Mitme muutuja matemaatilise analüüsi

praktikumiülesannete kogu

2020/21 õppeaasta sügissemester

1. Hulkade skitseerimine. Kera, risttahukas, rajapunktid, sisemus

1. Olgu $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ning olgu $r, d_1, d_2 > 0$. Tõestage, et ruumis $\mathbb{R}^2$

a) iga kera (s.o. ring) $B(A, r)$ sisaldab ruutu keskpunktiga A,

b) iga risttahukas (s.o. ristkülik)

$$C(A, d_1, d_2) := \big\{(x, y) : a - d_1 < x < a + d_1,\ b - d_2 < y < b + d_2\big\}$$

sisaldab ringi keskpunktiga A.

Sõnastage ja tõestage sama ruumis $\mathbb{R}^m$.

2. Tõestage, et alamhulk $D \subseteq \mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $r > 0$, et $D \subseteq B((0, \ldots, 0), r)$.

3. Leidke järgmiste omadustega hulgad D ruumis $\mathbb{R}^2$:

a) $\partial D^\circ = \partial D = \partial \overline{D}$;

b) $D \neq \emptyset, \partial D = \emptyset$;

c) $\partial D = [0, 1]^2, \partial D^\circ = \emptyset$;

d) $\partial D \neq \partial \overline{D}$;

e) hulgad $\partial D^\circ, \partial D$ ja $\partial \overline{D}$ on kõik erinevad.

4. Tooge näiteid ruumi $\mathbb{R}^2$ hulkadest D, kus

a) D on lahtine, kuid ei ole kinnine,

b) D on kinnine, kuid ei ole lahtine,

c) D pole kinnine ega lahtine,

d) D on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine.

5. Tõestage, et hulk $D \subseteq \mathbb{R}^m$ on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine parajasti siis, kui $\partial D = \emptyset$.

6. Kirjeldage (skitseerige) alamhulka D ruumis $\mathbb{R}^2$. Tehke kindlaks, kas D on lahtine, kinnine ruumis $\mathbb{R}^2$.

a) $D = \{(x,y) : 1 < x < 4, -1 < y < 0\}$;
b) $D = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$;
c) $D = \{(x,y) : 1 \leqslant x^2 + y^2, -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$;
d) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 625\}$.
e) $D = \{(x,y) : y \geqslant x^2, y \leqslant 1\}$;
f) $D = \{(x,y) : x^2 \leqslant y \leqslant 2 - x^2\}$.

7. Kirjeldage (skitseerige) hulka, mis on määratud ruumis $\mathbb{R}^3$ järgmiste võrranditega või võrratustega. Tehke kindlaks, kas see hulk on lahtine, kinnine ruumis $\mathbb{R}^3$.

a) $z = 2$; b) $y \geqslant -1$; c) $y = x$; d) $x + y = 1$; e) $z = y^2$;

f) $x^2 + z^2 = 4$;
g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;
i) $z = x^2 + y^2$;
i) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 < 4$.

j) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases}$
k) $\begin{cases} x = 1, \\ y = z; \end{cases}$
l) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1; \end{cases}$
m) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x; \end{cases}$

8*. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Olgu hulk D kinnine ning olgu fikseeritud positiivne reaalarv r. Tähistame $E = \{P \in \mathbb{R}^m : \exists Q \in D \; d(P,Q) = r\}$. Tõestage, et E on samuti kinnine hulk.
9*. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Tõestage, et kui hulk D on korraga lahtine ja kinnine, siis $D = \emptyset$ või $D = \mathbb{R}^m$.

2. Elementaarfunktsioonide määramispiirkond. Funktsiooni graafiku skitseerimine

10. Leidke funktsiooni f määramispiirkond D:

a) $f(x,y) = \sqrt{-x} + 3y$; b) $f(x,y) = \ln(x-y)$; c) $f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2)$;

d) $f(x,y) = \sin x + \sqrt{-(y-3x)^2}$; f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(x^2+y^2-2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

e) $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$; g) $f(x,y) = \tan \frac{x}{y}$.

11. Skitseerige või kirjeldage funktsiooni f graafikut:

a) $f(x,y) = 2$;
b) $f(x,y) = 4 - 2x - 4y$;
c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
e) $f(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
f) $f(x,y) = x^2$;
g) $f(x,y) = \sin y$.

12. Leidke $f(y,x)$, $f(-x,-y)$, $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ ja $\dfrac{1}{f(x,y)}$, kui $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$.
Funktsiooni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tasemejooneks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x,y) : f(x,y) = k\}$. Funktsiooni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tasemepinnaks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = k\}$.
13. Skitseerige järgmiste funktsioonide tasemejooned/tasemepinnad.

a) $f(x,y) = x + y$;
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
c) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
d) $f(x,y) = \sqrt{xy}$;
e) $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$;
f) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$;
g) $f(x,y,z) = x + y + z$;
h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;
i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

14. Olgu jadad (P_n) ja (Q_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \to A$ ja $Q_n \to B$. Veenduge, et $P_n + Q_n \to A + B$ ja $\lambda P_n \to \lambda A$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

15. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ning olgu A hulga D rajapunkt. Tõestage, et leidub hulga D punktide jada (P_n), mille korral $P_n \to A$.

16. Tõestage piirväärtuse definitsioonist lähtudes, et

a) $\lim\limits_{x,y \to 2,3} (3x + 4y) = 18$;
b) $\lim\limits_{x,y \to -5,7} (4y - 5x) = 53$;
c) $\lim\limits_{x,y \to -1} (x^2 - 2y) = 3$;
d) $\lim\limits_{x,y \to 2,1} (2y^2 - 3x) = 5$;

17*. Leidke kõik funktsioonid $f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad järgmist tingimust: iga $x, y > 0$ korral

$$f\left(xy, \frac{x}{y}\right) = x^2 - y^2.$$

3. Koondumiste ja pidevuse tõestamine

18. Tõestage piirväärtuse definitsioonist lähtudes, et

a) $\lim\limits_{x,y \to 1} xy = 1$;
b) $\lim\limits_{x,y \to 1} \left(\dfrac{1}{x} + 2y\right) = 3$;
c) $\lim\limits_{x,y \to 1} (x^2 + y^2) = 2$;
d) $\lim\limits_{x,y \to 0,2} \dfrac{1}{x^2 + (y-2)^2} = \infty$;
e) $\lim\limits_{x,y \to -1,0} \dfrac{1}{x|y|} = -\infty$;
f) $\lim\limits_{\|P\| \to \infty} \dfrac{1}{x^2 + y^2 - \sin x} = 0$;
g) $\lim\limits_{\|P\| \to \infty} (x^2 + 2y^2) = \infty$.

19. Tõestage, et kui m muutuja funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev ja $f(A) > 0$, kus A on hulga $D \subseteq \mathbb{R}^m$ sisepunkt, siis leidub selline ümbrus $U_\varepsilon(A)$, et $f(P) > 0$ iga $P \in U_\varepsilon(A)$ korral.

20. Olgu kahe muutuja funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidev hulga D sisepunktis $A = (a,b)$. Veenduge, et osafunktsioonid f_1 ja f_2, mis on defineeritud seostega $f_1(x) := f(x,b)$ ja $f_2(y) := f(a,y)$, on pidevad vastavalt punktis a ja b.

21. Olgu $A = (a,b)$ hulga D sisepunkt. Kas funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidevus punktis A on samaväärne sellega, et osafunktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad vastavalt punktis a ja b?

22. Tõestage, et kui kahe muutuja funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev hulga D sisepunktis A, siis leidub punkti A selline ümbrus $U_\varepsilon(A)$, milles f on tõkestatud.

23. Näidake, et kui kahe muutuja funktsioonid f ja g on punktis A pidevad, siis ka funktsioonid $f+g$ ja $f\cdot g$ on selles punktis pidevad.

24*. Rahuldagu jada $(P_n)\subseteq\mathbb{R}^m$ liikmed iga $n\in\mathbb{N}$ korral tingimust $d(P_{n+1},P_n)<\dfrac{1}{2^n}$. Tõestage, et jada (P_n) on koonduv.

25. Leidke jada piirväärtus $\lim\limits_n (x_n,y_n)$ ruumis $\mathbb{R}^2$, kui

a) $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{n+1}{n}\right)$;

b) $(x_n,y_n)=\left(n\sin\dfrac{1}{n},\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right)$;

c) $(x_n,y_n)=\left(\sin\dfrac{1}{n},(-1)^n\right)$;

d) $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{2n-7}{3n},\dfrac{n^3+3n-1}{n^2+5}\right)$.

26*. Olgu antud lahtine hulk $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ning funktsioon $f\colon U\to\mathbb{R}$. Olgu täidetud järgmised tingimused.

a) f on mõlema muutuja järgi eraldi võttes pidev hulgas U (see tähendab, iga $(a,b)\in U$ korral tekkivad osafunktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad vastavalt punktis a ja punktis b),

b) f on muutuja y järgi kasvav (see tähendab, iga $(a,b)\in U$ korral osafunktsioon f_2 on kasvav).

Tõestage, et f on hulgas U pidev funktsioon.

4. Piirväärtuse arvutamine

27. Leidke piirväärtused või tõestage, et piirväärtust ei leidu:

a) $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

b) $\lim\limits_{x,y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

c) $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{\ln(xy)}{x\sin y}$;

d) $\lim\limits_{x,y\to 0,a}\dfrac{\sin xy}{x}$;

e) $\lim\limits_{x,y\to 1,0}\dfrac{\tan 2xy}{x^2y}$

f) $\lim\limits_{x,y\to 0,3}\left(1+xy^2\right)^{\frac{1}{xy^2}}$;

g) $\lim\limits_{\|P\|\to\infty}(x+y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$;

h) $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{x}{x+y}$;

i) $\lim\limits_{\|P\|\to\infty}\dfrac{x+y}{x+y^2}$;

j) $\lim\limits_{\|P\|\to\infty}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$;

k) $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

l) $\lim\limits_{\|P\|\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

m) $\lim\limits_{\|P\|\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{|x^3|+|y^3|}$;

n) $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

o) $\lim\limits_{x,y\to 0}(x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)$;

p) $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$;

28. Näidake, et funktsiooni

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

korral piirväärtust $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y)$ ei eksisteeri, kuid korduvad piirväärtused $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

29. Näidake, et piirväärtus $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y)$ on olemas, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ja $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ ei eksisteeri:

a) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

b) $f(x,y) = (x-y)\cos\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\cos y}{2y}$.

30. Kas funktsioon f on pidev punktis $(0,0)$?

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{kui } x+y \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x+y = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{kui } x^4+y^4 \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x^4+y^4 = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \notin \mathbb{Q} \text{ või } y \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

i) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \notin \mathbb{Q} \text{ või } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

31. Leidke esimest järku osatuletised:

a) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$;

b) $f(x,y) = xy\ln(xy)$;

c) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$;

e) $f(x,y,z) = \sin(xy+yz)$;

f) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$.

32*. Olgu $a,b,c,d > 0$, kusjuures $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} > 1$. Tõestage, et

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d} = 0.$$

5. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

33. Olgu f selline kahe muutuja funktsioon, et tal leiduvad punkti $A = (a,b)$ ümbruses $K_\delta(A) := (a-\delta, a+\delta)\times(b-\delta, b+\delta)$ (lahtine ruut) mittenegatiivsed osatuletised mõlema muutuja järgi. Tõestage, et f on kasvav järgmises mõttes: kui $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_\delta(A)$, kusjuures $x_1 \leqslant x_2$ ja $y_1 \leqslant y_2$, siis $f(x_1, y_1) \leqslant f(x_2, y_2)$.

34. Rahuldagu funktsioon $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ seost $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, kus $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Leidke f.

35. Olgu $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)\colon y \in \mathbb{R}\}$ ning rahuldagu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ seost $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$, kus $(x, y) \in D$, ja $f(1, y) = \sin y$, kus $(1, y) \in D$. Leidke f.

36. Põhjendage, et funktsioon f on punktis A diferentseeruv ning leidke tema täisdiferentsiaal selles punktis:

a) $f\left(x, y\right) = \mathrm{e}^{xy}$, $A = (0, 0)$;
b) $f\left(x, y\right) = x^y$, $A = (2, 3)$;
c) $f\left(x, y\right) = x \ln\left(xy\right)$, $A = (-1, -1)$;
d) $f\left(x, y\right) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$, $A = (2, 1)$;
e) $f\left(x, y, z\right) = \cos\left(xy + xz\right)$, $A = \left(1, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$;
f) $f\left(x, y, z\right) = \dfrac{yz}{x}$, $A = (1, 2, 3)$.

37. Kontrollige, kas funktsioon $w = f\left(x, y\right)$ on punktis $(0, 0)$ pidev, kas tal on selles punktis lõplikud osatuletised, kas ta on selles punktis diferentseeruv, kaks korda diferentseeruv:

a) $f\left(x, y\right) = \sqrt{x^2+y^2}$;
b) $f\left(x, y\right) = \sqrt{|xy|}$;
c) $f\left(x, y\right) = \sqrt[4]{x^4+y^4}$;
d) $f\left(x, y\right) = \sqrt[3]{x^4+y^4}$;
e) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } y = 0, \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0. \end{cases}$
f) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
g) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
h) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
i) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{kui } (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2; \end{cases}$
j) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{kui } (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2; \end{cases}$
k) $f\left(x, y\right) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

38. Olgu funktsioonidel $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ lõplikud osatuletised punktis $A = (a, b) \in D$. Veenduge, et siis ka funktsioonidel $f + g$ ja fg on punktis A lõplikud osatuletised ning
$$\frac{\partial\left(f+g\right)}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) + \frac{\partial g}{\partial x}(A) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial\left(fg\right)}{\partial x}(A) = g\left(A\right)\frac{\partial f}{\partial x}(A) + f\left(A\right)\frac{\partial g}{\partial x}(A).$$

39. Veenduge, et kui f ja g on diferentseeruvad punktis A, siis ka $f + g$ ja λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) on diferentseeruvad punktis A ja
1) $\mathrm{d}\left(f+g\right) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$; 2) $\mathrm{d}\left(\lambda f\right) = \lambda\,\mathrm{d}f$ (kus $\lambda \in \mathbb{R}$).

40. Leidke ühe muutuja liitfunktsiooni F tuletis, kui

a) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-3y}$ ja $x=\sin t,\ y=\dfrac{1}{3}\cos t$;
b) $f(x,y)=\ln(1-xy)$ ja $x=t^2,\ y=t^3$;
c) $f(x,y,z)=xyz$ ja $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=2t$;
d) $f(t,x,y)=t^2+x^2+y^2$ ja $x=t^2,\ y=\sqrt{t}$;
e) $f(t,x,y)=\tan(t+x^2-y)$ ja $x=t^2,\ y=t^5$.

41. Leidke osatuletised $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, kui
a) $f(u,v)=u^2v$ ja $u=x\cos y,\ v=x\sin y$;
b) $f(u,v)=u\ln v$ ja $u=\dfrac{1}{x+y},\ v=\mathrm{e}^{x+y}$;
c) $f(u,v)=u\mathrm{e}^{v}$ ja $u=x^2,\ v=x\ln y$;
d) $f(u,v)=\operatorname{arccot}\dfrac{u}{v}$ ja $u=x\sin y,\ v=x\cos y$;
e) $f(u,v)=u^2-v^2$ ja $u=x\sin y,\ v=x\cos y$.

42. Selgitage, miks liitfunktsioon on diferentseeruv ja leidke tema täisdiferentsiaal:
a) $f(u,v)=uv$ ja $u=\mathrm{e}^{2x}+1,\ v=1-x$;
b) $f(u,v)=u\sin v$ ja $u=\cos x,\ v=2x+1$;
c) $f(u,v)=u\ln v$ ja $u=2x+1,\ v=y+1$;
d) $f(u,v)=u^2+v^2$ ja $u=x^2+y^2,\ v=x^2-y^2$,
e) $f(u,v,w)=uvw$ ja $u=x+y,\ v=\mathrm{e}^{2x-y},\ w=x$;

43*. Olgu funktsioonil $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ pidevad osatuletised, kusjuures leidugu $K>0$ nii, et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(P)\right|\leqslant K$$

kõigi punktide $P\in\mathbb{R}^m$ ja indeksite $j=1,\ldots,m$ korral. Tõestage, et f on Lipschitzi funktsioon, st. leidub konstant $L>0$ selliselt, et mistahes punktide $P,Q\in\mathbb{R}^m$ jaoks kehtib võrratus

$$\left|f(P)-f(Q)\right|\leqslant L\|P-Q\|.$$

6. Puutujatasandi ja normaali võrrandi koostamine pinnale $z=f(x,y)$. Tuletis antus suunas. Gradient

44. Läbi pinnal $z=2x^2+y^2$ asuva punkti $M=(1,2,6)$ on tõmmatud xz-tasandiga ja yz-tasandiga paralleelsed tasandid. Leidke, millised on nurgad punktis M tekkivate lõikejoonte puutujate ja koordinaattelgede vahel.

45. Olgu kahe muutuja funktsioon f punktis $P_0=(x_0,y_0)$ diferentseeruv. Olgu vektor $\vec{s}=(s_1,s_2)\neq(0,0)$. Arvutage funktsiooni f tuletis punktis P_0 vektori $\vec{s}$ suunas, mis on defineeritud seosega $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{s}}(P_0):=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+ts_1,y_0+ts_2)-f(x_0,y_0)}{t|\vec{s}|}$.

46. Leidke funktsiooni $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$ tuletis punktis $M=(1,2)$ vektori $\vec{s}=(4,6)$ suunas.

47. Mingil mäel on punktis (x,y) kõrgus merepinnast määratud seosega $z=2500-3x^2-4y^2$

(meetrites). x-telje positiivne suund osutab itta ning y-telje positiivne suund osutab põhja. Alpinist asub punktis $(15,-10,1425)$.

a) Kui alpinist liigub otse läände, kas ta liigub kõrgemale või madalamale?
b) Kui alpinist liigub kagu suunas, kas ta liigub kõrgemale või madalamale?
c) Millises suunas peaks alpinist liikuma, et ta liiguks mööda samakõrgusjoont?

48. Koostage pinna puutujatasandi ja normaali võrrand punktis A:

a) $z=xy$, $A=(1,0,0)$;
b) $z=x+y^2$, $A=(0,1,1)$;
c) $z=x^3+y^3$, $A=(1,-1,0)$;
d) $z=\mathrm{e}^{x+y}$, $A=(1,-1,1)$;
e) $z=x^2+y^2$, $A=(1,2,5)$;
f) $z=2x^2+y^2$, $A=(1,-1,3)$;
g) $z=\sin(xy)$, $A=\left(1,\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

49. Kas tasand $z=0$ on punktis $O=(0,0,0)$ puutujatasandiks pinnale

a) $z=x^2+y^2$ (pöördparaboloid);
b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (koonus);
c) $z=xy$ (hüperboolne paraboloid)?

50*. Olgu antud kahe muutuja funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$ ning $A\in D^\circ$. Ülesande 45 põhjal on teada, et kehtivad implikatsioonid

$$f \text{ on diferentseeruv punktis } A \quad\Rightarrow\quad \forall\vec{s}=(s_1,s_2)\neq\vec{0}\ \ \exists\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}(A)\in\mathbb{R},$$

$$f \text{ on diferentseeruv punktis } A,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0 \quad\Rightarrow\quad \forall\vec{s}=(s_1,s_2)\neq\vec{0}\ \ \frac{\partial f}{\partial\vec{s}}(A)=0.$$

Kas emb-kumb neist implikatsioonidest on üldiselt pööratav?

7. Kõrgemat järku osatuletiste ja täisdiferentsiaalide arvutamine. Taylori valem

51. Selgitage diferentseeruvust ja leidke näidatud järku täisdiferentsiaalid:

a) $f(x,y)=(x+y+1)^5$, $\mathrm{d}^4 f$;
b) $f(x,y,z)=\cos(2x+3y-5z)$, $\mathrm{d}^6 f$.

52. Näidake, et funktsiooni

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

korral $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$. Milline segaosatuletiste teoreemide eeldustest on rikutud?

53. Määrake funktsiooni $u=u(x,y)$ üldavaldis, kui ta rahuldab seost

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$ b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

54. Leidke funktsiooni f Taylori valem punktis $(0,0)$, kui $n = 3$:

a) $f(x,y) = e^y \cos x;$ c) $f(x,y) = e^x \ln(1+y);$ e) $f(x,y) = x\cos^2 y;$
b) $f(x,y) = e^x \sin y;$ d) $f(x,y) = \ln(1+x+y);$ f) $f(x,y) = y\sin^2 x.$

55. Leidke funktsiooni f Taylori valem punktis P_0, kui $n = 3$:

a) $f(x,y) = e^{x+y}$, $P_0 = (1,-1);$ b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $P_0 = (1,1);$ c) $f(x,y) = \ln(xy)$, $P_0 = (1,1).$

56. Arvutage Taylori valemi ($n = 1$) abil ligikaudne väärtus:

a) $1{,}03^{2{,}04};$ c) $\sqrt{3{,}97} \cdot 2{,}03^2;$ d) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right).$
b) $\sqrt{2{,}03 \cdot 1{,}98};$

57. Tuletage Taylori valemi ($n = 2$) abil järgnevate avaldiste ligikaudse arvutamise valemid:

a) $\arctan \dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$ $\quad (|\alpha|, |\beta| \ll 1);$ b) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}$ $\quad (|\alpha|, |\beta| \ll 1).$

58*. Olgu funktsioon $u = u(x,y)$ rahuldab võrrandit $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ja järgmisi tingimusi: $u(x,2x) = x$, $u'_x(x,2x) = x^2$. Leidke $u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

8. Kas võrrand määrab funktsiooni, tuletise olemasolul leidke tuletis. Puutujatasandi ja normaali võrrandi koostamine pinnale $F(x,y,z) = 0$

59. Tehke kindlaks, kas võrrand $F(x,y) = 0$ määrab punkti $A = (a,b)$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$. Juhul, kui määrab, siis leidke tuletis $f'(a)$, kui ta leidub.

a) $F(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$, $A = (0,1);$
b) $F(x,y) = y^2 + x^2 - x^4$, $A = (0,0);$
c) $F(x,y) = xe^y + \ln(x+y+1)$, $A = (0,0);$
d) $F(x,y) = x^4 - x^2 - y^2 + 2y - 1$, $A = (0,1);$
e) $F(x,y) = y^2 x^{\frac{1}{3}} + \sin y$, $A = (0,0);$
f) $F(x,y) = 15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44$, $A = (2,1);$
g) $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$, $A = (0,0).$

60. Leidke f', kui f on järgmise võrrandiga antud ilmutamata funktsioon:

a) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$;

b) $y - \varepsilon\cos y = x$, kus $\varepsilon \in (0,1)$;

c) $\sin xy = 1 - 0{,}2xy$;

d) $y + \sin y + \mathrm{e}^x = 0$;

e) $x + y = \mathrm{e}^{x-y}$;

f) $y^2 + 2xy - 2 = 0$.

61. Tehke kindlaks, kas võrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab punkti $A = (a,b,c)$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $z = f(x,y)$. Arvutage ka $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, kui nad eksisteerivad.

a) $F(x,y,z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$, $A = (1,4,2)$;

b) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, $A = (a,b,c)$, kus $c := \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} \neq 0$;

c) $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - 8$, $A = (0,-1,2)$.

62. Leidke ilmutamata funktsiooni $z = f(x,y)$ osatuletised, kui f on antud järgmise võrrandiga.

a) $x + y + z = \mathrm{e}^{-x-y-z}$;

b) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$;

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

63*. Olgu

$$x = y + \varphi(y), \tag{8.1}$$

kus $\varphi(0) = 0$ ja $|\varphi'(y)| < 1$, kui $y \in (-1,1)$. Tõestage, et punkti 0 teatavas ümbruses määrab võrrand (8.1) muutuja y muutuja x (ühese) diferentseeruva funktsioonina $y = y(x)$, kusjuures $y(0) = 0$.

9. Lokaalsed ekstreemumid, tinglikud ekstreemumid. Globaalsed ekstreemumid

64. Leidke kahe muutuja funktsiooni f lokaalsed ekstreemumid:

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$;

b) $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$;

c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$;

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$;

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

f) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$;

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{kui } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

h) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{2(x+y)}$;

i) $f(x,y) = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

65. Leidke kolme muutuja funktsiooni f lokaalsed ekstreemumid:

a) $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$;

b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$;

c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, kui $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

66. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

a) $f(x,y)=x^2+y^2-xy, \quad (x,y)\in\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$;

b) $f(x,y)=x^2-y^2+2, \quad (x,y)\in\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$;

c) $f(x,y)=x-2y-1, \quad (x,y)\in\{(x,y)\colon 0\leqslant x,y\leqslant 1,\ 0\leqslant x+y\leqslant 1\}$;

d) $f(x,y)=x^2-xy+y^2, \quad (x,y)\in\{(x,y)\colon |x|+|y|\leqslant 1\}$;

e) $f(x,y)=(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}, \quad (x,y)\in\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 4\}$;

f) Näidata, et funktsioonil $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2, \quad (x,y)\in[-5,5]\times[-1,1]$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

67. Leidke harilikule ekstreemumile taandamise meetodil funktsiooni f ekstreemum antud tingimustel:

a) $f(x,y)=xy, \quad y=2x^3-3x$;

b) $f(x,y)=x(y-1), \quad y=x^2$;

c) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$;

d) $f(x,y,z)=x+y+z^2$,
$z-x=1,\ y-xz=1$.

68. Leidke Lagrange'i meetodil funktsiooni f ekstreemum antud tingimustel:

a) $f(x,y)=6-4x-3y, \quad x^2+y^2=1$;

b) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad x+y=2$;

c) $f(x,y,z)=x-2y+2z, \quad x^2+y^2+z^2=9$;

d) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2, \quad x+y+2z=6,\ x-y=0$.

69*. Olgu antud funktsioonid $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ja $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ning punkt $A\in\mathbb{R}^2$. Olgu funktsioon F pidev ruumis $\mathbb{R}^2$ ja funktsioonidel F ja f pidevad osatuletised mõlema muutuja järgi ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)\neq 0$.

Olgu $\nabla f(A):=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(A),\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right)\neq(0,0)$, kusjuures funktsioonil f olgu tinglik lokaalne ekstreemum punktis A tingimusel $F(x,y)=0$. Tõestage, et vektorid $\nabla f(A)$ ja $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(A),\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)\right)$ on kollineaarsed.

10. Integraali omaduste ülesanded. Jordani mõttes mõõtuvad hulgad

70. Lähtudes vastavate integraalide definitsioonidest, leidke funktsiooni

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{kui } (x,y)\neq(0,0),\\ 5, & \text{kui } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

Darboux' ülemine ja alumine integraal ning Riemanni integraal ristkülikus $R = [0,2] \times [0,3]$.

71. Kasutades Riemanni integraali definitsiooni, leidke $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui $D = [0,1] \times [0,1]$.

72. Tõestage, et $\iint\limits_D \arcsin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0$, kui $D = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1-x\}$.

73. Hinnake arvu $I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \dfrac{dx\,dy}{100+(\cos x)^2+(\cos y)^2}$ väärtust.

74. Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus R. Tõestage, et funktsioon f on integreeruv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku R selline alajaotus T, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

75. (Hulga nullmõõdulisuse kriteerium) Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu R selline ristkülik, et $D \subseteq R$. Tõestage, et võrdus $\mu(D) = 0$ kehtib parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku R selline alajaotus T, et nende osaristkülikute, millel on ühiseid punkte hulgaga D, pindalade summa on väiksem kui ε.

76. Tõestage, et ühepunktine hulk on nullmõõduga.

77. Olgu $D = \{(x,y) \in [0,1]^2\colon x, y \in \mathbb{Q}\}$. Tõestage, et D ei ole Jordani mõttes mõõtuv.

78. Tõestage, et nullmõõduga hulga iga alamhulk on mõõtuv ja samuti nullmõõduga.

79. Tõestage, et kahe nullmõõduga hulga ühend on nullmõõduga. Järeldage siit, et iga lõplik hulk on nullmõõduga.

80. Tõestage, et kui D_1 ja D_2 on Jordani mõttes mõõtuvad, siis $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ ja $D_1 \setminus D_2$ on samuti Jordani mõttes mõõtuvad.

81. Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Tõestage, et f graafik $\{(x, f(x))\colon x \in [a,b]\}$ on nullmõõduga hulk.

82. Tõestage, et lahtine kera $U_\delta(\mathbf{A})$ on Jordani mõttes mõõtuv ja leidke tema mõõt.

83. Tõestage, et Jordani mõõt on monotoonne: kui D_1 ja D_2 on mõõtuvad hulgad ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $D_1 \subseteq D_2$, siis $\mu(D_1) \leqslant \mu(D_2)$.

84. Tõestage, et kui D on mittetühi mõõtuv hulk, kusjuures $D \subseteq \overline{D^\circ}$), siis $\mu(D) > 0$.

85. Tõestage, et Jordani mõõt on subaditiivne: kui D_1 ja D_2 on mõõtuvad hulgad ruumis $\mathbb{R}^2$, siis $\mu(D_1 \cup D_2) \leqslant \mu(D_1) + \mu(D_2)$.

86. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ selline tõkestatud hulk, et hulgad D, $\overline{D}$ ja D° on kõik Jordani mõttes mõõtuvad. Tõestage, et $\mu(D) = \mu\left(\overline{D}\right) = \mu(D^\circ)$.

87*. Olgu $R = [a,b] \times [c,d]$.

- Kas leidub funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ nii, et f on integreeruv ristkülikus $R = [a,b] \times [c,d]$, aga tingimus „iga $\xi \in [a,b]$ korral leidub $\displaystyle\int_c^d f(\xi, y)\,\mathrm{d}y$" on rikutud?
- Kas leidub funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ nii, et iga $\xi \in [a,b]$ korral leidub $\displaystyle\int_c^d f(\xi,y)\,\mathrm{d}y$, aga f pole integreeruv ristkülikus R?

11. Kahekordse integraali arvutamine. Üleminek polaarkoordinaatidele

88. Leidke kahekordsed integraalid:

a) $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on kolmnurk tippudega $(0,2)$, $(3,3)$ ja $(2,0)$;

b) $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on piiratud joontega $y+3x-6=0$ ja $y=3x^2$;

c) $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on piiratud joontega $y^2=x$ ja $y=x^2$;

d) $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on piiratud joontega $y^2+x^2=1$, $y=x+1$ ja $x=1$;

e) $\iint_D 2|x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on trapets tippudega $(-1,4)$, $(5,4)$, $(1,1)$ ja $(4,1)$.

89. Leidke kahekordsed integraalid, minnes üle (elliptilistele) polaarkoordinaatidele:

a) $\iint_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on määratud võrratustega $y\leqslant 0$, $x\geqslant 0$ ja $x^2+y^2\leqslant R^2$;

b) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on määratud võrratustega $y^2+(x-1)^2\leqslant 1$, $y\geqslant 0$;

c) $\iint_D \sqrt{6-2x^2-3y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on määratud võrratusega $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}\leqslant 1$;

d) $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D on piiratud joonega $x^2+y^2=4x-2y+4$;

e) $\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui D asub joonte $x^2+\left(y-2\right)^2=4$ ja $x^2+\left(y-1\right)^2=1$ vahel.

90. Leidke järgmised kahekordsed integraalid.

a) $\iint_D \left(3x+2y-4\right)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui $D=\{(x,y)\colon\ -1\leqslant x-y\leqslant 3,\ -2\leqslant 3x+2y\leqslant 8\}$;

b) $\iint_D \left(2x-y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui $D=\{(x,y)\colon\ 1\leqslant x+y\leqslant 2,\ 1\leqslant 2x-y\leqslant 3\}$;

c) $\iint_D \left(x+y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kui $D=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2\leqslant x+y\}$.

91*. Olgu funktsioon f pidev hulgal $\mathbb{R}^2$ ja $a>0$. Tõestage, et kehtib järgmine valem:

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

92*. Leidke kahekordne integraal $\iint_D \sqrt{\lfloor y-x^2\rfloor}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (tähis $\lfloor a\rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu a), kus $D = \{(x,y):\ -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$.

12. Kolmekordse integraali arvutamine. Kordsete integraalide rakendusi

93. Leidke järgmised integraalid:

a) $\iiint_E x^2 y z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kui $E = [0,3] \times [0,2] \times [0,1]$;

b) $\iiint_E y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kui $E = \{(x,y,z):\ 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-y\}$;

c) $\iiint_E (z+4) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kui $E = \{(x,y,z):\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$;

d) $\iiint_E \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-x-y}$, kus E on piiratud tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$ ja $x+y+z=1$;

e) $\iiint_E x y^2 z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x=1$, $y=x$ ja $z=0$;

f) $\iiint_E (2x+3y-z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$ ja $x+y=2$.

94. Üleminekuga (elliptilistele) silinderkoordinaatidele, leidke järgmised integraalid:

a) $\iiint_E z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ ja tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$ ja $z=2$;

b) $\iiint_E xz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=a^2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ ja tasanditega $z=0$, $z=1$, $y=x$ ja $y=x\sqrt{3}$;

c) $\iiint_E y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=2x$, tasandiga $z=0$ ja paraboloidiga $z=x^2+y^2$;

d) $\iiint_E (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E = \{(x,y,z):\ a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant b^2,\ z \geqslant 0\}$;

e) $\iiint_E xz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E = \left\{(x,y,z):\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\right\}$.

95. Üleminekuga sfäär- või ellipsoidkoordinaatidele, leidke järgmised integraalid:

a) $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\}$;

b) $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \leqslant z$;

c) $\iiint_E (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E = \{(x,y,z):\ a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant b^2\}$;

d) $\iiint_E \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{z^2}{4}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on ellipsoid $6x^2+4y^2+3z^2 \leqslant 12$;

e) $\iiint_E z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on kerade $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ ja $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$ ühisosa.

96. Leidke tasandilise kujundi D pindala kahekordse integraali abil:

a) D on piiratud joontega $xy = a^2$, $x + y = 2{,}5a$ $(a > 0)$;

b) D on piiratud joontega $r = b\cos\theta$ ja $r = a\cos\theta$, kus $0 < a < b$;

c) D on piiratud joontega $r\cos\varphi = 1$ (sirge) ja $r = 2$ (ringjoon), kusjuures D ei sisalda poolust;

d) D on piiratud joontega $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$, kus $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$. *Näpunäide:* võtke kasutusele uued tundmatud u, v, kus $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

97. Leidke ruumilise kujundi Ω ruumala:

a) Ω on piiratud pindadega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$;

b) Ω on piiratud pindadega $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$;

c) Ω on piiratud pindadega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ ja $z = 2x^2 + y^2 + 1$;

d) Ω on piiratud pindadega $z = 0$, $z = x^2 + y^2$ ja $x^2 + y^2 = 1$;

e) Ω on piiratud pindadega $x^2 + y^2 = 3$ ja $z^2 = x^2 + y^2 + 3$;

f) Ω on piiratud pindadega $z = 9 - y^2$, $z = 1 + y^2$, $x = -1$ ja $x = 5$.

98. Tasandiline kujund D on piiratud joontega $y = \sin x$ ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) ja OA, kus $O = (0,0)$ $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Leidke kujundi D raskuskeskme koordinaadid.

99. Leidke kardioidi $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$ raskuskeskme koordinaadid.

100. Leidke risttahuka $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui risttahuka tihedus punktis (x, y, z) avaldub seosega $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

101. Leidke kera mass, kui kera raadius on 3 ja tihedus $\rho = \rho(x, y, z)$ igas tema punktis (x, y, z) on võrdeline punkti kaugusega kera keskpunktist, kusjuures tihedus ühiku kaugusel kera keskpunktist on 2.

102. Leidke paraboloidiga $y^2 + 2z^2 = 4x$ ja tasandiga $x = 2$ piiratud keha raskuskeskme koordinaadid.

103*. Tõestage valem

$$\int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_0^{t_{m-1}} f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_m)\,\mathrm{d}t_m = \frac{1}{m!}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^m,$$

kus f on pidev funktsioon.

13. Joonintegraalide omadused, arvutamine

104. Olgu $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ antud seosega $\gamma(0) = (0,0)$ ja $\gamma(t) = \left(t, t\cos^2\frac{\pi}{2t}\right)$. Tõestage, et $L := \gamma([0,1])$ on pidev ja lihtne, aga mitte sirgestuv joon.

Näpunäide: uurige kõõlmurdjooni, mis on määratud punktidega $t_0 = 0,\ t_j = \dfrac{1}{2n+1-j},\ j = 1,\dots,2n$.

105. Olgu $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ Lipschitzi mõttes pidev funktsioon, st. leidugu $K \in \mathbb{R}$ omadusega $d(\gamma(t),\gamma(t')) \leqslant K\left|t-t'\right|$ mistahes punktide $t, t' \in [a,b]$ korral. Olgu $L := \gamma([a,b])$ lihtne. Tõestage, et L on sirgestuv joon ning $|L| \leqslant K(b-a)$.

106. Arvutage esimest liiki joonintegraalid:

a) $\displaystyle\int_L \big(x+y\big)\,\mathrm{d}s$, kui L on kolmnurk tippudega $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ ja $B = (0,1)$;

b) $\displaystyle\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, kui L on ringi sektori $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ rajajoon;

c) $\displaystyle\int_L y^2\,\mathrm{d}s$, kui L on tsükloidi $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)$ kaar $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

d) $\displaystyle\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kui L on ringjoon $x^2+y^2 = 2ax,\ a > 0$;

e) $\displaystyle\int_L \frac{3z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kui L on kruvijoone $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at$ esimene keerd $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

f) $\displaystyle\int_L z\,\mathrm{d}s$, kui L on koonilise kruvijoone $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$ kaar $(0 \leqslant t \leqslant a)$.

107. Leidke materiaalse joone L mass, kui

a) L on antud võrrandiga $y = \ln x$ $(1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$ ja joontihedusega $\rho\big(x,y\big) = kx^2$;

b) L on antud võrranditega $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t,\ y = \mathrm{e}^{-t}\sin t,\ z = \mathrm{e}^{-t}$ $(0 \leqslant t \leqslant \ln 3)$ ja $\rho\big(x,y,z\big) = \rho_0$.

108. Olgu $L = \gamma([a,b])$ lihtne pidev sirgestuv joon. Defineerige lõigu T alajaotusele vastavad joonintegraali $\displaystyle\int_L f\,\mathrm{d}s$ Darboux' ülem- ja alamsummad $s(T)$ ja $S(T)$. Tõestage, et tõkestatud funktsiooni $f\colon L \to \mathbb{R}$ korral kehtib samaväärsus

$$\exists \int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\lambda(T)\to 0}\,(S(T)-s(T)) = 0.$$

109. Olgu L lihtne pidev sirgestuv joon. Tõestage, et kui $f\colon L \to \mathbb{R}$ on pidev, siis leidub esimest liiki joonintegraal $\displaystyle\int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$.

110. Sõnastage ja tõestage I ning II liiki joonintegraali lineaarsuse omadus. (NB! Riemanni integraalile arvutusvalemi abil mitte üle minna, kuna see vajab joone siledust!)

111. Sõnastage ja tõestage I liiki joonintegraali monotoonsuse omadus ning keskmise muutuja omadus (nn. sändvitšiteoreem). Kas II liiki joonintegraal on üldiselt monotoonne?

112. Arvutage teist liiki joonintegraalid:

a) $\displaystyle\int_{OB} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, kus $O = (0,0)$, $B = (1,1)$ ja OB i) on sirge $y = x$, ii) on parabool $y = x^2$, iii) koosneb sirglõikudest OA ja AB, kus $A = (1,0)$;

b) $\displaystyle\int_\Gamma \big(x+y\big)\,\mathrm{d}x + \big(x-y\big)\,\mathrm{d}y$, kus Γ on ringjoon $(x-1)^2 + \big(y-1\big)^2 = 4$;

c) $\int_L (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kus L on tsükloidi $x = t - \sin t$, $y = 1-\cos t$ kaar $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

d) $\int_{AB} (4x+y)\,\mathrm{d}x + (x+4y)\,\mathrm{d}y$, kus AB on punkte $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$ ühendav joon $y = x^4$;

e) $\int_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kus L on kruvijoon $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

113. Olgu L lihtne sile sirgestuv joon ruumis $\mathbb{R}^2$ ning $\tau(X) = (\tau_1(X), \tau_2(X))$ olgu ühikpuutujavektor joonele L punktis $X \in L$. Olgu $f\colon L \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Tõestage, et

$$\int_L f\,\mathrm{d}x = \int_L f \cdot \tau_1\,\mathrm{d}s, \qquad \int_L f\,\mathrm{d}y = \int_L f \cdot \tau_2\,\mathrm{d}s.$$

114. Leidke joonintegraali abil tasandilise kujundi D pindala, kui ta on piiratud astroidiga $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

115. Olgu xy-tasandil jõud $\vec{F}$ suunatud igas punktis $M(x,y)$ punkti $(0,0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist $(0,0)$. Leidke jõu töö A, mis on kulunud punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2,4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

116. Jõud konstantse suurusega F on xy-tasandi igas punktis x-telje suunaline. Leidke jõu töö A, mis kulub punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2+y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0,a)$ punkti $(a,0)$.

117*. Leidke pindade $x^2 + y^2 = x$ ja $z = x$ ühisosaks oleva kaare pikkus. Avaldage tulemus järgmiste suuruste kaudu:

- esimest liiki elliptiline integraal $K(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2(\sin\theta)^2}}$, $k \geqslant 0$;
- teist liiki elliptiline integraal $E(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2(\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$, $k \geqslant 0$.

118*. Olgu antud funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Tähistame

$$V(f; s,t) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| : s = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = t \right\}.$$

Suurust $V(f;a,b)$ nimetatakse funktsiooni f *täisvariatsiooniks*; kui $V(f;a,b) \in \mathbb{R}$, siis öeldakse, et f on lõigus $[a,b]$ *tõkestatud variatsiooniga.*
Tähistame veel

$$v_f(x) = V(f;a,x), \qquad x \in [a,b].$$

Ilmselt $v_f(a) = 0$ ja $v_f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on kasvav funktsioon.
Tõestage, et

a) kui f on punktis $x_0 \in [a,b)$ paremalt pidev, siis v_f on punktis x_0 paremalt pidev;
b) kui f on punktis $x_0 \in [a,b]$ pidev, siis v_f on punktis x_0 pidev;
c) kui v_f on punktis $x_0 \in [a,b]$ pidev, siis f on punktis x_0 pidev.

Näpunäited. Osa a) jaoks piisab näidata, et $\lim_{x\to x_0+} V(f;x,x_0)=0$, seda võiks teha ε-δ keeles. Osa c) juures tasub uurida võrratuse $|f(x)-f(x_0)|\leqslant|v_f(x)-v_f(x_0)|$ kehtivust.
Märkus. Asendades absoluutväärtused normidega, näitab ülesanne 118, et kui joon $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^m$ on sirgestuv, siis γ on pidev (mingis punktis) parajasti siis, kui „kaarepikkuse funktsioon“ $t\mapsto|\{\gamma(u)\colon\ u\in[a,t]\}|$ on pidev (samas punktis).

119*. Tõestage, et ellipsi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ pikkus C rahuldab võrratusi

$$\pi(a+b)<C<\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Näpunäide: Joone kaare pikkuse valem.

14. Greeni valem. Integreerimisteest sõltuvad joonintegraalid

120. Leidke Greeni valemi abil järgmised joonintegraalid.

a) $\displaystyle\int_L (1-x^2)y\,\mathrm{d}x+x(1+y^2)\,\mathrm{d}y,\quad L\colon\ x^2+y^2=a^2;$

b) $\displaystyle\int_L (xy+x+y)\,\mathrm{d}x+(xy+x-y)\,\mathrm{d}y,\quad L\colon\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

c) $\displaystyle\int_L (xy+x+y)\,\mathrm{d}x+(xy+x-y)\,\mathrm{d}y,\quad L\colon\ x^2+y^2=ax.$

121. Millised järgmistest joonintegraalidest on integreerimisteedest sõltumatud ja millised sõltuvad?

a) $\displaystyle\int_L (4x+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-6y)\,\mathrm{d}y;$

b) $\displaystyle\int_L y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y;$

c) $\displaystyle\int_L (3x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}x-(x^2-2xy+3y^2)\,\mathrm{d}y.$

122. Leidke funktsioonid U nende täisdiferentsiaalide $\mathrm{d}U$ järgi.

a) $\mathrm{d}U=(3x^2-2xy^2)\,\mathrm{d}x+(3y^2-2x^2y)\,\mathrm{d}y;$

b) $\mathrm{d}U=(\mathrm{e}^{2y}-5y^3\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(2x\mathrm{e}^{2y}-15y^2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y;$

c) $\mathrm{d}U=\dfrac{(x+2y)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2};$

d) $\mathrm{d}U=\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}};$

e) $\mathrm{d}U=(2x\cos y-y^2\sin x)\,\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y;$

f) $\mathrm{d}U = [2x + \sin(x+y)]\,\mathrm{d}x + [2y + \sin(x+y)]\,\mathrm{d}y$;

g) $\mathrm{d}U = \sin(x+y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

123. Leidke järgmised joonintegraalid.

a) $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} 2xy^{-3}\,\mathrm{d}x - (3x^2 - y^2)y^{-4}\,\mathrm{d}y$;

c) $\displaystyle\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$;

d) $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$.

124. Näidake, et iga diferentseeruva funktsiooni f korral võrduvad järgmised joonintegraalid nulliga, kui L on kontuur.

a) $\displaystyle\int\limits_L f(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{th} y\,\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\int\limits_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$;

c) $\displaystyle\int\limits_L x^{-2} f\left(\frac{y}{x}\right)(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$.

125*. Leidke lihtne kinnine joon L, mille korral joonintegraal $\displaystyle\int\limits_L (y^3 - y)\,\mathrm{d}x - 2x^3\,\mathrm{d}y$ saavutab maksimaalse väärtuse.

15. Fourier' read

126. Leidke funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in [-\pi, 0), \\ \pi, & \text{kui } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Fourier' rida lõigus $[-\pi, \pi]$ ja uurige selle koonduvust. Joonistage funktsiooni f, tema Fourier' rea summa S ning osasummade S_0, S_1 ja S_2 graafikud.

127. Leidke funktsiooni Fourier' rida lõigus $[-\pi, \pi]$ ja uurige selle koonduvust:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

b) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$;

c) $f(x) = |x|$;

d) $f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{kui } x \in [-\pi, 0), \\ x, & \text{kui } x \in [0, \pi]; \end{cases}$;

e) $f(x) = x$;

f) $f(x) = x^2$;

g) $f(x) = x^3$;

h) $f(x) = x^4$;

Näpunäide osade f)–h) juurde. Saab näidata, et kui f Fourier' rida koondub lõigus $[-\pi, \pi]$ keskmiselt funktsiooniks f (see tähendab, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx - f(x) \right) \mathrm{d}x \xrightarrow[n]{} 0$), näiteks juhul, kui

$f \in L^1[-\pi,\pi]$, siis $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}\cdot x + \sum_n \left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{b_n}{n}\right)$ ehk *Fourier' rida võib integreerida liikmeti.* Sealjuures integreerimisel saadud rida koondub **ühtlaselt** lõigus $[-\pi,\pi]$.

Niisiis, kui on teada $f(x) = x$ Fourier' rida, saab integreerides kergesti leida ka $x^2 = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ning edasi ka x^3 jne., Fourier' rea.)

128. Leidke funktsiooni Fourier' rida etteantud intervallis ja uurige selle koonduvust:

a) $f(x) = x, \quad x \in [0,2\pi]$;
b) $f(x) = x^2, \quad x \in [0,2\pi]$;
c) $f(x) = |x|, \quad x \in [-l,l]$.

16. Fourier' read

129. Arendage antud funktsioon lõigus $[0,\pi]$ koosinusreaks ja uurige rea koonduvust:

a) $f(x) = 1, \quad x \in [0,\pi]$;
b) $f(x) = x, \quad x \in [0,\pi]$;
c) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0,\pi]$.

130. Arendage antud funktsioon lõigus $[0,\pi]$ siinusreaks ja uurige rea koonduvust:

a) $f(x) = 1, \quad x \in [0,\pi]$;
b) $f(x) = x^2, \quad x \in [0,\pi]$;
c) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in [0,\pi]$.

131. Leidke järgmiste ridade summad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

132. Olgu $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ pidevalt diferentseeruv funktsioon ja a_n, b_n tema Fourier' rea kordajad. Tõestage, et funktsioon f on π-perioodiline siis ja ainult siis, kui $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ iga $n \geqslant 1$ korral.

133. Olgu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx, \quad x \in (-\infty,\infty)$$

ning $f(x) = x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Joonistage funktsiooni f graafik.

134*. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-perioodiline ja lõigus $[-\pi,\pi]$ tükiti pidev. Olgu $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ funktsiooni f Fourier' rea n-nes osasumma. Olgu $\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Olgu $m, M \in \mathbb{R}$. Tõestage järgmised implikatsioonid:

$$\forall x \in [-\pi,\pi] \quad f(x) \geqslant m \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n(x) \geqslant m;$$
$$\forall x \in [-\pi,\pi] \quad f(x) \leqslant M \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n(x) \leqslant M.$$

135*. Olgu funktsioonil f pidev tuletisfunktsioon lõigus $[-\pi,\pi]$ (st. $f \in C^1([-\pi,\pi])$). Tõestage, et f Fourier' kordajad a_n ja b_n, kus $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, rahuldavad tingimusi

$$\lim_n na_n = 0, \qquad \lim_n nb_n = 0.$$

Näpunäide: Riemanni lemma.
Märkus. Saab näidata, et kui $f \in C^k([-\pi,\pi])$, see tähendab, k korda pidevalt diferentseeruv, siis $\lim\limits_n n^k a_n = \lim\limits_n n^k b_n = 0$. Niisiis, mida kõrgemat järku pidev tuletis on funktsioonil f, seda kiiremini hääbuvad tema Fourier' kordajad.

Vastused ja lahendusvihjed

1. a) näidake, et $C\left(A, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subseteq B(A,r)$; b) näidake, et $B(A, \min\{r_1, r_2\}) \subseteq C(A, r_1, r_2)$.
Ruumis $\mathbb{R}^m$ näidake, et $C\left(A, \frac{r}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \subseteq B(A,r)$ ning $B(A, \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\}) \subseteq C(A, r_1, r_2, \dots, r_m)$.
2. Sisalduvusest $D \subseteq B((0,\dots,0), r)$ järeldub D tõkestatus. Vastupidi, olgu D tõkestatud, siis $D \subseteq B(A,\rho)$ mingi $\rho > 0$ ja $A \in \mathbb{R}^m$ korral. Tähistage $r = \rho + \|A\|$.
3. a) $D = [0,1]^2$; b) $D = \mathbb{R}^2$; c) $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$; d) $D = [0,1]^2 \setminus \left\{\left(\frac{1}{2}, t\right) : t \in [0,1]\right\}$; e) $D = \mathbb{Q}^2 \cup [0,1]^2$.
4. a) $B(0,1)$; b) $\overline{B}(0,1)$; c) $B(0,1) \cup \{(1,0)\}$; d) $\emptyset$.
5. hulga enda ega tema täiendi ükski punkt pole rajapunkt.
6. a) lahtine, ei ole kinnine, ristkülik; b) ei ole lahtine ega kinnine, rõngas; c) kinnine, ei ole lahtine; d) kinnine, ei ole lahtine, ringjoon. e) kinnine; f) kinnine.
7. a) kinnine, ei ole lahtine, tasand; b) kinnine, ei ole lahtine, poolruum; c) kinnine, ei ole lahtine, tasand; d) kinnine, ei ole lahtine, tasand; e) kinnine, ei ole lahtine, paraboolne silinder; f) kinnine, ei ole lahtine, elliptiline silinder; g) kinnine, ei ole lahtine, sfäär; h) kinnine, ei ole lahtine, sfäär; i) kinnine, ei ole lahtine, elliptiline paraboloid; j) kinnine, ei ole lahtine, sirge; k) kinnine, ei ole lahtine, sirge; l) kinnine, ei ole lahtine, ringjoon; m) kinnine, ei ole lahtine, punkt; i) lahtine, ei ole kinnine, kera.
11. a) tasand; b) tasand; c) sfääri ülemine pool; d) koonus; e) sfääri alumine pool; f) paraboolne silinder.
12. $f(y,x) = -f(x,y)$, $f(-x,-y) = f(x,y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = -f(x,y)$, $\frac{1}{f(x,y)} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.
13. a) paralleelsed sirged; b) kontsentrilised ringjooned; c) hüperboolid, mille asümptootideks on nurgapoolitajad; d) hüperboolid, mille asümptootideks on koordinaatteljed; e) kontsentrilised rombid; f) ringjooned, mille keskpunkt asub x-teljel ja mis puutuvad y-telge; g) paralleelsed tasandid; h) kontsentrilised sfäärid; i) sama asümptootilise koonusega pöördhüperboloidid.
14. Viiakse läbi nagu ruumis $\mathbb{R}$, aga absoluutväärtus on asendatud normiga.
15. Leidke iga n jaoks selline P_n, et $d(P_n, A) < \frac{1}{n}$.
16. a) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; b) $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$; c) $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$; d) $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{20}\}$.
18. a) $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$; b) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$; c) $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$; d) $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$; e) $\delta = \min\left\{1, \frac{2}{E}\right\}$; f) $D = \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$; g) $D = \sqrt{E}$.
19. Valige $\varepsilon = f(A)$.
20. Funktsiooni f pidevuse tingimusest tekkiv δ sobib ka f_1 ja f_2 jaoks.
21. Ei.
22. Valige näiteks $\varepsilon = 1$ ning märgake, et $|f(X)| \leqslant |f(X) - f(A)| + |f(A)|$.
23. Heine kriteerium (kõige mugavam).
25. a) $(0,1)$; b) $(1,\mathrm{e})$; c) ei leidu; d) ei leidu.
27. a) 0; b) 0; c) $-\infty$; d) a; e) 2; f) e; g) 0; h) ei leidu; i) ei leidu; j) 0; k) ei leidu; l) 0; m) 0; n) 0; o) ei leidu.
29. Korduvate piiväärtuste jaoks kasutage Heine kriteeriumit.
30. a) jah; b) ei; c) jah; d) jah; e) ei; f) jah; g) ei; h) ei; i) jah.
31. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + y\ln(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + x\ln(xy)$; c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$; d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}$; e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\cos(xy+yz) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x+z)\cos(xy+yz)$; f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sin x}{\cos y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos x \tan y}{\cos y}$.

33. Kasutage korduvalt väidet: kui f on lõigus $[a,b]$ pidev ja vahemikus (a,b) dif-v, kusjuures $f'(x) \geqslant 0$, siis f on kasvav lõigus $[a,b]$.
34. $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + C(x)$, kus $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on suvaline funktsioon.
35. $f(x,y) = \frac{y^2 \ln x^2}{2} + \frac{x^2-1}{2} + \sin y$.
36. Diferentseeruvuse põhjendab punkti **A** ümbruses pidevate osatuletiste olemasolu; a) $\mathrm{d}f(h_1,h_2) = 0$; b) $\mathrm{d}f(h_1,h_2) = 12h_1 + 8h_2 \ln 2$; c) $\mathrm{d}f(h_1,h_2) = h_1 + h_2$; d) $\mathrm{d}f(h_1,h_2) = \frac{h_1}{5} + \frac{h_2}{2}$; e) $\mathrm{d}f(h_1,h_2,h_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi h_1}{6} + h_2 + h_3\right)$; f) $\mathrm{d}f(h_1,h_2,h_3) = -6h_1 + 3h_2 + 2h_3$.
37. P = on pidev, O = on lõplikud osatuletised, D = on diferentseeruv, DD = on kaks korda diferentseeruv; a) P, ¬O; b) P, O, ¬D; c) P, ¬O; d) P, O, D, ¬DD; e) ¬P, O; f) ¬P, O; g) P, O, ¬D; h) P, O, D, ¬DD; i) P, ¬O; j) P, O, D, ¬DD; k) P, O, D, ¬DD.
38. Kasutage ühe muutuja funktsiooni tuletise vastavaid omadusi.
39. Kasutage ülesannet 38 ning piirväärtuse omadusi.
40. a) $\mathrm{e}^{\sin t - \cos t}(\sin t + \cos t)$; b) $\frac{5t^4}{t^5-1}$; c) $\sin 2t - 2t\cos 2t$; d) $4t^3 + 2t + 1$; e) $\frac{1+4t^3-5t^4}{\cos^2(t+t^4-t^5)}$.
41. a) $3x^2 \sin y \cos^2 y$, $x^3 \cos^3 y - 2x^3 \sin^2 y \cos y$; b) 0, 0; c) $x^2 \cdot y^x \ln y + 2xy^x$, $x^3 y^{x-1}$. d) $0, -1$; e) $-2x\cos 2y$, $2x^2 \sin 2y$.
42. Nii välimine funktsioon kui ka sisemised funktsioonid on diferentseeruvad seoses pidevate osatuletiste olemasoluga; a) $\mathrm{d}f = (\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} - 1)\,\mathrm{d}x$; b) $\mathrm{d}f = (\cos x \cos(2x+1) + \cos(3x+1))\,\mathrm{d}x$; c) $\mathrm{d}f = 2\ln(y+1)\,\mathrm{d}x + \frac{2x+1}{y+1}\,\mathrm{d}y$; d) $\mathrm{d}f = 8x^3\,\mathrm{d}x + 8y^3\,\mathrm{d}y$; e) $\mathrm{d}f = \mathrm{e}^{2x-y}\left((2x^2 + 2xy + 2x + y)\,\mathrm{d}x + (x - xy - x^2)\,\mathrm{d}y\right)$.
44. $\arctan 4$, $\arctan 4$.
45. $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \frac{1}{|\vec{s}|}\vec{s}$.
46. 5.
47. a) kõrgemale; b) madalamale; c) vektori $(8,9)$ suunas või vastassuunas.
48. a) $y - z = 0$; b) $x + 2y - z - 1 = 0$; c) $3x + 3y - z = 0$; d) $x + y - z + 1 = 0$; e) $2x + 4y - z - 5 = 0$; f) $4x - 2y - z - 3 = 0$; g) $\frac{\pi}{6}x + \frac{1}{2}y - z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = 0$.
49. a) jah; b) ei (puutujatasandit ei leidu); c) jah.
51. Kõik osatuletised on pidevad, vajalikku järku diferentseeruvus on seega olemas, veelgi enam, liitfunktsiooni diferentsiaali kuju on invariantne muutuja vahetuse suhtes, kuna sisemine funktsioon on lineaarfunktsioon; a) $u = x + y + 1$, $\mathrm{d}^4 f = 120u\,\mathrm{d}^4 u$; b) $u = 2x + 3y - 5z$, $\mathrm{d}^6 f = -\cos u\,\mathrm{d}^6 u$.
52. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{0}) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{0}) = 1$; rikutud on segaosatuletiste pidevuse ning osatuletiste diferentseeruvuse nõuded.
53. a) $u(x,y) = C(y) + D(x)$, kus C on diferentseeruv ja D on suvaline funktsioon; b) $u(x,y) = xC(y) + D(y)$, kus C ja D on suvalised funktsioonid.
54. Kõikjal rahuldab jääkliige α tingimust $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0} \frac{\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; a) $f(x,y) = 1 + y - \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{3yx^2-y^3}{6} + \alpha(x,y)$; b) $f(x,y) = y + yx + \frac{3yx^2-y^3}{6} + \alpha(x,y)$; c) $f(x,y) = y + yx - \frac{y^2}{2} + \frac{3yx^2-3y^2x+2y^3}{6} + \alpha(x,y)$; d) $f(x,y) = x + y - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + \alpha(x,y)$; e) $f(x,y) = x - y^2x + \alpha(x,y)$; f) $f(x,y) = x^2y + \alpha(x,y)$.
55. Kõikjal rahuldab jääkliige α tingimust $\lim\limits_{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\to 0} \frac{\alpha(x,y)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; a) $f(x,y) = 1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + \alpha(x,y)$; b) $f(x,y) = 1 + 3x - 3y + 3y^2 - 3xy + xy^2 - y^3 + \alpha(x,y)$; c) $f(x,y) = -\frac{11}{3} + 3x + 3y - \frac{3x^2+3y^2}{2} + \frac{x^3+y^3}{3} + \alpha(x,y)$.
56. a) 1,06; b) 2,005; c) 8,21; d) 0,005.

57. a) $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}$; b) $1+\frac{m\alpha+n\beta}{4}+\frac{(3m^2-4m)\alpha^2-2mn\alpha\beta+(3n^2-4n)\beta^2}{32}$.
59. a) määrab, $f'(0)=0$; b) ei määra, sest **A** on $\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ isoleeritud punkt; c) määrab, $f'(0)=-2$; d) ei määra, sest **A** on $\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ isoleeritud punkt; e) määrab, $f'(0)=0$; f) ei määra, sest $\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ laguneb punkti **A** ümbruses kaheks lõikuvaks sirgeks; g) ei määra, sest $\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ laguneb punkti **A** ümbruses kaheks lõikuvaks jooneks.
60. a) $f'(x)=\frac{x+f(x)}{x-f(x)}$; b) $f'(x)=\frac{1}{1+\varepsilon\sin f(x)}$; c) $f'(x)=-\frac{f(x)}{x}$; d) $f'(x)=-\frac{e^x}{\cos f(x)+1}$; e) $f'(x)=\frac{e^{x-f(x)}-1}{e^{x-f(x)}+1}$; f) $f'(x)=-\frac{f(x)}{x+f(x)}$.
61. a) määrab, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,4)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,4)=-\frac{3}{4}$; b) määrab, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=-\frac{a}{c}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=-\frac{b}{c}$; c) määrab, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=-\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$.
62. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-1$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{z^2}{xy+yz}$; c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{yz-x}{z-xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{xz-y}{z-xy}$; d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{c^2y}{b^2z}$.
64. a) range lok. miinimum punktis $(0,0)$; b) lok. ekstr. puuduvad; c) range lok. maksimum punktis $(-2,-1)$; d) range lok. maksimum punktis $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, lok. maksimum punktis $(0,0)$; e) range lok. miinimum punktis $(0,0)$; f) range lok. miinimum punktis $(1,-1)$, range lok. maksimum punktis $(-1,-1)$; g) lokaalsed ekstreemumid puuduvad; h) lokaalsed ekstreemumid puuduvad; h) range lok. maksimum punktis $(1,-1)$.
65. a) range lok. miinimum punktis $\left(1,-2,\frac{1}{2}\right)$; b) range lok. miinimum punktis $(1,-1,3)$; c) range lok. miinimum punktis $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.
66. a) $\max f=f(0,-1)=2$, $\min f=f(0,1/2)=-0{,}25$; b) $\max f=f(-1,0)=f(1,0)=3$, $\min f=f(0,1)=f(0,-1)=1$; c) $\max f=f(1,0)=0$, $\min f=f(0,1)=-3$; d) $\max f=f(-1,-0)=f(0,-1)=1$, $\min f=f(0,0)=0$; e) $\max f=f(0,1)=f(0,-1)=3/e$, $\min f=f(0,0)=0$; f) Punktis $(0,0)$ on ainuke lokaalne maksimum $f(0,0)=0$, kuid näiteks punktis $(5,0)$ $f(5,0)=25$. Seega punkt $(0,0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt.
67. a) range lok. miinimum punktides $(-1,1)$ ja $(1,-1)$, range lok. maksimum punktis $(0,0)$; b) range lok. miinimum punktis $(1,1)$, range lok. maksimum punktis $(-1,1)$; c) range lok. miinimum punktis $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$; d) range lok. miinimum punktis $(-1,1,0)$.
68. a) range lok. miinimum punktis $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$, range lok. maksimum punktis $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$; b) range lok. miinimum punktis $(1,1)$; c) range lok. miinimum punktis $(-1,2,-2)$, range lok. maksimum punktis $(1,-2,2)$; d) range lok. miinimum punktis $(1,1,2)$.
71. $1/4$ (Kuna tegemist on pideva funktsiooniga, siis integraali võib arvutada ühtlase alajaotuse kaudu.)
72. $D=D_1\cup D_2$, kus $D_1=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$ ja $D_2=[0,1]\times[-1,0]$. $\iint_{D_1}\arcsin(x+y)\geqslant 0$ (miks?). $\iint_{D_1}\arcsin(x+y)=0$ (integraali võib arvutada ühtlase alajaotuse kaudu (miks?), punktid on otstarbekas valida nii, et punkti P_{ij} korral leiduks punkt P'_{ij}, mis on sümmeetriline punktiga P_{ij} sirge $y=-x$ suhtes, siis $\arcsin(P_{ij})+\arcsin(P'_{ij})=0$).
73. $1{,}96\leqslant I\leqslant 2$.
74 Kasutage Darboux' lemmat.
75 Kasutage ülesande 74 tulemust.
76. Kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (ülesanne 75).
77. Näidake, et $S(T)-s(T)=1$ ristküliku $[0,1]^2$ iga alajaotuse T korral.
78., **79.** kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (ülesanne 75).

80. Kui D_1 ja D_2 on nullmõõduga, siis $\partial D_1 \cup \partial D_2$ on nullmõõduga. Näidake, et $\partial(D_1 \cup D_2) \subseteq \partial D_1 \cup \partial D_2$, $\partial(D_1 \cap D_2) \subseteq \partial D_1 \cup \partial D_2$ ning $\partial(D_1 \setminus D_2) \subseteq \partial D_1 \cup \partial D_2$.
81. Teatavasti f graafik sisaldub ristkülikus $R := [a,b] \times [m,M]$. Kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (ülesanne 75), pidades alajaotuse konstrueerimisel silmas, et f on ühtlaselt pidev lõigus $[a,b]$.
82. Pange tähele, et $\partial U_\delta(A)$ on sile joon (või kahe pideva funktsiooni graafiku ühend). $\mu(U_\delta(\mathbf{A})) = \pi\delta^2$.
83. Kasutage mõõdu aditiivsust lõikumatute hulkade jaoks.
84. Pange tähele, et D sisaldab mingit lahtist kera.
85. Kasutage mõõdu monotoonsust ja mõõdu aditiivsust lõikumatute hulkade jaoks, esitades $D_1 \cup D_2 = D_1 \cap (D_2 \setminus D_1)$.
86. Kasutage mõõdu monotoonsust ja subaditiivsust koos seostega $D^\circ \subseteq D \subseteq \overline{D} = D^\circ \cup \partial D$.
88. a) $\frac{20}{3}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $\frac{6}{35}$; d) $\frac{7}{12}$; e) $71\frac{1}{4}$.
89. a) 0; b) $\frac{32}{9}$; c) 4π; d) 2π; e) $\frac{\pi}{128}$.
90. a) 224/3; b) 4/3; c) $\pi/2$. Teha asendus $u = x+y$, $v = x-y$ ja seejärel minna üle polaarkoordinaatidele.
93. a) 6; b) 4; c) 40/3; d) 1/2; e) 1/364; f) 11.
94. a) $\pi/2$; b) $3a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; c) 0; d) $4\pi(b^5-a^5)/15$; e) 2/5.
95. a) $\pi/2$; b) $\pi/10$; c) $8\pi(b^5-a^5)/15$; d) $6\pi^2$; e) $59\pi a^5/480$.
96. a) $\frac{a^2}{8}\cdot(15-16\ln 2)$; b) $\frac{\pi}{4}\cdot(b^2-a^2)$; c) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$; d) $\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{3}$.
97. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{68}{15}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $4\pi\left(2\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$; f) 128.
98. $\left(\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}, \frac{\pi}{24-6\pi}\right)$.
99. $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$.
100. $\frac{abc(a+b+c)}{2}$.
101. 162π.
102. $\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$. (NB! Raskuskese asub väljaspool keha!)
104. Olgu näpunäites antud kõõlmurdjoone pikkus $p(T)$, siis

$$p(T) \geqslant 2\cdot\frac{1}{2n} + 2\cdot\frac{1}{2n-2} + \ldots + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} \infty.$$

105. Kaare L suvalise kõõlmurdjoone pikkus ei ületa arvu $K(b-a)$.
106. a) $1+\sqrt{2}$; b) $2e^a - 2 + \frac{\pi a e^a}{4}$; c) $2\pi a^4$; d) $8a$; e) $8a\pi^3\sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{(a^2+2)^3}-2\sqrt{2}}{3}$.
107. a) $\frac{k}{3}\cdot\left(\sqrt{(e^2+1)^3}-2\sqrt{2}\right)$; b) $\frac{4\rho_0}{3}$.
108. Suuna $\Rightarrow$ jaoks kasutage omadust $s(T) = \inf\left\{\sigma(T,\xi)\colon \xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\, k = 1,\ldots,n\right\}$ ja analoogilist $S(T)$ jaoks. Suuna $\Leftarrow$ jaoks näidake, et $I^* - I_* = 0$ ning tõestage, et leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\lambda(T) < \delta$, siis $I_* - \varepsilon \leqslant S(T) - \varepsilon < s(T) \leqslant \sigma(T,\xi)$, analoogiliselt ka teine pool.
109. Näidake, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$, kasutades liitfunktsiooni $f\circ\gamma$ ühtlast pidevust lõigus $[a,b]$.
110. Toimub analoogiliselt Riemanni integraaliga.
111. Toimub analoogiliselt Riemanni integraaliga. Ei.
112. a) a) 1, b) 1, c) 1 (märkus: vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x,y) = x^2y$, pole see juhuslik, et kõik vastused on samad); b) 0 (märkus: vastust on arvutamata lihtne näha, vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x,y) = \frac{x^2+xy-y^2}{2}$); c) -2π; d) -2 (märkus: vastust on lihtsam näha, vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x,y) = 2x^2+xy+2y^2$ ning mingit lihtsamat kõverat AB); e) $-\pi$.

113. Kuna joone $\{(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\colon\ t\in[a,b]\}$ puutuja sihivektor on $(\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))$, siis $\tau_1(\varphi_1(t))=\frac{\varphi_1'(t)}{\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}}$, analoogiliselt τ_2 kohta. Niisiis

$$\int_L f\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_1'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\cdot\tau_1(\varphi_1(t))\cdot\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_L f\cdot\tau_1\,\mathrm{d}x,$$

samuti saadakse teine võrdus.
114. $\int_{\partial D}x\,\mathrm{d}y=\frac{3\pi ab}{8}$.
115. $\vec{F}(x,y)=\big(-x,-y\big)$; tarvis on leida $A=\int_L\langle\vec{F},\vec{\tau}\rangle\,\mathrm{d}\vec{r}$, kus $\mathrm{d}\vec{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$; saame, et $A=-14$.
116. $\vec{F}(x,y)=(F,0)$, seega $A=aF$.
120. a) $\frac{\pi a^4}{2}$, kahekordne integraal arvutada üleminekuga polaarkoordinaatidele; b) 0, kahekordne integraal leida üleminekuga elliptilistele polaarkoordinaatidele $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$, kus $0\leqslant r\leqslant 1$ ja $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$; c) $-\frac{\pi a^3}{8}$.
121. a) Sõltumatu; b) sõltuv; c) sõltumatu.
122. a) $U(x,y)=x^3-x^2y^2+y^3+C$; b) $U(x,y)=x\mathrm{e}^{2y}-5y^3\mathrm{e}^x+C$; c) $U(x,y)=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$ või $U(x,y)=\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}+C$; d) $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+C$; e) $U(x,y)=y^2\cos x+x^2\cos y+C$, võtta $a=b=0$; f) $U(x,y)=x^2-\cos(x+y)+y^2+C$; g) $U(x,y)=C-\cos(x+y)$.
123. a) 8; b) $\frac{5}{8}$; c) 64; d) 4.
126. $S(x)=\frac{\pi}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $S(-\pi)=S(0)=S(\pi)=\frac{\pi}{2}$, mujal $S(x)=f(x)$.
127. a) $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$, $S(-\pi)=S(\pi)=0$, mujal $S(x)=\operatorname{sgn}x$;
b) $S(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx$, $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{\pi}{2}$, mujal $S(x)=\frac{\pi-x}{2}$;
c) $S(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, $S(x)=|x|$;
d) $S(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx-\frac{\sin nx}{n}$, $S(0)=\frac{\pi}{2}$, mujal $S(x)=f(x)$;
e) $S(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx$, $S(-\pi)=S(\pi)=0$, mujal $S(x)=x$;
f) $S(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$, $S(x)=x^2$;
g) $S(x)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-6)}{k^3}\sin kx$, $S(-\pi)=S(\pi)=0$, mujal $S(x)=x^3$;
h) $S(x)=\frac{\pi^4}{5}+8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-6)}{k^4}\cos kx$, $S(x)=x^4$.
128. a) $S(x)=\pi-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $S(0)=S(2\pi)=\pi$, mujal $S(x)=x$;
b) $S(x)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}-\frac{\pi\sin kx}{k}$, $S(0)=S(2\pi)=\frac{\pi^2}{2}$, mujal $S(x)=x^2$;
c) $S(x)=\frac{1}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)\pi x/l]}{(2n+1)^2}$, $S(x)=|x|$.
129. a) $S(x)=1$; b) $S(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, $S(x)=x$; c) $S(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$, $S(x)=\sin x$.
130. a) $S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $S(\pi)=0$, mujal $S(x)=x$; b) $S(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2-\pi^2k^2)(-1)^k-2)\sin kx}{k^3}$, $S(\pi)=0$, mujal $S(x)=x^2$; c) $S(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{k}$, $S(0)=S(\pi)=0$, mujal $S(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$.
131. a) $\frac{\pi^2}{12}$ (kasutage $f(x)=x$ arendist); b) $\frac{\pi^2}{8}$ (kasutage $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ arendist); c) $\frac{1}{2}$ (Fourier' ridu pole vaja, kuna $S_m=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2m+1)}$); d) $\frac{\pi^2}{32}$ (kasutage $f(x)=x^3$ arendist).
133. Funktsioon f on 2π-perioodiline, paaritu, kusjuures lõigus $[0,\pi]$ $f(x)=\begin{cases}x, & \text{kui } x\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big),\\ x-\pi, & \text{kui } x\in\big(\frac{\pi}{2},\pi\big],\\ 0 & \text{kui } x=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$