sigma(\beta - \tau) = s(\tau),$$

nagu soovitud. $\square$

1.3. Kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtus

Vaatleme (tasandilist) kaart $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Kui $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ ($n \in \mathbb{N}$), siis tähega l tähistame kaare Φ kõõlmurdjoont $A_0A_1 \ldots A_n$, kus $A_j = \Phi(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, sümboliga s_l tähistame murdjoone l pikkust ning

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Definitsioon 1.4. Arvu $I \in \mathbb{R}$ nimetatakse kaare Φ *kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuseks,* kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (kaare Φ mis tahes kõõlmurdjoone l korral)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s_l - I| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Märkus 1.3. Olgu (tasandiline) kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.7}$$

Lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisi korral punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.8}$$

tähistame $x_j := x(t_j)$, $y_j := y(t_j)$, $A_j := (x_j, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$, $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$, $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$.

Osutub, et *kui kaar* (1.7) *on lihtne, siis tema jaoks jääb kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 1.4 implikatsioonis* (1.6) *asendada tingimus*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \tag{1.9}$$

tingimusega

$$\max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \delta \tag{1.10}$$

või tingimusega

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta. \tag{1.11}$$

Tõepoolest, olgu kaar (1.7) lihtne. Tõestame kõigepealt, et selle kaare jaoks jääb kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 1.4 implikatsioonis (1.6) asendada tingimus (1.9) tingimusega (1.10). Selleks, fikseerides vabalt reaalarvu $\gamma > 0$, piisab veenduda, et

(1) leidub reaalarv $\delta_1 > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (1.8))

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \gamma; \tag{1.12}$$

(2) leidub reaalarv $\delta_2 > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (1.8))

$$\max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \gamma$$

(PÕHJENDADA!)

(1). Kuna funktsioonid (1.7) on pidevad, siis Cantori teoreemi ?? põhjal on nad ühtlaselt pidevad lõigus $[\alpha, \beta]$, seega leidub reaalarv $\delta_1 > 0$ nii, et

$$t', t'' \in [\alpha, \beta], \ |t' - t''| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |x(t') - x(t'')| < \gamma \quad \text{ja} \quad |y(t') - y(t'')| < \gamma.$$

Kui nüüd lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviis punktidega (1.8) rahuldab tingimust $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta_1$, siis iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $|t_j - t_{j-1}| < \delta_1$, järelikult

$$|x(t_j) - x(t_{j-1})| < \gamma \quad \text{ja} \quad |y(t_j) - y(t_{j-1})| < \gamma$$

ning seega kehtib implikatsiooni (1.12) paremal poolel oleva võrratus.

(2). Oletame vastuväiteliselt, et sellist reaalarvu $\gamma_2 > 0$ ei leidu. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad $t'_n, t''_n \in [\alpha, \beta]$ nii, et $|t'_n - t''_n| \geqslant \gamma$, kuid

$$|x(t'_n) - x(t''_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad |x(t'_n) - x(t''_n)| < \frac{1}{n}$$

(PÕHJENDADA!). Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal leiduvad jadadel $(t'_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(t''_n)_{n=1}^{\infty}$ koonduvad osajadad $(t'_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ja $(t''_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ (PÕHJENDADA, MIKS ME SAAME NENDE KOONDUVATE OSAJADADE ELEMENDID VALIDA ÜHTEDE JA SAMADE INDEKSITEGA!). Olgu $t', t'' \in [\alpha, \beta]$ nende osajadade piirväärtused, s.t. $t'_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} t'$ ja $t''_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} t''$; siis $t' \neq t''$ (PÕHJENDADA!), kuid $x(t') = x(t'')$ ja $y(t') = y(t'')$ (PÕHJENDADA!), mis on vastuolus kaare (1.7) lihtsusega (PÕHJENDADA!).

Jääb tõestada, et kaare (1.7) jaoks jääb kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 1.4 implikatsioonis (1.6) asendada tingimus (1.9) tingimusega (1.11) (siin me eeldame endiselt, et vaadeldav kaar on lihtne). Selleks märgime, et kui lõik $[\alpha, \beta]$ on jaotatud osalõikudeks punktidega (1.8), siis iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\max\{|\Delta x_j|, |\Delta y_j|\} \leqslant \sqrt{|\Delta x_j|^2 + |\Delta y_j|^2} = d(A_{j-1}, A_j) \leqslant \sqrt{2} \max\{|\Delta x_j|, |\Delta y_j|\}$$

ning seega

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) \leqslant \max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} d(A_{j-1}, A_j).$$

Tõestatav väide järeldub eelnevast võrratusteahelast (PÕHJENDADA!).

Teoreem 1.3. *Tasandiline kaar on sirgestuv parajasti siis, kui tema kõõlmurdjoonte pikkustel on olemas piirväärtus; seejuures selle kaare pikkus on võrdne tema kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtusega.*

TÕESTUS. Olgu tasandiline kaar Φ esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.13}$$

Piisavus. Eksisteerigu kaare Φ kõõlmurdjoonte pikkustel piirväärtus I. Veendumaks, et see kaar on sirgestuv, kusjuures tema pikkus $s_\Phi \leqslant I$, piisab näidata, et selle kaare mis tahes kõõlmurdjoone l ja mis tahes reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral kõõlmurdjoone l pikkus s_l rahuldab tingimust

$$s_l \leqslant I + \varepsilon.$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse definitsiooni 1.4 põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et kehtib implikatsioon (1.6). Olgu l kaare Φ kõõlmurdjoon. Kõõlmurdjoone l punktidele lõpliku arvu uute punktide juurdelisamise teel on võimalik saada kaare Φ kõõlmurdjoon l', mis vastab lõigu $[\alpha, \beta]$ teatavale jaotusviisile, mille osalõikude suurim pikkus on väiksem kui δ; seega $|s_{l'} - I| < \varepsilon$. Lause 1.1, (a), põhjal nüüd $s_l \leqslant s_{l'} < I + \varepsilon$, nagu soovitud.

Tarvilikkus. Eeldame, et kaar Φ on sirgestuv, ja fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Veendumaks, et kaare Φ pikkus s_Φ on selle kaare kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtus, piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (kaare Φ mis tahes kõõlmurdjoone l korral) kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad s_l > s_\Phi - \varepsilon$$

(PÕHJENDADA!). Selleks valime kaare Φ kõõlmurdjoone l_0, mille pikkus s_{l_0} rahuldab tingimust

$$s_{l_0} > s_\Phi - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu m murdjoone l_0 lülide arv. Teoreemi tõestuseks piisab nüüd tõestada järgmine väide:

($\circ$) leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et kui kaare Φ kõõlmurdjoon l' on saadud mingit kõõlmurdjoont l määravatele kaare punktidele ühe uue punkti juurdelisamise teel, siis
$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad s_l > s_{l'} - \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Tõepoolest, rahuldagu reaalarv $\delta > 0$ väite ($\circ$) tingimust ning olgu l kaare Φ kõõlmurdjoon, mida määravad lõigu $[\alpha, \beta]$ punktid rahuldavad tingimust $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta$. Tähistame sümboliga l' kaare Φ kõõlmurdjoone, mis on saadud kõõlmurdjoont l määravatele punktidele neist erinevate kõõlmurdjoont l_0 määravate punktide juurdelisamise teel; siis väite ($\circ$) põhjal

$$s_l > s_{l'} - \frac{\varepsilon}{2}$$

(PÕHJENDADA!). Kuna kõõlmurdjoon l' on tõlgendatav kaare Φ kõõlmurdjoonena, mis on saadud kõõlmurdjoont l_0 määravatele punktidele neist erinevate kõõlmurdjoont l määravate punktide juurdelisamise teel, siis lause 1.1, (a), põhjal $s_{l'} \geqslant s_{l_0}$ ning seega

$$s_l > s_{l'} - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant s_{l_0} - \frac{\varepsilon}{2} > s_\Phi - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = s_\Phi - \varepsilon,$$

nagu soovitud.

Jääb tõestada väide (∘). Olgu kaare Φ kõõlmurdjoon l' saadud mingit kõõlmurdjoont l määravatele punktidele ühe uue punkti $C = \bigl(x(\tau), y(\tau)\bigr)$ juurdelisamise teel. Asugu see uus punkt punktide A_{k-1} ja A_k vahel ($k \in \{1, \dots, n\}$), s.t. $t_{k-1} < \tau < t_k$. Kõõlmurdjooned l ja l' koosnevad ühtedest ja samadest sirglõikudest ainsa erinevusega, et murdjoone l' koosseisu kuuluvad sirglõigu $A_{k-1}A_k$ asemel sirglõigud $A_{k-1}C$ ja CA_k. Seega, tähistades nende sirglõikude pikkused vastavalt sümbolitega $|A_{k-1}A_k|$, $|A_{k-1}C|$ ja $|CA_k|$,

$$\begin{aligned} s_{l'} - s_l &= |A_{k-1}C| + |CA_k| - |A_{k-1}A_k| \leqslant |A_{k-1}C| + |CA_k| \\ &= \sqrt{\bigl|x(\tau) - x(t_{k-1})\bigr|^2 + \bigl|y(\tau) - y(t_{k-1})\bigr|^2} + \sqrt{\bigl|x(t_k) - x(\tau)\bigr|^2 + \bigl|y(t_k) - y(\tau)\bigr|^2} \\ &\leqslant 2\sqrt{2}\max\Bigl\{\bigl|x(\tau) - x(t_{k-1})\bigr|, \bigl|y(\tau) - y(t_{k-1})\bigr|, \bigl|x(t_k) - x(\tau)\bigr|, \bigl|y(t_k) - y(\tau)\bigr|\Bigr\}. \end{aligned}$$

Funktsioonide $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ pidevuse tõttu lõigus $[\alpha, \beta]$ on need funktsioonid Cantori teoreemi põhjal ühtlaselt pidevad selles lõigus, seega leidub $\delta > 0$ nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta],\ |t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|x(t) - x(t')\bigr| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}m},\ \ \bigl|y(t) - y(t')\bigr| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}m}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis $|\tau - t_{k-1}| < \delta$ ja $|t_k - \tau| < \delta$ ning seega

$$s_{l'} - s_l < 2\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}m} = \frac{\varepsilon}{2m},$$

nagu soovitud. □

1.4. (Tasandilise) kaare pikkuse arvutamine

Teeme mõned käesoleva peatüki lõpuni kehtivad kokkulepped. Öeldes, et *funktsioonil ϕ eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis,* mõistame me selle all, et funktsioonil ϕ eksisteerib vahemikus (α, β) pidev tuletis (s.t. pidev tuletisfunktsioon ϕ'), kusjuures tuletisfunktsioonil ϕ' eksisteerib punktis α lõplik parempoolne piirväärtus ja punktis β lõplik vasakpoolne piirväärtus. (Sellisel juhul öeldakse ka, et funktsioon ϕ on *pidevalt diferentseeruv lõigus* $[\alpha, \beta]$.) Märgime, et siit järeldub funktsioonil ϕ punktides α ja β vastavalt lõpliku parempoolse ja lõpliku vasakpoolse tuletise olemasolu, kusjuures

$$\phi'_+(\alpha) = \lim_{t \to \alpha+} \phi'(t) \quad \text{ja} \quad \phi'_-(\beta) = \lim_{t \to \beta-} \phi'(t).$$

Öeldes, et *funktsioonil ϕ eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võibolla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil ϕ' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused,* mõistame me selle all, et leiduvad arv $n \in \mathbb{N}$ ja punktid $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta$ nii, et igas vahemikus (t_{j-1}, t_j) eksisteerib funktsioonil ϕ pidev tuletis (s.t. pidev tuletisfunktsioon ϕ'), kusjuures tuletisfunktsioonil ϕ' eksisteerib punktis t_{j-1} lõplik parempoolne piirväärtus ja punktis t_j lõplik vasakpoolne piirväärtus. (Sellisel juhul öeldakse ka, et funktsioon ϕ on *tükiti pidevalt diferentseeruv lõigus* $[\alpha, \beta]$.) Märgime, et siit järeldub funktsioonil ϕ lõplike ühepoolsete tuletiste olemasolu punktides $t_0, t_1, \ldots, t_m$ – erandiks on muidugi punktid $t_0 = \alpha$ ja $t_n = \beta$, milles funktsiooonil ϕ eksisteerivad vastavalt lõplik parempoolne ja lõplik vasakpoolne tuletis.

Teoreem 1.4. *Esitugu (tasandiline) kaar L parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{1.14}$$

kus funktsioonidel (1.14) *eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis. Siis kaar L on sirgestuv, kusjuures tema pikkus s_L avaldub valemiga*

$$s_L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \tag{1.15}$$

Tõestus. Tähistame

$$I := \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \tag{1.16}$$

(see integraal eksisteerib funktsiooni $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ pidevuse tõttu) ja fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et mis tahes punktide $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$ ($n \in \mathbb{N}$) korral, tähistades $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, ja

$$\ell := \sum_{j=1}^n \sqrt{\bigl|x(t_j) - x(t_{j-1})\bigr|^2 + \bigl|y(t_j) - y(t_{j-1})\bigr|^2}$$

(s.t. ℓ on kaare L sellise kõõlmurdjoone pikkus, mis vastab punktidega $t_0, t_1, \ldots, t_n$ määratud lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisile), kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\ell - I| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Olgu $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n =: \beta$ ($n \in \mathbb{N}$). Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral, arvestades, et funktsioonid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ rahuldavad lõigus $[t_{j-1}, t_j]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi, leiduvad $\xi_j, \eta_j \in (t_{j-1}, t_j)$ nii, et

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = x'(\xi_j)\, \Delta t_j \quad \text{ja} \quad y(t_j) - y(t_{j-1}) = y'(\eta_j)\, \Delta t_j,$$

järelikult

$$\begin{aligned} \sqrt{\bigl|x(t_j) - x(t_{j-1})\bigr|^2 + \bigl|y(t_j) - y(t_{j-1})\bigr|^2} &= \sqrt{x'(\xi_j)^2\, (\Delta t_j)^2 + y'(\eta_j)^2\, (\Delta t_j)^2} \\ &= \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2}\, \Delta t_j; \end{aligned}$$

niisiis

$$\ell = \sum_{j=1}^n \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2}\, \Delta t_j.$$

Tähistame

$$\sigma := \sum_{j=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\xi_j)^2}\, \Delta t_j,$$

siis

$$|\ell - I| \leqslant |\ell - \sigma| + |\sigma - I|.$$

Arvestades, et σ on punktidega $t_0, t_1, \ldots, t_n$ määratud lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisile vastav integraalsumma funktsiooni $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ jaoks, saame leida reaalarvu $\delta_1 > 0$ nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Edasi,

$$|\ell - \sigma| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} - \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\xi_j)^2} \right| \Delta t_j. \tag{1.18}$$

Arvestades, et kahe muutuja funktsioon

$$\Phi\colon\ [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \ni (\xi, \eta) \longmapsto \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2}$$

on pidev kinnises tõkestatud hulgas $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^2$, on see funktsioon Cantori teoreemi põhjal ka ühtlaselt pidev selles hulgas, järelikult leidub $\delta_2 > 0$ nii, et

$$\begin{aligned} &(\xi, \eta), (\xi', \eta') \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta],\ d\big((\xi, \eta), (\xi', \eta')\big) = \sqrt{|\xi' - \xi|^2 + |\eta' - \eta|^2} < \delta_2 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad \left| \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2} - \sqrt{x'(\xi')^2 + y'(\eta')^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Seega, kui $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta_2$, siis (arvestades, et sel juhul iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $d\big((\xi_j, \eta_j), (\xi_j, \xi_j)\big) = |\eta_j - \xi_j| < \Delta t_j < \delta_2$)

$$|\ell - \sigma| < \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \Delta t_j = \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \sum_{j=1}^{n} \Delta t_j = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$|\ell - I| \leqslant |\ell - \sigma| + |\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s.t. implikatsioon (1.17) kehtib, nagu soovitud. □

Märkus 1.4. Teoreemi 1.4 saab tõestada ka ilma Cantori teoreemi kasutamata. Tõepoolest, Cantori teoreemi kasutasime me vaid tingimust

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |\ell - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.19}$$

rahuldava reaalarvu $\delta_2 > 0$ leidmisel. Samas absoluutväärtust $|\ell - \sigma|$ võib ülalt hinnata ka järgmiselt: võrratuse (1.18) põhjal

$$\begin{aligned}|\ell - \sigma| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} - \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\xi_j)^2} \right| \Delta t_j \\ &\overset{(1)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n} |y'(\eta_j) - y'(\xi_j)| \, \Delta t_j \leqslant S(T) - s(T)\end{aligned}$$

(siin võrratus (1) on põhjendatud allpool), kus T on punktidega $t_0, t_1, \ldots, t_n$ määratud lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviis ning $S(T)$ ja $s(T)$ on sellele jaotusviisile vastavad tuletisfunktsiooni y' Darboux' ülem- ja alamsumma. Tuletisfunktsiooni y' pidevuse tõttu on see tuletisfunktsioon ka integreeruv, seega leidub reaalarv $\delta_2 > 0$ nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |\ell - \sigma| \leqslant S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{2},$$

s.t. kehtib implikatsioon (1.19).

Võrratuse (1) tõestuseks märgime, et mis tahes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, korral

$$\begin{aligned}\left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \right| &= \frac{\left| \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \right) \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \right) \right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \\ &= \frac{\left| (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \gamma^2) \right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = \frac{\left| \beta^2 - \gamma^2 \right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \\ &\leqslant \frac{\left| \beta^2 - \gamma^2 \right|}{\sqrt{\beta^2} + \sqrt{\gamma^2}} = \frac{\left| (\beta - \gamma)(\beta + \gamma) \right|}{|\beta| + |\gamma|} = |\beta - \gamma| \, \frac{|\beta + \gamma|}{|\beta| + |\gamma|} \\ &\leqslant |\beta - \gamma|;\end{aligned}$$

võrratus (1) järeldub saadud võrratusest, kui võtta iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\alpha = x'(\xi_j)$, $\beta = x'(\eta_j)$ ja $\gamma = y'(\xi_j)$.

Märkus 1.5. Teoreem 1.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (1.14) pideva tuletise olemasolust lõigus $[\alpha, \beta]$ nõrgema eeldustega, et funktsioonidel (1.14) eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonidel x' ja y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. See järeldub lausest 1.1 (PÕHJENDADA!).

Märkus 1.6. Teoreem 1.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (1.14) pideva tuletise olemasolust lõigus $[\alpha, \beta]$ (nõrgema) eeldusega nendel funktsioonidel integreeruva tuletise olemasolust selles lõigus (see eeldus on nõrgem ka märkuses 1.5 käsitletud teoreemi 1.4 eelduse nõrgendusest).

Tõepoolest, tuletisfunktsioonide x' ja y' pidevust kasutasime me teoreemi 1.4 tõestuses vaid

(A) integraali (1.16) olemasolu põhjendades;

(B) tingimust (1.19) rahuldava reaalarvu $\delta_2 > 0$ leidmisel (seda nii vahetult teoreemi sõnastusele järgnevas tõestuses Cantori teoreemi rakendades kui ka märkuses 1.4 toodud tõestusskeemis tuletisfunktsiooni y' integreeruvuse tagamiseks).

Eeldame nüüd, et funktsioonidel (1.14) eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ integreeruv tuletis. Ka niisugusel juhul integraal (1.16) eksisteerib. Tõepoolest, kuna integreeruvate funktsioonide korrutis on integreeruv, siis funktsioonid $t \mapsto x'(t)\,x'(t) = x'(t)^2$ ja $t \mapsto x'(t)\,x'(t) = x'(t)^2$ on integreeruvad lõigus $[\alpha, \beta]$; kuna integreeruvate funktsioonide summa on integreeruv, siis funktsioon $t \mapsto x'(t)^2 + y'(t)^2$ on integreeruv lõigus $[\alpha, \beta]$; kuna integreeruva mittenegatiivse funktsiooni ruutjuur on integreeruv, siis integraal (1.16) eksisteerib. Samuti läheb peaaegu sõna-sõnalt läbi märkuses 1.4 toodud argument tingimust (1.19) rahuldava reaalarvu $\delta_2 > 0$ leidmisel (sest tuletisfunktsiooni y' pidevust kasutati seal vaid tema integreeruvuse tagamiseks).

Järgnev järeldus teoreemist 1.4 annab valemid kaare pikkuse arvutamiseks juhul, kui see kaar on antud võrrandiga $y = y(x)$, $x = x(y)$ või polaarkoordinaatides.

Järeldus 1.5. (a) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \tag{1.20}$$

kus funktsioonil (1.20) *eksisteerib lõigus* $[a, b]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil* y' *eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaar* L *on sirgestuv, kusjuures tema pikkus* s_L *avaldub valemiga*

$$s_L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

(b) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \tag{1.21}$$

kus funktsioonil (1.21) *eksisteerib lõigus* $[c, d]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil* x' *eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaar* L *on sirgestuv, kusjuures tema pikkus* s_L *avaldub valemiga*

$$s_L = \int_c^d \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy.$$

(c) *Olgu kaar L esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga*

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{1.22}$$

kus funktsioonil (1.22) *eksisteerib lõigus* $[\alpha, \beta]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil* r' *eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaar* L *on sirgestuv, kusjuures tema pikkus* s_L *avaldub valemiga*

$$s_L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2}\, d\phi. \tag{1.23}$$

TÕESTUS. (a). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioonil (1.20) eksisteerib pidev tuletis kogu lõigus $[a, b]$ (PÕHJENDADA!). Võrrandiga (1.20) esitatud kaar L esitub parameetriliste võrranditega (võttes sisuliselt parameetri t rolli muutuja x)

$$x = t, \quad y = y(t), \qquad t \in [a, b].$$

Tuletisfunktsioonid

$$x' = (t)'_t = 1 \quad \text{ja} \quad y' = y'(t)$$

rahuldavad teoreemi 1.4 eeldusi, seega valemi (1.15) põhjal

$$s_L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$$

nagu soovitud.

(b). Väite tõestus on analoogiline väite (a) tõestusega, aga siin tuleb kaare L esitamisel parameetriliste võrranditega võtta parameetri t rolli (sisuliselt) muutuja y.

(c). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioonil (1.22) eksisteerib pidev tuletis kogu lõigus $[\alpha, \beta]$ (PÕHJENDADA!). Võrrandiga (1.22) esitatud kaar L esitub parameetriliste võrranditega (võttes parameetriks muutuja ϕ)

$$x = r(\phi)\cos\phi, \quad y = r(\phi)\sin\phi, \qquad \phi \in [\alpha, \beta].$$

Tuletisfunktsioonid

$$\begin{aligned} x' &= \big(r(\phi)\cos\phi\big)'_\phi = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi, \\ y' &= \big(r(\phi)\sin\phi\big)'_\phi = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi \end{aligned}$$

rahuldavad teoreemi 1.4 eeldusi, seega valemist (1.15) saame valemi (1.23), sest

$$\begin{aligned} x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 &= \big(r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi\big)^2 + \big(r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi\big)^2 \\ &= r'(\phi)^2\cos^2\phi - 2r'(\phi)\,r(\phi)\sin\phi\cos\phi + r(\phi)^2\sin^2\phi \\ &\quad\; + r'(\phi)^2\sin^2\phi + 2r'(\phi)\,r(\phi)\sin\phi\cos\phi + r(\phi)^2\cos^2\phi \\ &= r'(\phi)^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + r(\phi)^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= r'(\phi)^2 + r(\phi)^2. \end{aligned}$$

□

1.5. Tükiti siledad (tasandilised) kaared

Selles punktis toome sisse ühe praktikas sagedasti esinevate sirgestuvate kaarte – *tükiti siledate kaarte* – klassi.

Definitsioon 1.5. Me ütleme, et tasandiline kaar on *sile,* kui teda esitavates parameetrilistes võrrandites

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{1.24}$$

funktsioonidel (1.24) eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis, kusjuures

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0 \quad \text{iga } t \in [\alpha, \beta] \text{ korral,}$$

s.t. mitte ühegi $t \in [\alpha, \beta]$ korral pole tuletised $x'(t)$ ja $y'(t)$ korraga nullid (siin tuletiste $x'(\alpha)$ ja $y'(\alpha)$ ning $x'(\beta)$ ja $y'(\beta)$ all mõistame vastavalt vastavaid parempoolseid ning vasakpoolseid tuletisi).

Me ütleme, et tasandiline kaar (1.24) on *tükiti sile,* kui ta on oma järjestikuste punktidega jaotatav lõplikuks arvuks siledateks osakaarteks, s.t. leiduvad punktid $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n =: \beta$ nii, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

esitatud osakaar on sile.

1.6. Sirgestuva tasandilise kaare jälg on nullmõõduga hulk

Selles punktis tõestame tema pealkirjas sõnastatud tulemuse.

Teoreem 1.6. *Sirgestuva tasandilise kaare jälg on nullmõõduga hulk.*

TÕESTUS. Olgu tasandiline kaar AB antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta] \tag{1.25}$$

(siin funktsioonid on pidevad lõigus $[\alpha, \beta]$ ning $A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ ja $B = \big(x(\beta), y(\beta)\big)$). Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et selle kaare jälje $L := \big\{\big(x(t), y(t)\big) \colon t \in [\alpha, \beta]\big\}$ Jordani välismõõt $\mu^*(L) = 0$. Selleks omakorda, fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab näidata, et

($\circ$) leiduvad arv $n \in \mathbb{N}$ ja punktid $\alpha = t_1 < t_2 < \cdots t_n < \beta$ nii, et, tähistades iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$P_i := (x_i, y_i) := \big(x(t_i), y(t_i)\big) \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}_i := [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \times [y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon]$$

(s.t. $\mathcal{D}_i$ on ruut keskpunktiga P_i ja küljepikkusega 2ε), kehtivad tingimused

(1) kui $n \geqslant 2$, siis iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral

$$\max\big\{|x_{i+1} - x_i|, |y_{i+1} - y_i|\big\} = \varepsilon \tag{1.26}$$

(s.t. ruudu $\mathcal{D}_{i+1}$ keskpunkt P_{i+1} paikneb ruudu $\mathcal{D}_i$ rajajoonel) ja

$$\big\{\big(x(t), y(t)\big) \colon t \in [t_i, t_{i+1}]\big\} \subset \mathcal{D}_i \tag{1.27}$$

(s.t. kaare AB osakaar P_iP_{i+1} (või, täpsemalt, selle osakaare jälg) sisaldub ruudus $\mathcal{D}_i$);

(2) $\big\{\big(x(t), y(t)\big) \colon t_n \leqslant t \leqslant \beta\big\} \subset \mathcal{D}_n$ (s.t. kaare AB osakaar P_nB (või, täpsemalt, selle osakaare jälg) sisaldub ruudus $\mathcal{D}_n$)

(vt joonist **??**).

Tõepoolest, kehtigu väide ($\circ$). Siis $L \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$, seega arvestades, et

- ristküliksumma $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ pindala ei ületa arvu $n(2\varepsilon)^2$,
- kui $n \geqslant 2$, siis iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral lõigu P_iP_{i+1} pikkus $\sigma_i \geqslant \varepsilon$,
- kui $n \geqslant 2$, siis köõlmurdjoone $P_1P_2 \ldots P_n$ pikkus $\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i$ ei ületa kaare AB pikkust s,

saame

$$\mu^*(L) \leqslant n(2\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon(n-1)\varepsilon \leqslant 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon s$$

(kui $n = 1$, siis loeme siin $\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 0$), millest arvu ε suvalisuse tõttu järeldub, et $\mu^*(L) = 0$, nagu soovitud.

Tõestame väite ($\circ$). Defineerime punktid $\alpha = t_1 < t_2 < \cdots$ järgmise eeskirja järgi. Kõigepealt defineerime $t_1 = \alpha$ ning edasi, kui mingi $k \in \mathbb{N}$ korral on defineeritud punktid $t_1, \ldots, t_k$, kuid punkt t_{k+1} on veel defineerimata, siis toimime järgmiselt:

[A] kui $n = k$ jaoks kehtib (2), siis defineerimegi $n = k$ ja lõpetame protsessi;

[B] kui $n = k$ jaoks tingimus (2) ei kehti, siis defineerime

$$t_{k+1} := \inf\Big\{t \in [t_k, \beta]\colon \max\big\{|x(t) - x_k|, |y(t) - y_k|\big\} = \varepsilon\Big\} \tag{1.28}$$

(märgime, et hulk, millest siin infiimum võetakse, on mittetühi (PÕHJENDADA!) ning seega see infiimum eksisteerib; seejuures see infiimum on rangelt väiksem arvust β (PÕHJENDADA!)).

Tõepoolest, funktsioon $F\colon [t_k, \beta] \ni t \mapsto \max\big\{|x(t)-x_k|, |y(t)-y_k|\big\} \in \mathbb{R}$ on pidev lõigus $[t_k, \beta]$, kusjuures $F(t_k) = 0$ ja leidub $t'' \in [t_k, \beta]$ nii, et $F(t'') > \varepsilon$ (vastasel korral kehtiks tingimus (2), kus $n = k$), seega Bolzano–Cauchy teoreemi ?? põhjal leidub $t' \in (t_k, t'')$ nii, et $F(t') = \varepsilon$, s.t. t' on selle hulga element, üle mille valemis (1.28) infiimum võetakse. Kuna $t' < t'' \leqslant \beta$, siis see infiimum on rangelt väiksem kui β; niisiis $t_{k+1} < \beta$.

Paneme tähele, et juhus [B] defineeritud punkt t_{k+1} rahuldab tingimusi (1.26) ja (1.27), kus $i = k$ (PÕHJENDADA!).

Tõepoolest, kuna $t_{k+1} = \inf\{t \in [t_k, \beta]\colon F(t) = \varepsilon\}$, siis funktsiooni F pidevuse tõttu ka $F(t_{k+1}) = \varepsilon$, s.t. kehtib (1.26), kus $i = k$. Tingimuse (1.27) (kus $i = k$) kehtivuseks piisab veenduda, et $F(t) \leqslant \varepsilon$ iga $t \in [t_k, t_{k+1}]$ korral. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $\widehat{t} \in [t_k, t_{k+1}]$ nii, et $F(\widehat{t}) > \varepsilon$. Kuna $F(t_k) = 0$, siis Bolzano–Cauchy teoreemi ?? põhjal leidub $\widetilde{t} \in (t_k, \widehat{t})$ nii, et $F(\widetilde{t}) = \varepsilon$. Arvestades, et $\widetilde{t} < \widehat{t} \leqslant t_{k+1}$, on see vastuolus punkti t_{k+1} valikuga.

Seega jääb teoreemi tõestuseks veenduda, et kirjeldatud protsess $t_1, t_2, \ldots$ leidmiseks "peatub" lõpliku arvu sammude järel, s.t. mingi $k \in \mathbb{N}$ jaoks kehtib (2). Selleks märgime, et kuna lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevad funktsioonid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ on ühtlaselt pidevad selles lõigus, siis leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta],\ |t - t'| < \delta \quad\Longrightarrow\quad \max\big\{|x(t) - x(t')|, |y(t) - y(t')|\big\} < \varepsilon.$$

Siit järeldub, et iga $i = 1, 2, \ldots$ korral $t_{i+1} \geqslant t_i + \delta$. Seega, kui valida $\varkappa \in \mathbb{N}$ nii, et $\alpha + \varkappa\delta > \beta$, võime öelda, et kirjeldatud protsess peatub hiljemalt siis, kui on leitud $t_1, \ldots, t_\varkappa$ (PÕHJENDADA!). $\square$

§ 2. Esimest liiki tasandiline joonintegraal

2.1. Esimest liiki joonintegraali mõiste

Olgu $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ sirgestuv (tasandiline) kaar. Tähistame $A := \Phi(\alpha)$ ja $B := \Phi(\beta)$, s.t. A ja B on vastavalt selle kaare algus- ja lõpp-punkt; kaarele Φ viitame edasises kui kaarele AB. Olgu kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x,y)$.

Jagame lõigu $[\alpha,\beta]$ osalõikudeks punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

ja tähistame $A_j = \Phi(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral tähistame $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$, osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkuse tähistame sümboliga s_j ning fikseerime sellel osakaarel mingi punkti B_j, s.t.

$$B_j = \Phi(\tau_j), \quad \text{kus } \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]. \tag{2.2}$$

Moodustame *integraalsumma*

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j. \tag{2.3}$$

Definitsioon 2.1. Kui integraalsummadel (2.3) eksisteerib *piirväärtus* $I \in \mathbb{R}$, s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha,\beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.1) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (2.2) korral)

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I \right| < \varepsilon, \tag{2.4}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *esimest liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist f üle kaare AB* ja tähistatakse sümboliga

$$\int_{AB} f(x,y)\, ds := \lim \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j := I. \tag{2.5}$$

Järgnev lause kirjeldab integraalsummade piirväärtuse (ehk siis, teisisõnu, esimest liiki joonintegraali) mõistet. Selleks lepime kokku järgnevas terminoloogias: kõikjal selle paragrahvi ulateses, kõneldes *(funktsiooni f) integraalsummade jadast (kaarel AB),* mõistame me selle all mingit niisugust arvjada $(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$, kus

(1) iga $m \in \mathbb{N}$ korral σ_m on funktsiooni f integraalsumma tüüpi (2.3), s.t.

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{n_m} f(B_j^m)\, s_{m,j}, \tag{2.6}$$

kus $n_m \in \mathbb{N}$ ning lõigu $[\alpha,\beta]$ mingi jaotusviisi

$$\alpha = t_0^m < t_1^m < \dots < t_{n_m}^m = \beta \tag{2.7}$$

korral, defineerides

$$A_j^m := \Phi(t_j^m), \quad j = 0, 1, \dots, n_m,$$

iga $j \in \{1, \dots, n_m\}$ korral sümbol s_j^m tähistab (kaare AB) osakaare $A_{j-1}^m A_j^m$ pikkust ja punkt B_j^m asub sellel osakaarel, s.t.

$$B_j^m = \Phi(\tau_j^m) \quad \text{mingi } \tau_j^m \in [t_{j-1}^m, t_j^m] \text{ korral;} \tag{2.8}$$

(2) integraalsummadele (2.6) vastavate lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviiside (2.7) pikima osalõigu pikkus läheneb nullile protsessis $m \to \infty$, s.t.

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n_m} \Delta t_j^m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0, \tag{2.9}$$

kus $\Delta t_j^m := t_j^m - t_{j-1}^m$.

Lause 2.1. *Olgu $I \in \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsiooni f integraalsummade* (2.3) *piirväärtus on arv I;*

(ii) *funktsiooni f mis tahes integraalsummade jada (kaarel AB) koondub arvuks I.*

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i), olgu $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$ funktsiooni f integraalsummade jada (kaarel AB) ning olgu $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks peame leidma naturaalarvu $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m \in \mathbb{N},\, m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |\sigma_m - I| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Eelduse (i) põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.1) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (2.2) korral) kehtib implikatsioon (2.4). Nüüd, valides naturaalarvu N nii, et

$$m \in \mathbb{N},\, m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n_m} \Delta t_j^m < \delta$$

(selline valik on võimalik koonduvuse (2.9) tõttu), kehtib implikatsioon (2.10), nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et arv I ei ole funktsiooni f integraalsummade (2.3) piirväärtus. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral leiduvad lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviis (2.7) ning punktid (2.8), $j = 1, \dots, n_m$, nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n_m} \Delta t_j^m < \frac{1}{m},$$

kuid $|\sigma_m - I| \geqslant \varepsilon$, kus integraalsumma σ_m on defineeritud võrdusega (2.6). Nüüd $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$ on funktsiooni f integraalsummade jada (kaarel AB), mis ei koondu arvuks I, vastuolu. $\square$

Märkus 2.1. Olgu (tasandiline) kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{2.11}$$

Lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisi korral punktidega $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$ ($n \in \mathbb{N}$) tähistame $x_j := x(t_j)$, $y_j := y(t_j)$, $A_j := (x_j, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$, $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$, $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$.

Analoogiliselt märkuses 1.3 tõestatuga saab näidata, et *kui kaar* (2.11) *on lihtne, siis tema jaoks jääb integraalsummade* (2.3) *piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 2.1 implikatsioonis* (2.4) *asendada tingimus*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta$$

tingimusega

$$\max\bigl\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\bigr\} < \delta$$

või tingimusega

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta.$$

Märkus 2.2. Saab näidata, et *kui tasandiline kaar Φ on lihtne ning sellel kaarel (või täpsemalt, tema jäljel) on määratud ($\mathbb{R}$-väärtuseline) funktsioon f, siis mis tahes lihtsa tasandilise kaare Ψ korral, mille jälg on võrdne kaare Φ jäljega, eksisteerib esimest liiki joonintegraal funktsioonist f üle kaare Ψ parajasti siis, kui eksisteerib vastav integraal üle kaare Φ, kusjuures nende integraalide eksisteerimise juhul on nad võrdsed.*

Järgneva jaotise lausest 2.2, (h), järeldub, et eelnev väide jääb kehtima, kui seal vaadelda lihtsate kaarte asemel kaari, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte.

Sellega on õigustatud järgnev ülesannetekogudes sagedasti esinev ülesandepüstitus: etteantud (tasandilise) punktihulga – millele selles ülesandes viidatakse kui kaarele – ning sellel punktihulgal määratud ($\mathbb{R}$-väärtuselise) funktsiooni korral leida esimest liiki joonintegraal sellest funktsioonist üle selle punktihulga – kaare. Selles ülesandes peetakse "kaare" all silmas mingit kaart, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte ning mille jälg see punktihulk on; eelneva põhjal on esimest liiki joonintegraalid vaadeldavast funktsioonist üle kõigi niisuguste (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaarte võrdsed ning seega ei sõltu selle integraali väärtus sellise (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaare valikust.

2.2. Esimest liiki joonintegraali omadusi

Järgnev lause võtab kokku esimest liiki joonintegraali olulisemad lihtsamat sorti omadused.

Lause 2.2. *Olgu AB sirgestuv kaar xy-tasandil ning olgu sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioonid $u = f(x, y)$ ja $v = g(x, y)$.*

(a) *Olgu funktsioon f konstantne kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), s.t. mingi $c \in \mathbb{R}$ korral $f(x, y) = c$ kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel). Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal $\int_{AB} f(x, y)\, ds$, kusjuures*

$$\int_{AB} c\, ds = c\, s_{AB} \tag{2.12}$$

(sümbol s_{AB} tähistab kaare AB pikkust).

(b) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds =: I. \tag{2.13}$$

Siis funktsioon f on tõkestatud kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel).

(c) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal* (2.13) *ning olgu $a \in \mathbb{R}$. Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal $\int_{AB} af(x,y)\,ds$, kusjuures*

$$\int_{AB} af(x,y)\,ds = a\int_{AB} f(x,y)\,ds.$$

(d) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds =: I_1 \quad ja \quad \int_{AB} g(x,y)\,ds =: I_2. \tag{2.14}$$

Siis eksisteerivad ka esimest liiki joonintegraalid $\int_{AB}\big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,ds$, kusjuures

$$\int_{AB}\big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,ds = \int_{AB} f(x,y)\,ds \pm \int_{AB} g(x,y)\,ds.$$

(e) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid* (2.14) *ning olgu $a, b \in \mathbb{R}$. Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal $\int_{AB}\big(a\,f(x,y) + b\,g(x,y)\big)\,ds$, kusjuures*

$$\int_{AB}\big(a\,f(x,y) + b\,g(x,y)\big)\,ds = a\int_{AB} f(x,y)\,ds + b\int_{AB} f(x,y)\,ds.$$

(f) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal* (2.13) *ning olgu $f(x,y) \geqslant 0$ iga punkti (x,y) korral kaarelt AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljelt). Siis*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds \geqslant 0.$$

(g) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid* (2.14) *ning olgu $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ iga punkti (x,y) korral kaarelt AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljelt). Siis*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds \geqslant \int_{AB} g(x,y)\,ds. \tag{2.15}$$

(h) *Olgu C kaare AB punkt, mis asub punktide A ja B vahel. Siis esimest liiki joonintegraal* (2.13) *eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerivad esimest liiki joonintegraalid*

$$\int_{AC} f(x,y)\,ds =: J_1 \quad ja \quad \int_{CB} f(x,y)\,ds =: J_2. \tag{2.16}$$

Seejuures

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{AC} f(x,y)\,ds + \int_{CB} f(x,y)\,ds. \tag{2.17}$$

(i) (Esimest liiki joonintegraali keskväärtusteoreem.) *Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal* (2.13). *Siis*

(i1) *leidub reaalarv* μ *nii, et*

$$m := \inf f(x,y) \leqslant \mu \leqslant \sup f(x,y) =: M, \tag{2.18}$$

kus inf *ja* sup *võetakse üle kõigi punktide* (x,y) *kaarelt* AB *(või, täpsemalt, selle kaare jäljelt), ja*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \mu\, s_{AB}, \tag{2.19}$$

kus s_{AB} *on kaare* AB *pikkus;*

(i2) *kui funktsioon* f *on pidev kaarel* AB *(või, täpsemalt, selle kaare jäljel), siis leidub punkt* C *kaarel* AB *(või, täpsemalt, selle kaare jäljel) nii, et*

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = f(C)\, s_{AB}. \tag{2.20}$$

Märkus 2.3. Väite (h) tõestus toetub lausele 2.1. Selle lause kasutamine võimaldaks lihtsustada ka väidete (b) ja (c) tõestusi.

LAUSE 2.2 TÕESTUS. Esitugu kaar AB parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

kus $A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ ja $B = \big(x(\beta), y(\beta)\big)$. Lõigu $[\alpha,\beta]$ jaotusviisi korral punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.21}$$

tähistame $A_j = \big(x(t_j), y(t_j)\big)$, $j = 0, 1, \ldots, n$; iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$, osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkuse tähistame sümboliga s_j ning fikseerime sellel osakaarel mingi punkti B_j, s.t. $B_j = \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big)$, kus $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

(a). Konstantse funktsiooni $f(x,y) = c$ mis tahes integraalsumma

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j = \sum_{j=1}^{n} c\, s_j = c \sum_{j=1}^{n} s_j = c\, s_{AB},$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on $c\, s_{AB}$, s.t. kehtib (2.12).

(b). Väite tõestus sarnaneb Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni tõkestatuse tõestusega. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f on tõkestamata. Väite tõestuseks piisab näidata, et

($\circ$) lõigu $[\alpha,\beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.21) ning mis tahes reaalarvu $M \geqslant 0$ korral leiduvad punktid (2.2), nii et

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j\right| > M.$$

Tõepoolest, kehtigu väide ($\circ$). Sel juhul (võttes integraalsummade (2.3) piirväärtuse definitsioonis $\varepsilon = 1$) leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis mis tahes punktide B_j korral vastavatelt osakaartelt $A_{j-1}A_j$

$$\Big|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j - I\Big| < 1 \quad \text{ehk, teisisõnu,} \quad I-1 < \sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j < I+1$$

ning seega

$$\Big|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j\Big| < \max\{|I-1|, |I+1|\}.$$

Oleme saanud vastuolu väitega ($\circ$).

Jääb veel tõestada väide ($\circ$). Olgu antud punktid (2.21) ja reaalarv $M \geqslant 0$. Kuna funktsioon f on tõkestamata kaarel AB, siis ta on tõkestamata mingil osakaarel $A_{j_0-1}A_{j_0}$. Valime iga $j \in \{1, \ldots, j_0-1, j_0+1, \ldots, n\}$ korral vabalt punkti B_j kaarel $A_{j-1}A_j$ ja tähistame

$$\kappa := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^n f(B_j)\, s_j.$$

Siis mis tahes punkti B_{j_0} korral osakaarelt $A_{j_0-1}A_{j_0}$

$$\left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j\right| = |f(B_{j_0})\, s_{j_0} + \kappa| \geqslant |f(B_{i_0 j_0})|\, s_{j_0} - |\kappa|.$$

Järelikult, kui valida punkt B_{j_0} osakaarelt $A_{j_0-1}A_{j_0}$ nii, et

$$|f(B_{j_0})| > \frac{M+|\kappa|}{s_{j_0}}$$

(niisugune valik on võimalik, sest funktsioon f on tõkestamata osakaarel $A_{j_0-1}A_{j_0}$), siis

$$\left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j\right| > \frac{M+|\kappa|}{s_{j_0}}\, s_{j_0} - |\kappa| = M.$$

(c). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.21) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide $B_1, \ldots, B_n$ korral)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^n af(B_j)\, s_j - aI\right| = |a|\left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j - I\right| < \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a \neq 0$. Integraali (2.13) olemasolu tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j - I\right| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n} af(B_j)\, s_j - aI\right| < |a|\,\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

(d). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.21) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide $B_1, \ldots, B_n$ korral)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n}\big(f(B_j) \pm g(B_j)\big)\, s_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\big(f(B_j) \pm g(B_j)\big)\, s_j - (I_1 \pm I_2)\right| &= \left|\left(\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I_1\right) \pm \left(\sum_{j=1}^{n} g(B_j)\, s_j - I_2\right)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I_1\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} g(B_j)\, s_j - I_2\right|.\end{aligned}$$

Integraalide (2.14) olemasolu tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} g(B_j)\, s_j - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\big(f(B_j) \pm g(B_j)\big)\, s_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e). Väite (c) põhjal eksisteerivad joonintegraalid $\int_{AB} a\, f(x,y)\, ds$ ja $\int_{AB} b\, g(x,y)\, ds$, seega väite (d) põhjal eksisteerib ka joonintegraal $\int_{AB}\big(a\, f(x,y) + b\, g(x,y)\big)\, ds$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{AB}\big(a\, f(x,y) + b\, g(x,y)\big)\, ds &= \int_{AB} a\, f(x,y)\, ds + \int_{AB} b\, g(x,y)\, ds \\ &= a\int_{AB} f(x,y)\, ds + b\int_{AB} g(x,y)\, ds.\end{aligned}$$

(f). Fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab väite tõestuseks näidata, et

$$I > -\varepsilon. \tag{2.22}$$

Integraali (2.13) olemasolu tõttu leidub integraalsumma $\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j$, mis rahuldab tingimust $\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| < \varepsilon$; niisiis

$$I + \varepsilon > \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j \geqslant 0$$

(siin viimane võrratus kehtib, sest $f(x,y) \geqslant 0$ kaarel AB), millest järeldub (2.22).

(g). Kuna $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ kaarel AB, siis $f(x,y) - g(x,y) \geqslant 0$ sellel kaarel; seega väidete (d) ja (f) põhjal

$$\int_{AB} f(x,y)\, ds - \int_{AB} g(x,y)\, ds = \int_{AB} \big(f(x,y) - g(x,y)\big)\, ds \geqslant 0,$$

millest järeldub (2.15).

(h). Olgu $\gamma \in [\alpha, \beta]$ selline, et $C = \big(x(\gamma), y(\gamma)\big)$. Siis kaared AC ja CB esituvad vastavalt parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \gamma] \qquad \text{ja} \qquad x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [\gamma, \beta].$$

Tarvilikkus. Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal (2.13). Tõestame ainult joonintegraali $\int_{AC} f(x,y)\, ds$ olemasolu (joonintegraali $\int_{CB} f(x,y)\, ds$ olemasolu tõestatakse analoogiliselt). Selleks märgime kõigepealt, et väite (b) põhjal on funktsioon f tõkestatud kaarel AB, seega on funktsioon f tõkestatud ka osakaarel AC, järelikult funktsiooni f kõikvõimalike integraalsummade hulk (mis vastavad kaare AC jaotusviisidele) on tõkestatud (PÕHJENDADA!), niisiis funktsiooni f mis tahes integraalsummade jada kaarel AC on tõkestatud (integraalsummade jada mõistet on selgitatud eespool definitsiooni 2.1 järel). Kuna Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal saab igast tõkestatud arvjadast välja eraldada koonduva osajada, siis leidub koonduv funktsiooni f integraalsummade jada $(\upsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ kaarel AC. Tähistame $J := \lim_{m\to\infty} \upsilon_m$.

Olgu $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ suvaline funktsiooni f integraalsummade jada kaarel AC. Lause 2.1 põhjal piisab joonintegraali $\int_{AC} f(x,y)\, ds$ olemasoluks näidata, et $\rho_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J$. Selleks fikseerime vabalt funktsiooni f mingi integraalsummade jada $(\rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ kaarel CB. Kuna $(\rho_m + \rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ ja $(\upsilon_m + \rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ on funktsiooni f integraalsummade jadad kaarel AB (PÕHJENDADA!), siis lause 2.1 põhjal

$$\rho_m + \rho'_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I \quad \text{ja} \quad \upsilon_m + \rho'_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I$$

ning järelikult

$$\rho_m = (\rho_m + \rho'_m) - (\upsilon_m + \rho'_m) + \upsilon_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I - I + J = J,$$

nagu soovitud.

Piisavus. Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid (2.16). Olgu $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$ suvaline funktsiooni f integraalsummade jada kaarel AB, s.t. kehtivad lausele 2.1 eelnevad tingimused (1) ja (2). Esimest liiki joonintegraali (2.13) olemasoluks ja valemi (2.17) kehtivuseks piisab lause 2.1 põhjal näidata, et $\sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_1 + J_2$. Selleks märgime kõigepealt, et väite (b) põhjal on funktsioon f tõkestatud osakaartel AC ja CB, niisiis funktsioon f on tõkestatud ka kaarel AB (PÕHJENDADA!), s.t. leidub reaalarv $M \geqslant 0$ nii, et

$$|f(x,y)| \leqslant M \quad \text{iga punkti } (x,y) \text{ korral kaarelt } AB.$$

Tähistame iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$j_m := \min\{j \in \{1,\dots,n_m\} \colon \gamma \leqslant t_j^m\}$$

(siis punkt C asub kaarel $A_{j_m-1}A_{j_m}$) ning, tähistades kaarte $A_{j_m-1}C$ ja CA_{j_m} pikkused vastavalt sümbolitega s_0^m ja $\widehat{s}_0^m$ (seejuures, kui $C = A_{j_m}$, siis loeme $\widehat{s}_0^m = 0$),

$$\rho_m := \sum_{j=1}^{j_m-1} f(B_j^m)\, s_j^m + f(C)\, s_0^m \qquad \text{ja} \qquad \rho'_m := f(C)\, \widehat{s}_0^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} f(B_j^m)\, s_j^m.$$

Siis $(\rho_m)_{m=1}^\infty$ ja $(\rho'_m)_{m=1}^\infty$ on funktsiooni f integraalsummade jadad vastavalt kaartel AC ja CB (PÕHJENDADA!), seega lause 2.1 põhjal $\rho_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_1$ ja $\rho'_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_2$. Kuna

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= \sum_{j=1}^{n_m} f(B_j^m)\, s_j^m = \sum_{j=1}^{j_m-1} f(B_j^m)\, s_j^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} f(B_j^m)\, s_j^m + f(B_{j_m}^m)\, s_{j_m}^m \\
&= \rho_m + \rho'_m + f(B_{j_m}^m)\, s_{j_m}^m - f(C)\, s_0^m - f(C)\, \widehat{s}_0^m \\
&= \rho_m + \rho'_m + \big(f(B_{j_m}^m) - f(C)\big)\, s_{j_m}^m
\end{aligned}$$

(sest $s_0^m + \widehat{s}_0^m = s_{j_m}^m$), siis jääb soovitud koonduvuseks $\sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_1 + J_2$ näidata, et

$$\big(f(B_{j_m}^m) - f(C)\big)\, s_{j_m}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0. \tag{2.23}$$

Kuna

$$\big|\big(f(B_{j_m}^m) - f(C)\big) s_{j_m}^m\big| \leqslant \big(|f(B_{j_m}^m)| + |f(C)|\big) s_{j_m}^m \leqslant 2M\, s_{j_m}^m,$$

siis piisab koonduvuseks (2.23) näidata, et $s_{j_m}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. See järeldub lausest 1.2 (PÕHJENDADA!).

(i1). Väite tõestus sarnaneb Riemanni integraali keskväärtusteoreemi tõestusega. Väidete (a) ja (g) põhjal

$$m\, s_{AB} = \int_{AB} m\, ds \leqslant \int_{AB} f(x,y)\, ds \leqslant \int_{AB} M\, ds = M\, s_{AB};$$

seega, tähistades

$$\mu := \frac{\int_{AB} f(x,y)\, ds}{s_{AB}},$$

kehtivad (2.18) ja (2.19).

(i2). Olgu $\mu \in \mathbb{R}$ arv eelnevast väitest. Kui funktsioon f on pidev kaarel AB, siis funktsioon

$$F(t) = f\big(x(t), y(t)\big), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

on pidev lõigus $[\alpha, \beta]$, kusjuures

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} F(t) = \inf_{t\in[\alpha,\beta]} f\big(x(t), y(t)\big) = m \leqslant \mu \leqslant M = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} f\big(x(t), y(t)\big) = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} F(t),$$

seega Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub punkt $\gamma \in [\alpha, \beta]$ nii, et $\mu = F(\gamma)$ ehk, tähistades $C := \big(x(\gamma), y(\gamma)\big)$,

$$\mu = F(\gamma) = f\big(x(\gamma), y(\gamma)\big) = f(C),$$

niisiis kehtib (2.20). □

2.3. Esimest liiki joonintegraali arvutamine

Teoreem 2.3. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ pidev (tasandilisel) kaarel L (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), mis esitub parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{2.24}$$

kus funktsioonidel (2.24) *eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis. Siis eksisteerivab esimest liiki joonintegraal funktsioonist f üle kaare L, kusjuures*

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \tag{2.25}$$

Tõestus. Tähistame

$$I := \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \tag{2.26}$$

Fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab valemi (2.25) tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et, jagades lõigu $[\alpha, \beta]$ suvaliselt osalõikudeks punktidega $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$ $(n \in \mathbb{N})$ ning fikseerides iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral suvaliselt punkti $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ja tähistades

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad B_j := \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big), \quad s_j := \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

(märgime, et s_j on kaare L osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkus, kus $A_{j-1} = \big(x(t_{j-1}), y(t_{j-1})\big)$ ja $A_j = \big(x(t_j), y(t_j)\big)\big)$, kehtib implikatsioon

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\, s_j - I\right| < \varepsilon.$$

Hindame:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \right.\\ &\qquad\qquad \left. - \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \right.\\ &\qquad\qquad \left. - \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big|f\big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big) - f\big(x(t), y(t)\big)\big| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big|F(\tau_j) - F(t)\big| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt, \end{aligned} \tag{2.27}$$

kus

$$F(t) := f\big(x(t), y(t)\big), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Kuna funktsioon F on pidev lõigus $[\alpha, \beta]$ (sest ta on pidevate funktsioonide liitfunktsioon), siis Cantori teoreemi põhjal ta on selles lõigus ühtlaselt pidev, seega leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta],\ |t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|F(t) - F(t')\big| < \frac{\varepsilon}{s_L},$$

kus s_L on kaare L pikkus. Niisiis, kui $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis mis tahes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $t \in [t_{j-1}, t_j]$ korral $|\tau_j - t| < \delta$ ning seega $\big|F(\tau_j) - F(t)\big| < \dfrac{\varepsilon}{s_L}$, järelikult

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, s_j - I\right| &< \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\varepsilon}{s_L} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \frac{\varepsilon}{s_L} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \\ &= \frac{\varepsilon}{s_L} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \frac{\varepsilon}{s_L}\, s_L = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Märkus 2.4. Teoreemi 2.3 saab tõestada ka ilma Cantori teoreemi kasutamata. Tõepoolest, summat (2.27) saab hinnata ka teisiti. Nimelt, kuna funktsioon $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ on pidev lõigus $[\alpha, \beta]$, siis Weierstrassi esimese teoreemi põhjal on ta tõkestatud selles lõigus, s.t. leidub reaalarv $M > 0$ nii, et

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \leqslant M \quad \text{iga } t \in [\alpha, \beta] \text{ korral.}$$

Seega, tähistades

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} F(t), \quad m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}, t_j]} F(t), \qquad j = 1, \ldots, n$$

(need supreemumid ja infiimumid eksisteerivad, sest lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon F on Weierstrassi teoreemi põhjal tõkestatud selles lõigus ning seega tõkestatud ka igas osalõigus $[t_{j-1},t_j]$), kehtib

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j - I\Bigr| &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(M_j-m_j)\,M\,dt = M\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\\ &= M\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\,\Delta t_j.\end{aligned}$$

Kuna lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon F on integreeruv selles lõigus, siis leidub reaalarv $\delta>0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Delta t_j<\delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\,\Delta t_j<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\Delta t_j<\delta$, siis

$$\Bigl|\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\,s_j - I\Bigr| < M\,\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

Märkus 2.5. Teoreem 2.3 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (2.24) pideva tuletise olemasolust lõigus $[\alpha,\beta]$ nõrgema eeldusega, et funktsioonidel (2.24) eksisteerib lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonidel x' ja y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. See järeldub lausest 2.2, (h) (PÕHJENDADA!).

Märkus 2.6. Teoreem 2.3 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (2.24) pideva tuletise olemasolust lõigus $[\alpha,\beta]$ (nõrgema) eeldusega nendel funktsioonidel integreeruva tuletise olemasolust selles lõigus (see eeldus on nõrgem ka märkuses 2.5 käsitletud teoreemi 2.3 eelduse nõrgendusest).

Tõepoolest, märkuse 1.6 põhjal on kaar L ka sel eeldusel sirgestuv, kusjuures tema pikkus on $s_L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$ ja iga $j\in\{1,\dots,n\}$ korral on osakaare $A_{j-1}A_j$ pikkus $s_j=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$; samuti eksisteerib integraal (2.26) (sest funktsioon $x\mapsto\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ on integreeruv lõigus $[\alpha,\beta]$ ning antud lõigus integreeruvate funktsioonide korrutis on integreeruv selles lõigus). Vahetult teoreemi 2.3 sõnastusele järgnevas selle teoreemi tõestuses tuletisfunktsioonide x' ja y' pidevust muuks ei kasutata. (Märkuses 2.4 antud tõestusskeemis kasutatakse tuletisfunktsioonide x' ja y' pidevust lisaks veel funktsiooni $t\mapsto\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ tõkestatuse põhjendamiseks lõigus $[\alpha,\beta]$, aga ka see järeldub nende tuletisfunktsioonide integreeruvusest selles lõigus, sest mingis lõigus integreeruv funktsioon on tõkestatud selles lõigus).

Järgnev järeldus teoreemist 2.3 annab valemid esimest liiki (tasandilise) joonintegraali arvutamiseks juhul, kui kaar, üle mille integreeritakse, on antud võrrandiga $y=y(x)$, $x=x(y)$ või polaarkoordinaatides.

Järeldus 2.4. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u=f(x,y)$ pidev tasandilisel kaarel L (või, täpsemalt, selle kaare jäljel).*

(a) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$y=y(x),\qquad x\in[a,b],\tag{2.28}$$

kus funktsioonil (2.28) *eksisteerib lõigus $[a,b]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_a^b f\bigl(x,y(x)\bigr)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

(b) *Olgu kaar L esitatud võrrandiga*

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \tag{2.29}$$

kus funktsioonil (2.29) *eksisteerib lõigus* $[c, d]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil* x' *eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_c^d f\big(x(y), y\big)\sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy.$$

(c) *Olgu kaar L esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga*

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{2.30}$$

kus funktsioonil (2.30) *eksisteerib lõigus* $[\alpha, \beta]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil* r' *eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f\big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big)\sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2}\, d\phi.$$

Tõestus. Järelduse tõestus on sarnane järelduse 1.5 tõestusele (seejuures toetutakse teoreemi 1.4 asemel teoreemile 2.3). Seepärast jätame tõestamise lugejale. □

2.4. Esimest liiki joonintegraali rakendusi

Teoreem 2.5. *Olgu L sirgestuv kaar (või, täpsemalt, sirgestuva kaare jälg) xy-tasandil ning olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ pidev kaarel L. Siis silindrilise pinna*

$$\Sigma := \Big\{(x, y, z) : \ (x, y) \in L, \ z \in \big[0, f(x, y)\big]\Big\}$$

pindala on

$$S_\Sigma = \int_L f(x, y)\, ds.$$

Tõestus. Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta. □

§ 3. Teist liiki tasandiline joonintegraal

3.1. Teist liiki joonintegraali mõiste

Olgu (tasandiline) kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.1}$$

Tähistame $A := \big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ ja $B := \big(x(\beta), y(\beta)\big)$, s.t. A ja B on vastavalt selle kaare algus- ja lõpp-punkt; sellele kaarele viitame edasises kui kaarele AB. Olgu kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioon $z = f(P) = f(x, y)$.

Jagame lõigu $[\alpha, \beta]$ osalõikudeks punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

ning tähistame $x_j := x(t_j)$, $y_j := y(t_j)$, $A_j := (x_j, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

ning fikseerime osakaarel $A_{j-1}A_j$ mingi punkti B_j, s.t.

$$B_j := \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big), \quad \text{kus } \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]. \tag{3.3}$$

Moodustame *integraalsumma*

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, \Delta x_j. \tag{3.4}$$

Definitsioon 3.1. Kui integraalsummadel (3.4) eksisteerib piirväärtus $I \in \mathbb{R}$, s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.2) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (3.3) korral)

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, \Delta x_j - I \right| < \varepsilon, \tag{3.5}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist f üle kaare AB projektsioonide järgi x-teljele* ja tähistatakse sümboliga

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx := \lim \sum_{j=1}^{n} f(B_j)\, \Delta x_j := I. \tag{3.6}$$

Kaarele AB viidatakse seejuures kui *integreerimisteele.*

Analoogiliselt defineeritakse *teist liiki (tasandiline) joonintegraal funktsioonist f üle kaare AB projektsioonide järgi y-teljele*

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy. \tag{3.7}$$

Kui funktsioonid $u = F(x,y)$ ja $v = G(x,y)$ on määratud kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), siis me tähistame

$$\int_{AB} F\,dx + G\,dy := \int_{AB} F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy := \int_{AB} F(x,y)\,dx + \int_{AB} G(x,y)\,dy.$$

Märkus 3.1. Analoogiliselt märkuses 1.3 tõestatuga saab näidata, et *kui kaar* (3.1) *on lihtne, siis tema jaoks jääb integraalsummade* (3.4) *piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 3.1 implikatsioonis* (3.5) *asendada tingimus*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$$

tingimusega

$$\max\bigl\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \ldots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\bigr\} < \delta$$

või tingimusega

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta.$$

Märkus 3.2. Osutub, et *kui tasandiline kaar Φ on lihtne ning sellel kaarel (või täpsemalt, tema jäljel) on määratud ($\mathbb{R}$-väärtuseline) funktsioon f, siis mis tahes lihtsa tasandilise kaare Ψ korral, mille jälg on võrdne kaare Φ jäljega ja mille algupunkt ühtib kaare Φ alguspunktiga, eksisteerib teist liiki joonintegraal funktsioonist f üle kaare Ψ (ükskõik, kas projektsioonide järgi x-teljele või y-teljele) parajasti siis, kui eksisteerib vastav integraal üle kaare Φ, kusjuures nende integraalide eksisteerimise juhul on nad võrdsed.*

Tõepoolest, kui Φ ja Ψ on lihtsad kaared, mille alguspunktid ja jäljed ühtivad, siis funktsioonid Φ ja Ψ määravad sellel jäljel ühesuguse punktide järjestuse (vt. ülesannet 3.3). Siit järeldub, et mis tahes sellel jäljel määratud funktsiooni korral on selle funktsiooni integraalsummade hulk (nii projektsioonide järgi x-teljele kui ka y-teljele) üle kaare Φ sama, mis vastavate integraalsummade hulk üle kaare Ψ (PÕHJENDADA!). Märkusest 3.1 järeldub, et ka nende integraalsummade piirväärtused üle kaarte Φ ja Ψ on võrdsed (või ei eksisteeri kumbki nendest piirväärtustest) (PÕHJENDADA!) ehk, teisisõnu, teist liiki joonintegraalid vaadeldavast funktsioonist üle kaarte Φ ja Ψ on võrdsed.

Eelnevast arutelust nähtub, et tõestatud väide jääb kehtima, kui seal vaadelda lihtsate kaarte asemel kaari, mis määravad nende kaarte ühisel jäljel ühesuguse punktide järjestuse ("jälje punktide läbimise järjekorra").

Eelnevaga on õigustatud järgnev ülesannetekogudes sagedasti esinev ülesandepüstitus: etteantud (tasandilise) punktihulga – millele selles ülesandes viidatakse kui kaarele ja mille puhul on ette antud "tema punktide läbimise järjekord" – ning sellel punktihulgal määratud ($\mathbb{R}$-väärtuselise) funktsiooni korral leida teist liiki joonintegraal sellest funktsioonist üle selle punktihulga – kaare (kas siis projektsioonide järgi x-teljele või y-teljele). Selles ülesandes peetakse "kaare" all silmas mingit kaart, mille jälg see punktihulk on ning mille poolt määratud "jälje punktide läbimise järjekord" ühtib selle etteantud järjekorraga: eelneva põhjal on teist liiki joonintegraalid vaadeldavast funktsioonist üle kõigi niisuguste kaarte võrdsed ning seega ei sõltu selle integraali väärtus sellise kaare valikust.

3.2. Integraalsummade piirväärtus integraalsummade jadade piirväärtuste kaudu

Järgnev lause kirjeldab integraalsummade (3.4) piirväärtuse (ehk siis, teisisõnu, teist liiki joonintegraali (projektsioonide järgi x-teljele)) mõistet. Selleks lepime kokku järgnevas terminoloogias: kõikjal selle paragrahvi ulatuses, kõneldes *(funktsiooni f) integraalsummade jadast (kaarel AB) (projektsioonide järgi x-teljele),* mõistame me selle all mingit niisugust arvjada $(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$, kus

(1) iga $m \in \mathbb{N}$ korral σ_m on funktsiooni f integraalsumma tüüpi (3.4), s.t.

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{n_m} f(B_j^m)\, \Delta x_j^m, \tag{3.8}$$

kus $n_m \in \mathbb{N}$ ning lõigu $[\alpha, \beta]$ mingi jaotusviisi

$$\alpha = t_0^m < t_1^m < \cdots < t_{n_m}^m = \beta \tag{3.9}$$

korral $\Delta x_j^m := x(t_j^m) - x(t_{j-1}^m)$ ja

$$B_j^m = \big(x(\tau_j^m), y(\tau_j^m)\big) \quad \text{mingi } \tau_j^m \in [t_{j-1}^m, t_j^m] \text{ korral;} \tag{3.10}$$

(2) integraalsummadele (3.8) vastavate lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviiside (3.9) pikima osalõigu pikkus läheneb nullile protsessis $m \to \infty$, s.t.

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n_m} \Delta t_j^m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0, \tag{3.11}$$

kus $\Delta t_j^m := t_j^m - t_{j-1}^m$.

Lause 3.1. *Olgu $I \in \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsiooni f integraalsummade* (3.4) *piirväärtus on arv I;*

(ii) *funktsiooni f mis tahes integraalsummade jada (kaarel AB projektsioonide järgi x-teljele) koondub arvuks I.*

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i), olgu $(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$ funktsiooni f integraalsummade jada (kaarel AB projektsioonide järgi x-teljele) ning olgu $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks peame leidma indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m \in \mathbb{N},\ m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |\sigma_m - I| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Eelduse (i) põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.2) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (3.3) korral) kehtib implikatsioon (3.5). Nüüd, valides naturaalarvu N nii, et

$$m \in \mathbb{N},\ m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n_m} \Delta t_j^m < \delta$$

(selline valik on võimalik koonduvuse (3.11) tõttu), kehtib implikatsioon (3.12), nagu soovitud.

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et arv I ei ole funktsiooni f integraalsummade (3.4) piirväärtus. Siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral leiduvad lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviis (3.9) ning punktid (3.10), $j = 1, \ldots, n_m$, nii, et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n_m} \Delta t_j^m < \frac{1}{m},$$

kuid $|\sigma_m - I| \geqslant \varepsilon$, kus integraalsumma σ_m on defineeritud võrdusega (3.8) (PÕHJENDADA!). Nüüd $(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$ on funktsiooni f integraalsummade jada (kaarel AB projektsioonide järgi x-teljele), mis ei koondu arvuks I, vastuolu. □

Jaotise lõpetuseks tõestame järeldusena lausest 3.1, et *teist liiki joonintegraal pidevast funktsioonist üle sirgestuva kaare (nii projektsioonide järgi x-teljele kui ka y-teljele) eksisteerib alati.*

Teoreem 3.2. *Olgu AB sirgestuv (tasandiline) kaar ning olgu funktsioonid F ja G pidevad sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel). Siis eksisteerib teist liiki joonintegraal $\int_{AB} F\,dx + G\,dy$.*

Tõestus. Tõestame teoreemi väite ainult juhul, kus $G = 0$. Juhul, kus $F = 0$, tõestatakse väide analoogiliselt; väite kehtivusest juhtudel, kus vastavalt $G = 0$ ja $F = 0$, järeldub selle väite kehtivus üldjuhul (PÕHJENDADA!).

Niisiis, eeldame järgnevas, et $G = 0$. Kõneldes integraalsummadest ja integraalsummade jadadest, mõistame me selle all alati integraalsummasid ja integraalsummade jadasid kaarel AB projektsioonide järgi x-teljele.

Kõigepealt paneme tähele, et leidub koonduv funktsiooni F integraalsummade jada $(\upsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ (PÕHJENDADA! – SELLEKS NÄIDATA, ET FUNKTSIOONI F IGA INTEGRAALSUMMADE JADA ON TÕKESTATUD NING RAKENDADA BOLZANO–WEIERSTRASSI TEOREEMI). Tähistame $I := \lim_{m\to\infty} \upsilon_m$.

Lause 3.1 põhjal piisab väite tõestuseks näidata, et funktsiooni F mis tahes integraalsummade jada koondub arvuks I. Olgu $(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$ suvaline funktsiooni F integraalsummade jada ning olgu $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida arv $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m \in \mathbb{N},\ m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |\sigma_m - I| < 2\varepsilon.$$

Esitugu kaar AB parameetriliste võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, kus $A = \bigl(x(\alpha), y(\alpha)\bigr)$ ja $B = \bigl(x(\beta), y(\beta)\bigr)$. Kuna funktsioon $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto F\bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \mathbb{R}$ on pidev, siis Cantori teoreemi põhjal on see funktsiooni ühtlaselt pidev lõigus $[\alpha, \beta]$, seega leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta],\ |t - t'| < 2\delta \quad \Longrightarrow \quad \bigl|F\bigl(x(t), y(t)\bigr) - F\bigl(x(t'), y(t')\bigr)\bigr| < \frac{\varepsilon}{s},$$

kus s tähistab kaare AB pikkust (siin me võime üldisust kitsendamata eeldada, et $s > 0$). Koonduvuse $\upsilon_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I$ tõttu leidub arv $l \in \mathbb{N}$ nii, et $|\upsilon_l - I| < \varepsilon$. Integraalsumma υ_l esitub kujul

$$\upsilon_l = \sum_{j=1}^{n} F(B_j)\,\Delta x_j$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ning mingite punktide $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ ja $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, korral

$$\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}) \quad \text{ja} \quad B_j = \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big).$$

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta$, kus $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ (PÕHJENDADA.!) Tähistame $\delta_0 := \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j$ ja $A_j = \big(x(t_j), y(t_j)\big)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Valime arvu $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga sellest arvust mitte väiksema indeksi $m \in \mathbb{N}$ korral on integraalsummale σ_m vastava lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisi maksimaalse osalõigu pikkus väiksem kui $\dfrac{\delta_0}{2}$. Fikseerime vabalt arvu $m \in \mathbb{N}$, kus $m \geqslant N$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $|\sigma_m - I| < 2\varepsilon$. Kuna

$$|\sigma_m - I| \leqslant |\sigma_m - \upsilon_l| + |\upsilon_l - I| < |\sigma_m - \upsilon_l| + \varepsilon,$$

siis jääb näidata, et $|\sigma_m - \upsilon_l| < \varepsilon$. Selleks märgime, et integraalsumma σ_m esitub kujul

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{\nu} F(D_k)\, \Delta\xi_k,$$

kus $\nu \in \mathbb{N}$ ning mingite punktide $\alpha = p_0 < p_1 < \cdots < p_\nu = \beta$ ja $\pi_k \in [p_{k-1}, p_k]$, $k = 1, \ldots, \nu$, korral

$$\Delta\xi_k = x(p_k) - x(p_{k-1}) \quad \text{ja} \quad D_k = \big(x(\pi_k), y(\pi_k)\big).$$

Tähistame iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\varkappa_0^j := \min\big\{k \in \{1, \ldots, \nu\} \colon t_{j-1} \leqslant p_k\big\} \quad \text{ja} \quad \varkappa^j := \max\big\{k \in \{1, \ldots, \nu\} \colon p_k \leqslant t_j\big\}$$

(märgime, et $t_{j-1} \leqslant p_{\varkappa_0^j} < p_{\varkappa^j} \leqslant t_j \leqslant p_{\varkappa_0^{j+1}}$ iga $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral) ning

$$\Delta\xi_0^j := x(p_{\varkappa_0^j}) - x(t_{j-1}) \quad \text{ja} \quad \Delta\xi^j := x(t_j) - x(p_{\varkappa^j});$$

siis

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} F(D_k)\, \Delta\xi_k + \sum_{j=2}^{n} F(D_{\varkappa_0^j})\big(x(p_{\varkappa_0^j}) - x(p_{\varkappa^{j-1}})\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} F(D_k)\, \Delta\xi_k + \sum_{j=2}^{n} F(D_{\varkappa_0^j})(\Delta\xi_0^j + \Delta\xi^{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Bigg(F(D_{\kappa_0^j})\, \Delta\xi_0^j + \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} F(D_k)\, \Delta\xi_k + F(D_{\kappa_0^{j+1}})\, \Delta\xi^j \Bigg),
\end{aligned}$$

kus $D_{\varkappa_0^1} := B_1$ ja $D_{\varkappa_0^{n+1}} := B_n$ (märgime, et $\varkappa_0^1 = 0$ ning $\Delta\xi_0^1 = \Delta\xi^n = 0$ (PÕHJENDADA!)). Nüüd

$$|\sigma_m - v_l| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\Bigg(\big|F(D_{\varkappa_0^j}) - F(B_j)\big|\,|\Delta\xi_0^j| + \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} \big|F(D_k) - F(B_j)\big|\,|\Delta\xi_k| + \big|F(D_{\varkappa_0^{j+1}}) - F(B_j)\big|\,|\Delta\xi^j|\Bigg) + \left|\sum_{j=1}^{n}\Bigg(F(B_j)\,\Delta\xi_0^j + \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} F(B_j)\,\Delta\xi_k + F(B_j)\,\Delta\xi^j\Bigg) - v_l\right|$$

Paneme tähele, et mis tahes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $k \in \{\varkappa_0^j, \varkappa_0^j + 1, \ldots, \varkappa^j, \varkappa_0^{j+1}\}$ korral

$$|F(D_k) - F_(B_j)| < \frac{\varepsilon}{s}. \tag{3.13}$$

Tõepoolest, olgu $j \in \{1, \ldots, n\}$. Kui $k \in \{\varkappa_0^j + 1, \ldots, \varkappa^j\}$, siis $D_k = \big(x(\pi), y(\pi)\big)$ mingi $\pi \in [t_{j-1}, t_j]$ korral, järelikult (3.13) kehtib (PÕHJENDADA!); kui $k = \varkappa_0^j$ või $k = \varkappa_0^{j+1}$, siis $D_k = \big(x(\pi), y(\pi)\big)$ vastavalt mingi $\pi \in [t_{j-2}, t_{j-1}] \cup [t_{j-1}, t_j]$ ja $\pi \in [t_{j-1}, t_j] \cup [t_j, t_{j+1}]$ korral (siin me loeme $[t_{-1}, t_0] = [t_n, t_{n+1}] = \varnothing$), järelikult (3.13) kehtib (PÕHJENDADA!). Seega

$$\begin{aligned}|\sigma_m - v_l| &< \frac{\varepsilon}{s}\sum_{j=1}^{n}\Bigg(|\Delta\xi_0^j| + \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} |\Delta\xi_k| + |\Delta\xi^j|\Bigg) + \left|\sum_{j=1}^{n} F(B_j)\Bigg(\Delta\xi_0^j + \sum_{k=\varkappa_0^j+1}^{\varkappa^j} \Delta\xi_k + \Delta\xi^j\Bigg) - v_l\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{s}\sum_{j=1}^{n}|A_{j-1}A_j| + \left|\sum_{j=1}^{n} F(B_j)\,\Delta x_j - v_l\right| = \varepsilon,\end{aligned}$$

kus $|A_{j-1}A_j|$ tähistab kõõlu $A_{j-1}A_j$ pikkust (PÕHJENDADA!). Teoreem on tõestatud. □

3.3. Teist liiki joonintegraali omadusi

Järgnev lause võtab kokku teist liiki joonintegraali olulisemad lihtsamat sorti omadused.

Lause 3.3. *Olgu AB kaar xy-tasandil ning olgu sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioonid $u = F(x, y)$, $u_1 = F_1(x, y)$, $u_2 = F_2(x, y)$, $v = G(x, y)$, $v_1 = G_1(x, y)$ ja $v_2 = G_2(x, y)$.*

(a) *Teist liiki joonintegraal sõltub kaare (või, täpsemalt, selle kaare jälje) läbimise suunast: kaare AB (või täpsemalt, selle kaare jälje) läbimisel vastassuunas integraali märk muutub:*

$$\int_{BA} F\,dx + G\,dy = -\int_{AB} F\,dx + G\,dy$$

(siin peetakse kaare BA all silmas mingit kaart, mille jälg ühtib kaare AB jäljega ning mille poolt sellel jäljel määratud punktide järjestus ("jälje punktide läbimise järjekord") on täpselt vastupidine kaare AB poolt määratud järjestusele (muuhulgas, kaare BA alguspunkt on B ja lõpp-punkt A)).

(b) *Kui kaar AB on risti x-teljega, siis*

$$\int_{AB} F\,dx = 0; \tag{3.14}$$

kui kaar AB on risti y-teljega, siis

$$\int_{AB} G\,dy = 0.$$

(c) *Olgu $c \in \mathbb{R}$.*

(c1) *Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal*

$$\int_{AB} F\,dx =: I, \tag{3.15}$$

siis eksisteerib ka joonintegraal $\int_{AB} c\,F\,dx$, kusjuures

$$\int_{AB} c\,F\,dx = c\int_{AB} F\,dx.$$

(c2) *Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal $\int_{AB} G\,dy$, siis eksisteerib ka joonintegraal $\int_{AB} c\,G\,dy$, kusjuures*

$$\int_{AB} c\,G\,dy = c\int_{AB} G\,dy.$$

(d) (d1) *Kui eksisteerivad teist liiki joonintegraalid*

$$\int_{AB} F_1\,dx =: I_1 \quad ja \quad \int_{AB} F_2\,dx =: I_2, \tag{3.16}$$

siis eksisteerivad ka joonintegraalid $\int_{AB} \big(F_1 \pm F_2\big)\,dx$, kusjuures

$$\int_{AB} \big(F_1 \pm F_2\big)\,dx = \int_{AB} F_1\,dx \pm \int_{AB} F_2\,dx.$$

(d2) *Kui eksisteerivad teist liiki joonintegraalid*

$$\int_{AB} G_1\,dy \quad ja \quad \int_{AB} G_2\,dy, \tag{3.17}$$

siis eksisteerivad ka joonintegraalid $\int_{AB}\big(G_1 \pm G_2\big)\,dy$, *kusjuures*

$$\int_{AB}\big(G_1 \pm G_2\big)\,dy = \int_{AB} G_1\,dy \pm \int_{AB} G_2\,dy.$$

(e) *Eksisteerigu teist liiki joonintegraalid* (3.16) *ja* (3.17)*. Siis eksisteerib ka joonintegraal*

$$\int_{AB}\big(a_1F_1 + a_2F_2\big)\,dx + \big(b_1G_1 + b_2G_2\big)\,dy, \tag{3.18}$$

kusjuures

$$\int_{AB}\big(a_1F_1 + a_2F_2\big)\,dx + \big(b_1G_1 + b_2G_2\big)\,dy$$
$$= a_1\int_{AB} F_1\,dx + a_2\int_{AB} F_2\,dx + b_1\int_{AB} G_1\,dy + b_2\int_{AB} G_2\,dy.$$

(f) *Olgu C kaare AB punkt, mis asub punktide A ja B vahel.*

(f1) *Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal*

$$\int_{AB} F\,dx + G\,dy, \tag{3.19}$$

siis eksisteerivad ka teist liiki joonintegraalid

$$\int_{AC} F\,dx + G\,dy \quad ja \quad \int_{CB} F\,dx + G\,dy. \tag{3.20}$$

(f2) *Kui funktsioonid F ja G tõkestatud kaarel AB ning eksisteerivad teist liiki joonintegraalid* (3.20)*, siis eksisteerib ka teist liiki joonintegraal* (3.19)*, kusjuures*

$$\int_{AB} F\,dx + G\,dy = \int_{AC} F\,dx + G\,dy + \int_{CB} F\,dx + G\,dy.$$

Märkus 3.3. Väite (f) tõestus toetub lausele 3.1. Selle lause kasutamine võimaldaks lihtsustada ka väidete (c) ja (d) tõestusi.

LAUSE 3.3 TÕESTUS. Esitugu kaar AB parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

kus $A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ ja $B = \big(x(\beta), y(\beta)\big)$. Lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisi korral punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.21}$$

tähistame $A_j = \big(x(t_j), y(t_j)\big)$, $j = 0, 1, \ldots, n$; iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}$$

ning, fikseerides osakaarel $A_{j-1}A_j$ mingi punkti B_j, s.t. $B_j = \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big)$, kus $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, tähistame

$$\sigma := \sum_{j=1}^{n} F(B_n)\,\Delta x_j. \tag{3.22}$$

(a). Olgu BA mingi kaar, mille jälg ühtib kaare AB jäljega ning mille poolt sellel jäljel määratud punktide järjestus ("jälje punktide läbimise järjekord") on täpselt vastupidine kaare AB poolt määratud järjestusele (muuhulgas, kaare BA alguspunkt on B ja lõpp-punkt A). Siis funktsiooni F integraalsummad üle kaare BA projektsioonide järgi x-teljele on parajasti miinusmärgiga integraalsummad (3.22) (PÕHJENDADA!). Märkusest 3.1 järeldub nüüd, et funktsiooni F integraalsummadel üle kaare BA projektsioonide järgi x-teljele eksisteerib piirväärtus parajasti siis, kui eksisteerib piirväärtus integraalsummadel (3.22), kusjuures need piirväärtused on vastandmärgilised (PÕHJENDADA!). Niisiis, integraal $\int_{BA} F\,dx$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib $\int_{AB} F\,dx$, kusjuures $\int_{BA} F\,dx = -\int_{AB} F\,dx$.

Analoogiliselt arutledes saame, et integraal $\int_{BA} G\,dy$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib $\int_{AB} G\,dy$, kusjuures $\int_{BA} G\,dx = -\int_{AB} G\,dy$.

Eelnevast järeldub, et integraal $\int_{BA} F\,dx + G\,dy$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib integraal $\int_{AB} F\,dx + G\,dy$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{BA} F\,dx + G\,dy &= \int_{BA} F\,dx + \int_{BA} G\,dy = -\int_{AB} F\,dx - \int_{AB} G\,dy \\ &= -\left(\int_{AB} F\,dx + \int_{AB} G\,dy\right) = -\int_{AA} F\,dx + G\,dy.\end{aligned}$$

(b). Kui kaar AB on risti x-teljega, siis kõik integraalsummad (3.22) on võrdsed arvuga 0 (sest iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\Delta x_j = 0$), seega ka nende integraalsummade piirväärtus on 0, s.t. kehtib (3.14).

Juhtu, kus kaar AB on risti y-teljega, käsitletakse analoogiliselt.

(c). Tõestame ainult väite (c1). (Väide (c2) tõestatakse analoogiliselt.) Eksisteerigu teist liiki joonintegraal (3.15). Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Väite (c1) tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.21) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide $B_1, \ldots, B_n$ korral)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} c\,F(B_j)\,\Delta x_j - c\,I\right| = |c|\left|\sum_{j=1}^{n} F(B_j)\,\Delta x_j - I\right| < \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $c \neq 0$. Integraali (3.15) olemasolu tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{n} F(B_j)\,\Delta x_j - I\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c\,F(B_j)\,\Delta x_j - c\,I\right| < |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

(d). Tõestame ainult väite (d1). (Väide (d2) tõestatakse analoogiliselt.) Eksisteerigu teist liiki joonintegraalid (3.16). Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Väite (d1) tõestuseks piisab leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.21) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide $B_1, \dots, B_n$ korral)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{j=1}^{n}\big(F_1(B_j) \pm F_2(B_j)\big)\,\Delta x_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n}\big(F_1(B_j) \pm F_2(B_j)\big)\,\Delta x_j - (I_1 \pm I_2)\right| \\
&\qquad = \left|\left(\sum_{j=1}^{n} F_1(B_j)\,\Delta x_j - I_1\right) \pm \left(\sum_{j=1}^{n} F_2(B_j)\,\Delta x_j - I_2\right)\right| \\
&\qquad\qquad \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} F_1(B_j)\,\Delta x_j - I_1\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} F_2(B_j)\,\Delta x_j - I_2\right|.
\end{aligned}$$

Integraalide (3.16) olemasolu tõttu leiduvad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_1 \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{j=1}^{n} F_1(B_j)\,\Delta x_j - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{j=1}^{n} F_2(B_j)\,\Delta x_j - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\big(F_1(B_j) \pm F_2(B_j)\big)\,\Delta x_j - (I_1 \pm I_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e). Joonintegraali (3.18) olemasolu järeldub vahetult väidetest (c) ja (d) (põh-

JENDADA!); seejuures (jällegi väidete (c) ja (d) põhjal)

$$\begin{aligned}
\int_{AB} &(a_1F_1 + a_2F_2)\,dx + (b_1G_1 + b_2G_2)\,dy \\
&= \int_{AB} (a_1F_1 + a_2F_2)\,dx + \int_{AB} (b_1G_1 + b_2G_2)\,dy \\
&= \int_{AB} a_1F_1\,dx + \int_{AB} a_2F_2\,dx + \int_{AB} b_1G_1\,dy + \int_{AB} b_2G_2\,dy \\
&= a_1\int_{AB} F_1\,dx + a_2\int_{AB} F_2\,dx + b_1\int_{AB} G_1\,dy + b_2\int_{AB} G_2\,dy.
\end{aligned}$$

(f). Olgu $\gamma \in [\alpha, \beta]$ selline, et $C = \big(x(\gamma), y(\gamma)\big)$. Siis kaared AC ja CB esituvad vastavalt parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \gamma] \qquad \text{ja} \qquad x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [\gamma, \beta].$$

Tõestame väite ainult juhul, kus $G = 0$. Juhul, kus $F = 0$, tõestatakse väide analoogiliselt; väite kehtivusest juhtudel, kus vastavalt $G = 0$ ja $F = 0$, järeldub selle väite kehtivus üldjuhul (PÕHJENDADA!).

Niisiis, eeldame järgnevas, et $G = 0$. Kõneldes integraalsummadest ja integraalsummade jadadest, mõistame me selle all alati integraalsummasid ja integraalsummade jadasid projektsioonide järgi x-teljele (selliste integraalsummade jada mõistet on selgitatud eespool jaotises 3.2).

(f1). Eksisteerigu teist liiki joonintegraal $\int_{AB} F\,dx =: I$. Tõestame ainult joonintegraali $\int_{AC} F\,dx$ olemasolu (joonintegraali $\int_{CB} F\,dx$ olemasolu tõestatakse analoogiliselt).

Kõigepealt näitame, et funktsiooni F mis tahes integraalsummade jada kaarel AC on tõkestatud. Oletame vastuväiteliselt, et funktsiooni F mingi integraalsummade jada $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ kaarel AC on tõkestamata. Joonintegraali $\int_{AB} F\,dx = I$ olemasolu tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et (lõigu $[\alpha, \beta]$ mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.21) ning mis tahes sellele jaotusviisile vastava integraalsumma (3.22) korral)

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sigma - I| < 1$$

ning seega

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sigma| < \max\{|I - 1|, |I + 1|\} =: \kappa. \tag{3.23}$$

Fikseerime vabalt funktsiooni F mingi niisuguse integraalsumma ρ' kaarel CB, mis vastab lõigu $[\gamma, \beta]$ mingile jaotusviisile, mille osalõikude maksimaalne pikkus on väiksem kui δ. Kuna integraalsummade jada $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ on tõkestamata, siis leidub funktsiooni F integraalsumma ρ kaarel AC, mis vastab lõigu $[\alpha, \gamma]$ mingile jaotusviisile, mille osalõikude maksimaalne pikkus on väiksem kui δ, nii, et

$$|\rho| > \kappa + |\rho'|$$

(PÕHJENDADA!). Nüüd $\sigma := \rho + \rho'$ on funktsiooni F integraalsumma kaarel AB, mis vastab lõigu $[\alpha, \beta]$ mingile jaotusviisile, mille osalõikude maksimaalne pikkus on väiksem kui δ (PÕHJENDADA!), seega implikatsiooni (3.23) tõttu $|\sigma| < \kappa$. Teiselt poolt,

$$|\sigma| = |\rho + \rho'| \geqslant |\rho| - |\rho'| > \kappa + |\rho'| - |\rho'| = \kappa,$$

vastuolu. Niisiis, funktsiooni F iga integraalsummade jada kaarel AC on tõkestatud.

Kuna Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal saab igast tõkestatud arvjadast välja eraldada koonduva osajada, siis leidub koonduv funktsiooni F integraalsummade jada $(\upsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ kaarel AC. Tähistame $J := \lim_{m\to\infty} \upsilon_m$.

Olgu $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ suvaline funktsiooni F integraalsummade jada kaarel AC. Lause 3.1 põhjal piisab joonintegraali $\int_{AC} F(x, y)\, dx$ olemasoluks näidata, et $\rho_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J$. Selleks fikseerime vabalt funktsiooni F mingi integraalsummade jada $(\rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ kaarel CB. Kuna $(\rho_m + \rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ ja $(\upsilon_m + \rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ on funktsiooni F integraalsummade jadad kaarel AB (PÕHJENDADA!), siis lause 3.1 põhjal

$$\rho_m + \rho'_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I \quad \text{ja} \quad \upsilon_m + \rho'_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I$$

ning järelikult

$$\rho_m = (\rho_m + \rho'_m) - (\upsilon_m + \rho'_m) + \upsilon_m \xrightarrow[m\to\infty]{} I - I + J = J,$$

nagu soovitud.

(f2). Olgu funktsioon F tõkestatud kaarel AB, s.t. leidub reaalarv $M \geqslant 0$ nii, et

$$|F(x, y)| \leqslant M \quad \text{iga punkti } (x, y) \text{ korral kaarelt } AB,$$

ning eksisteerigu teist liiki joonintegraalid $\int_{AC} F\, dx =: J_1$ ja $\int_{CB} F\, dx =: J_2$. Olgu $(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$ suvaline funktsiooni F integraalsummade jada kaarel AB, s.t. kehtivad lausele 3.1 eelnevad tingimused (1) ja (2). Teist liiki joonintegraali $\int_{AB} F\, dx$ olemasoluks ja võrduseks

$$\int_{AB} F\, dx = \int_{AC} F\, dx + \int_{CB} F\, dx$$

piisab lause 3.1 põhjal näidata, et $\sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_1 + J_2$.

Tähistame iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$j_m := \min\bigl\{j \in \{1, \ldots, n_m\} : \gamma \leqslant t_j^m\bigr\}$$

(siis $t_{j_m - 1} < \gamma \leqslant t_{j_m}$) ning

$$\Delta x_0^m := x(\gamma) - x(t_{j_m-1}), \qquad \rho_m := \sum_{j=1}^{j_m-1} F(B_j^m)\, \Delta x_j^m + F(C)\, \Delta x_0^m,$$

$$\Delta \widehat{x}_0^m := x(t_{j_m}) - x(\gamma), \qquad \rho'_m := F(C)\, \Delta \widehat{x}_0^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} F(B_j^m)\, \Delta x_j^m.$$

Siis $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ ja $(\rho'_m)_{m=1}^{\infty}$ on funktsiooni F integraalsummade jadad vastavalt kaartel AC ja CB (PÕHJENDADA!), seega lause 2.1 põhjal $\rho_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_1$ ja $\rho'_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_2$. Kuna

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \sum_{j=1}^{n_m} F(B_j^m)\,\Delta x_j^m = \sum_{j=1}^{j_m-1} F(B_j^m)\,\Delta x_j^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} F(B_j^m)\,\Delta x_j^m + F(B_{j_m}^m)\,\Delta x_{j_m}^m \\ &= \rho_m + \rho'_m + F(B_{j_m}^m)\,\Delta x_{j_m}^m - F(C)\,\Delta x_0^m - F(C)\,\Delta \widehat{x}_0^m \\ &= \rho_m + \rho'_m + \big(F(B_{j_m}^m) - F(C)\big)\,\Delta x_{j_m}^m\end{aligned}$$

(sest $\Delta x_0^m + \Delta \widehat{x}_0^m = \Delta x_{j_m}^m$), siis jääb soovitud koonduvuseks $\sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} J_1 + J_2$ näidata, et

$$\big(F(B_{j_m}^m) - F(C)\big)\,\Delta x_{j_m}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0. \tag{3.24}$$

Kuna

$$\big|\big(F(B_{j_m}^m) - F(C)\big)\Delta x_{j_m}^m\big| \leqslant \big(|F(B_{j_m}^m)| + |F(C)|\big)\Delta x_{j_m}^m \leqslant 2M\,\Delta x_{j_m}^m,$$

siis piisab koonduvuseks (3.24) näidata, et $\Delta x_{j_m}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. See järeldub Cantori teoreemist lõigus pideva funktsiooni ühtlasest pidevusest (PÕHJENDADA!). □

Olgu L mingi sirgestuva lihtsa kinnise (tasandilise) kaare jälg xy-tasandil ning olgu sellel jäljel L määratud pidevad funktsioonid F ja G. Siis kirjaviisist

$$\int_L F\,dx + G\,dy \tag{3.25}$$

ei selgu, milline jälje L punkt tuleb teist liiki joonintegraali (3.25) leidmisel valida kaare alguspunktiks (ja ühtlasi lõpp-punktiks) ning millises suunas tuleb see jälg läbida (s.t. milline on on selle jälje "punktide läbimise järjekord"). Jälje L ühesuguse läbimise suuna puhul ei sõltu integraal (3.25) kaare alguspunkti valikust (see järeldub lausest 3.3, (f), ja märkusest 3.2 (PÕHJENDADA!)), küll aga sõltub see integraal jälje läbimise suunast – jälje läbimisel vastassuunas muutub selle integraali märk (vt. lauset 3.3, (a)).

NB! Joonis?

Lihtsa kinnise kaare jälje läbimise suunda, milles liikudes selle jäljega piiratud tasandi osa jääb vasakule, nimetatakse *positiivseks suunaks.* (Piltlikult väljendudes, positiivne suund on kellaosuti liikumise vastassuund.)

On tavaks leppida kokku järgmises: kui L on sirgestuva lihtsa kinnise kaare jälg, siis *kirjaviisi* (3.25) *puhul mõistetakse jälje L läbimise suunana positiivset suunda,* s.t. selle integraali arvutamisel tuleb leida vastav teist liiki joonintegraal üle niisuguse lihtsa kinnise kaare $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$, mille jälg on L ning mille puhul parameetri $t \in [\alpha,\beta]$ kasvades liigub kaare punkt $\Phi(t)$ mööda kaart positiivses suunas.

Kui on vaja märkida integraali üle lihtsa kinnise kaare (mille jälg on L) *negatiivses suunas* (s.t. kellaosuti liikumise vastassuunas), kirjutatakse integraali (3.25) ette miinusmärk.

3.4. Teist liiki joonintegraali arvutamine

Teoreem 3.4. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(P) = f(x, y)$ pidev (tasandiliselt) kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), mis esitub antud parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{3.26}$$

kus funktsioonidel (3.26) *eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis ning*

$$A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \quad ja \quad B = \big(x(\beta), y(\beta)\big).$$

Siis eksisteerivad teist liiki joonintegraalid funktsioonist f üle kaare AB projektsioonide järgi nii x- kui ka y-teljele, kusjuures

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt \tag{3.27}$$

ja

$$\int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)\, dt. \tag{3.28}$$

Tõestus. Tõestame ainult valemi (3.27) (valem (3.28) tõestatakse analoogiliselt). Tähistame

$$I := \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt. \tag{3.29}$$

Fikseerides vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$, piisab valemi (3.27) tõestuseks leida reaalarv $\delta > 0$ nii, et, jagades lõigu $[\alpha, \beta]$ suvaliselt osalõikudeks punktidega $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := \beta$ ($n \in \mathbb{N}$) ning fikseerides iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral suvaliselt punkti $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ja tähistades

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x(t_j) - x(t_{j-1}), \quad B_j := \big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big),$$

kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta t_j < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^n f(B_j)\, \Delta x_j - I \right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral Newton–Leibnizi valemi põhjal

$$\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} x'(t)\, dt, \tag{3.30}$$

seega

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^n f(B_j)\, \Delta x_j - I \right| &= \left| \sum_{j=1}^n f\big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big) \int_{t_{j-1}}^{t_j} x'(t)\, dt - \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big)\, x'(t)\, dt - \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big| f\big(x(\tau_j), y(\tau_j)\big) - f\big(x(t), y(t)\big) \Big|\, |x'(t)|\, dt.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Kuna tuletisfunktsioon x' on pidev lõigus $[\alpha,\beta]$, siis Weierstrassi esimese teoreemi põhjal ta on ka tõkestatud selles lõigus, s.t. leidub $M>0$ nii, et

$$\bigl|x'(t)\bigr| \leqslant M \quad \text{iga } t\in[\alpha,\beta] \text{ korral.}$$

Lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon $t\mapsto f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ on Cantori teoreemi põhjal ühtlaselt pidev selles lõigus, seega leidub $\delta>0$ nii, et

$$t,t'\in[\alpha,\beta],\ |t-t'|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \Bigl|f\bigl(x(t),y(t)\bigr)-f\bigl(x(t'),y(t')\bigr)\Bigr| < \frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}.$$

Kui nüüd $\max\limits_{1\leqq j\leqslant n}\Delta t_j<\delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\,\Delta x_j - I\right| < \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\varepsilon}{M\,(\beta-\alpha)}\,M\,dt = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{j=1}^n\Delta t_j=\varepsilon.$$

□

Märkus 3.4. Teoreemi 3.4 saab tõestada ka ilma Cantori teoreemi kasutamata. Tõepoolest, summat (3.31) saab hinnata ka teisiti. Nimelt, tähistades

$$M_j := \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f\bigl(x(t),y(t)\bigr),\quad m_j := \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]} f\bigl(x(t),y(t)\bigr),\qquad j=1,\dots,n$$

(need supreemumid ja infiimumid eksisteerivad, sest lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon $t\mapsto f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ on Weierstrassi teoreemi põhjal tõkestatud selles lõigus ning seega tõkestatud ka igas osalõigus $[t_{j-1},t_j]$), kehtib

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\,\Delta x_j - I\right| &\leqslant \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}(M_j-m_j)\,M\,dt = M\sum_{j=1}^n(M_j-m_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\\ &= M\sum_{j=1}^n(M_j-m_j)\,\Delta t_j.\end{aligned}$$

Kuna lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev funktsioon $t\mapsto f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ on integreeruv selles lõigus, siis leidub reaalarv $\delta>0$ nii, et

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Delta t_j<\delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^n(M_j-m_j)\,\Delta t_j<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Niisiis, kui $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\Delta t_j<\delta$, siis

$$\left|\sum_{j=1}^n f(B_j)\,\Delta x_j - I\right| < M\,\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

Märkus 3.5. Teoreem 3.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (3.26) pideva tuletise olemasolust lõigus $[\alpha,\beta]$ nõrgema eeldusega, et funktsioonidel (3.26) eksisteerib lõigus $[\alpha,\beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonidel x' ja y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. See järeldub lausest 3.3, (f) (PÕHJENDADA!).

Märkus 3.6. Teoreem 3.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (3.26) pideva tuletise olemasolust lõigus $[\alpha,\beta]$ (nõrgema) eeldusega nendel funktsioonidel integreeruva tuletise olemasolust selles lõigus (see eeldus on nõrgem ka märkuses 3.5 käsitletud teoreemi 3.4 eelduse nõrgendusest).

Tõepoolest, tuletisfunktsioonide x' ja y' pidevust kasutab märkuses 3.4 antud tõestusskeem vaid integraalide (3.29) ja $\int_\alpha^\beta f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\, y'(t)\, dt$ olemasolu ning valemite (3.30) ja $y(t_j) - y(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} y'(t)\, dt$ põhjendamiseks. Need integraalid eksisteerivad ning valemid kehtivad ka eeldusel, et tuletisfunktsioonid x' ja y' on integreeruvad. (Vahetult teoreemi 3.4 sõnastusele järgnev tõestus kasutab tuletisfunktsioonide x' ja y' pidevust lisaks veel nende (tuletis)funktsioonide tõkestatuse põhjendamiseks, aga ka nende funktsioonide tõkestatus järeldub nende integreeruvusest.)

Järgnev järeldus teoreemist 3.4 annab valemid teist liiki (tasandilise) joonintegraali arvutamiseks juhul, kui kaar, üle mille integreeritakse, on antud võrrandiga $y = y(x)$, $x = x(y)$ või polaarkoordinaatides.

Järeldus 3.5. *Olgu kahe muutuja funktsioon $u = f(x, y)$ pidev tasandilisel kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel).*

(a) *Olgu kaar AB esitatud võrrandiga*

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \tag{3.32}$$

kus

$$A = \bigl(a, y(a)\bigr) \quad \text{ja} \quad B = \bigl(b, y(b)\bigr)$$

ning funktsioonil (3.32) *eksisteerib lõigus* $[a, b]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil y' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_a^b f\bigl(x, y(x)\bigr)\, dx \quad \text{ja} \quad \int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_a^b f\bigl(x, y(x)\bigr)\, y'(x)\, dx.$$

(b) *Olgu kaar AB esitatud võrrandiga*

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \tag{3.33}$$

kus

$$A = \bigl(x(c), c\bigr) \quad \text{ja} \quad B = \bigl(x(d), d\bigr).$$

ning funktsioonil (3.33) *eksisteerib lõigus* $[c, d]$ *pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil x' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis*

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_c^d f\bigl(x(y), y\bigr)\, x'(y)\, dy \quad \text{ja} \quad \int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_c^d f\bigl(x(y), y\bigr)\, dy.$$

(c) *Olgu kaar AB esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga*

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{3.34}$$

kus (ristkoordinaatides)

$$A = \bigl(r(\alpha)\cos\alpha, r(\alpha)\sin\alpha\bigr) \quad \text{ja} \quad B = \bigl(r(\beta)\cos\beta, r(\beta)\sin\beta\bigr)$$

(s.t. polaarkoordinaatides $A = \big(r(\alpha), \alpha\big)$ ja $B = \big(r(\beta), \beta\big)$) ning funktsioonil (3.34) eksisteerib lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil r' eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big)\,\big(r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\,\sin\phi\big)\,d\phi$$

ja

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta f\big(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi\big)\,\big(r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\,\cos\phi\big)\,d\phi.$$

Tõestus. Järelduse tõestus on sarnane järelduse 1.5 tõestusele (seejuures toetutakse teoreemi 1.4 asemel teoreemile 3.4). Seepärast jätame tõestamise lugejale. □

3.5. Greeni valem

Meenutame, et *piirkonnaks* ruumis $\mathbb{R}^m$ nimetatakse lahtise sidusa hulga ja selle hulga raja mingi alamhulga ühendit. Seejuures *lahtiseks piirkonnaks* nimetatakse lahtist sidusat hulka (sel juhul "selle hulga raja mingi alamhulk" piirkonna definitsioonis on tühi hulk) ning *kinniseks piirkonnaks* nimetatakse lahtise sidusa hulga sulundit (sel juhul "selle hulga raja mingi alamhulk" piirkonna definitsioonis on kogu raja).

Teoreem 3.6 (Greeni valem). *Eksisteerigu pidevatel kahe muutuja funktsioonidel $u = F(x,y)$ ja $v = G(x,y)$ pidevad osatuletised $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ tõkestatud kinnises piirkonnas $\mathcal{D}$, mille rajajoon $\partial\mathcal{D}$ on tükiti sile lihtne kinnine kaar (või, täpsemalt, raja $\partial\mathcal{D}$ on mingi tükiti sileda lihtsa kinnise kaare jälg). Siis*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} F\,dx + G\,dy. \tag{3.35}$$

Märkus 3.7. Paneme tähele, et mõlemad integraalid valemis (3.35) eksisteerivad.

Tõepoolest, hulga $\mathcal{D}$ rajajoon on tükiti sile ning funktsioonid F ja G on pidevad sellel rajajoonel (või, täpsemalt, selle joone jäljel), seega võrduse (3.35) paremal poolel olev integraal eksisteerib teoreemi 3.4 põhjal. (Teine võimalus selle integraali olemasolu põhjendamiseks on märkida, et teoreemi 1.4 põhjal on hulga $\mathcal{D}$ rajajoon sirgestuv ning seega eksisteerib võrduse (3.35) paremal poolel olev integraal teoreemi 3.2 põhjal.)

Teiselt poolt, kuna hulga $\mathcal{D}$ rajajoon on teoreemi 1.4 põhjal sirgestuv, siis teoreemi 1.6 põhjal on hulga $\mathcal{D}$ raja nullmõõduga hulk ning seega teoreemi V.2.5 põhjal on hulk $\mathcal{D}$ mõõtuv. Võrduse (3.35) vasakul poolel oleva integraali olemasolu järeldub nüüd teoreemist V.2.8.

Märkus 3.8. Teoreem 3.6 on tähelepanuväärne järgmises mõttes: funktsioonide F ja G käitumine piirkonna $\mathcal{D}$ rajajoonel annab meile piisavalt informatsiooni funktsiooni $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$ käitumise kohta piirkonnas $\mathcal{D}$, et me saaksime leida integraali sellest funktsioonist üle hulga $\mathcal{D}$.

Teoreemile 3.6 (Greeni valemile) toetub kompleksmuutuja funktsioonide teoorias olulist rolli etendava *Cauchy (integraal)valemi* tõestus.

Tõestame Greeni valemist ainult järgnevas lauses toodud erijuhud.

Lause 3.7. *Kehtigu teoreemi 3.6 eeldused.*

(a) *Olgu*

$$\mathcal{D} := \big\{(x,y)\colon\ x \in [a,b],\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\big\},$$

kus funktsioonidel

$$\alpha = \alpha(x) \quad \textit{ja} \quad \beta = \beta(x), \qquad x \in [a,b],$$

eksisteerib lõigus $[a,b]$ *pidev tuletis. Siis*

$$-\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} F\,dx. \tag{3.36}$$

NB! Joonis?

(b) *Olgu*

$$\mathcal{D} := \big\{(x,y)\colon\ y \in [c,d],\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\big\},$$

kus funktsioonidel

$$\gamma = \gamma(y) \quad \textit{ja} \quad \delta = \delta(y), \qquad y \in [c,d],$$

eksisteerib lõigus $[c,d]$ *pidev tuletis. Siis*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} G\,dy. \tag{3.37}$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.)

Tähistame

$$A := \big(a,\alpha(a)\big),\quad B := \big(b,\alpha(b)\big),\quad C := \big(b,\beta(b)\big),\quad D := \big(a,\beta(a)\big).$$

Siis

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \bigg(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy\bigg)dx\\ &= \int_a^b \Big(F\big(x,\beta(x)\big) - F\big(x,\alpha(x)\big)\Big)dx;\end{aligned}$$

ning järelikult

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} F\,dx &= \int_{AB} F\,dx + \int_{BC} F\,dx + \int_{CD} F\,dx + \int_{DA} F\,dx = \int_{AB} F\,dx + \int_{CD} F\,dx\\ &= \int_{AB} F\,dx - \int_{DC} F\,dx = \int_a^b F\big(x,\alpha(x)\big)\,dx - \int_a^b F\big(x,\beta(x)\big)\,dx\\ &= -\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Märkus 3.9. Valem (3.36) jääb kehtima, kui

(1) piirkond $\mathcal{D}$ esitub lõpliku ühendina $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j$, kus $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ on paarikaupa lõikumatute sisemustega kõvertrapetsid, mis rahuldavad lause 3.7, (a), eeldusi kõvertrapetsi $\mathcal{D}$ kohta.

Tõepoolest, eelduse (1) kehtides lause 3.7, (a), põhjal

$$-\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy = -\sum_{j=1}^{n} \iint_{\mathcal{D}_j} \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{n} - \iint_{\mathcal{D}_j} \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{D}_j} F\, dx$$
$$= \int_{\partial \mathcal{D}} F\, dx.$$

NB! Joonis?

Siin viimane võrdus kehtib, sest summas $\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{D}_j} F\, dx$ esinevad integraalid üle rajajoonte $\partial \mathcal{D}_j$ niisuguste osade, mis pole rajajoone $\partial \mathcal{D}$ osad, kaks korda, kusjuures ühel juhul läbitakse selline osa ühes suunas ja teisel juhul vastupidises suunas; seega koonduvad summas $\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{D}_j} F\, dx$ integraalid üle rajajoonte $\partial \mathcal{D}_j$ osade, mis pole rajajoone $\partial \mathcal{D}$ osad, paarikaupa välja.

Analoogiliselt saab näidata, et valem (3.37) jääb kehtima, kui

(2) piirkond $\mathcal{D}$ esitub lõpliku ühendina $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{D}'_i$, kus $\mathcal{D}'_1, \ldots, \mathcal{D}'_m$ on paarikaupa lõikumatute sisemustega kõvertrapetsid, mis rahuldavad lause 3.7, (b), eeldusi kõvertrapetsi $\mathcal{D}$ kohta.

Eelnevast järeldub, et kui samaaegselt kehtivad eeldused (1) ja (2), siis kehtib Greeni valem (3.35), sest niisugusel juhul

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x}\, dx\, dy - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial \mathcal{D}} G\, dy + \int_{\partial \mathcal{D}} F\, dx$$
$$= \int_{\partial \mathcal{D}} F\, dx + G\, dy.$$

3.6. Teist liiki joonintegraali sõltumatus integreerimisteest

Olgu funktsioonid F ja G pidevad piirkonnas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Vaatleme teist liiki joonintegraali

$$\int_{AB} F\, dx + G\, dy \tag{3.38}$$

NB! Joonis?

üle piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduva tükiti sileda kaare AB. Kui mis tahes piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduvate punkte A ja B ühendavate tükiti siledate kaarte L_1 ja L_2 korral, mille alguspunkt on A ja lõpp-punkt B, kehtib võrdus

$$\int_{L_1} F\,dx + G\,dy = \int_{L_2} F\,dx + G\,dy,$$

siis öeldakse, et teist liiki joonintegraal (3.38) *ei sõltu integreerimisteest* piirkonnas $\mathcal{D}$. Sellisel juhul kasutatakse joonintegraali (3.38) märkimiseks sümbolit

$$\int_A^B F\,dx + G\,dy:$$

see integraal sõltub integereerimistee alguspunktist A ja lõpp-punktist B, kuid mitte neid punkte ühendavast integreerimisteest.

Märkus 3.10. Heine–Boreli lemma (vt. ??) abil saab näidata, et kui piirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ on lahtine, siis mis tahes punktide $A, B \in \mathcal{D}$ korral leidub neid punkte ühendav (lõplikust arvust lülidest koosnev) lihtne murdjoon, mis tervikuna sisaldub hulgas $\mathcal{D}$. Esitame selle väite tõestuse skeemi.

Olgu $A, B \in \mathcal{D}$, $A \neq B$. Siis hulga $\mathcal{D}$ sidususe tõttu leidub punkte A ja B ühendav kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas $\mathcal{D}$. Esitugu mingi selline kaar AB parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{3.39}$$

kus $A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ ja $B = \big(x(\beta), y(\beta)\big)$. Iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral tähistame $C_t := \big(x(t), y(t)\big)$ (s.t. C_t on kaare AB punkt, mis vastab parameetri väärtusele t); siis hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu leidub reaalarv $r_t > 0$ nii, et $B(C_t, r_t) \subset \mathcal{D}$ (sümbol $B(C_t, r_t)$ tähistab lahtist kera (ehk siis vaadeldaval kahedimensionaalsel juhul lahtist ringi) keskpunktiga C_t ja raadiusega r_t). Funktsioonide (3.39) pidevuse tõttu leidub iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral reaalarv $\delta_t > 0$ nii, et

$$t' \in [\alpha, \beta],\ t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \quad \Longrightarrow \quad C_{t'} \in B(C_t, r_t)$$

(PÕHJENDADA!). Nüüd hulk $\big\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [\alpha, \beta]\big\}$ on lõigu $[\alpha, \beta]$ lahtine kate, seega Heine–Boreli lemma põhjal leidub tal lõplik alamkate, s.t. leiduvad $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [\alpha, \beta]$ $(n \in \mathbb{N})$ nii, et $[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{j=0}^{n} U_j$, kus $U_j := (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j})$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, kusjuures iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $U_{j-1} \cap U_j \neq \varnothing$ (PÕHJENDADA!). Siit järeldub, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $B(C_{t_{j-1}}, r_{t_{j-1}}) \cap B(C_{t_j}, r_{t_j}) \neq \varnothing$ (PÕHJENDADA!) ning seega sirglõik $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$ sisaldub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ (PÕHJENDADA!). Niisiis, murdjoon $C_{t_0}C_{t_1}\ldots C_{t_n}$ sisaldub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$. Arvestades, et $C_{t_0} = A$ ja $C_{t_n} = B$, jääb väite tõestuseks näidata, et *mis tahes punkte A ja B ühendava (lõplikust arvust lülidest koosneva) murdjoone ℓ korral leidub neid punkte A ja B ühendav lihtne murdjoon ℓ', mis punktihulgana on murdjoone ℓ alamhulk: $\ell' \subset \ell$.* Selle väite saab lihtsasti tõestada matemaatilise induktsiooni abil murdjoone ℓ lülide arvu n järgi (TEHA SEE INDUKTSIOON LÄBI!).

Selles punktis anname mõned tarvilikud ja piisavad tingimused teist liiki joonintegraalide sõltumatuseks integreerimisteest. Selleks vajame me *ühelisidusa* (tasandilise) piirkonna mõistet.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et lahtine piirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ on *ühelisidus,* kui mis tahes selles piirkonnas sisalduva lihtsa kinnise kaarega piiratud tasandi osa sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. NB! Joonis!

Märkus 3.11. Eelnev ühelisidususe definitsioon ei ole matemaatiliselt range – pole selge, mida mõista "lihtsa kinnise kaarega piiratud tasandi osa" all. Esitame matemaatiliselt range definitsiooni.

Definitsioon 3.3. Öeldakse, et lahtine piirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ on *ühelisidus,* kui mis tahes selles piirkonnas sisalduv lihtne kinnine kaar on *pidevalt deformeeritav mingiks hulga $\mathcal{D}$ punktiks,* s.t. mis tahes pideva funktsiooni $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$ korral, kus $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$, leiduvad pidev funktsioon $\Gamma\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$ ja punkt $P \in \mathcal{D}$ nii, et

- $\Gamma(0,t) = \Phi(t)$ iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral;
- $\Gamma(s,\alpha) = \Gamma(s,\beta)$ iga $s \in [0,1]$ korral;
- $\Gamma(1,t) = P$ iga $t \in [\alpha,\beta]$ korral.

Teoreem 3.8. *Olgu kahe muutuja funktsioonid $u = F(x,y)$ ja $v = G(x,y)$ pidevad lahtises piirkonnas $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *mis tahes punktide $A, B \in \mathcal{D}$ korral integraal* (3.38) *ei sõltu integreerimisteest piirkonnas $\mathcal{D}$;*

(ii) *integraalialune avaldis $F\,dx + G\,dy$ on* täpne diferentsiaal, *s.t. leidub piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv kahe muutuja funktsioon $U = U(x,y)$, mille täisdiferentsiaal on see avaldis:*

$$dU = F\,dx + G\,dy. \tag{3.40}$$

Seejuures kehtib "Newton–Leibnizi valem"

$$\int_{AB} F\,dx + G\,dy = U(B) - U(A). \tag{3.41}$$

Kui piirkond $\mathcal{D}$ on ühelisidus ning funktsioonidel F ja G eksisteerivad selles piirkonnas pidevad osatuletised $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial G}{\partial x}$, siis tingimused (i) *ja* (ii) *on samaväärsed tingimusega*

(iii) *integraalialune avaldis $F\,dx + G\,dy$ on* kinnine diferentsiaal, *s.t. piirkonnas $\mathcal{D}$*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}. \tag{3.42}$$

Märkus 3.12. Nagu järgnevast tõestusest näeme, kehtib teoreemi 3.8 implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(iii) (ning seega ka implikatsioon (i)$\Rightarrow$(iii)) ka ilma eelduseta piirkonna $\mathcal{D}$ ühelisidususe kohta.

Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii)$\Rightarrow$(ii) (või (iii)$\Rightarrow$(i)) tõestus üldjuhul on käesoleva kursuse jaoks liiga keeruline. Seepärast piirdume me selle implikatsiooni tõestusega teataval erijuhul – *tähekujuliste* piirkondade juhul – mis hõlmab olulisemaid praktikas ettetulevaid ühelisidusaid piirkondi – muuhulgas ka näiteks kumeraid piirkondi.

NB! 2 joonist – tähekujuline piirkond ja piirkond, mis pole tähekujuline.

Definitsioon 3.4. Öeldakse, et piirkond $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ on *tähekujuline,* kui leidub punkt $A \in \mathcal{D}$ nii, et mis tahes punkti $B \in \mathcal{D}$ korral punkte A ja B ühendav sirglõik sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$.

TEOREEMI 3.8 TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu mis tahes punktide $A, B \in \mathcal{D}$ korral integraal (3.38) sõltumatu integreerimisteest. Fikseerime vabalt punkti $A \in \mathcal{D}$ ja defineerime piirkonnas $\mathcal{D}$ kahe muutuja funktsiooni $u = U(B) = U(x, y)$ võrdusega

$$U(B) = \int_A^B F\,dx + G\,dy, \quad B \in \mathcal{D}$$

(seejuures me loeme $U(A) = 0$). Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et piirkonnas $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = G.$$

Tõestame neist samasustest vaid esimese (teine tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime vabalt punkti $B := (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Me peame näitama, et

$$\frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} F(x_0, y_0).$$

Märgime, et piirkonna $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $U_\delta(B) \subset \mathcal{D}$; niisiis, kui $|h| < \delta$, siis punkte $B = (x_0, y_0)$ ja $C := (x_0 + h, y_0)$ ühendav sirglõik BC sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. Valides integraalis $\int_A^C F\,dx + G\,dy$ integreerimisteeks kaare, mis on saadud vabalt valitud (punkte A ja B ühendava ja piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduva) tükiti sileda kaare AB ja sirglõigu BC ühendamisel (selliseid tükiti siledaid kaari AB leidub – vt. märkust 3.10),

$$\begin{aligned}
U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) = U(C) - U(B) &= \int_A^C F\,dx + G\,dy - \int_A^B F\,dx + G\,dy \\
&= \int_A^B F\,dx + G\,dy + \int_B^C F\,dx + G\,dy - \int_A^B F\,dx + G\,dy \\
&= \int_B^C F\,dx + G\,dy = \int_B^C F\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x, y_0)\,dx = F(\xi_h, y_0)\,h,
\end{aligned}$$

kus punkt ξ_h paikneb punktide x_0 ja $x_0 + h$ vahel (sellise punkti ξ_h olemasolu järeldub integraalarvutuse keskväärtusteoreemist); järelikult, arvestades, et $\xi_h \xrightarrow[h \to 0]{} x_0$, funktsiooni F pidevuse tõttu

$$\frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} = F(\xi_h, y_0) \xrightarrow[h \to 0]{} F(x_0, y_0),$$

nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(i). Leidugu piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv kahe muutuja funktsioon $u = U(x, y)$, mis rahuldab tingimust (3.40), s.t.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = G.$$

Olgu piirkonna $\mathcal{D}$ punkte A ja B ühendav (piirkonnas $\mathcal{D}$ sisalduv) tükiti sile kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus

$$\big(x(\alpha), y(\alpha)\big) = A \quad \text{ja} \quad \big(x(\beta), y(\beta)\big) = B.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et kehtib võrdus (3.41). Veendume selles:

$$\begin{aligned}
\int_{AB} F\,dx + G\,dy &= \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\,dy \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial U}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t) \right) dt \\
&= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} U\big(x(t), y(t)\big)\,dt \\
&\overset{(*)}{=} U\big(x(\beta), y(\beta)\big) - U\big(x(\alpha), y(\alpha)\big) \\
&= U(B) - U(A),
\end{aligned}$$

nagu soovitud (siin võrdus $(*)$ kehtib Newton–Leibnizi valemi põhjal).

Eeldame nüüd täiendavalt, et funktsioonidel F ja G eksisteerivad piirkonnas $\mathcal{D}$ pidevad osatuletised $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial G}{\partial x}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (ii). Siis piirkonnas $\mathcal{D}$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{ja} \quad G = \frac{\partial U}{\partial y}$$

ning järelikult

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.$$

Kuna osatuletised $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ on pidevad piirkonnas $\mathcal{D}$, siis teist järku segaosatuletised $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$ ja $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$ on pidevad piirkonnas $\mathcal{D}$; järelikult teoreemi II.3.2 põhjal $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$ piirkonnas $\mathcal{D}$; niisiis $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial x}$ piirkonnas $\mathcal{D}$, nagu soovitud.

Eeldame nüüd täiendavalt, et piirkond $\mathcal{D}$ on tähekujuline.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (iii). Implikatsiooni tõestuseks piisab leida piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv kahe muutuja funktsioon $u = U(x,y)$, mis rahuldab tingimust (3.40). Piirkonna $\mathcal{D}$ tähekujulisuse tõttu leidub punkt $A \in \mathcal{D}$ nii, et mis tahes punkti $B \in \mathcal{D}$ korral punkte A ja B ühendav sirglõik sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. Defineerime funktsiooni $U\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$U(B) := \int_{AB} F\,dx + G\,dy, \quad B \in \mathcal{D},$$

kus integreerimisteeks on punkte A ja B ühendav sirglõik (seejuures me loeme $U(A) = 0$). Tingimuse (3.40) kehtivuseks piisab näidata, et piirkonnas $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = G$$

(PÕHJENDADA , MIKS SIIT JÄRELDUB FUNKTSIOONI U DIFERENTSEERUVUS JA TINGIMUSE (3.40) KEHTIVUS! Tõestame neist samasustest vaid esimese (teine tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime vabalt punkti $B := (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Me peame näitama, et

$$\frac{U(x_0+h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} F(x_0, y_0).$$

Märgime, et piirkonna $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $U_\delta(B) \subset \mathcal{D}$; niisiis, kui $|h| < \delta$, siis punkte $B = (x_0, y_0)$ ja $C := (x_0 + h, y_0)$ ühendav sirglõik BC sisaldub piirkonnas $\mathcal{D}$. Näeme, et

$$U(x_0+h, y_0) - U(x_0, y_0) = U(C) - U(B) = \int_{AC} F\,dx + G\,dy - \int_{AB} F\,dx + G\,dy.$$

Greeni valemi põhjal, tähistades kolmnurga ABC kontuuri tähega L ja selle kolmnurga enda tähega Δ ning oletades konkreetsuse mõttes, et $h > 0$ (juhtu, kus $h < 0$, käsitletakse analoogiliselt), järeldub samasusest (3.42), et NB! Joonis!

$$\begin{aligned}\int_L F\,dx + G\,dy &= \int_{AC} F\,dx + G\,dy + \int_{CB} F\,dx + G\,dy + \int_{BA} F\,dx + G\,dy \\ &= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned}U(x_0+h, y_0) - U(x_0, y_0) &= \int_{AC} F\,dx + G\,dy + \int_{BA} F\,dx + G\,dy \\ &= \int_{BC} F\,dx + G\,dy = \int_{BC} F\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x, y_0)\,dx \\ &= F(\xi_h, y_0)\,h,\end{aligned}$$

kus punkt ξ_h paikneb punktide x_0 ja $x_0 + h$ vahel (sellise punkti ξ_h olemasolu järeldub integraalarvutuse keskväärtusteoreemist); järelikult, arvestades, et $\xi_h \xrightarrow[h \to 0]{} x_0$, funktsiooni F pidevuse tõttu

$$\frac{U(x_0+h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} = F(\xi_h, y_0) \xrightarrow[h \to 0]{} F(x_0, y_0),$$

nagu soovitud. □

3.7. Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii)⇒(i) tõestus üldjuhul

Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii)⇒(i) tõestus üldjuhul (s.t. ilma eelduseta piirkonna $\mathcal{D}$ tähekujulisuse kohta) toetub järgmisele lemmale.

Lemma 3.9. *Olgu funktsioonid F ja G pidevad lahtises piirkonnas $\mathcal{D}$ ning olgu $A, B \in \mathcal{D}$ ja $\varepsilon > 0$. Siis iga tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ sisalduva punkte A ja B ühendava* *sirgestuva kaare AB korral leidub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ sisalduv (lõplikust arvust lülidest koosnev) kaare AB kõõlmurdjoon ℓ (alguspunktiga A ja lõpp-punktiga B) nii, et*

$$\left|\int_{AB} F\,dx + G\,dy - \int_{\ell} F\,dx + G\,dy\right| < \varepsilon. \tag{3.43}$$

Tõestus. Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Olgu punkte A ja B ühendav sirgestuv kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas $\mathcal{D}$, esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{3.44}$$

kus $A = \big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ ja $B = \big(x(\beta), y(\beta)\big)$. Tähistame selle kaare pikkuse tähega s. Iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral tähistame $C_t := \big(x(t), y(t)\big)$ (s.t. C_t on kaare AB punkt, mis vastab parameetri väärtusele t); siis hulga $\mathcal{D}$ lahtisuse tõttu leidub reaalarv $r_t > 0$ nii, et $B(C_t, r_t) \subset \mathcal{D}$ (sümbol $B(C_t, r_t)$ tähistab lahtist kera – ehk siis vaadeldaval kahedimensionaalsel juhul lahtist ringi – keskpunktiga C_t ja raadiusega r_t); seejuures funktsioonide F ja G pidevuse tõttu võime arvu r_t valida nii, et

$$|F(P) - F(C_t)| < \frac{\varepsilon}{8s} \quad \text{ja} \quad |G(P) - G(C_t)| < \frac{\varepsilon}{8s} \qquad \text{iga } P \in B(C_t, r_t) \text{ korral.} \tag{3.45}$$

Joonintegraalide $\int_{AB} F\,dx =: I_1$ ja $\int_{AB} G\,dy =: I_2$ olemasolu tõttu leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et mis tahes punktide $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ ($n \in \mathbb{N}$) ning funktsioonide F ja G mis tahes integraalsummade σ_1 ja σ_2 korral (lõigus $[\alpha, \beta]$) vastavalt projektsioonide järgi x- ja y-teljele, mis vastavad lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisile punktidega $t_0, t_1, \cdots, t_n$,

$$\max \Delta t_j < 2\delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\sigma_1 - I_1| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad |\sigma_2 - I_2| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.46}$$

(siin, nagu ikka, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$). (Liit)funktsioonide

$$[\alpha, \beta] \ni t \mapsto F\big(x(t), y(t)\big) =: f(t) \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad [\alpha, \beta] \ni t \mapsto G\big(x(t), y(t)\big) =: g(t) \in \mathbb{R}$$

pidevuse tõttu on need funktsioonid (Cantori teoreemi põhjal) ühtlaselt pidevad lõigus $[\alpha, \beta]$, seega leidub reaalarv $\delta' > 0$ nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta],\ |t - t'| < 2\delta' \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{8s} \quad \text{ja} \quad |g(t) - g(t')| < \frac{\varepsilon}{8s}. \tag{3.47}$$

Funktsioonide (3.44) pidevuse tõttu leidub iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral reaalarv $\delta_t > 0$ nii, et

$$t' \in [\alpha, \beta],\ t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \quad \Longrightarrow \quad C_{t'} \in B(C_t, r_t)$$

(PÕHJENDADA!); seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\delta_t < \max\{\delta, \delta'\}$. Nüüd hulk $\big\{(t - \delta_t, t + \delta_t) \colon t \in [\alpha, \beta]\big\}$ on lõigu $[\alpha, \beta]$ lahtine kate, seega Heine–Boreli lemma põhjal leidub tal lõplik alamkate, s.t. leiduvad $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [\alpha, \beta]$ ($n \in \mathbb{N}$) nii, et $[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{j=0}^{n} U_j$, kus $U_j := (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j})$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, kusjuures iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $U_{j-1} \cap U_j \neq \varnothing$ (PÕHJENDADA!). Siit järeldub, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$B(C_{t_{j-1}}, r_{t_{j-1}}) \cap B(C_{t_j}, r_{t_j}) \neq \varnothing$ (PÕHJENDADA!) ning seega sirglõik $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$ sisaldub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ (PÕHJENDADA!). Nüüd murdjoon $C_{t_0}C_{t_1}\dots C_{t_n}$ sisaldub tervikuna hulgas $\mathcal{D}$, kusjuures $C_{t_0} = A$ ja $C_{t_n} = B$, seega, tähistades selle murdjoone sümboliga ℓ, jääb tõestada võrratus (3.43). Selleks, tähistades $\int_\ell F\,dx =: J_1$ ja $\int_\ell G\,dy =: J_2$, piisab tõestada võrratused $|I_1 - J_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $|I_2 - J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tõestame neist võrratustest ainult esimese (teine võrratus tõestatakse sümmeetriliselt).

Ühelt poolt,

$$J_1 = \int_\ell F\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{C_{t_{j-1}}C_{t_j}} F\,dx,$$

kus $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$ on punkte $C_{t_{j-1}}$ ja C_{t_j} ühendav sirglõik (alguspunktiga $C_{t_{j-1}}$ ja lõpppunktiga C_{t_j}). Iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral tähistame

$$\Delta x_j := x(t_j) - x(t_{j-1}) \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y(t_j) - y(t_{j-1});$$

siis sirglõik $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$ esitub parameetriliste võrranditega

$$x = x(t_{j-1}) + t\Delta x_j =: \phi_j(t), \quad y = y(t_{j-1}) + t\Delta y_j =: \psi_j(t), \qquad t \in [0,1],$$

ning seega, arvestades, et $\phi_j'(t) = \Delta x_j$,

$$J_{1,j} := \int_{C_{t_{j-1}}C_{t_j}} F\,dx = \int_0^1 F\big(\phi_j(t), \psi_j(t)\big)\,\phi_j'(t)\,dt = \Delta x_j \int_0^1 F\big(\phi_j(t), \psi_j(t)\big)\,dt.$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi põhjal leidub $\lambda_j \in [0,1]$ nii, et

$$\int_0^1 F\big(\phi_j(t), \psi_j(t)\big)\,dt = F\big(\phi_j(\lambda_j), \psi_j(\lambda_j)\big) = F(P_j),$$

kus $P_j = \big(\phi_j(\lambda_j), \psi_j(\lambda_j)\big) = \big(x(t_{j-1}) + \lambda_j \Delta x_j, y(t_{j-1}) + \lambda_j \Delta y_j\big)$. Seega

$$J_1 = \sum_{j=1}^n J_{1j} = \sum_{j=1}^n F(P_j)\,\Delta x_j.$$

Teiselt poolt, arvestades, et iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $\Delta t_j = t_j - t_{j-1} < 2\delta$ (PÕHJENDADA!), järeldub implikatsioonist (3.46), et

$$\left| I_1 - \sum_{j=1}^n F(C_{t_j})\,\Delta x_j \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} |I_1 - J_1| &\leqslant \left| I_1 - \sum_{j=1}^n F(C_{t_j}))\,\Delta x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n \big(F(C_{t_j}) - F(P_j)\big)\,\Delta x_j \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^n |F(C_{t_j}) - F(P_j)|\,|\Delta x_j|. \end{aligned}$$

Kuna $\sum_{j=1}^{n} |\Delta x_j| \leqslant s$ (PÕHJENDADA!), siis piisab võrratuse $|I_1 - J_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ (ja ühtlasi lemma) tõestuseks näidata, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$|F(C_{t_j}) - F(P_j)| < \frac{\varepsilon}{4s}. \tag{3.48}$$

(PÕHJENDADA!). Fikseerime vabalt $j \in \{1, \ldots, n\}$. Kui $P_j \in B(C_{t_j}, r_{t_j})$, siis võrratus (3.48) kehtib hinnangute (3.45) põhjal. Jääb vaadelda juhtu, kus $P_j \notin B(C_{t_j}, r_{t_j})$. Kuna punkt P_j asub punkte $C_{t_{j-1}}$ ja C_{t_j} ühendaval sirglõigul, siis sel juhul $P_j \in B(C_{t_{j-1}}, r_{t_{j-1}})$ (PÕHJENDADA!). Nüüd, arvestades, et $|t_j - t_{j-1}| < 2\delta'$ (PÕHJENDADA!), ning seega implikatsiooni (3.47) põhjal

$$\begin{aligned}|F(C_{t_j}) - F(C_{t_{j-1}})| &= |F\big(x(t_j), y(t_j)\big) - F\big(x(t_{j-1}), y(t_{j-1})\big)| = |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &< \frac{\varepsilon}{8s},\end{aligned}$$

saame (jällegi hinnangute (3.45) põhjal)

$$|F(C_{t_j}) - F(P_j)| \leqslant |F(C_{t_j}) - F(C_{t_{j-1}})| + |F(C_{t_{j-1}} - F(P_j)| < \frac{\varepsilon}{8s} + \frac{\varepsilon}{8s} = \frac{\varepsilon}{4s}.$$

Niisiis, võrratus (3.48) kehtib igal juhul. □

Nüüd oleme võimelised esitama teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii)⇒(i) tõestuse üldjuhul (s.t. ilma täiendava eelduseta piirkonna $\mathcal{D}$ tähekujulisuse kohta).

TEOREEMI 3.8, (iii)⇒(i), TÕESTUS. Olgu piirkond $\mathcal{D}$ ühelisidus ning eksisteerigu funktsioonidel F ja G selles piirkonnas pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$. Eeldame, et kehtib (iii), s.t. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$ piirkonnas $\mathcal{D}$. Olgu $A, B \in \mathcal{D}$ ning olgu $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ja $\psi\colon [c, d] \to \mathbb{R}^2$ kaared alguspunktiga A ja lõpp-punktiga B (s.t. $\phi(a) = \psi(c) = A$ ja $\phi(b) = \psi(d) = B$), mis tervikuna sisalduvad hulgas $\mathcal{D}$ (või, täpsemalt, nende kaarte jäljed sisalduvad hulgas $\mathcal{D}$), kusjuures funktsioonid ϕ ja ψ on tükiti lineaarsed (s.t. lõigud $[a, b]$ ja $[c, d]$ saab jaotada lõplikuks arvuks osalõikudeks, millest igaühel on vastavalt funktsioonid ϕ ja ψ lineaarsed). Kaarte ϕ ja ψ jäljed on lõplikust arvust lülidest koosnevad murdjooned (mis tervikuna sisalduvad hulgas $\mathcal{D}$). Viidates kaartele ϕ ja ψ vastavalt kui kaartele AB ja $\widehat{AB}$, piisab lemma 3.9 põhjal implikatsiooni tõestuseks näidata, et $\int_{AB} F\,dx + G\,dy = \int_{\widehat{AB}} F\,dx + G\,dy$ (PÕHJENDADA!).

Lõigud $[a, b]$ ja $[c, d]$ saab jaotada lõplikuks arvuks osalõikudeks vastavalt punktidega $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ ja $c = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = d$, kus $n \in \mathbb{N}$ ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral osakaartel $\phi|_{[t_{j-1}, t_j]}$ ja $\psi|_{[T_{j-1}, T_j]}$ on ühine alguspunkt ja ühine lõpp-punkt, s.t. $\phi(t_{j-1}) = \psi(T_{j-1}) =: A_{j-1}$ ja $\phi(t_j) = \psi(T_j) =: A_j$, ning, viidates edasises neile osakaartele vastavalt kui kaartele $A_{j-1}A_j$ ja $\widehat{A_{j-1}A_j}$, kas

(1) osakaared $A_{j-1}A_j$ ja $\widehat{A_{j-1}A_j}$ on lihtsad, kusjuures nende jäljed ühtivad,

või

(2) osakaared $A_{j-1}A_j$ ja $\widehat{A_{j-1}A_j}$ (või, täpsemalt, nende osakaarte jäljed) lõikuvad ainult nende osakaarte alguspunktis A_{j-1} ja lõpp-punktis A_j.

Soovitud võrduse $\int_{AB} F\,dx + G\,dy = \int_{\widehat{AB}} F\,dx + G\,dy$ tõestuseks piisab veenduda, et iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\int_{A_{j-1}A_j} F\,dx + G\,dy = \int_{\widehat{A_{j-1}A_j}} F\,dx + G\,dy. \tag{3.49}$$

Olgu $j \in \{1, \dots, n\}$ suvaline. Juhul (1) järeldub soovitud võrdus (3.49) märkusest 3.2. Jääb vaadelda juhtu (2). Soovitud võrduse (3.49) tõestuseks sel juhul paneme kõigepealt tähele, et, tänu eeldusele (iii), Greeni valemi (3.35) põhjal

($\sharp$) mis tahes tervikuna hulgas $\mathcal{D}$ sisalduva lihtsa kinnise kaare L korral

$$\int_L F\,dx + G\,dy = 0$$

(põhjendada!). Siit järeldub, et soovitud võrduse (3.49) tõestamisel võime üldisust kitsendamata eeldada, et kaared $A_{j-1}A_j$ ja $\widehat{A_{j-1}A_j}$ on lihtsad (põhjendada!). Nüüd väite ($\sharp$) põhjal

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{A_{j-1}\widehat{A_jA_{j-1}}} F\,dx + G\,dy = \int_{A_{j-1}A_j} F\,dx + G\,dy + \int_{\widehat{A_jA_{j-1}}} F\,dx + G\,dy \\
&= \int_{A_{j-1}A_j} F\,dx + G\,dy - \int_{\widehat{A_{j-1}A_j}} F\,dx + G\,dy,
\end{aligned}$$

kus $\widehat{A_jA_{j-1}}$ tähistab kaart $\widehat{A_{j-1}A_j}$ läbituna vastupidises suunas ning $A_{j-1}\widehat{A_jA_{j-1}}$ tähistab kaarte $A_{j-1}A_j$ ja $\widehat{A_jA_{j-1}}$ *konkatenatsiooni,* s.t. mingit niisugust lihtsat kinnist kaart, kus alguses läbitakse kaar $A_{j-1}A_j$ ning seejärel kaar $\widehat{A_jA_{j-1}}$. Soovitud võrdus (3.49) järeldub eelnevast võrdusteahelast. □

3.8. Teist liiki joonintegraali rakendusi

3.8.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Olgu xy-tasandi piirkonna $\mathcal{D}$ raja $\partial\mathcal{D}$ tükiti sile lihtne kinnine kaar (või, täpsemalt, raja $\partial\mathcal{D}$ on mingi niisuguse kaare jälg). Defineerime funktsioonid

$$F(x,y) = -y \quad \text{ja} \quad G(x,y) = x;$$

siis

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -1 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 1;$$

seega Greeni valemi (3.35) põhjal

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \Big(-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\Big)\,dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} F(x,y)\,dx = -\int_{\partial\mathcal{D}} y\,dx,$$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} G(x,y)\,dy = \int_{\partial\mathcal{D}} x\,dy,$$

millest, arvestades, et hulga $\mathcal{D}$ pindala $S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} dx\,dy$, saame pindala $S_{\mathcal{D}}$ arvutamiseks valemid

$$S_{\mathcal{D}} = -\int_{\partial\mathcal{D}} y\,dx, \qquad S_{\mathcal{D}} = \int_{\partial\mathcal{D}} x\,dy$$

ja

$$S_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\Big(\int_{\partial\mathcal{D}} -y\,dx + x\,dy\Big).$$

3.8.2. Jõu töö arvutamine

Liikugu materiaalne punkt massiga m tasandil mööda sirgestuvat kaart AB punktist A punktini B jõu $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ mõjul, kus $u = P(x,y)$ ja $v = Q(x,y)$ on kaarel AB (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) pidevad funktsioonid. (Seda liikumist mööda kaart AB tuleb mõista nii, et vaadeldav punkt liigub tasandil eeskirja $X = \Phi(t)$ järgi, s.t. ajahetkel $t \in [\alpha,\beta]$ asub liikuv punkt tasandi $\mathbb{R}^2$ punktis $\Phi(t)$, kus $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ on kaart AB esitav funktsioon (siin loomulikult $\Phi(\alpha) = A$ ja $\Phi(\beta) = B$)). Siis jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö W esitub valemiga

$$W = m\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

3.9. Täiendavaid ülesandeid

Selle jaotise loomulik kodu on jaotise 1.1 järel.

Kõik selle alajaotise ülesanded on sõnastatud tasandiliste joonte jaoks, kuid nende ülesannete väited kehtivad ka joonte jaoks ruumis $\mathbb{R}^m$ mis tahes $m \in \mathbb{N}$ korral, kusjuures ka nende väidete tõestused jäävad sisuliselt samaks.

Ülesanne 3.1. Tõestada, et tasandilise kaare $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ jälg $L := \{\Phi(t)\colon t \in [\alpha,\beta]\}$ on kinnine tõkestatud hulk.

NÄPUNÄIDE. Esitada kaar parameetriliste võrranditega. Jälje tõkestatuse tõestamisel kasutada Weierstrassi esimest teoreemi; jälje kinnisuse tõestamisel kasutada hulga kinnisuse kriteeriumit koonduvate jadade piirväärtuste kaudu (lauset I.2.3), Bolzano–Weierstrassi teoreemi (arvjadade jaoks) ja parameetrilistes võrrandites esinevate funktsioonide pidevust.

Ülesanne 3.2. Olgu $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ lihtne (tasandiline) kaar. Tähistame $L := \{\Phi(t)\colon t \in [\alpha,\beta]\}$, s.t. L on kaare Φ jälg. Siis me saame vaadelda pöördfunktsiooni $\Phi^{-1}\colon L \to [\alpha,\beta]$. Tõestada, et pöördfunktsioon Φ^{-1} on pidev.

NÄPUNÄIDE. Oletada vastuväiteliselt, et pöördfunktsioon Φ^{-1} pole pidev ning kasutada Bolzano–Weierstrassi teoreemi (arvjadade jaoks) ja funktsiooni Φ pidevust.

Ülesanne 3.3. Olgu $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ ja $\Psi\colon [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}^2$ lihtsad (tasandilised) kaared, millel on sama jälg, s.t. $L := \{\Phi(t)\colon t \in [\alpha,\beta]\} = \{\Psi(\tau)\colon \tau \in [\gamma,\delta]\}$. Tähistame $A := \Phi(\alpha)$ ja $B := \Phi(\beta)$, s.t. A ja B on vastavalt kaare Φ algus- ja lõpp-punkt. Siis

(a) kaare Ψ alguspunkt saab olla ainult kas A või B;

(a) kui kaare Ψ alguspunkt on A, siis funktsiooni Ψ poolt määratud jälje L punktide järjestus ühtib funksiooni Φ poolt määratud järjestusega; kui kaare Ψ alguspunkt on B, siis funktsiooni Ψ poolt määratud jälje L punktide järjestus on vastupidine funksiooni Φ poolt määratud järjestusele;

(c) kui kaare Ψ alguspunkt on A, siis tema lõpp-punkt on B; kui kaare Ψ alguspunkt on B, siis tema lõpp-punkt on A.

Näpunäide. Tõlgendades funktsiooni Φ funktsioonina $[\alpha,\beta] \to L$, on pöördfunktsioon Φ^{-1} ülesande 3.2 põhjal pidev. Seega, tõlgendades funktsiooni Ψ funktsioonina $[\gamma,\delta] \to L$, on kompositsioon

$$h := \Phi^{-1}\Psi\colon [\gamma,\delta] \to [\alpha,\beta]$$

pidev bijektsioon. (Märgime, et ka funktsiooni h pöördfunktsioon $h^{-1} = \Psi^{-1}\Phi\colon [\alpha,\beta] \to [\gamma,\delta]$ on pidev.) Tõestada, et

(A) $h(\gamma) = \alpha$ või $h(\gamma) = \beta$;

(B) kui $h(\gamma) = \alpha$, siis mis tahes $\tau_1, \tau_2 \in [\alpha,\beta]$, $\tau_1 < \tau_2$ korral $h(\tau_1) < h(\tau_2)$; kui $h(\gamma) = \beta$; siis mis tahes $\tau_1, \tau_2 \in [\alpha,\beta]$, $\tau_1 < \tau_2$ korral $h(\tau_1) < h(\tau_2)$;

(C) kui $h(\gamma) = \alpha$, siis $h(\delta) = \beta$; kui $h(\gamma) = \beta$, siis $h(\delta) = \alpha$.

Väidete (A) ja (B) tõestamisel kasutada Bolzano–Cauchy teoreemi lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest; väide (C) on vahetu järeldus väitest (B). Väited (a)-(c) järelduvad vastavalt väidetest (A)–(C). (Teiselt poolt, väide (c) on vahetu järeldus väitest (b).)

§ 4. Ruumilise kaare sirgestuvus ja pikkus ning esimest ja teist liiki ruumilised joonintegraalid

Ruumiliste joonte all mõistame me jooni ruumis $\mathbb{R}^3$.

Ruumilise kaare *sirgestuvus* ja *pikkus* ning *esimest* ja *teist liiki joonintegraalid üle ruumise kaare* (*ruumilised joonintegraalid*) defineeritakse analoogiliselt tasandilise kaare juhuga; seejuures teist liiki joonintegraali puhul lisandub loomulikul viisil teist liiki joonintegraal projektsioonide järgi z-teljele.

Ruumiliste kaarte ja joonintegraalide jaoks kehtivad kõigi selles peatükis tasandiliste kaarte ja joonintegraalide jaoks tõestatud omaduste ja arvutusvalemite loomulikud analoogid; erandiks on teist liiki tasandiliste joonintegraalide jaoks jaotistes 3.5 ja 3.6 tõestatud tulemused, milledele ruumiliste joonintegraalide jaoks *vahetud analoogid* puuduvad.

§ 5. Cauchy integral formula

Theorem (Cauchy integral formula). *Let $\mathcal{D}$ be a bounded domain with piecewise smooth boundary $\partial\mathcal{D}$. If $f(z)$ is analytic on $\mathcal{D}$, and $f(z)$ extends smoothly to the boundary $\partial\mathcal{D}$, then*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \textit{for every } z \in \mathcal{D}.$$

VII peatükk.
Fourier' read

§ 1. Fourier' rea mõiste

1.1. Integreeruva funktsiooni Fourier' rida

Kursuses "Ühe muutuja matemaatiline analüüs" vaadeldi funktsioonide lähendamist astmeridadega ning seejuures põhiliselt Taylori ridadega. Selles peatükis vaatleme funktsioonide lähendamist trigonomeetriliste ridadega ning seejuures piirdume lähendamisega *Fourier' ridadega.*

NB! Selgitada, miks ei saa katkevat funktsiooni lähendada intervallis punktiviisi selleks funktsiooniks koonduva astmereaga.

Definitsioon 1.1. Funktsionaalrida kujul

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \cdots + \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx + \cdots ,$$

kus $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ja $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, nimetatakse *trigonomeetriliseks reaks.*

Trigonomeetriliste ridade hulgas etendavad kõige olulisemat rolli *Fourier' read.*

Definitsioon 1.2. Olgu f lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruv funktsioon. Funktsionaalrida

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.1}$$

kus

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2 \ldots, \tag{1.2}$$

ja

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2 \ldots, \tag{1.3}$$

nimetatakse funktsiooni f *Fourier' reaks.* Valemitega (1.2) ja (1.3) defineeritud kordajaid a_k ja b_k nimetatakse funktsiooni f *Fourier' kordajateks.*

Asjaolu, et rida (1.1) on funktsiooni f Fourier' rida, märgitakse valemiga

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

1.2. Meetriline ruum, normeeritud ruum

Funktsioonide lähendamisel kerkib paratamatult järgmine küsimus: kuidas otsustada, kas kaks funktsiooni on teineteisele "lähedal" ning "kui lähedal" nad teineteisele on? Sellele probleemile mõistliku lahenduse andmiseks on otstarbekas sisse tuua *meetrilise ruumi* mõiste.

1.2.1. Meetrilise ruumi mõiste

Definitsioon 1.3. Olgu M mingi hulk.

Funktsiooni $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ nimetatakse *kauguseks* ehk *meetrikaks* (hulgas M), kui mis tahes $x, y, z \in M$ korral

1° $\rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3° $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Sel juhul paari (M, ρ) nimetatakse *meetriliseks ruumiks.* Kui kauguse ρ roll on kontekstist selge, siis öeldakse lihtsalt, et M on meetriline ruum. Hulga M elementidele viidatakse kui ruumi M (või ka ruumi (M, ρ)) *punktidele.* Arvule $\rho(x, y)$ viidatakse kui *punktide x ja y vahelisele kaugusele.* Tingimustele 1°, 2° ja 3° – *meetrika aksioomidele* – viidatakse vastavalt kui *samasuse aksioomile, sümmeetria aksioomile* ja *kolmnurga võrratusele.*

Järgnev lause esitab mõned lihtsamad kauguse omadused.

Lause 1.1. *Olgu (M, ρ) meetriline ruum ning olgu $x, y, z, u, v \in M$. Siis*

(a) $\rho(x, y) \geqslant 0$*;*

(b) (nelinurga võrratus) $\big|\rho(x, y) - \rho(u, v)\big| \leqslant \rho(x, u) + \rho(y, v)$*;*

(c) (tagurpidi kolmnurga võrratus) $\big|\rho(x, y) - \rho(y, z)\big| \leqslant \rho(x, z)$*;*

(d) *hulga M iga alamhulk on samuti meetriline ruum kauguse ρ suhtes.*

Hulga M alamhulgale kui meetrilisele ruumile kauguse ρ suhtes (vt. väidet (d)) viidatakse kui *meetrilise ruumi M alamruumile.*

Lause 1.1 tõestamise jätame lugejale.

Näide 1.1. Prototüübiline näide meetrilisest ruumist on hulk $\mathbb{R}^m$ *eukleidilise kauguse d* suhtes:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\xi_i - \eta_i|^2}, \qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m,\; y = (\eta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m. \tag{1.4}$$

Samasuse ja sümmeetria aksioomide kehtivus selle kauguse jaoks on ilmne; kolmnurga võrratus on kontrollitud jaotises 1.1 lk. 2, kuid veelgi lihtsam on see järeldada Minkowski võrratusest (teoreem I.1.1) – vt. arutelu lk. 4 teoreemi I.1.1 järel.

Üldisemalt, kui $1 \leqslant p < \infty$, siis $\mathbb{R}^m$ on meetriline ruum kauguse ρ suhtes, kus

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m,\ y = (\eta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m. \tag{1.5}$$

Samasuse ja sümmeetria aksioomide kehtivus selle kauguse jaoks on ilmne; kolmnurga võrratus järeldub Minkowski võrratusest (vt teoreemi I.1.1) analoogiliselt eukleidilise kauguse juhuga. Eukleidiline kaugus (1.4) on kauguse (1.5) erijuht, kus $p = 2$.

Veel üks loomulik kaugus hulgas $\mathbb{R}^m$ on defineeritud võrdusega

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi_i - \eta_i|, \qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m,\ y = (\eta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m. \tag{1.6}$$

Näide 1.2. Olgu M suvaline hulk. Defineerime punktide $x, y \in M$ korral

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = y, \\ 1, & \text{kui } x \neq y. \end{cases}$$

Vahetult on kontrollitav, et ρ on kaugus hulgas M. Seda kaugust ρ nimetatakseis nimetatakse *diskreetseks meetrikaks* (ehk *diskreetseks kauguseks*). Meetrilist ruumi (M, ρ) (s.t. hulka M diskreetse meetrika suhtes) nimetatakse *diskreetseks meetriliseks ruumiks.*

Näiteid kaugustest funktsiooniruumides vaatleme alajaotises 1.2.5 – kõik alajaotises 1.2.5 vaadeldavad kaugused on indutseeritud mingi normi poolt, mistõttu on otstarbekas eelnevalt alajaotises 1.2.2 tutvuda normi (ja normeeritud ruumi) mõistega.

Kauguse mõiste võimaldab loomulikul viisil defineerida jada koonduvuse meetrilises ruumis.

Definitsioon 1.4. Olgu (M, ρ) meetriline ruum ning olgu $x_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots,$ ja $x \in M$. Öeldakse, et jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ ruumis M koondub punktiks x (ruumis M) ja kirjutatakse

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{või} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

kui $\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Märgime, et jada koonduvuse definitsioon I.2.2 ((eukleidilises) ruumis $\mathbb{R}^m$) on definitsiooni 1.4 erijuht, kus $M = \mathbb{R}^m$ ja ρ on eukleidiline kaugus ruumis $\mathbb{R}^m$.

Pole raske näidata, et *koonduval jadal meetrilises ruumis on täpselt üks piirväärtus.*

Ülesanne 1.1. Tõestada, et koonduval jadal meetrilises ruumis on täpselt üks piirväärtus.

Järgnev definitsioon üldistab Cauchy jada mõistet ruumis $\mathbb{R}^m$: Cauchy jada definitsioon I.2.5 ((eukleidilises) ruumis $\mathbb{R}^m$) on järgneva definitsiooni 1.5 erijuht, kus $M = \mathbb{R}^m$ ja ρ on eukleidiline kaugus ruumis $\mathbb{R}^m$.

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ meetrilises ruumis (M, ρ) on *Cauchy jada* (ehk *fundamentaaljada*), kui $\rho(x_m, x_n) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, s.t. iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Analoogiliselt jadadega ruumis $\mathbb{R}^m$ saab näidata, et *iga koonduv jada mis tahes meetrilises ruumis on Cauchy jada* (vt. tarvilikkuse osa teoreemi I.2.6 tõestuses).

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et meetriline ruum on *täielik,* kui iga Cauchy jada selles ruumis koondub (mingiks selle ruumi elemendiks).

Cauchy kriteeriumi (vt. teoreemi I.2.6) põhjal iga eukleidilise kauguse (1.4) suhtes Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}^m$ koondub, seega ruum $\mathbb{R}^m$ on selle kauguse suhtes täielik meetriline ruum. Pole raske tõestada, et *ruumis* $\mathbb{R}^m$ *on eukleidilise kauguse ning kauguste* (1.5) *ja* (1.6) *suhtes ühed ja samad Cauchy jadad ning ühed ja samad koonduvad jadad,* seega on ruum $\mathbb{R}^m$ ka kauguste (1.5) ja (1.6) suhtes täielik.

Ülesanne 1.2. Tõestada, et diskreetne meetriline ruum on täielik.

Näide 1.3. Esitame skeemi, mille abil saab genereerida näiteid mittetäielikest meetrilistest ruumidest.

Olgu (M, ρ) meetriline ruum ning olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ koonduv jada ruumis M, kusjuures selle jada kõik liikmed erinevad selle jada piirväärtusest x. Siis ruumi M mis tahes alamruum M_0, mis sisaldab kõiki jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elemente, kuid mis ei sisalda selle jada piirväärtust x, on mittetäielik meetriline ruum. Tõepoolest, jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy jada ruumis M_0 (see jada on Cauchy jada, sest ta koondub ruumis M), kuid see jada ei koondu ruumis M_0 (sest kui see jada koonduks mingiks elemendiks $y \in M_0$, siis oleks sellel jadal ruumis M kaks erinevat piirväärtust – x ja y, mis on vastuolus koonduva jada piirväärtuse ühesusega).

1.2.2. Normeeritud ruumi mõiste

Definitsioon 1.7. Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$ (kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Funktsiooni $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *normiks,* kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

1° $\|x\| = 0 \iff x = 0;$

2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|;$

3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

Sel juhul paari $(X, \|\cdot\|)$ nimetatakse *normeeritud ruumiks.* Kui normi $\|\cdot\|$ roll on kontekstist selge, siis öeldakse lihtsalt, et X on normeeritud ruum. Arvu $\|x\|$ nimetatakse elemendi x normiks. Tingimustele 1°, 2° ja 3° – *normi aksioomidele* – viidatakse vastavalt kui *samasuse aksioomile, homogeensuse aksioomile* ja *kolmnurga võrratusele.*

Märgime, et normeeritud ruumi vektoralamruum on samuti normeeritud ruum selle "ülemruumi" normi suhtes.

Järgnev lause ütleb, et normeeritud ruum on loomulikul viisi vaadeldav meetrilise ruumina.

Lause 1.2. *Olgu* $(X, \|\cdot\|)$ *normeeritud ruum. Siis* X *on meetriline ruum järgmise kauguse suhtes:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X, \tag{1.7}$$

Kaugusele ρ lausest 1.2 viidatakse kui *normi $\|\cdot\|$ poolt indutseeritud kaugusele.*

LAUSE 1.2 TÕESTUS.

Ülesanne 1.3. Tõestada, et valemiga (1.7) defineeritud funktsioon $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ on kaugus vektorruumis X.

$\square$

Eelnevast järeldub, et normeeritud ruumil on kõik meetrilise ruumi omadused (tema normi poolt indutseeritud meetrika suhtes). Muuhulgas mis tahes $x, y \in X$ korral

- $\|x\| \geqslant 0$;
- (tagurpidi kolmnurga võrratus normi jaoks) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.

Ülesanne 1.4. Tõestada eelnevad väited.

Mitte iga kaugus vektorruumis pole indutseeritud mingi normi poolt: näiteks kui E on mittetriviaalne vektorruum, s.t. $E \neq \{0\}$, siis diskreetset meetrikat pole võimalik indutseerida mitte ühegi normiga ruumis E (PÕHJENDADA!).

Definitsioon 1.8. Öeldakse, et normeeritud ruum on *täielik,* kui ta on oma normi poolt indutseeritud kauguse suhtes täielik meetriline ruum. Täielikke normeeritud ruume nimetatakse *Banachi ruumideks.*

Näide 1.4. Vektorruum $\mathbb{K}^m$, kus $m \in \mathbb{N}$ ning $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on iga $p \in [1, \infty)$ korral normeeeritud ruum normi $\|\cdot\|_p$ suhtes, kus

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m. \tag{1.8}$$

Olulisemad erijuhud sellest normist on $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|, &\qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m, \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2}, &\qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Samuti on $\mathbb{K}^m$ normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_\infty$ suhtes, kus

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi_i|, \qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m. \tag{1.10}$$

Paneme tähele, et kaugused (1.5) ja (1.6) ruumis $\mathbb{R}^m$ on indutseeritud vastavalt normide (1.8) ja (1.10) poolt (s.t. vastavalt normide $\|\cdot\|_p$, kus $1 < p < \infty$, ja $\|\cdot\|_\infty$ poolt). Seejuures erijuhul, kus $p = 2$, euklediline kaugus (1.4) ruumis R^m on indutseeritud normi (1.9) poolt (s.t. normi $\|\cdot\|_2$ poolt).

Normeeritud ruumi $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$, kus $1 \leqslant p \leqslant \infty$, tähistatakse sümboliga ℓ_p^m. Vahetult on kontrollitav, et ruum $\mathbb{K}^m$ on normide $\|\cdot\|_p$ poolt indutseeritud kauguste suhtes täielik meetriline ruum (vastav argument juhu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ jaoks on esitatud definitsiooni 1.6 järel); seega normeeritud ruumid ℓ_p^m on Banachi ruumid.

1.2.3. Read normeeritud ruumides

Definitsioon 1.9. Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$.

Formaalset lõpmatut summat

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots =: \sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{1.11}$$

nimetatakse *reaks* (ruumis X). Elemente $x_1, x_2, \ldots$ nimetatakse rea (1.11) *liikmeteks.* Summasid

$$\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

nimetatakse rea (1.11) *osasummadeks.*

Kui rea (1.11) osasummade jada $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ koondub, siis selle (osasummade) jada piirväärtust nimetatakse rea (1.11) *summaks* ning öeldakse, et rida (1.11) koondub (selleks summaks). Vastasel juhul öeldakse, et rida (1.11) *hajub.*

Kui rida (1.11) koondub, siis tema summat tähistatakse sümboliga $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (nagu ka rida (1.11) ennast). Niisiis, rea (1.11) summa esitub valemiga

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1.2.4. Pseudomeetrikad ja poolnormid

Kui funktsioon ρ kauguse definitsioonis 1.3 rahuldab tingimusi 2° ja 3°, kuid tingimuse 1° asemel kehtib nõrgem tingimus

1°° $\rho(x, x) = 0$ (iga $x \in M$ korral),

siis seda funktsiooni ρ nimetatakse *pseudomeetrikaks* (hulgas M) ning paari (M, ρ) nimetatakse *pseudomeetriliseks ruumiks.*

Jada koonduvus pseudomeetrilises ruumis defineeritakse samamoodi, nagu definitsioonis 1.4 meetrilise ruumi juhul.

Kui funktsioon $\|\cdot\|$ normi definitsioonis 1.7 rahuldab tingimusi 2° ja 3° (kuid tingimus 1° ei tarvitse kehtida), siis seda funktsiooni $\|\cdot\|$ nimetatakse *poonormiks* (ruumis X).

Loetleme mõned poolnormi omadused.

Olgu X vektorruum ning olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ poolnorm. Siis

(1) $p(x) \geqslant 0$ iga $x \in X$ korral;

(2) $p(0) = 0$;

(3) $p(-x) = p(x)$ iga $x \in X$ korral;

(4) $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$ kõikide $x, y \in X$ korral.

Omadust (4) nimetatakse *tagurpidi kolmnurga võrratuseks.* Vahetult omadusest (2) näeme, et poolnorm p vektorruumis X on norm parajasti siis, kui

$$x \in X,\ p(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Ülesanne 1.5. Tõestada väited (1)–(4).

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt on mõistlik tõestada väited (2) ja (3).

Täpselt nii, nagu norm vektorruumis indutseerib kauguse (selles vektorruumis), indutseerib poolnorm vektorruumis pseudomeetrika (selles vektorruumis): kui p on poolnorm vektorruumis X, siis

$$\rho(x,y) := p(x-y), \quad x,y \in X,$$

on pseudomeetrika ruumis X.

Jada koonduvus poolnormi suhtes vektorruumis defineeritakse (analoogiliselt normi juhuga) kui koonduvus selle poolnormi poolt indutseeritud pseudomeetrika suhtes.

Rea koonduvus poolnormi suhtes vektorruumis defineeritakse (jällegi analoogiliselt normi juhuga) kui selle rea osasummade jada koonduvus selle poolnormi suhtes.

1.2.5. Näiteid kaugustest/pseudomeetrikatest funktsiooniruumides

Selles alajaotises toome näiteid normidest/poolnormidest funktsioonide $[a,b] \to \mathbb{R}$ (s.t. lõigus $[a,b]$ määratud $\mathbb{R}$-väärtuseliste funktsioonide) vektorruumides. Igaüks nende normide/poolnormide poolt indutseeritud kaugustest/pseudomeetrikatest mõõdab omal moel funktsioonide vahelist sarnasust: mida väiksem on konkreetne kaugus kahe funktsiooni vahel, seda sarnasemad need funktsioonid teatavas mõttes on; mida suurem on see kaugus, seda erinevamad need funktsioonid selles mõttes on.

Näide 1.5. Tõkestatud funktsioonide $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vektorruum on normeeritud ruum normi

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{1.12}$$

suhtes. Seda normeeritud ruumi tähistatakse sümboliga $\ell_\infty\big([a,b]\big)$ või ka $M[a,b]$.

Ruumi $M[a,b]$ vektoralamruum $C[a,b]$, mis koosneb lõigus $[a,b]$ pidevatest funktsioonidest, on normi $\|\cdot\|_\infty$ suhtes samuti täielik normeeritud ruum, s.t. Banachi ruum. Märgime, et Weierstrassi teise teoreemi põhjal

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{iga } f \in C[a,b] \text{ korral.}$$

Kõneldes normeeritud (või Banachi) ruumist $C[a,b]$ ilma konkreetsele normile viitamata, peetakse silmas ruumi $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$.

Näide 1.6. Tähistame (lõigus $[a,b]$) Riemanni mõttes integreeruvate funktsioonide $[a,b] \to \mathbb{R}$ vektorruumi sümboliga $\mathcal{R}[a,b]$. (Rõhutame, et *see tähistus ei ole üldkasutatav.*) Defineerime iga $p \in [1,\infty)$ korral

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in \mathcal{R}[a,b]. \tag{1.13}$$

Vahetult on kontrollitav, et $\|\cdot\|_p$ on poolnorm ruumis $\mathcal{R}[a,b]$. Olulisemad erijuhud sellest poolnormist on $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad f \in \mathcal{R}[a,b],$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}, \qquad f \in \mathcal{R}[a,b]. \tag{1.14}$$

Veendumaks, et poolnorm (1.13) ei ole norm, märgime, et kui nullfunktioonist erineva funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ väärtused erinevad nullist ülimalt lõplikus arvus punktides, siis $f \in \mathcal{R}[a,b]$, kusjuures

$$\|f\|_p = \left(\int_{a,b} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0;$$

niisiis funktsioon $\|\cdot\|_p$ ei rahulda normi samasuse aksioomi (s.t. tingimust 1° normi definitsioonist 1.7).

Märgime, et ruumi $\mathcal{R}[a,b]$ vektoralamruumis $C[a,b]$ (mis koosneb pidevatest funktsioonidest $[a,b] \to \mathbb{R}$) on poolnorm $\|\cdot\|_p$ (kus $1 \leqslant p < \infty$) norm. Ruum $C[a,b]$ ei ole selle normi suhtes täielik, niisiis normeeritud ruum $\big(C[a,b], \|\cdot\|_p\big)$ ei ole Banachi ruum.

Märgime veel, et ruum $\mathcal{R}[a,b]$ on ruumi $M[a,b]$ (mis koosneb tõkestatud funktsioonidest $[a,b] \to \mathbb{R}$) vektoralamruum, seega $\mathcal{R}[a,b]$ on normi $\|\cdot\|_\infty$ (vt. valemit (1.12)) suhtes normeeritud ruum; veelgi enam, $\mathcal{R}[a,b]$ on selle normi suhtes täielik, niisiis $\big(\mathcal{R}[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ on Banachi ruum.

1.3. Skalaarkorrutisega ruumid

Selles punktis selgitame, miks funktsiooni lähendamisel trigonomeetrilise reaga on mõistlik uurida eelkõige selle funktsiooni Fourier' rida. Seejuures me vaatleme seda küsimust üldisemas, *skalaarkorrutisega ruumide* kontekstis.

1.3.1. Skalaarkorrutisega ruumi mõiste

Definitsioon 1.10. Olgu H vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Funktsiooni $H \times H \ni (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle \in \mathbb{K}$ nimetatakse *skalaarkorrutiseks,* kui mis tahes $x,y,z \in H$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

1° $\langle x,x\rangle \geqslant 0$, kusjuures $\big[\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0\big]$;

2° $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$;

3° $\langle x+z,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$;

4° $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$.

Sel juhul paari $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ nimetatakse *skalaarkorrutisega ruumiks.* Kui skalaarkorrutise $\langle\cdot,\cdot\rangle$ roll on kontekstist selge, siis öeldakse lihtsalt, et H on skalaarkorrutisega ruum. Arvule $\langle x,y\rangle$ viidatakse kui *elementide x ja y skalaarkorrutisele.*

Märkus 1.1. (a) Kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis tingimus $2°$ omandab kuju

$2°$ $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(b) Skalaarkorrutisega ruumi vektoralamruum on samuti skalaarkorrutisega ruum.

Loetleme mõned skalaarkorrutise omadused: mis tahes $x, y, z \in H$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

(1) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

(2) $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$;

(3) $\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$;

(4) $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$;

(5) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$;

(6) $\langle \alpha x, \alpha y\rangle = |\alpha|^2\langle x, y\rangle$.

Ülesanne 1.6. Tõestada omadused (1)–(6).

1.3.2. Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus

Teoreem 1.3 (Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus)**.** *Olgu H skalaarkorrutisega ruum. Siis mis tahes $x, y \in H$ korral*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{1.15}$$

TÕESTUS. Olgu $x, y \in H$. Mis tahes $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\overline{\alpha}\langle x, y\rangle + |\alpha|^2\langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Kui $y \neq 0$, järeldub sellest võrratusteahelast, võttes $\alpha = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$, et

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\Big(-\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle\Big) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - 2\operatorname{Re}\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}, \end{aligned}$$

millest $\dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \leqslant \langle x, x\rangle$, s.t võrratus (1.15) kehtib. Kui $y = 0$, siis on võrratuse (1.15) kehtivus ilmne. □

Ülesanne 1.7. Tõestada, et Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuses (1.15) kehtib võrdus parajasti siis, kui elemendid x ja y on lineaarselt sõltuvad.

NÄPUNÄIDE. Tarvilikkuse tõestuseks ideede leidmiseks soovitame uurida Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuse tõestust.

1.3.3. Skalaarkorrutisega ruum kui normeeritud ruum. Hilberti ruumi mõiste

Teoreem 1.4. *Skalaarkorrutisega ruum $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in H. \tag{1.16}$$

Normile (1.16) viidatakse kui *skalaarkorrutise* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *poolt indutseeritud normile.*

Teoreemi 1.4 tõestus.

Ülesanne 1.8. Tõestada, et võrdusega (1.16) defineeritud funktsioon $\|\cdot\|$ rahuldab normi aksioome.

Näpunäide. Kolmnurga võrratuse kontrolli juures näidata, et mis tahes $x, y \in H$ korral $\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$. Selleks kasutada Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratust.

□

Märkus 1.2. (a) Kui H on skalaarkorrutisega ruum, siis (eelmises paragrahvis toodud skalaarkorrutise omaduste (2)–(3) põhjal) mis tahes $x, y \in H$ korral

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

(b) Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuse võib skalaarkorrutisega ruumi H normi abil panna kirja järgmiselt:

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Märkus 1.3. Saab näidata, et *normeeritud ruumi X norm on indutseeritud mingi skalaarkorrutise poolt parajasti siis, kui see norm rahuldab rööpküliku võrdust:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \textit{mis tahes } x, y \in X \textit{ korral} \tag{1.17}$$

(s.t. rööpküliku diagonaalide ruutude summa on võrdne tema külgede ruutude summaga).

NB! Järgneva lause 1.5 võib konspektist välja jätta – kui me ei tõesta Parsevali võrdust tükiti siledate funktsioonide jaoks, siis konspekti terviklikkus selle all ei kannata.

Lause 1.5. *Skalaarkorrutis ruumis H on tema poolt indutseeritud normi suhtes pidev, s.t. kui $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ja $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ ruumis H, siis $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle$.*

Tõestus. Olgu $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ja $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ ruumis H, s.t. $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja $\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Siis Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}
\big|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\big| &= \big|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\big| \\
&= \big|\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle\big| \leqslant \big|\langle x_n - x, y_n\rangle\big| + \big|\langle x, y_n - y\rangle\big| \\
&\leqslant \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,\|y\| + \|x\|\,0 = 0.
\end{aligned}$$

□

Definitsioon 1.11. Skalaarkorrutisega ruumi (eelkõige vaadelduna normeeritud ruumina) nimetatakse *pre-Hilberti ruumiks.* Täielikku skalaarkorrutisega ruumi nimetatakse *Hilberti ruumiks.*

Näide 1.7. Funktsioon $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ (siin, nagu ikka, $m \in \mathbb{N}$ ning $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), kus

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{m} \xi_i \overline{\eta_i}, \qquad x = (\xi_i)_{i=1}^m,\ y = (\eta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m,$$

on skalaarkorrutis. See skalaarkorrutis indutseerib ruumis $\mathbb{K}^m$ normi $\|\cdot\|_2$ (vt. valemit (1.9)). Ruum $\mathbb{K}^m$ normi $\|\cdot\|_2$ suhtes – ehk, teisisõnu, ruum ℓ_2^m – on täielik; niisiis ruum ℓ_2^m on Hilberti ruum. Märgime, et ℓ_2^m on ruumidest ℓ_p^m ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) ainus, mille norm on indutseeritud mingi skalaarkorrutise poolt.

1.3.4. Poolskalaarkorrutise mõiste

Kui funktsioon $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalaarkorrutise definitsioonis 1.10 rahuldab tingimusi 2°–4°, kuid tingimuse 1° asemel kehtib nõrgem tingimus

1°° $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ (iga $x \in H$ korral),

siis seda funktsiooni $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nimetatakse *poolskalaarkorrutiseks* (ruumis H) ning ruumile H viidatakse kui poolskalaarkorrutisega ruumile.

Märgime, et Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus (vt. teoreemi 1.3) kehtib ka poolskalaarkorrutise jaoks.

Samamoodi, nagu skalaarkorrutis vektorruumis indutseerib normi selles vektorrumis, indutseerib poolskalaarkorrutis poolnormi: *kui $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on poolskalaarkorrutis vektorruumis H, siis valemiga* (1.16) *defineeritud funktsioon $\|\cdot\|$ on poolnorm ruumis H.*

Näide 1.8. Funktsioon $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathcal{R}[a,b] \times \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$ (sümbol $\mathcal{R}[a,b]$ tähistab Riemanni mõttes integreeruvate funktsioonide $[a,b] \to \mathbb{R}$ vektorruumi), kus

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \qquad f, g \in \mathcal{R}[a,b], \tag{1.18}$$

on poolskalaarkorrutis, kuid mitte skalaarkorrutis.

Tõepoolest, kui nullfunktsioonist erineva funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ väärtused erinevad nullist ülimalt lõplikus arvus punktides, siis $f \in \mathcal{R}[a,b]$, kusjuures

$$\langle f, f\rangle = \int_{a,b} f(x)^2\, dx = 0;$$

niisiis funktsioon $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ei rahulda tingimust 1° skalaarkorrutise definitsioonist 1.10.

Ülesanne 1.9. Tõestada, et valemiga (1.18) antud funktsioon $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathcal{R}[a,b] \times \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$ on poolskalaarkorrutis.

Paneme tähele, et poolnorm $\|\cdot\|_2$ ruumis $\mathcal{R}[a,b]$ (vt. valemit (1.14)) on indutseeritud poolskalaarkorrutise (1.18) poolt: iga $f \in \mathcal{R}[a,b]$ korral

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_a^b f(x)\, f(x)\, dx} = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Märgime, et ruumi $\mathcal{R}[a,b]$ vektoralamruumis $C[a,b]$ (mis koosneb lõigus $[a,b]$ pidevatest funktsioonidest) on poolskalaarkorrutis (1.18) (või, täpsemalt, selle poolskalaarkorrutise ahend $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{C[a,b]\times C[a,b]}$) skalaarkorrutis. Eelnevast nähtub, et see skalaarkorrutis indutseerib ruumis $C[a,b]$ normi $\|\cdot\|_2$. Kuna ruum $C[a,b]$ ei ole selle normi suhtes täielik, siis pre-Hilberti ruum $\big(C[a,b], \|\cdot\|_2\big)$ ei ole Hilberti ruum.

1.3.5. Ortogonaalsus skalaarkorrutisega ruumis

Definitsioon 1.12. Olgu H skalaarkorrutisega ruum ning olgu $x, y \in H$. Öeldakse, et elemendid x ja y on *ortogonaalsed* ja kirjutatakse $x \perp y$, kui $\langle x, y\rangle = 0$.

Teoreem 1.6 (Pythagorase teoreem). *Olgu H skalaarkorrutisega ruum ning olgu elemendid $x_1, \ldots, x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ paarikaupa ortogonaalsed, s.t. $x_i \perp x_j$, kui $i \neq j$. Siis*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

Tõestus. Skalaarkorrutisega ruumi normi definitsiooni kohaselt

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\Big\langle x_j, \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle x_j, x_i\rangle.$$

Kuna $i \neq j$ korral $\langle x_j, x_i\rangle = 0$, siis

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

□

Teoreem 1.7. *Olgu H Hilberti ruum. Paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ ruumis H koondub parajasti siis, kui tema liikmete normide ruutude rida koondub, s.t.*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty.$$

Seejuures

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2.$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui rida $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ koondub, siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big\|^2 = \Big\|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2.$$

Muuhulgas $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$.

Piisavus. Olgu $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$. Kuna Hilberti ruum H on täielik, siis piisab rea $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ koonduvuseks ruumis H näidata, et tema osasummade jada on Cauchy jada, s.t. $m \geqslant n$ korral

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Veendume selles: kui $m \geqslant n$, siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\|^2 \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x_j\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(sest koonduva arvrea $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ jääkliige koondub nulliks), aga siit järeldub, et ka $\left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nagu soovitud. □

1.3.6. Ortonormeertud süsteemid skalaarkorrutisega ruumis

Definitsioon 1.13. Öeldakse, et skalarkorrutisega ruumi elementide süsteem $\mathcal{S}$ on *ortogonaalne,* kui tema elemendid on paarikaupa ortogonaalsed, s.t.

$$s, t \in \mathcal{S},\ s \neq t \quad \Longrightarrow \quad s \perp t \quad (\text{s.t. } \langle s, t\rangle = 0).$$

Öeldakse, et süsteem $\mathcal{S}$ on *ortonormaalne* (ehk *ortonormeeritud*), kui ta on ortogonaalne ja $\|s\| = 1$ iga $s \in \mathcal{S}$ korral, s.t.

$$\langle s, t\rangle = \begin{cases} 1, & \text{kui } s = t, \\ 0, & \text{kui } s \neq t. \end{cases}$$

Ülesanne 1.10. Olgu $\mathcal{S}$ ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H ning olgu $x, y \in \mathcal{S}$, $x \neq y$. Tõestada, et $\|x - y\| = \sqrt{2}$.

Näide 1.9. Ruumis ℓ_2^m süsteem

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_m = (0, \ldots, 0, 1)$$

on ortonormeeritud süsteem.

NB! Järgnevad lause 1.8 ja järelduse 1.9 võib konspektist välja jätta – konspekti terviklikkus selle all ei kannata.

Lause 1.8. *Kui ortogonaalne süsteem Hilberti ruumis ei sisalda nullelementi, siis ta on lineaarselt sõltumatu.*

Vahetult lausest 1.8 järeldub

Järeldus 1.9. *Ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis on lineaarselt sõltumatu.*

LAUSE 1.8 TÕESTUS. Olgu $\mathcal{S}$ ortogonaalne süsteem Hilberti ruumis H, mis ei sisalda nullelementi, ning olgu $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) sellised, et $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j = 0$. Süsteemi $\mathcal{S}$ lineaarseks sõltumatuseks piisab näidata, et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Kuna elemendid $\alpha_1 s_1, \ldots, \alpha_n s_n \in H$ on paarikaupa ortogonaalsed, siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\alpha_j s_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \|s_j\|^2.$$

Kuna $\|s_1\|, \ldots, \|s_n\| > 0$, siis $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, nagu soovitud. □

1.3.7. Fourier' rida loenduva ortonormeeritud süsteemi järgi

Kõikjal selle alajaotises olgu H skalaarkorrutisega ruum ning olgu $(e_k) = (e_k)_{k=1}^\infty$ ortonormeeritud süsteem ruumis H.

Lause 1.10. *Olgu $x \in H$ ning olgu $n \in \mathbb{N}$. Norm*

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^n c_k e_k\Big\|, \quad \text{kus } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K},$$

on minimaalne parajasti siis, kui $c_k = \langle x, e_k\rangle$, $k = 1, \ldots, n$.

TÕESTUS. Mis tahes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned}
\Big\|x - \sum_{k=1}^n c_k e_k\Big\|^2 &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\Big\langle x, \sum_{k=1}^n c_k e_k\Big\rangle + \Big\|\sum_{k=1}^n c_k e_k\Big\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n 2\operatorname{Re}\overline{c_k}\langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^n \|c_k e_k\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n 2\operatorname{Re}\overline{c_k}\langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^n \big(|\langle x, e_k\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{c_k}\langle x, e_k\rangle + |c_k|^2\big) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle - c_k|^2.
\end{aligned}$$

Siit näeme, et uuritav norm on minimaalne, kui $c_k = \langle x, e_k\rangle$, $k = 1, \ldots, n$. □

Definitsioon 1.14. Elemendi $x \in H$ *Fourier' kordajateks* (süsteemi (e_k) järgi) nimetatakse arvusid

$$\langle x, e_k\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Rida

$$\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle\, e_k \tag{1.19}$$

nimetatakse elemendi x *Fourier' reaks* (süsteemi (e_k) järgi).

Teoreem 1.11. *Olgu H skalaarkorrutisega ruum ning olgu $x \in H$.*

(a) (Besseli võrratus) *Kehtib võrratus*

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{1.20}$$

(b) *Elemendi x Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle\, e_k$ koondub elemendiks x parajasti siis, kui elemendi x jaoks kehtib* Parsevali võrdus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2, \tag{1.21}$$

s.t. Besseli võrratuses (1.20) *leiab aset võrdus.*

TÕESTUS. (a). Besseli võrratuse (1.20) tõestuseks piisab näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2. \tag{1.22}$$

Veendume selles: olgu $n \in \mathbb{N}$; siis

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\langle x, \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k \right\rangle + \left\| \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k\rangle}\langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} \|\langle x, e_k\rangle\, e_k\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2.
\end{aligned}$$

(b) järeldub vahetult võrdusest (1.22). □

Järeldus 1.12 (Riemann–Lebesgue'i lemma)**.** *Mis tahes $x \in H$ korral*

$$\langle x, e_k\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{1.23}$$

s.t. elemendi x Fourier' kordajate jada koondub nulliks.

TÕESTUS. Olgu $x \in H$. Besseli võrratuse (1.20) põhjal rida $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ koondub; seega selle rea üldliige koondub nulliks, s.t. $|\langle x, e_k\rangle|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, aga siit järeldub (1.23). □

Järeldus 1.13. *Olgu H Hilberti ruum. Siis mis tahes $x \in H$ korral elemendi x Fourier' rida* (1.19) *(süsteemi (e_k) järgi) koondub ruumis H. Seejuures elemendi x Fourier' rida koondub elemendiks x parajasti siis, kui elemendi x jaoks kehtib Parsevali võrdus* (1.21).

TÕESTUS. Olgu $x \in H$. Siis elemendi x Fourier' rida (1.19) on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida, mille liikmete normide ruutude rida $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ koondub Besseli võrratuse (1.20) põhjal. Teoreemi 1.7 põhjal see Fourier' rida koondub ruumis H.

Väite "Seejuures"-osa on tõestatud teoreemis 1.11, (b). □

1.4. Fourier' read lõigus $[-\pi,\pi]$ integreeruvate funktsioonide ruumis trigonomeetrilise süsteemi järgi

Elementide ortogonaalsus, ortogonaalsed ja ortonormeeritud süsteemid ning Fourier' read poolskalaarkorrutisega ruumis defineeritakse analoogiliselt skalaarkorrutisega ruumi juhuga. Seejuures jäävad poolskalaarkorrutisega ruumi juhul kehtima nii Pythagorase teoreem (teoreem 1.6), lause 1.10 ja teoreem 1.11 kui ka Riemann–Lebegue'i lemma (järeldus 1.12).

Meenutame (vt. näidet 1.8), et lõigus $[-\pi,\pi]$ Riemanni mõttes integreeruvate funktsioonide ruumis $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ on funktsioon

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \qquad f,g\in\mathcal{R}[-\pi,\pi], \tag{1.24}$$

poolskalaarkorrutis. Selles jaotises vaatleme funktsioonide $f\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ Fourier' ridu trigonomeetrilise süsteemi (1.29) järgi. Märgime, et *Fourier' ridade teooria rakendub täies võimsuses eelkõige Hilberti ruumide jaoks;* nii et paremate tulemuste saamiseks oleks Fourier' ridu trigonomeetrilise süsteemi (1.29) järgi otstarbekam vaadelda ruumi $L_2[-\pi,\pi]$ (s.t. lõigus $[-\pi,\pi]$ Lebesgue'i mõttes integreeruva ruuduga funktsioonide ruumi – mis iganes see ka poleks!) kontekstis.

Niisiis, vaatleme ruumi $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ varustatuna poolskalaarkorrutisega (1.24). Selles ruumis on trigonomeetriline süsteem

$$1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x,\quad \cos 3x,\quad \sin 3x,\quad \ldots$$

ortogonaalne kuid mitte ortonormeeritud süsteem.

Tõepoolest, selleks piisab tähele panna, et $\langle 1,1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$ ning mis tahes $k\in\mathbb{N}$ korral

$$\langle 1,\cos kx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0,\qquad \langle 1,\sin kx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0, \tag{1.25}$$

$$\langle \cos kx,\cos kx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi,\qquad \langle \sin kx,\sin kx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi, \tag{1.26}$$

ning mis tahes $k,l\in\mathbb{N}$ korral

$$\langle \cos kx,\sin lx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\sin lx\,dx=0 \tag{1.27}$$

ja kui $k\neq l$, siis ka

$$\langle \cos kx,\cos lx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\cos lx\,dx=0,\qquad \langle \sin kx,\sin lx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\sin lx\,dx=0. \tag{1.28}$$

Ülesanne 1.11. Tõestada võrdused (1.25)–(1.28).

Eelnevatest rehkendustest nähtub, et trigonomeetriline süsteem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots \tag{1.29}$$

on ortonormeeritud süsteem ruumis $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ ((pool)skalaarkorrutise (1.18) suhtes).

Tähistame funktsiooni $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ Fourier' kordajad süsteemi (1.29) järgi sümbolitega $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ (rõhutame, et see pole üldkasutatav tähistus). Siis

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,a_0$$

ning iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\gamma_{2k-1} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\,dx = \sqrt{\pi}\,a_k, \tag{1.30}$$

$$\gamma_{2k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\,dx = \sqrt{\pi}\,b_k, \tag{1.31}$$

kus a_k ja b_k on valemitega (1.2) ja (1.3) defineeritud funktsiooni f Fourier' kordajad. Seega funktsiooni f Fourier' rida süsteemi (1.29) järgi on

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots \tag{1.32}$$

(selle rea liikmed on $\frac{a_0}{2}$, $a_1\cos x$, $b_1\sin x$, $a_2\cos 2x$, $b_2\sin 2x$, $\dots$). Kuna Riemann–Lebesgue'i lemma põhjal (vt. järeldust 1.12 ning arutelu käesoleva jaotise alguses) $\gamma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ning seega võrduste (1.30) ja (1.31) põhjal ka $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ja $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, siis rida (1.32) koondub parajasti siis, kui koondub rida

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx \tag{1.33}$$

(selle rea liikmed on $\frac{a_0}{2}$, $a_1\cos x + b_1\sin x$, $a_2\cos 2x + b_2\sin 2x$, $\dots$) – ükskõik kas me mõistame koonduvuse all koonduvust poolnormi $\|\cdot\|_2$ suhtes või nende (funktsionaal)ridade koonduvust fikseeritud punktis $x \in [-\pi,\pi]$ (PÕHJENDADA!).

Saab näidata, et *iga* $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ *jaoks kehtib Parsevali võrdus*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^2 = \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

Seega (vt. teoreemi 1.11, (b), ning arutelu käesoleva jaotise alguses) mis tahes funktsiooni $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ Fourier' rida (1.32) (ning samuti ka rida (1.33)) koondub funktsiooniks f poolnormi $\|\cdot\|_2$ suhtes. Seejuures iga $n \in \mathbb{N}$ korral valemi (1.22) põhjal

$$\begin{aligned}\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\cos k(\cdot) + b_k\sin k(\cdot)\right) - a_n\cos n(\cdot)\right\|_2^2 \\ = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - \left(\frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \pi a_k^2 + \pi b_k^2\right) - \pi a_n^2\end{aligned}$$

ja

$$\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos k(\cdot) + b_k\sin k(\cdot)\right)\right\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - \left(\frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \pi a_k^2 + \pi b_k^2\right).$$

1.5. Fourier' rea komplekskuju

Sageli esitatakse (lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruva) funktsiooni f Fourier' rida nn. *komplekskujul:*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{1.34}$$

kus

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Selle kirjapaneku aluseks on *Euleri valem:*

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i \sin\phi.$$

Märkus 1.4. Fourier' reaksarenduse (1.34) "ideoloogiline alus" on järgmine. Süsteem $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ on ortonormaalne süsteem *kompleksses ruumis* $L_2[-\pi, \pi]$, kus skalaarkorrutis on defineeritud valemiga

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in L_2[-\pi, \pi].$$

Reaksarendus (1.34) on funktsiooni f arendus Fourier' reaks süsteemi $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ järgi selles ruumis.

Selgitame seost funktsiooni f Fourier' reaksarenduste (1.1) ja (1.34) vahel. Nende ridade osasummade vahel kehtib järgmine seos: mis tahes $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{1.35}$$

Tõepoolest, kui $k \geqslant 0$, siis

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \big(\cos(-k)x + i \sin(-k)x\big)\, dx = \frac{a_k}{2} - i\frac{b_k}{2}$$

ja

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i \sin kx)\, dx = \frac{a_k}{2} + i\frac{b_k}{2};$$

seega

$$\begin{aligned} c_{-k} e^{i(-k)x} + c_k e^{ikx} &= \overline{c_k}\,\overline{e^{ikx}} + c_k e^{ikx} = 2 \operatorname{Re} c_k e^{ikx} \\ &= 2 \operatorname{Re}\Big(\frac{a_k}{2} - i\frac{b_k}{2}\Big)(\cos kx + i \sin kx) = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $c_0 = \frac{a_0}{2}$, järeldub võrdus (1.35).

§ 2. Integreeruva funktsiooni Fourier' rea koonduvus

Selles paragrahvis uurime (Riemanni mõttes) integreeruva funktsiooni $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Fourier' rea koonduvust. Selleks on otstarbekas vaadelda 2π-perioodilisi funktsioone $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on lõigus $[-\pi, \pi]$ Riemanni mõttes integreeruvad. Niisuguse funktsiooni Fourier' rida trigonomeetrilise süsteemi (1.29) järgi defineeritakse samamoodi nagu integreeruva funktsiooni $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ puhul.

Kõneldes selles paragrahvis Fourier' reast, peame me alati silmas Fourier' rida süsteemi (1.29) järgi.

2.1. Integreeruva funktsiooni Fourier' rea koonduvus selle funktsiooni pidevuspunktis

Meenutame, et funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vasakpoolne tuletis* $f'_-(x)$ ja *parempoolne tuletis* $f'_+(x)$ punktis $x \in \mathbb{R}$ on defineeritud vastavalt võrdustega

$$f'_-(x) := \lim_{z\to x-} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \text{ja} \quad f'_+(x) := \lim_{z\to x+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \tag{2.1}$$

(märgime, et need piirväärtused, s.t. tuletised $f'_-(x)$ ja $f'_+(x)$ ei tarvitse üldjuhul eksisteerida). Vasak- ja parempoolset tuletist nimetatakse *ühepoolseteks tuletisteks.* Märgime, et kui funktsioonil f eksisteerivad punktis x lõplikud ühepoolsed tuletised, siis see funktsioon on pidev punktis x.

Teoreem 2.1. *Eksisteerigu lõigus $[-\pi, \pi]$ (Riemanni mõttes) integreeruval 2π-perioodilisel funktsioonil $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punktis $x \in \mathbb{R}$ lõplikud ühepoolsed tuletised* (2.1)*. Siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub punktis x väärtuseks $f(x)$.*

Teoreemi 2.1 tõestuseks on eelnevalt otstarbekas tõestada järgnevad kaks lemmat.

Lemma 2.2. *Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-perioodiline lõigus $[-\pi, \pi]$ (Riemanni mõttes) integreeruv funktsioon. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2.2}$$

kus a_k ja b_k on funktsiooni f Fourier' kordajad valemitest (1.2) *ja* (1.3) *(s.t. $s_n(x)$ on funktsiooni f Fourier' rea* (1.1) *osasumma). Siis*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\, du. \tag{2.3}$$

Lemma 2.2 tõestus kasutab järgnevat valemit:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{2.4}$$

Valemi (2.4) tõestuseks tähistame temas vasakul pool võrdusmärki oleva summa tähega S; siis

$$\begin{aligned}2S\sin\tfrac{u}{2} &= \sin\tfrac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\tfrac{u}{2}\cos ku = \sin\tfrac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin\big(\tfrac{u}{2}-ku\big)+\sin\big(\tfrac{u}{2}+ku\big)\Big)\\ &= \sin\tfrac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin\big(k+\tfrac{1}{2}\big)u + \sin\big(k-\tfrac{1}{2}\big)u\Big) = \sin\big(n+\tfrac{1}{2}\big)u.\end{aligned}$$

Võrdus (2.4) järeldub eelnevast võrdusteahelast.

LEMMA 2.2 TÕESTUS. Asendades Fourier' kordajad a_k ja b_k valemitest (1.2) ja (1.3) valemisse (2.2), saame

$$\begin{aligned}s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\,\cos kx + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\,\sin kx\bigg)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bigg(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\bigg)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bigg(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\bigg)\,dt\\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du\\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du.\end{aligned}$$

Siin

- võrdus (1) saadakse valemist (2.4), võttes seal $u = t - x$;
- võrdus (2) saadakse tehes selles võrduses "vasakul" pool olevas integraalis muutuja vahetuse $u = t - x$;
- võrdus (3) saadakse arvestades, et integraalialune funktsioon $u \mapsto f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$ on 2π-perioodiline (siin funktsioon $u \mapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$ on 2π-perioodiline valemi (2.4) põhjal).

□

Lemma 2.3. *Olgu* $\phi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$.

(a) *Olgu funktsioon ϕ (Riemanni mõttes) integreeruv igas osalõigus $[\alpha,t]$, kus $\alpha < t < \beta$, kusjuures eksisteerib lõplik vasakpoolne piirväärtus $\lim_{u\to\beta-}\phi(u)$. Siis funktsioon ϕ on (Riemanni mõttes) integreeruv lõigus $[\alpha,\beta]$.*

(b) *Olgu funktsioon ϕ (Riemanni mõttes) integreeruv igas osalõigus $[s,\beta]$, kus $\alpha < s < \beta$, kusjuures eksisteerib lõplik parempoolne piirväärtus $\lim_{u\to\alpha+}\phi(u)$. Siis funktsioon ϕ on (Riemanni mõttes) integreeruv lõigus $[\alpha,\beta]$.*

(c) *Olgu $\alpha < \gamma < \beta$ ning olgu funktsioon ϕ (Riemanni mõttes) integreeruv kõikides osalõikudes $[\alpha, t]$ ja $[s, \beta]$, kus $\alpha < t < \gamma < s < \beta$, kusjuures eksisteerivad lõplik vasakpoolne piirväärtus $\lim_{u\to\gamma-}\phi(u)$ ja lõplik parempoolne piirväärtus $\lim_{u\to\gamma+}\phi(u)$. Siis funktsioon ϕ on (Riemanni mõttes) integreeruv lõigus $[\alpha, \beta]$.*

TÕESTUS. (a). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\phi(\beta) = \lim_{u\to\beta-}\phi(u)$ (PÕHJENDADA!), s.t. funktsioon ϕ on vasakult pidev punktis β.

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Funktsiooni ϕ integreeruvuse tõestuseks lõigus $[\alpha, \beta]$ piisab leida punktid

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \beta \tag{2.5}$$

(siin n on mingi naturaalarv) nii, et tähistades nende punktidega määratud lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisi tähega T, erinevad sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni ϕ Darboux' ülemsumma $S_\phi(T)$ ja Darboux' alamsumma $s_\phi(T)$ teineteisest vähem kui ε, s.t. $S_\phi(T) - s_\phi(T) < \varepsilon$.

Funktsiooni ϕ vasakult pidevuse tõttu punktis β leidub punkt $t \in (\alpha, \beta)$ nii, et

$$t \leqslant u \leqslant \beta \quad \Longrightarrow \quad |\phi(u) - \phi(\beta)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Funktsiooni ϕ integreeruvuse tõttu lõigus $[\alpha, t]$ leidub selle lõigu jaotusviis $\widetilde{T}$ mingite punktidega $\alpha =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := t$ (siin n on mingi naturaalarv), millele vastavad funktsiooni ϕ Darboux' ülemsumma $S_\phi(\widetilde{T})$ ja Darboux' alamsumma $s_\phi(\widetilde{T})$ rahuldavad tingimust $S_\phi(\widetilde{T}) - s_\phi(\widetilde{T}) < \varepsilon$. (Rõhutame, et Darboux' summad $S_\phi(\widetilde{T})$ ja $s_\phi(\widetilde{T})$ arvutatakse lõigus $[\alpha, t]$.) Nüüd, tähistades punktidega (2.5) määratud lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusviisi tähega T, kehtib soovitud võrratus $S_\phi(T) - s_\phi(T) < \varepsilon$ (PÕHJENDADA!).

(b). Väite saab tõestada analoogiliselt väite (a) tõestusega.

(c). Väidete (a) ja (b) põhjal on funktsioon ϕ integreeruv lõikudes $[\alpha, \gamma]$ ja $[\gamma, \beta]$, seega funktsioon ϕ on integreeruv lõigus $[\alpha, \beta]$. □

TEOREEMI 2.2 TÕESTUS. Järgides tähistust (2.2), peame teoreemi tõestuseks näitama, et $s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, s.t. (valemi (2.3) järgi)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Kuna valemi (2.4) põhjal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \pi$$

(PÕHJENDADA!), siis

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du,$$

seega piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+u)-f(x)\big)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ehk

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\,\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{2.6}$$

kus $\phi(0)=0$ ja

$$\phi(u)=\frac{f(x+u)-f(x)}{2\sin\frac{u}{2}}=\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\,\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}},\qquad \text{kui } u\in[-\pi,\pi]\backslash\{0\}.$$

Lemma 2.3, (c), põhjal on funktsioon ϕ integreeruv lõigus $[-\pi,\pi]$ (PÕHJENDADA!). Kuna

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\,\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\cos\tfrac{u}{2}\,\sin nu\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\sin\tfrac{u}{2}\,\cos nu\,du, \tag{2.7}$$

siis soovitud koonduvus (2.6) järeldub Riemann–Lebesgue'i lemmast (vt. arutelu lk. 271 lõigus, mis algab sõnaga "Tähistame"), sest võrduses (2.7) paremal pool võrdusmärki olevad integraalid on vastavalt funktsiooni $u\mapsto\phi(u)\cos\frac{u}{2}$ "Fourier' siinuskordajad" ja funktsiooni $u\mapsto\phi(u)\sin\frac{u}{2}$ "Fourier' koosinuskordajad" (märgime, et funktsiooni ϕ integreeruvuse tõttu on need kaks funktsiooni integreeruvad lõigus $[-\pi,\pi]$). □

2.2. Integreeruva funktsiooni Fourier' rea koonduvus punktis, kus sellel funktsioonil eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused

Funktsiooni $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vasakpoolse piirväärtuse ja parempoolse piirväärtuse punktis x tähistame vastavalt sümbolitega $f(x-)$ ja $f(x+)$, s.t.

$$f(x-):=\lim_{z\to x-}f(z)\quad\text{ja}\quad f(x+):=\lim_{z\to x+}f(z).$$

Märgime, et need piirväärtused ei tarvitse üldjuhul eksisteerida.

Järgnev teoreem on üldisem versioon teoreemist 2.1, kusjuures ka selle teoreemi tõestus on teoreemi 2.1 tõestuse kohandus.

Teoreem 2.4 (Dirichlet' teoreem). *Eksisteerigu lõigus $[-\pi,\pi]$ (Riemanni mõttes) integreeruval 2π-perioodilisel funktsioonil $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ punktis $x\in\mathbb{R}$ lõplikud ühepoolsed piirväärtused*

$$\lim_{z\to x-}\frac{f(z)-f(x-)}{z-x}\quad\textit{ja}\quad\lim_{z\to x+}\frac{f(z)-f(x+)}{z-x}. \tag{2.8}$$

Siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub punktis x väärtuseks

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}. \tag{2.9}$$

Märkus 2.1. Kui funktsioon f on pidev punktis x, siis piirväärtused (2.8) on vastavalt ühepoolsed tuletised $f'_-(x)$ ja $f'_+(x)$ ning väärtus (2.9) on $f(x)$. Seega teoreem 2.1 on teoreemi 2.4 erijuht, kus funktsioon f on pidev punktis x.

TEOREEMI 2.4 TÕESTUS. Järgides tähistust (2.2), peame teoreemi tõestuseks näitama, et $s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, s.t. (valemi (2.3) järgi)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

Selleks piisab näidata, et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x-)}{2} \tag{2.10}$$

ja

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x+)}{2}. \tag{2.11}$$

Kuna valemi (2.4) põhjal

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{\pi}{2},$$

(PÕHJENDADA!), siis

$$\frac{f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \quad \text{ja} \quad \frac{f(x+)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du,$$

seega piisab koonduvuste (2.10) ja (2.11) tõestuseks (ning ühtlasi teoreemi tõestuseks) näidata, et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \big(f(x+u)-f(x-)\big)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.12}$$

ja

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \big(f(x+u)-f(x+)\big)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2.13}$$

Tõestame ainult koonduvuse (2.13) (koonduvus (2.12) tõestatakse analoogiliselt). Koonduvuse (2.13) tõestuseks piisab veenduda, et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(u)\,\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{2.14}$$

kus

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & \text{kui } u \in [-\pi, 0], \\ \dfrac{f(x+u)-f(x+)}{2\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{f(x+u)-f(x+)}{u}\,\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}, & \text{kui } u \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Lemma 2.3, (c), põhjal on funktsioon ϕ integreeruv lõigus $[-\pi, \pi]$ (PÕHJENDADA!). Kuna

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(u)\,\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(u)\cos\tfrac{u}{2}\,\sin nu\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(u)\sin\tfrac{u}{2}\,\cos nu\,du, \tag{2.15}$$

siis soovitud koonduvus (2.6) järeldub Riemann–Lebesgue'i lemmast (vt. arutelu lk. 271 lõigus, mis algab sõnaga “Tähistame”), sest võrduses (2.15) paremal pool võrdusmärki olevad integraalid on vastavalt funktsiooni $u \mapsto \phi(u)\cos\frac{u}{2}$ “Fourier' siinuskordajad” ja funktsiooni $u \mapsto \phi(u)\sin\frac{u}{2}$ “Fourier' koosinuskordajad” (märgime, et funktsiooni ϕ integreeruvuse tõttu on need kaks funktsiooni integreeruvad lõigus $[-\pi, \pi]$). □

Järgnev tulemus on lihtne järeldus teoreemist 2.4.

Järeldus 2.5. *Olgu funktsioon $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Riemanni mõttes integreeruv (lõigus $[-\pi, \pi]$).*

(a) *Olgu $x \in (-\pi, \pi)$. Kui eksisteerivad lõplikud piirväärtused*

$$\lim_{z\to x-} \frac{f(z) - f(x-)}{z - x} \quad ja \quad \lim_{z\to x+} \frac{f(z) - f(x+)}{z - x},$$

siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x väärtuseks

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2};$$

muuhulgas erijuhul, kui funktsioonil f eksisteerivad punktis x lõplikud ühepoolsed tuletised (või, veelgi enam, funktsioonil f eksisteerib punktis x lõplik tuletis), koondub funktsiooni f Fourier' rida punktis x väärtuseks $f(x)$,

(b) *Kui eksisteerivad lõplikud piirväärtused*

$$\lim_{z\to -\pi+} \frac{f(z) - f(-\pi+)}{z - (-\pi)} \quad ja \quad \lim_{z\to \pi-} \frac{f(z) - f(\pi-)}{z - \pi},$$

siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktides $-\pi$ ja π väärtuseks

$$\frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2};$$

muuhulgas erijuhul, kui funktsioonil f eksisteerivad punktides $-\pi$ ja π vastavalt lõplik parempoolne tuletis ja lõplik vasakpoolne tuletis ning $f(-\pi) = f(\pi)$, koondub funktsiooni f Fourier' rida punktides $-\pi$ ja π väärtuseks $f(-\pi) = f(\pi)$.

Täiendused, muudatused ja parandused
aine “Mitme muutuja matemaatiline analüüs” loengukonspektis
2020/21 õppeaasta sügissemestril

1. september 2020: laeti üles konspekti I peatükk.

2. september 2020.

• I peatüki paragrahvide 1 ja 2 lõppu lisati vastavalt jaotised 1.7 ja 2.6 – “Täiendavaid ülesandeid”.

• Hulga kuhjumispunkti definitsioonis 2.3 asendati tingimus $\big(\mathcal{U}_\varepsilon(P)\cap\mathcal{D}\big)\backslash\{P\}\neq\varnothing$ samaväärse tingimusega $\mathcal{U}_\varepsilon(P)\cap\big(\mathcal{D}\backslash\{P\}\big)\neq\varnothing$.

• Muudeti lause 2.4 tõestuse esimest lauset; see on nüüd järgmine: “(i)$\Leftrightarrow$(ii) järeldub vahetult kuhjumispunkti definitsioonist ja lause 2.2 samaväärsusest (ii)$\Leftrightarrow$(i).”

3. september 2020.

• Lk. 2 aksioomi 3° (kolmnurga aksioomi) kirjeldavas lauses asendati ekslik kirjeldus “kolmnurga kahe külje pikkuste summa ei ületa kolmanda külje pikkust” õigega: “kolmnurga ühegi külje pikkus ei ületa ülejäänud kahe külje pikkuste summat”.

14. september 2020: laeti üles konspekti II peatükk.

5. oktoober 2020: laeti üles konspekti III peatükk.

12. oktoober 2020: laeti üles konspekti IV peatükk.

26. oktoober 2020: laeti üles konspekti V peatükk kuni punktini 5.2.
NB! Alates punktist 5.3 (lk. 174–181) laeti kogemata üles n.ö. “must materjal”, mis kuulub kogu ulatuses asendamisele.

2. november 2020.

• III peatüki esimesel kolmel leheküljel asendati kokku viies maatriksis diagonaalpunktiir “$\ddots$” vertikaalpunktiiriga “$\vdots$”: lk. 87 definitsioonis 1.1, lk. 88 (valemi)reas 4 ja lk. 89 valemi (1.8) kõigis kolmes maatriksis (need viis maatriksit ei ole ruutmaatriksid, mistõttu me ei saa nende maatriksite puhul kõnelda diagonaalist).

• Lk. 93 teoreemi 2.1 eelduses (3) kirjutati “$u(y)$” asemele “$h_x(y)$”, eelduse (3) lõppu lisati “lõigus $[y_0-\beta, y_0+\beta]$”; selle teoreemi tõestuse (valemi)reas 5 kirjutati $h(y)$ asemele $h_x(y)$, ridades 7 ja 8 kirjutati vastavalt “funktsioon h” ja “funktsiooni h” asemele “funktsioon h_x” ja “funktsiooni h_x”, reas 9 kirjutati “$u(y)$” asemele “$h_{x_0}(y)$”.

• Lk. 94 (valemi)rea 4 järele (rea 5 “Selleks. . . ” ette) lisati lause: “Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $[\widetilde{y}-\varepsilon,\widetilde{y}+\varepsilon]\subset[y_0-\beta,y_0+\beta]$ (PÕHJENDADA!).” Rea 5 alguses asendati sõna “Selleks” sõnapaariga “Sel eeldusel”; reas 7 kirjutati “$u(y)$” asemele “$h_x(y)$”.

• Teoreemi 2.2 eelduses (1) kirjutati "mingis ristkülikus $\mathcal{D}$ keskpunktiga (x_0, y_0):" asemele "punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses $\mathcal{U}$;", järgnev valemirida ("$\mathcal{D} := \ldots$") kustutati; eelduses (3) kirjutati "ristkülikus $\mathcal{D}$" asemele "ümbruses $\mathcal{U}$". (Need ja järgnevad muudatused viivad teoreemis 2.2 ja selle tõestuses kasutatavad tähistused kooskõlla teoreemis 2.1 ja selle tõestuses kasutatavatega.)

• Lk. 95 teoreemi 2.2 tõestuse teises lõigus kirjutati "α_0", "β_0" ja "$\mathcal{D}_0$" asemele kõikjal vastavalt "α", "β" ja "$\mathcal{D}$". Selle lõigu reas 1 kirjutati "ristkülikus $\mathcal{D}$" asemele "ümbruses $\mathcal{U}$", (valemi)reas 3 "$\cdots \subset D$" asemele "$\cdots \subset \mathcal{U}$" ning reas 5 "kasvav" asemele "rangelt kasvav".

• Teoreemi 2.2 tõestuse kolmanda lõigu ("Tõestuse lõpetuseks…") algusesse lisati järgmine lause: "Olgu I mingi punkti x_0 sisaldav vahemik, milles funktsioon $y = y(x)$ on pidev." "Tõestuse lõpetuseks näitame" asemele kirjutati "Teoreemi tõestuseks jääb näidata"; selle lause lõppu kirjutati "vahemikus $(x_0-\alpha_0, x_0+\alpha_0) =: I$" asemele "vahemikus I, kusjuures vastav tuletisfunktsioon on selles vahemikus pidev" (funktsioonil $y = y(x)$ ei tarvitse vahemikus $(x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$ ehk siis muudetud tähistuste kohaselt vahemikus $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (lõplikku) tuletist eksisteerida!). Selle tõestuse reas 17 kirjutati "ristküliku $\mathcal{D}$" asemele "ümbruse $\mathcal{U}$" ning reas 18 "ristkülikus" asemele "ümbruses".

• Alates valemist (2.5) kuni tõestuse lõpuni kõneldakse funktsioonide α ja β asemel funktsioonidest λ ja μ (tähistused α ja β on meil ristküliku $\mathcal{D}$ definitsiooniga "kinni"!): tähistus "α" asendati kuuel juhul tähistusega "λ", tähistus "β" asendati kuuel juhul tähistusega "μ".

• Lk. 98 ridades -1 ja -3 (teoreemi 2.3 väites (d)) kirjutati eksliku F'_x asemele F'_{x_i}.

• Lk. 100 reas -4 kirjutati "ja z''_{xy}" asemele "ja z''_{yx}"; reas -2 kirjutati "järelikult on funktsiooni" asemele "järelikult funktsiooni" (kustutati sõna "on").

• Lk. 101 definitsiooni 3.1 reas 5 kirjutati "y_m" asemele "y_n"; selle definitsiooni reas 12 kirjutati "y_m" ja "J_m" asemele vastavalt "y_n" ja "J_n".

3. november 2020: laeti üles konspekti V peatüki seni puuduolev osa (alates punktist 5.3 kuni lõpuni).

• Lk 168 teoreemi 4.3 väite (b) reas 4 kirjutati ebatäpse "loetakse hulga $\mathcal{A}$ Jordani sisemõõt võrdseks nulliga" asemele "on hulga $\mathcal{A}$ Jordani sisemõõt võrdne nulliga".

9. november 2020: laeti üles konspekti VI peatükk kuni paragrahvini 2.

• Lk. 195 jaotise 1.1 esimese lause lõppu lisati ", kus $T \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall".

16. november 2020: laeti üles konspekti VI peatüki seni puuduolev osa (alates paragrahvist 3 kuni lõpuni).

• Jaotise 1.1 lõpust on puudu järgnev lõik (see tuleks sinna lisada; olemasolevasse konspekti ei ole võimalik seda juurde kirjutada, sest see lööks edasise lehekülgedeks jaotuse segamini).

Eeldame nüüd, et kaar $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ on lihtne. Siis see kaar määrab oma jäljel $L := \{\Phi(t)\colon t \in [\alpha, \beta]\}$ loomulikul viisil järjestuse: loomulik on lugeda punkt $P_1 \in L$ eelnevaks punktile $P_2 \in L$, kui $t_1 < t_2$, kus $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ on sellised, et $\Phi(t_1) = P_1$ ja $\Phi(t_2) = P_2$ – tõlgendades kaart Φ kui tasandil liikuva punkti liikumiseeskirja, läbib see liikuv punkt punkti P_1 enne kui punkti P_2.

23. november 2020: laeti üles konspekti VII peatüki paragrahv 1.

29. detsember 2020: laeti üles konspekti VII peatüki paragrahv 2.

4. veebruar 2021.

• Lk. 14 ridades -6 ja -5 kirjutati ebaõige "$T \ni t$" asemele "$T \ni \phi$"; reas -5 kirjutati sõna "koordinaatfunktsioonid" lõppu puuduvad jutumärgid.
• lk. 47 näite 1.5 reas 3 kirjutati eksliku "kui ta ei ole" asemele "kuid ta ei ole".
• Lk. 64 märkuse 2.4 esimesse ritta lisati puuduolev viide ülesandele I.1.2.
• Kõikjal lk. 80–85 (kogu paragrahvi II.5 ulatuses) asendati sümbolid U ja W ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulga tähisena vastavalt sümbolitega $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{W}$.
• Lk. 80 reas -5 kustutati viimase süboli $\mathbb{R}$ juurest ülaindeks n, mida seal olema ei peaks: "$f_1, \ldots, f_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$".
• Lk. 81 reas 6 kirjutati ebaõigete "protsessis $c \to c_0$" ja "punktile c_0" asemele vastavalt "protsessis $x \to x_0$" ja "punktile x_0"; reas 9 kustutati sümboli c järelt liigne sulg; reas 12 asendati sümbol $\Longrightarrow$ sümboliga $\Longleftrightarrow$.
• Lk. 82 reas 10 lisati "$W = -x + U$" järele puuduv koma.
• Lk. 83 reas 8 lisat "Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk" järele "ning olgu $x \in \mathcal{U}$"; ridades 9, 14, 16 ja 19 lisati sõna "diferentseeruv" järele täpsustav "punktis x".
• Lk. 102 sõnastati teoreemi 3.1 eeldus (3) ümber järgmiselt: "iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral osatuletised $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F_k}{\partial x_m}$ ja $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial F_k}{\partial y_n}$ eksisteerivad ning on pidevad risttahukas $\mathcal{D}$".
• Lk. 114 teoreemi 1.1 reas 2 lisati sümbolile $\mathbb{R}$ puuduolev ülaindeks: "$(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$".
• Lk. 125 reas 15 kirjutati ebaõige "$d^2f(Q)$" asemele "$\frac{d^2f(Q)}{2}$": "$f(P) - f(P_0) = \frac{d^2f(Q)}{2} > 0$".
• Lk. 127 kirjutati teoreemi 2.2 reas 2 ebatäpse "punkti a mingis ümbruses $\mathcal{U}$" asemele "mingis punkti $a \in \mathbb{R}$ sisaldavas vahemikus $\mathcal{U}$"; sama lehekülje reas -3 kirjutati "võttes seal $a = 0$ ja $n = 1$" asemele täpsem "võttes seal $f = g$, $a = 0$, $\mathcal{U} = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ ja $n = 1$"; selle lehekülje lõppu on lisatud lõik, mis selgitab, miks eelnev skemaatiliselt antud teoreemi 2.1 tõestus on sisuliselt sama, mis tõestus, millele eelnevalt viidati kui "teoreemi 2.1 tõestusele, mis toetub Taylori valemile".
• Lk. 133 lause 1.3 esimeses reas kirjutati ebatäpse "seda jaotusviisi" asemele "jaotusviisi T".

• Lk. 141 (valemi)reas -3 kirjutati esimese (ebaõige) range võrratuse asemele mitterange võrratus: "$|\overline{I}_{\mathcal{D}} f - \underline{I}_{\mathcal{D}} f| \leqslant S(T) - s(T)$".

• Lk. 143 reas -13 kirjutati ebaõige "Võrratuse (2.2)" asemele "Võrduse (2.2)".

• Lk. 150 väite (d) tõestuse reas 3 sulgudes oleva lause algusse lisati "vt. ülesande I.1.4 näpunäidet;"; järgmises reas kustutati " (PÕHJENDADA!) ".

• Lk. 151 teoreemi 2.5 tõestuse viimases reas kirjutati eksliku "T'" asemele "T": "$S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$".

• Lk. 152 teoreemi 2.8 tõestuse rea 6 lõppu lisati ", tähistades $\omega_{ij}(\widehat{f}) := \sup_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \widehat{f}(P) - \inf_{P\in\mathcal{D}_{ij}} \widehat{f}(P)$,"; sama lehekülje (valemi)reas -1 kirjutati ebaõige "$S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)$" asemele "$S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T)$".

• Lk. 163 väite (d) tõestuses asendati sümbol $\int_{\mathcal{A}}$ neljal korral sümboliga $\iint_{\mathcal{A}}$: (valemi)reas 3 pärast mõlemat võrratusemärki, reas 4 ja (valemi)reas 6 murru lugejas.

• Lk. 165 lause 3.7 tõestuse reas 6 kirjutati "$\chi_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}} = 1 - \chi_{\mathcal{A}}$" asemele "$\chi_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{D}} - \chi_{\mathcal{A}}$" (neist esimene võrdus kehtib vaid ristkülikus $\mathcal{D}$, aga teine võrdus kehtib kogu tasandil $\mathbb{R}^2$).

• Lk. 166 alguses asendati kahel korral ekslik tähis $\mathcal{C}_n$ tähisega $\mathfrak{C}_n$ (s.t. "kalligraafilise C" asemele kirjutati "gooti C"): (valemi)reas 5 ja reas 6.

• Lk. 169 definitsiooni 4.1 viimases (valemi)reas kirjutati eksliku "$\mathcal{A}_|$" asemele "$\mathcal{A}_j$".

• Lk. 171 (valemi)reas -7 kirjutati enne teist võrdusmärki ebaõige "dx" asemele "dy": "$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy =$".

• Lk. 172 kirjutati reas -9 eksliku "$\sum\limits_{j=1}^{m}$" asemel "$\sum\limits_{j=1}^{n}$"; reas -8 eksliku "δ_n" asemel "δ_m"; reas -7 eksliku "m" asemel "n".

• Lk. 187 reas -5 kirjutati vigase "pindalala" asemele "pindala".

• Lk. 196 (valemi)reas 11 kirjutati ebaõige "$\Phi(\alpha) \dotplus \Phi(\beta)$" asemele "$\Phi(t) \dotplus \Phi(t')$"; reas -13 kustutati liigne ", $j = 1, \ldots, n$," (pärast mida see rida muutus reaks -12); märkuse 1.1 viimases reas kirjutati vigase "loetaks" asemele "loetakse".

• Lk. 205 reas 13 lisati sümbolile $\mathbb{R}$ puuduolev ülaindeks: "$[\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}^2$".

• Lk. 223 teoreemi 2.5 esimeses reas kirjutati vigase "jälj" asemele "jälg".

• Lk. 244 teoreemi 3.8 väite (ii) reas 2 kirjutati ebaõige "$u = U(x,y)$" asemele "$U = U(x,y)$" (sümbol u funktsiooni tähisena on meil juba "kinni").

• Lk. 252 (valemi)rea 3 teises integraalis lisati "y" järele puuduv sulg: "$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy$", viimases integraalis kirjutati eksliku "dx" asemele "dy": "$\int_{\partial\mathcal{D}} x\,dy$"; (valemi)rea 6 teises võrduses kirjutati eksliku "dx" asemele "dy": "$S_{\mathcal{D}} = \int_{\partial\mathcal{D}} x\,dy$"'.

• Lk. 270 reas -10 lisati integraalimärgi "$\int_{-\pi}^{\pi}$" järele puuduv "dx": "$\langle 1,1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$".