Optimiseerimismeetodid

Peeter Oja

Tartu 2019

Sisukord

Eessõna

Käesolev õppevahend on mõeldud eelkõige üliõpilastele, kes omandavad matemaatilist haridust. Siin ei ole seatud eesmärgiks esitada materjali kokkusurutuna, et teksti lühendada. Vastupidi, kohati esineb selgitusi, mis võib-olla kogenud lugejale ei ole vajalikud, aga matemaatikuna vähem töötanud isikul aitavad paremini detailidest aru saada.

Materjali esitus võib näida liiga teoreetiline, mitte sisaldades praktilisi ülesandeid väga mitmesugustest valdkondadest, mida optimiseerimine pakub. See on taotluslik, sest praktiliste probleemidega tegelemisele peaks eelnema hea teooria tundmine. Pealegi nõuab praktiliste küsimuste põhjalikum käsitlemine rohkesti aega, mille olemasolu keskmise mahuga aine õppimisel ei ole loomulik eeldada. Esitatud materjal on mõeldud esmaseks tutvumiseks optimiseerimisega ja see on ka üks põhjus, miks ei ole mõistlik aine mahtu väga paisutada.

Osa olulisi valdkondi nagu näiteks transpordiülesanne, rändkaupmehe (proovireisija) ülesanne, ruutplaneerimine, täisarvuline planeerimine, mitme sihifunktsiooniga ülesanded, ei ole esindatud. Ei ole üldistusi lõpmatumõõtmelistesse ruumidesse. Samal ajal on eriti põhjalikult esitatud lineaarse planeerimise teooria, samuti mitmed olulised tulemused kumerast planeerimisest. Loodetavasti aitab esitatud materjali valdamine neid puuduolevaid teooriaid kergemini õppida, kui selleks tekib vajadus, sest just paljud lineaarses ja kumeras planeerimises esinevad ideed leiavad mujal arendamist.

Osa materjalist (ülesanded, tõestused, alapunktid) on varustatud sümboliga *. Need võib esimesel lugemisel vahele jätta, kuid vastavast valdkonnast tervikliku pildi saamiseks peaks nendega tutvuma.

Sissejuhatus

Optimiseerimises tegeldakse põhiliselt järgmiste ülesannete lahendamisega.

Antud on hulk X (eeldame, et $X \neq \emptyset$) ja funktsioon (funktsionaal) $f\colon X \to \mathbb{R}$. Leida $x_* \in X$ nii, et $f(x_*) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$. Viitame sellele kui ülesandele (1).

Alati eksisteerib $\inf\limits_{x \in X} f(x)$, mida võib kirjutada ka $\inf f(X)$, sest $f(X) \subset \mathbb{R}$ ja igal reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ osahulgal on infiimum olemas. Seejuures $\inf f(X) \in \mathbb{R}$ või $\inf f(X) = -\infty$.

Ülesanne 1. Põhjendada, miks $\inf \emptyset = +\infty$ ja $\sup \emptyset = -\infty$, kui vaadelda $\emptyset \subset \mathbb{R}$.

Lisame ülesandele 1 võrdluseks, et kui $A \subset \mathbb{R}$ ja $A \neq \emptyset$, siis $\inf A \leqslant \sup A$.

Võib vaadelda ülesannet, kus on vaja leida $x_* \in X$ nii, et $f(x_*) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. See on taandatav ülesandele (1), sest $\sup\limits_{x \in X} f(x) = -\inf\limits_{x \in X} (-f(x))$ ja on tarvilik ja piisav leida $x_* \in X$ nii, et x_* korral saavutab funktsioon $-f$ infiimumi.

Mõnikord vaadeldakse ka ülesannet, kus antud $f\colon X \to \mathbb{R}$ korral seatakse eesmärgiks leida ainult $\inf\limits_{x \in X} f(x)$, olgu see ülesanne (2). Muidugi võib seada eesmärgiks leida $x_* \in X$, kus $f(x_*) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$, kui ka $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ ehk lahendada nii ülesanne (1) kui ka ülesanne (2).

Üldises plaanis peaks vastama küsimusele, kas ülesandel (1) on lahend olemas; samuti lahendi olemasolu korral, kas lahend on ühene. Optimiseerimismeetodite peamine probleem on aga ülesande (1) lahendi leidmine.

Kui ülesandel (1) on lahend x_* olemas, siis võib kirjutada $f(x_*) = \min\limits_{x \in X} f(x)$, samuti , kui $f(x_*) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$, siis tegelikult $f(x_*) = \max\limits_{x \in X} f(x)$. Seepärast räägitakse vastavalt minimiseerimisest ja maksimiseerimisest.

Ülesanne (1) on liiga üldine, et tema kohta ilma täiendavaid eeldusi tegemata midagi sisukat öelda saaks. Eeldusi tehakse hulga X ja sihifunktsiooni f kohta. Vastavalt sellele jaotatakse ülesandeid klassidesse.

Üks võimalik jaotus on järgmine:

1) hulk X on vektorruum, praktikas tihti lõplikumõõtmeline;

2) hulk X on osahulk mingis vektorruumis V, seejuures X ise ei ole vektorruum (ei ole alamruum ruumis V); hulk X on kirjeldatud mingite lisatingimustega, mida nimetatakse kitsendusteks. Ülesanne juhul 1) on siis kitsendusteta ülesanne.

Klassi 2) puhul nimetatakse hulka X lubatavaks hulgaks. Sel juhul tavaliselt $f\colon V \to \mathbb{R}$ ehk f on määratud terves vektorruumis V.

Teine võimalik jaotus on peajoontes funktsiooni f iseloomu järgi. Oletame, et $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Kui f on lineaarne (siis $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) ja X on määratud lõpliku arvu lineaarsete kitsendustega, siis on tegemist lineaarse planeerimise ülesandega. Vastasel juhul räägitakse mittelineaarse planeerimise ülesandest. Tähtsamad mittelineaarse planeerimise valdkonnad on:

1) ruutplaneerimine, kus X on määratud lõpliku arvu lineaarsete kitsendustega (nagu lineaarses planeerimises) ja f on ruutfunktsioon;

2) kumer planeerimine, kus X on kumer hulk ja f on kumer funktsioon.

Kolmas oluline jaotus on selline, kus $X \subset \mathbb{R}^n$ ja f on sile (vähemalt diferentseeruv) või ei ole diferentseeruv.

Selle loengukursuse üks tähtsamaid osasid on lineaarne planeerimine, mis on eriti suure praktilise kasutusega. Lineaarsel planeerimisel on ka alaharusid, kus ülesanded jaotatakse alamklassidesse. Näitena ühest erikujulisest võime tuua transpordiülesande.

§1. Põhimõisteid

Vaatleme siin juhtu, kus $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Märgime, et mitmed esitatavad mõisted on vahetult üle kantavad üldisemasse olukorda.

Olgu vaja leida $x_* \in \Omega$ nii, et $f(x_*) = \min\limits_{x\in\Omega} f(x)$ (või $f(x_*) = \max\limits_{x\in\Omega} f(x)$). Ülesande $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$ lahend on selline $x_* \in \Omega$, kus $f(x) \geqslant f(x_*)$ iga $x \in \Omega$ korral. Analoogiliselt, $x_* \in \Omega$ on ülesande $\max\limits_{x\in\Omega} f(x)$ lahend, kui $f(x) \leqslant f(x_*)$ iga $x \in \Omega$ korral. Elementi $x_* \in \Omega$ nimetatakse $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ lokaalseks miinumumpunktiks, kui eksisteerib $\delta > 0$ nii, et $f(x) \geqslant f(x_*)$ iga $x \in \Omega \cap \{x \mid \|x - x_*\| < \delta\}$ korral. Siin võib silmas pidada suvalist normi ruumis $\mathbb{R}^n$, samuti võib lokaalsuse tingimuses kirjutada $\leqslant \delta$. Analoogiliselt defineeritakse lokaalne maksimumpunkt. Mõlemaid nimetatakse lokaalseks ekstreemumpunktiks. Vastandina sellele räägitakse ülesande $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$ lahendi puhul globaalsest miinimumist, ülesande $\max\limits_{x\in\Omega} f(x)$ lahendi puhul globaalsest maksimumist.

Definitsioon. Jada $x_k \in \Omega$ nimetatakse funktsiooni $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ minimiseerivaks jadaks, kui $f(x_k) \to \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$.

Märgime, et $\inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$ eksisteerib alati, infiimumi mõiste kohaselt on minimiseeriv jada alati olemas (sest oli kokkulepe $\Omega \neq \emptyset$). Analoogiliselt defineeritakse maksimiseeriv jada.

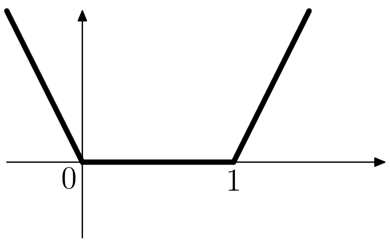
Funktsioon f on ülalt tõkestatud hulgas Ω, kui eksisteerib $M \in \mathbb{R}$ nii, et $f(x) \leqslant M$ iga $x \in \Omega$ korral. Analoogiliselt mõistetakse funktsiooni alt tõkestatust.

Ülesande $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$ või $\max\limits_{x\in\Omega} f(x)$ lahendite hulka tähistame Ω_*. Võib muidugi olla, et $\Omega_* = \emptyset$.

Näited. 1. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (siin $\Omega = \mathbb{R}$). Siis f on alt tõkestatud, ei ole ülalt tõkestatud (hulgas $\mathbb{R}$). Minimiseerimisülesandes $\Omega_* = \{0\}$, maksimiseerimisülesandes $\Omega_* = \emptyset$.

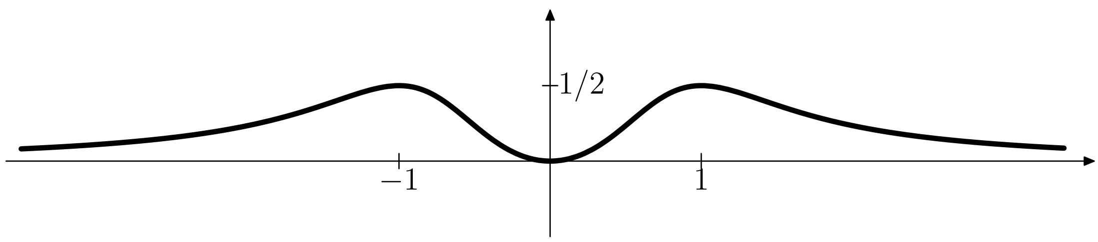
2. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$. Funktsioon f on alt tõkestatud, ei ole ülalt tõkestatud. Nii miinimum- kui ka maksimumülesandes $\Omega_* = \emptyset$.

3. Vaatleme funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis määratakse võrdusega $f(x) = |x| + |x - 1| - 1$. Siis $f(x) = -2x$, kui $x \leqslant 0$; $f(x) = 0$, kui $0 \leqslant x \leqslant 1$; $f(x) = 2x - 2$, kui $x \geqslant 1$. Tema graafik on ette kujutatav järgmisel joonisel



Kui minimiseerimisülesandes võtta $\Omega = \mathbb{R}$, siis $\Omega_* = [0,1]$, kui $\Omega = [1,2]$, siis $\Omega_* = \{1\}$. Maksimiseerimisülesandes $\Omega = [0,2]$ korral $\Omega_* = \{2\}$, kui aga $\Omega = [0,2)$, siis $\Omega_* = \emptyset$.

4. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määratud võrdusega $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$. Vahetu arvutus annab $f'(x) = \dfrac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}$ ning $f'(x) = 0$ parajasti siis, kui $x = 0$ või $x = \pm 1$. Selle funktsiooni graafikust saab ettekujutuse järgmiselt jooniselt



Kui siin valida $\Omega = \mathbb{R}$ ja vaadelda minimiseerimisülesannet, siis $\Omega_* = \{0\}$. Minimiseeriv jada on näiteks $x_k = k$, aga see jada ei koondu. Minimiseeriv jada on ka $x_k = \dfrac{1}{k}$, mis koondub miinimumülesande lahendiks, sest siin $x_k \to 0$.

Paragrahvi lõpetuseks tõestame ühe laialt kasutatava ja mitmesuguseid üldistusi lubava teoreemi. Selle tõestus annab ettekujutuse mõnedest optimiseerimises kasutatavatest olulistest ideedest.

Teoreem (Weierstrassi teoreem)**.** *Olgu Ω kinnine tõkestatud hulk ruumis $\mathbb{R}^n$ ja $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ pidev. Siis f on alt ja ülalt tõkestatud, miinimum- ja maksimumülesandel on olemas lahend ($\Omega_* \neq \emptyset$), iga minimiseeriva või maksimiseeriva jada x_k korral vastavalt ülesandele $\rho(x_k, \Omega_*) \to 0$.*

Meenutame, et elemendi kaugus hulgast defineeritakse võrdusega $\rho(x,\Omega) = \inf\limits_{y\in\Omega} \rho(x,y)$.

Tõestus. Kinnine tõkestatud hulk ruumis $\mathbb{R}^n$ on kompaktne ja tõestuse standardsus seisnebki kompaktsuse kasutamises.

Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole alt tõkestatud. Siis leidub jada $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, nii, et $f(x_k) \to -\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Hulga Ω kompaktsust kasutades eraldame jadast x_k, $k \in \mathbb{N}$, osajada x_k, $k \in N' \subset \mathbb{N}$, nii, et $x_k \to x_0 \in \Omega$, $k \in N'$. Funktsiooni f pidevuse tõttu $f(x_k) \to f(x_0) \in \mathbb{R}$, $k \in N'$, mis on vastuolus vastuväitega.

Funktsiooni f ülalt tõkestatuse tõestus on täiesti sarnane.

Olgu miinimumülesandes $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, minimiseeriv jada. Eraldame sellest osajada $x_k \to x_0 \in \Omega$, $k \in N' \subset \mathbb{N}$. Siis f pidevuse tõttu $f(x_k) \to f(x_0)$, $k \in N'$. Samal ajal minimiseeriva jada mõiste kohaselt $f(x_k) \to \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Seega $f(x_0) = \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$ ja $x_0 \in \Omega_*$, mistõttu $\Omega_* \neq \emptyset$.

Olgu miinimumülesandes $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, minimiseeriv jada. Me teame juba, et $\Omega_* \neq \emptyset$. Oletame vastuväiteliselt, et ei kehti $\rho(x_k, \Omega_*) \to 0$, $k \in \mathbb{N}$. Siis leidub osajada x_k, $k \in N' \subset \mathbb{N}$, ja $\delta > 0$ nii, et $\rho(x_k, \Omega_*) \geqslant \delta$, $k \in N'$. Eraldame jadast x_k, $k \in N'$, osajada x_k, $k \in N'' \subset N'$, nii, et $x_k \to x_0 \in \Omega$, $k \in N''$. Eelnevas nägime, et $x_0 \in \Omega_*$ (minimiseeriva jada koonduva osajada piirväärtus oli miinimumülesande lahend). Nüüd $k \in N''$ korral

$$0 < \delta \leqslant \rho(x_k, \Omega_*) = \inf_{y\in\Omega_*} \rho(x_k, y) \leqslant \rho(x_k, x_0) \to 0,$$

mis on vastuolu.

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne 2. Kas Weierstrassi teoreemi eeldustel minimiseeriv jada koondub miinimumülesande lahendiks? Põhjendada.

Ülesanne* 1. Millised Weierstrassi teoreemi väited jäävad kehtima, kui eeldus funktsiooni f pidevuse kohta asendada f alt poolpidevusega?

Selgituseks lisame, et $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nimetatakse alt poolpidevaks, kui $x_k \to x$, $x_k, x \in \Omega$, korral $f(x) \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. Seejuures defineeritakse jada a_k korral $\varliminf\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{l\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant l} a_k$. Muidugi tagab funktsiooni pidevus tema alt poolpidevuse.

§2. Ühe muutuja funktsioonide ekstreemumülesannete lahendamine

Alustame siin paari ülesandega.

Ülesanne 3. Tõestada, et funktsioon $f(x) = ax + b$, kus $a \neq 0$, saavutab miinimumi ja maksimumi lõigus $[\alpha, \beta]$ ainult siis, kui $x = \alpha$ või $x = \beta$.

Ülesanne 4. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineeritud võrdusega $f(x) = \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left|t^2 - xt\right|$. Leida ülesande $\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$ lahend, kui $\Omega = \mathbb{R}$ ja $\Omega = [1, \infty)$.

1. Diferentseeruvuse kasutamine

Paneme selles punktis kirja väited, mida tavaliselt esitatakse matemaatilist analüüsi käsitlevates kursustes. Nendest on teada, et kui $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv, siis funktsioonil $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ saab olla lokaalne ekstreemum punktides x, kus $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$, või punktides a ja b. Kui $f'(x) \geqslant 0$ iga $x \in (a, a + \delta)$, $\delta > 0$, korral, siis punktis a on lokaalne miinimum. Kui $f'(x) \leqslant 0$ iga $x \in (a, a + \delta)$ korral, siis punktis a on lokaalne maksimum. Analoogilised kaks väidet kehtivad teises lõigu otspunktis b.

Ülesanne 5. Tõestada vähemasti üks viimati esitatud neljast väitest. *Soovitus: kasutada Lagrange'i keskväärtusteoreemi.*

Eeldame järgnevas, et $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ on küllaldane arv kordi diferentseeruv. Olgu $x_0 \in (a, b)$ korral $f'(x_0) = 0$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Siis võib väita järgmist (näitefunktsioonidena võib silmas pidada $f(x) = x^n$ ja $x_0 = 0$, $x_0 \in (a, b)$):

1) kui n on paaris, siis punktis x_0 on lokaalne ekstreemum; juhul $f^{(n)}(x_0) > 0$ on tegemist lokaalse miinimumiga, juhul $f^{(n)}(x_0) < 0$ lokaalse maksimumiga. Mõlemal juhul on lokaalne ekstreemum isoleeritud, mis tähendab, et punktil x_0 leidub ümbrus, kus ei ole teisi ekstreemumpunkte.

2) kui n on paaritu, siis punktis x_0 ei ole lokaalset ekstreemumit.

Need väited järelduvad Taylori valemist

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x-x_0)^{n-1} + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \alpha(x_0;x) = \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \alpha(x_0;x),\end{aligned}$$

milles $\dfrac{\alpha(x_0;x)}{|x-x_0|^n} \longrightarrow 0$, kui $x \to x_0$. Kui $|x-x_0| < \delta$ küllalt väikese $\delta > 0$ korral, siis vaadeldes seejuures $x \neq x_0$, saame

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \alpha(x_0;x) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{\alpha(x_0;x)}{(x-x_0)^n}\right)(x-x_0)^n$$

ning $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \dfrac{\alpha(x_0;x)}{(x-x_0)^n}$ säilitab märki. Paarisarvu n korral säilitab märki ka $(x-x_0)^n$ ja $f^{(n)}(x_0) > 0$ tagab, et $f(x) > f(x_0)$, $f^{(n)}(x_0) < 0$ annab aga, et $f(x) < f(x_0)$. Paaritu n juhul aga $(x-x_0)^n$ muudab märki vastavalt sellele, kas $x < x_0$ või $x > x_0$.

Ülesanne 6. Olgu $f\colon\ (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, diferentseeruv. Tõestada, et kui $x_0 \in [a,b]$ ja $f(x_0) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, siis $f'(x_0)\,(x-x_0) \geqslant 0$ iga $x \in [a,b]$ korral. Leida näide, kus tingimustest $x_0 \in [a,b]$ ja $f'(x_0)\,(x-x_0) \geqslant 0$ iga $x \in [a,b]$ korral ei järeldu, et $f(x_0) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Nagu eelnevast nähtus, on lõigu sisepunktis x diferentseeruva funktsiooni f ekstreemumi tarvilik tingimus $f'(x) = 0$. Selle võrrandi (ligikaudseks, aga kuitahes täpseks) lahendamiseks kasutatakse praktikas arvutusmeetoditest tuntud võimalusi, nagu harilik iteratsioonimeetod, Newtoni meetod, lõikajate meetod.

Ülesanne* 2. Leida kolmemõõtmelise ruumi ühikkeras asuv silinder, mis on maksimaalse ruumalaga, esitada terviklik põhjendus. Lahendada sama probleem ruumi $\mathbb{R}^n$ ühikkeras, kus $n \geqslant 4$ korral selgitada, mida mõeldakse silindri ruumala all.

Järgnevas kahes punktis käsitleme kahte meetodit, mis ei kasuta klassikalisi diferentsiaalarvutuse vahendeid ja on seega palju laiemate praktilise kasutuse võimalustega.

2. Lõigu poolitamise meetod

Definitsioon. Funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nimetatakse unimodaalseks, kui eksisteerivad α ja β nii, et $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$ ja

1) f on rangelt kahanev lõigus $[a,\alpha]$, kui $a < \alpha$;

2) f on rangelt kasvav lõigus $[\beta,b]$, kui $\beta < b$;

3) $f(z) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ iga $z \in [\alpha,\beta]$ korral ehk minimiseerimisülesandes $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ on $\Omega_* = [\alpha,\beta]$.

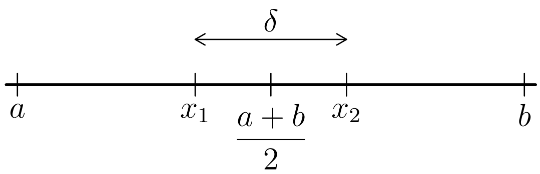
On võimalik, et unimodaalse funktsiooni puhul on osa lõikudest $[a,\alpha]$, $[\alpha,\beta]$, $[\beta,b]$ ühepunktilised. Definitsioonist on vahetult järeldatav, et mingis lõigus unimodaalne funktsioon on unimodaalne selle lõigu igas osalõigus.

Eelmises paragrahvis vaadeldud näidetest on unimodaalsed $f(x) = x^2$ ja $f(x) = |x| + |x-1| - 1$ igas lõigus $[a,b]$.

Asume kirjeldama lõigu poolitamise meetodit. Lahendatakse ülesannet

$$\min_{x\in[a,b]} f(x). \tag{1}$$

Eeldame, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on unimodaalne. Valime δ nii, et $0 < \delta < b-a$ (praktilistes arvutustes on δ väike). Arvutatakse $x_1 = \dfrac{a+b-\delta}{2}$ ja $x_2 = \dfrac{a+b+\delta}{2}$ (punktid x_1 ja x_2 asuvad lõigu $[a,b]$ keskpunkti $\dfrac{a+b}{2}$ ümbruses, olles sellest eri pooltel), siis $x_2 - x_1 = \delta$.



Leitakse $f(x_1)$, $f(x_2)$. Kui $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, siis võetakse $a_1 = a$, $b_1 = x_2$; kui aga $f(x_1) > f(x_2)$, siis võetakse $a_1 = x_1$, $b_1 = b$. Kuna f on unimodaalne, siis $\Omega_* \cap [a_1,b_1] \neq \emptyset$ (näiteks esimeses variandis $f(x) \geqslant f(x_2)$, kui $x \geqslant x_2$). Seejuures $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2} + \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{b-a-\delta}{2} + \delta$. Lõiguga $[a_1,b_1]$ toimitakse nagu algse lõiguga $[a,b]$, leides $x_3, x_4 \in [a_1,b_1]$. Esitame üldise sammu kirjelduse eeldusel, et on leitud lõik $[a_k,b_k]$, mille puhul teeme ka induktsioonieelduse, et

$$b_k - a_k = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta \tag{2}$$

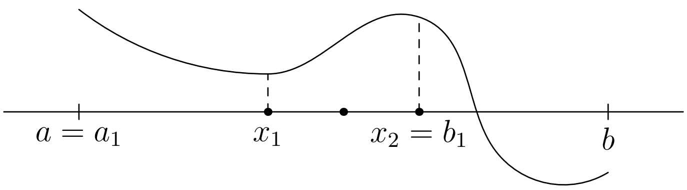
(see on täidetud $k = 1$ korral). Lõigus $[a_k, b_k]$ võetakse $x_{2k+1} = \dfrac{a_k + b_k - \delta}{2}$ ja $x_{2k+2} = \dfrac{a_k + b_k + \delta}{2}$. Kui $f(x_{2k+1}) \leqslant f(x_{2k+2})$, siis olgu $a_{k+1} = a_k$ ja $b_{k+1} = x_{2k+2}$; kui aga $f(x_{2k+1}) > f(x_{2k+2})$, siis $a_{k+1} = x_{2k+1}$ ja $b_{k+1} = b_k$. Sama põhjendus, mis esimesel sammul, tagab, et $\Omega_* \cap [a_{k+1}, b_{k+1}] \neq \emptyset$. Veel leiame induktsioonieeldust kasutades

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k - \delta}{2} + \delta = \\ = \frac{\dfrac{b-a-\delta}{2^k} + \delta - \delta}{2} + \delta = \frac{b-a-\delta}{2^{k+1}} + \delta.$$

Lõigu $[a_k, b_k]$ leidmiseks ehk k iteratsioonisammu sooritamiseks on vaja kasutada $2k$ funktsiooni f väärtust. Võrdus (2) annab protsessis $k \to \infty$ koondumise $b_k - a_k \to \delta$, seejuures $b_k - a_k > \delta$. Kui miinimumülesande (1) lahend on vaja leida täpsusega $\varepsilon > 0$, siis võetakse $\delta < \varepsilon$ ja itereeritakse kuni $b_k - a_k < \varepsilon$, lähislahendiks sobib suvaline punkt lõigus $[a_k, b_k]$.

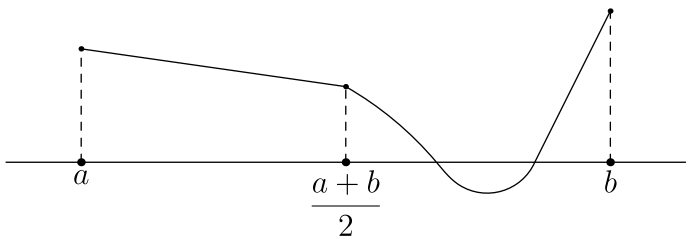
Märkus. Meetodi kirjelduses esineb teatud ebasümmeetria, mis seisneb selles, et kui iteratsioonisammul tekib võrdus $f(x_{2k+1}) = f(x_{2k+2})$, siis valitakse lõigus $[a_k, b_k]$ vasakpoolne osalõik $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Tegelikult võib sellises olukorras võtta ükskõik kumma osalõigu, ikka $\Omega_* \cap [a_{k+1}, b_{k+1}] \neq \emptyset$, sest pidades silmas f unimodaalsust, juhul x_{2k+1}, $x_{2k+2} \in [\alpha, \beta]$ sisaldab lõik $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ lahendi x_{2k+1} või x_{2k+2}; kui aga $f(x_{2k+1}) = f(x_{2k+2}) > \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, siis $x_{2k+1} \in [a, \alpha)$, $x_{2k+2} \in (\beta, b]$ ja $[a_{k+1}, b_{k+1}] \supset [\alpha, \beta]$. Programmeerimise seisukohalt tuleb valik ära määrata ja põhitekstis kirjeldatud variant on adekvaatne.

Kui funktsioon f ei ole unimodaalne, siis ei saa garanteerida, et meetod annaks miinimumülesande (1) lähislahendi. Selleks võib vaadata näiteks järgmist joonist:



Juba esimesel sammul valitakse lõigus $[a, b]$ vasakpoolne osalõik, milles ei ole funktsiooni miinimumpunkti.

Loomulik on küsida, miks ei tehta lihtsalt lõiku $[a, b]$ pooleks nagu toimitakse klassikalises lõigu poolitamise meetodis võrrandi $f(x) = 0$ lahendamisel. Vaatame jälle joonist:



Leides $f(a)$, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $f(b)$ ei ole mõistlikku alust osalõigu valikuks nende väärtuste kohaselt. Seejuures on joonisel toodud funktsioon unimodaalne. Märgime, et selles punktis kirjeldatud lõigu poolitamise meetodil lahendatakse ligikaudselt võrrandit $f'(x) = 0$ (kui f' eksisteerib), mitte võrrandit $f(x) = 0$, ja tuletise lokaalseks iseloomustamiseks ei piisa f väärtusest ühes punktis $\dfrac{a+b}{2}$.

3. Kuldlõike meetod

Lõigu $[a, b]$ kuldlõikeks nimetatakse tema sellist jaotust $[a, x]$, $[x, b]$, kus

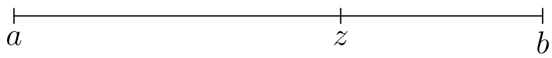
$$\frac{b-a}{b-x} = \frac{b-x}{x-a} \tag{3}$$

ehk $(b-x)^2 = (b-a)(x-a)$ (siin $b - x > x - a$)

või $[a, z]$, $[z, b]$, kus

$$\frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z} \tag{4}$$

ehk $(z-a)^2 = (b-a)(b-z)$ (siin $z - a > b - z$).



Niisiis on lõigus kaks kuldlõike punkti, meie tähistustes vasakpoolne x ja parempoolne z.

Võtame ajutiselt $a = 0$, $b = 1$, siis kuldlõike tingimus z jaoks on $z^2 = 1 - z$ ehk $z^2 + z - 1 = 0$, mille sobivaks lahendiks on $z = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$. Siis $x = 1 - z = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$. Üldise lõigu korral avalduvad kuldlõike punktid

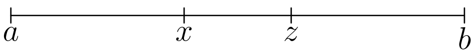
$$x = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a), \quad z = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a),$$

mida võib väljendada veel samaväärselt

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{z-a}{b-a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vahetu arvutamine näitab, et selliselt määratud punktid x ja z rahuldavad kuldlõike võrduseid (3) ja (4).

Ülesanne 7. Tõestada, et kui x jaotab lõigu $[a, b]$ kuldlõikes nii, et $b - x > x - a$ (ehk x on lõigu $[a, b]$ vasakpoolne kuldlõike punkt) ja z jaotab $[a, b]$ kuldlõikes nii, et $z - a > b - z$ (ehk z on lõigu $[a, b]$ parempoolne kuldlõike punkt),



siis x jaotab lõigu $[a, z]$ kuldlõikes nii, et $x - a > z - x$ (ehk x on lõigu $[a, z]$ parempoolne kuldlõike punkt), ja z jaotab $[x, b]$ kuldlõikes nii, et $b - z > z - x$ (ehk z on $[x, b]$ vasakpoolne kuldlõike punkt).

Asume kirjeldama kuldlõike meetodit. Olgu vaja lahendada ülesanne (1). Eeldame, et f on unimodaalne lõigus $[a, b]$. Olgu $a_1 = a$, $b_1 = b$. Võtame lõigus $[a_1, b_1]$ kuldlõike punktid x_1, z_1 nii, et $a_1 < x_1 < z_1 < b_1$. Leiame $f(x_1)$ ja $f(z_1)$. Kui $f(x_1) \leqslant f(z_1)$, siis võtame $a_2 = a_1$, $b_2 = z_1$; kui aga $f(x_1) > f(z_1)$, siis võtame $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$. Funktsiooni f unimodaalsuse tõttu $\Omega_* \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$. Mõlemad valikud annavad sama pikkusega eelislõigu $[a_2, b_2]$ ja näiteks esimese valiku korral

$$b_2 - a_2 = z_1 - a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b - a). \tag{5}$$

Üldise sammu kirjeldamiseks oletame, et on leitud $[a_k, b_k]$, milles võtame selle lõigu kuldlõike punktid x_k, z_k nii, et $a_k < x_k < z_k < b_k$. Juhul $k \geqslant 2$ on üks punktidest x_k, z_k eelmises lõigus $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ juba leitud (ülesande 7 põhjal). Leiame $f(x_k)$, $f(z_k)$, millest jällegi üks on juba eelmisel sammul kasutusel ja seetõttu nõuab iteratsioonisamm ainult funktsiooni f ühe uue väärtuse arvutamist. Kui $f(x_k) \leqslant f(z_k)$, siis olgu $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, z_k]$; kui aga $f(x_k) > f(z_k)$, siis määrame $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$. Funktsiooni f unimodaalsus tagab, et $\Omega_* \cap [a_{k+1}, b_{k+1}] \neq \emptyset$. Igal iteratsioonisammul ehk üleminekul ühe võrra suurema indeksiga lõigule korrutub eelmise lõigu pikkus teguriga $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ning võrdust (5) arvestades saame $b_k - a_k = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{k-1}(b - a)$. Kui lõik $[a_k, b_k]$ jääb viimaseks, mille me leiame, siis on selles ka leitud üks kuldlõike punkt, mis on loomulik võtta lähislahendiks $\tilde{x}_k$. Seejuures

$$\rho(\tilde{x}_k, \Omega_*) \leqslant \max\{b_k - \tilde{x}_k, \tilde{x}_k - a_k\} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_k - a_k) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a)$$

ja lähislahend $\tilde{x}_k$ on leitud soovitud täpsusega $\varepsilon > 0$, kui $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a) < \varepsilon$.
Paneme tähele, et seejures on funktsioonist f kasutatud k väärtust, sest kuigi alglõigus $[a_1, b_1]$ olevates kuldlõike punktides leitakse kaks funktsiooni f väärtust ja järgnevates lisandub igas lõigus üks uus f väärtus, ei ole lõigus $[a_k, b_k]$ enam vaja f uut väärtust leida.

Kui lõigus $[a_k, b_k]$ on teada eelmisest lõigust üks kuldlõike punkt, kas x_k või z_k, siis teise leidmiseks on praktilistes arvutustes kaks võimalust:

1) kui x_k on teada, siis arvutatakse $z_k = a_k + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_k - a_k)$; kui z_k on teada, siis $x_k = a_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_k - a_k)$;

2) arvestades võrdust $\frac{x_k + z_k}{2} = \frac{a_k + b_k}{2}$, mis väljendab sümmeetriat lõigu $[a_k, b_k]$ keskpunkti $\frac{a_k + b_k}{2}$ suhtes, arvutatakse vastavalt $z_k = a_k + b_k - x_k$ või $x_k = a_k + b_k - z_k$.

Ülesanne* 3. Põhjendada, miks praktilistes arvutustes arvutiga võib igal sammul võimaluse 2) kasutamise korral juhtuda, et mingi $\delta > 0$ korral $\rho(\tilde{x}_k, \Omega_*) \geqslant \delta$, kui $k \to \infty$. See tähendab, et lahendit ei saa kuitahes täpselt leida.

Kuldlõike meetodi esitatud kirjeldus on ebasümmeetriline nagu lõigu poolitamise meetodki, sest $f(x_k) = f(z_k)$ korral valitakse lõigus $[a_k, b_k]$ vasakpoolne eelislõik. Lõigu poolitamise meetodi juures tehtud märkus on kohane siingi.

Võrdleme veel lõigu poolitamise meetodit ja kuldlõike meetodit efektiivsuse seisukohalt. Nägime, et kuldlõike meetodis

$$\rho(\tilde{x}_k, \Omega_*) \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a) = A_k$$

(tähistame nii veahinnangut). Lõigu poolitamise meetodis, kui oleme jõudnud lõiguni $[a_k, b_k]$, saame võtta lähislahendiks $\tilde{x}_k = a_k$ (või $\tilde{x}_k = b_k$), sest selles lõigus teisi punkte me ei ole leidnud. Siis, arvestades, et δ on väike isegi võrreldes soovitud täpsusega, hindame

$$\rho(\tilde{x}_k, \Omega_*) \approx \frac{b-a-\delta}{2^k} \leqslant \frac{b-a}{2^k} = B_k.$$

Seejuures on meil kasutatud funktsiooni f $2k$ väärtust. Niisiis, võrdse arvu kasutatud f väärtuste korral peame võrdlema arve A_{2k} ja B_k. Seega

$$\frac{A_{2k}}{B_k} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2k}(b-a)\Big/\frac{b-a}{2^k} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}\right)^{k} \approx (0.764)^k,$$

mis näitab kuldlõike meetodi suuremat efektiivsust võrreldes lõigu poolitamise meetodiga.

§3. Mitme muutuja funktsioonide ekstreemumkohtade leidmine klassikaliste meetoditega

1. Üldised probleemid ja kitsendusteta ülesanded

Meenutame siin mõningaid mõisteid ja tulemusi, mida tavaliselt käsitletakse analüüsi kursustes. Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk (erijuhul $\Omega = \mathbb{R}^n$) ja $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Öeldakse, et f on diferentseeruv punktis $x \in \Omega$, kui eksisteerib vektor $f'(x) \in \mathbb{R}^n$ nii, et

$$f(x+h) - f(x) = (f'(x), h) + \alpha(x; h),$$

kus $\dfrac{\alpha(x;h)}{\|h\|} \to 0$ ehk $\alpha(x;h) = o(\|h\|)$, kui $\|h\| \to 0$, seejuures $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ võib olla suvaline, mille korral $x + h \in \Omega$ (et Ω on lahtine, siis iga küllalt väikese $\|h\|$ korral see kehtib). Kirjutis $(f'(x), h)$ tähistab skalaarkorrutist ruumis $\mathbb{R}^n$, mille asemel kasutatakse ka $f'(x)h$, pidades silmas, et $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Seejuures on samastatud $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ja $\mathbb{R}^n$. Kui f on diferentseeruv punktis x, siis

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x),$$

mille juures esimene võrdus näitab, kuidas tuletist $f'(x)$ on võimalik leida, viimased kaks võrdust aga tutvustavad erinevaid tuletise tähistusviise. Märgime, et osatuletiste eksisteerimisest ei piisa funktsiooni diferentseeruvuseks juhul $n \geqslant 2$. Analüüsi kursusest on teada

Lause. *Kui funktsioonil f on punktis $x \in \mathbb{R}$ lokaalne miinimum või lokaalne maksimum ja f on punktis x diferentseeruv, siis $f'(x) = 0$ (ehk $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$).*

Niisiis on vaadeldavatel eeldustel osatuletiste vektori võrdumine nulliga tarvilik, ei ole aga piisav (ei ole piisav juba $n = 1$ korral, näiteks $f(x) = x^3$, $x = 0$).

Kui f on diferentseeruv igas punktis $x \in \Omega$, siis võib vaadelda funktsiooni $f'\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, kus elemendile $x \in \Omega$ seatakse vastavusse $f'(x) \in \mathbb{R}^n$. Rääkides selle funktsiooni diferentseeruvusest, on tema tuletis punktis $x \in \Omega$ selline lineaarne operaator (maatriks) $f''(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, et

$$f'(x+h) - f'(x) = f''(x)h + \beta(x;h),$$

kus $\dfrac{\beta(x;h)}{\|h\|} \to 0$, kui $\|h\| \to 0$ (siin on tuletist defineerivas võrduses kõik liidetavad $\mathbb{R}^n$ elemendid). Muidugi saab $f''(x)$ olemasolu nõuda juba siis, kui f on diferentseeruv punkti x ümbruses. Analoogiliselt jätkates saab defineerida ka kõrgemat järku tuletised. Analüüsi kursusest on teada ka

Lause. *Kui f on diferentseeruv punkti $x \in \Omega$ ümbruses, f' on diferentseeruv punktis x, $f'(x) = 0$ ja $(f''(x)h, h) > 0$ iga $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ korral, siis funktsioonil f on punktis x lokaalne miinimum. Kui lisaks diferentseeruvuse eeldustele $f'(x) = 0$ ja $(f''(x)h, h) < 0$ iga $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ korral, siis funktsioonil f on punktis x lokaalne maksimum.*

Näide. Antud on punktid $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. On vaja leida $x \in \mathbb{R}^n$ nii, et $\sum\limits_{i=1}^m \|x - x^i\|^2$ oleks minimaalne (siin $\|\cdot\|$ on eukleidiline, skalaarkorrutise poolt määratud norm ehk 2-norm).

Vaatleme funktsiooni $f(x) = \sum\limits_{i=1}^m \|x - x^i\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Veendume selles, et $f'(x) = 2\sum\limits_{i=1}^m (x - x^i)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Saame

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \sum_{i=1}^m \|x + h - x^i\|^2 - \sum_{i=1}^m \|x - x^i\|^2 = \\
&= \sum_{i=1}^m (x - x^i + h, x - x^i + h) - \sum_{i=1}^m \|x - x^i\|^2 = \\
&= \sum_{i=1}^m (\|x - x^i\|^2 + 2(x - x^i, h) + \|h\|^2) - \sum_{i=1}^m \|x - x^i\|^2 = \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^m (x - x^i), h\right) + m\|h\|^2,
\end{aligned}$$

kusjuures $\alpha(x;h) = m\|h\|^2 = o(\|h\|)$. Tingimus $f'(x) = 0$ on samaväärne sellega, et $\sum\limits_{i=1}^m (x - x^i) = 0$ ehk $mx - \sum\limits_{i=1}^m x^i = 0$ ehk $x = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^m x^i = x^0$ (võtame kasutusele elemendi x^0). Lisaks sellele

$$f'(x+h) - f'(x) = 2\sum_{i=1}^{m}(x+h-x^i) - 2\sum_{i=1}^{m}(x-x^i) = 2mh$$

ning $\beta(x;h) = 0$. See tähendab, et $f''(x) = 2mI$ (I tähistab ühikmaatriksit) ja $(f''(x)h,h) = 2m\|h\|^2 > 0$ iga $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ korral. Niisiis on x^0 lokaalne miinimumpunkt. Tegelikult on x^0 ainus globaalne miinimumpunkt, mida saame üldiste kaalutlustega põhjendada hiljem, kui oleme tutvunud teiste vahenditega kumerate funktsioonide käsitlemisel. Praegu võime aga tugineda Taylori arendisele (sest selles ülesandes $f''' = 0$)

$$f(x^0+h) = f(x^0) + f'(x^0)h + \frac{1}{2}(f''(x^0)h,h) = f(x^0) + \frac{1}{2}(f''(x^0)h,h) > f(x^0)$$

iga $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ korral.

Ülesanne 8. Olgu $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Lahendada $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ ja $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$, leides lahendid, kui need on olemas, ja tõestades, et lahendit ei ole, kui see puudub.

2. Kitsendustega ülesanded

Vaatleme olukorda, kus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja lubatav hulk on

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,m\},$$

kus $g_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on antud funktsioonid. Siin tavaliselt Ω ei ole lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}^n$.

Üldisem olukord oleks, kui $f, g_j\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$, kus $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk ja $\Omega = \{x \in \Omega_1 \mid g_j(x) = 0, j = 1,\dots,m\}$, aga algne olukord $\Omega_1 = \mathbb{R}^n$ on meie käsitluse jaoks küllalt üldine ning piirdume sellega.

Vaadeldaval juhul on miinimum- ja maksimumülesannete uurimiseks olemas küllalt üldine vahend, Lagrange'i kordajate meetod. Moodustame funktsiooni

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(x),$$

kus $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Funktsiooni $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{n+m+1} \to \mathbb{R}$ (ka $\mathcal{L}\colon \Omega_1 \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$) nimetatakse Lagrange'i funktsiooniks. Vektori λ komponente nimetatakse Lagrange'i kordajateks (λ on Lagrange'i kordajate vektor).

Vaatleme ülesannet

$$\min_{x\in\Omega} f(x) \quad \text{või} \quad \max_{x\in\Omega} f(x). \tag{1}$$

Teoreem 1. *Olgu $x^* \in \mathbb{R}^n$ ülesande (1) lahend, f, g_j, $j = 1, \dots, m$, pidevalt diferentseeruvad x^* ümbruses. Siis leidub $\lambda^* \neq 0$ nii, et*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\textit{lühidalt} \quad \mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*) = 0). \tag{2}$$

Teoreem 1 tõestatakse tavaliselt mingis analüüsi kursuses.

Lisame, et võrrandid $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0$, $i = 1, \dots, n$, koos võrranditega $g_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, m$, (mis on samaväärsed võrranditega $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) = 0$, $j = 1, \dots, m$) annavad $n + m$ võrrandist koosneva süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{3}$$

x^*, λ^* otsimiseks, millel on kokku $n + m + 1$ komponenti. Kui (x^*, λ^*) on süsteemi (3) lahend, kusjuures $\lambda^* \neq 0$, siis on sobivaks lahendiks ka $(x^*, c\lambda^*)$, $c \neq 0$. Lahendi võimaliku paljususe vähendamiseks lisatakse tavaliselt veel mingi normeerimistingimus, näiteks $\|\lambda\| = 1$ (levinuim 2-normis, s.t. $\sum_{j=0}^{m} \lambda j^2 = 1$). Kui on teada, et lahendi korral $\lambda_0^* \neq 0$, siis on üks loomulik lisatingimus $\lambda_0^* = 1$.

Süsteemi (3) lahendamise tulemusena saab leida punktid x, mille hulgas on teoreemi 1 põhjal ülesande (1) kõik lahendid. Et teha kindlaks, kas oleme leidnud ülesande (1) lahendi, võib kasutada järgmist tulemust.

Teoreem 2. *Eeldame, et*

1) f ja g_j, $j = 1, \dots, m$, on kaks korda diferentseeruvad punktis x^*;

2) (x^*, λ^*) rahuldab süsteemi (3), kusjuures $\lambda_0^* \geqslant 0$;

3) kehtib $(\mathcal{L}_{xx}(x^*, \lambda^*)h, h) > 0$ iga $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ korral, mis rahuldab tingimusi

$$(f'(x^*), h) \leqslant 0, \quad (g_j'(x^*), h) = 0, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Siis x^* on miinimumülesande (1) lokaalne lahend ja ta on lokaalselt ühene miinimupunkt. Siin $\mathcal{L}_{xx}(x, \lambda) = \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(x, \lambda) \right)_{i,j=1}^{n}$ on sümmeetriline $n \times n$ maatriks, mida vaadeldakse $\mathcal{L}_{xx}(x, \lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Enne tõestust märgime, et kui $(\mathcal{L}_{xx}(x^*, \lambda^*)h, h) > 0$ $h \neq 0$ korral, siis $\lambda^* \neq 0$. Selle põhjenduseks on, et $\lambda^* = 0$ korral $\mathcal{L}_{xx}(x^*, \lambda^*) = 0$.

Tõestus*. Oletame vastuväiteliselt, et x^* ei ole lokaalselt ühene miinimumkoht. Siis on olemas jada $z^k \in \Omega$, $z^k \neq x^*$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral, nii, et $z^k \to x^*$ ja $f(z^k) \leqslant f(x^*)$. Seejuures kehtib $g_j(z^k) = 0$, $j = 1, \ldots, m$ (sest $z^k \in \Omega$).

Esitame

$$z^k = x^* + \|z^k - x^*\| \frac{z^k - x^*}{\|z^k - x^*\|} = x^* + t_k e^k,$$

võttes kasutusele $e^k = \frac{z^k - x^*}{\|z^k - x^*\|}$, mille korral $\|e^k\| = 1$, ja $t_k = \|z^k - x^*\| \to 0$, seejuures $t_k > 0$.

Jada e^k on tõkestatud lõplikumõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^n$, seepärast leidub osajada $e^k \to e^0$, $\|e^0\| = 1$ (kasutame osajada jaoks sama tähistust, sest võime arutelu alustadagi selle osajadaga). Funktsioonide diferentseeruvusest ja teistest kehtivad eeldustest saame

$$0 \geq f(z^k) - f(x^*) = (f'(x^*), e^k)\, t_k + o(t_k),$$

$$0 = g_j(z^k) - g_j(x^*) = (g_j'(x^*), e^k)\, t_k + o(t_k).$$

Jagame need arvudega t_k (arvestame, et $t_k > 0$), siis piirprotsessis $t_k \to 0$, $e^k \to e^0$ saame

$$(f'(x^*), e^0) \leq 0, \quad (g_j'(x^*), e^0) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

seega e^0 (mis on vektori h osas) rahuldab tingimusi (4). Lisaks kehtib

$$\mathcal{L}(z^k, \lambda^*) = \lambda_0^* f(z^k) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(z^k) =$$

$$= \lambda_0^* f(z^k) \leq \lambda_0^* f(x^*) =$$

$$= \lambda_0^* f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(x^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*),$$

kus kasutasime võrdusi $g_j(z^k) = 0$, $g_j(x^*) = 0$ ja eeldust $\lambda_0^* \geq 0$.

Taylori arendisele tuginedes saame

$$0 \geq \mathcal{L}(z^k, \lambda^*) - \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) =$$

$$= t_k(\mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*), e^k) + \frac{1}{2} t_k^2 (\mathcal{L}_{xx}(x^*, \lambda^*) e^k, e^k) + o(t_k^2)$$

(traditsioonilisemas analüüsi tekstis oleks see võrdus

$$= t_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) e_i^k + \frac{1}{2} t_k^2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(x^*, \lambda^*) e_i^k e_j^k + o(t_k^2)).$$

Arvestame, et $\mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*) = 0$ ja jagame saadud võrratuse arvuga t_k^2, mis $t_k \to 0$ protsessis $k \to \infty$ ning tulemusena $(\mathcal{L}_{xx}(x^*, \lambda^*) e^0, e^0) \leq 0$, mis on vastuolus eeldusega 3).

Teoreem 2 on tõestatud.

<u>Märkus</u>. Vaatleme olukorda, kus tingimustest $(g_j'(x^*), h) = 0$, $j = 1, \dots, m$, järeldub, et $h = 0$. See leiab aset näiteks siis, kui $m \geq n$ ja vektorite $g_j'(x^*)$ hulgas on n lineaarselt sõltumatut. Sel juhul tekib vastuolu juba varem tingimusena

$$\|e^0\| = 1, \ (g'(x^*), e^0) = 0, \ j = 1, \dots, m. \qquad (5)$$

Lisaks on olemas lahtine kera $B(x^*, \varepsilon)$ nii, et $\Omega \cap B(x^*, \varepsilon) = \{x^*\}$, sest vastasel juhul on olemas $z^k \in \Omega$, $z^k \neq x^*$, $z^k \to x^*$, mis teoreemi tõestuse arutelu viib tingimuseni (5).

Sellisel juhul on x^* kui isoleeritud punkt hulgas Ω nii lokaalne miinimumpunkt kui ka lokaalne maksimumpunkt iga funktsiooni f korral. Selles olukorras kaotame ainult funktsioonide g_j diferentseeruvust.

Näide. Antud on punktid $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,m$, on vaja leida $x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ nii, et $\sum_{i=1}^{m} \|x - x^i\|^2$ oleks minimaalne (kasutame ikka 2-normi).

Siin on vaja minimiseerida $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - x^i\|^2$ tingimusel $\|x\| = 1$ ehk $(x,x) = 1$, mille kirjutame sobival kujul $g_1(x) = (x,x) - 1 = 0$. Moodustame Lagrange'i funktsiooni

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1((x,x) - 1), x \in \mathbb{R}^n, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Süsteem (3) on antud juhul

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,\lambda) = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{m} (x - x^i) + 2\lambda_1 x = 0, \\ (x,x) - 1 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(märgime, et $g_1(x) = (x,x) - 1$ tuletise leidmisel võtame tuletise funktsioonist $x \to (x,x)$, mis on erijuht funktsioonist f, kus $m=1$ ja $x^1 = 0$). Kui tähistame nagu varemgi $x^0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x^i$, siis (6) võib kirjutada samaväärselt

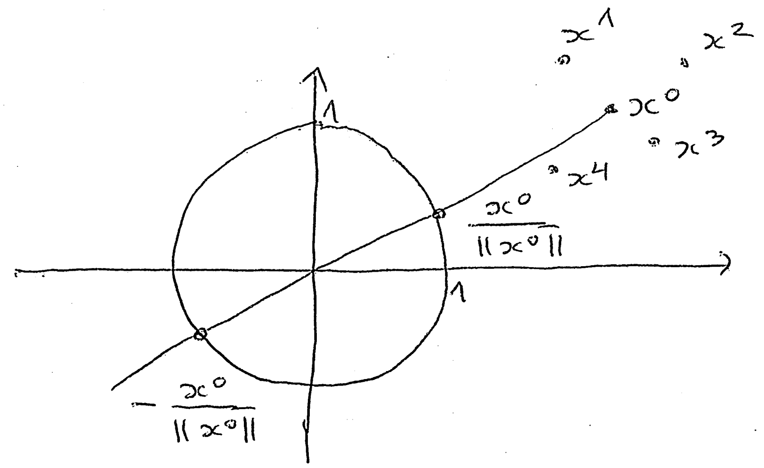
$$\lambda_0 m (x - x^0) + \lambda_1 x = 0, \|x\| = 1. \qquad (7)$$

Näeme, et kui $\lambda_0 = 0$, siis tingimata $\lambda_1 = 0$, mis tähendab, et süsteemil (6) ei oleks lahendit (x,λ), kus $\lambda \neq 0$. Seepärast võtame $\lambda_0 = 1$ ja saame (7) kujule

$$(m + \lambda_1) x = m x^0, \|x\| = 1. \qquad (8)$$

Lisaks saame $\lambda_0 = 1$ tõttu $\mathcal{L}_{xx} = 2mI + 2\lambda_1 I =$ $= 2(m+\lambda_1)I$. Tingimustest (8) esimene ütleb, et x ja x^0 on lineaarselt sõltuvad.

Vaatame juhtu, kus $x^0 \neq 0$. Siis on $\|x\| = 1$ tõttu võimalused, et $x = \frac{x^0}{\|x^0\|}$ või $x = -\frac{x^0}{\|x^0\|}$, mida tingib x ja x^0 lineaarne sõltuvus. Juhul $x = \frac{x^0}{\|x^0\|}$ annab (8) võrduse $m + \lambda_1 = m\|x^0\|$. Siis $\mathcal{L}_{xx} = 2m\|x^0\| I$, mis on positiivselt määratud maatriks ja $x = \frac{x^0}{\|x^0\|}$ on lokaalne miinimumpunkt. Juhul $x = -\frac{x^0}{\|x^0\|}$ annab (8), et $m + \lambda_1 = -m\|x^0\|$ ja $\mathcal{L}_{xx} = -2m\|x^0\| I$. Seega on $-\mathcal{L}$ korral täidetud Teoreemi 2 eeldused ja ~~~~ $x = -\frac{x^0}{\|x^0\|}$ on lokaalne maksimumpunkt. Arvestades, et Ω on kinnine ja tõkestatud ning f pidev hulgas Ω, saavutab f Weierstrassi teoreemi põhjal miinimumi ja maksimumi. Ka nendes punktides on (3) ehk (7) rahuldatud Teoreemi 1 põhjal (koos mingite vektoritega $\lambda \neq 0$), mis ütleb, et leitud $x = \frac{x^0}{\|x^0\|}$ on globaalne miinimumpunkt ja $x = -\frac{x^0}{\|x^0\|}$ globaalne maksimumpunkt. Olukorda illustreerib järgmine joonis juhul $n = 2$:



Vaatleme veel juhtu, kus $x^0 = 0$. Siis (8) põhjal $\lambda_1 = -m$ ja x võib olla suvaline $\mathbb{R}^n$ element nii, et $\|x\| = 1$. Sel juhul $\|x\| = 1$ tõttu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - x^i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (x - x^i, x - x^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\|x\|^2 - 2(x, x^i) + \|x^i\|^2\right) =$$

$$= m - 2\left(x, \sum_{i=1}^{m} x^i\right) + \sum_{i=1}^{m} \|x^i\|^2 = \text{const},$$

sest $\sum_{i=1}^{m} x^i = 0$.

<u>Ülesanne 3</u>. Leida funktsiooni $f(x, y) = 4x + 3y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, miinimum- ja maksimumpunktid tingimusel $x^2 + y^2 = 1$.

<u>Ülesanne* 4</u>. Milline on ringi sisse joonestatud kolmnurk, mille külgede ruutude summa on maksimaalne?

§4. Gradientmeetodid

Alustame ühest üldisest diferentseeruva funktsiooni käitumist iseloomustavast asjaolust. Vaatleme funktsiooni $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, kus $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk. Eeldame, et f on diferentseeruv punktis $x \in \Omega$. Valime $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, ja moodustame funktsiooni $\varphi(t) = f(x + th)$, $t \in (-\delta, \delta)$, mis on määratud sobivalt väikese $\delta > 0$ korral hulga Ω lahtisuse tõttu. Siis $\varphi(0) = f(x)$. Tuletist defineerivast võrdusest $f(x+th) - f(x) = (f'(x), th) + \alpha(x; th)$ saame $t \neq 0$ korral

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = (f'(x), h) + \frac{\alpha(x; th)}{t}.$$

Ühe muutuja funktsiooni φ tuletis $\varphi'(0)$ näitab φ kasvamise kiirust, kui argumendiga t hakata liikuma punktist 0 kasvamise suunas. Leiame

$$\varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = (f'(x), h),$$

sest

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\alpha(x; th)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\alpha(x; th)}{t\|h\|} \|h\| = 0.$$

Seega on ka $(f'(x), h)$ funktsiooni f kasvamise kiirus, kui liikuda punktist x suunas h. Teiselt poolt, Cauchy–Bunjakovski–Schwarzi võrratuses (siin kasutame 2-normi)

$$-\|f'(x)\|\,\|h\| \leqslant (f'(x), h) \leqslant \|f'(x)\|\,\|h\| \tag{1}$$

vähemalt üks võrratus on võrdus parajasti siis, kui $f'(x)$ ja h on lineaarselt sõltuvad. Eeldame, et $f'(x) \neq 0$ ja vaatleme kõikvõimalikke elemente $h \in \mathbb{R}^n$, mille korral $\|h\| = \|f'(x)\|$. Siis parempoolses võrratuses (1) leiab aset võrdus ehk $(f'(x), h)$ on maksimaalne parajasti siis, kui $h = f'(x)$, ja vasakpoolses võrratuses võrdus ehk $(f'(x), h)$ on minimaalne (f kahanemise kiirus on maksimaalne) parajasti siis, kui $h = -f'(x)$. Niisiis on punktist x liikuma hakkamisel funktsiooni f kahanemise kiirus maksimaalne, kui liikuda gradiendi vastassuunas ehk suunas $-f'(x)$. Siit saab idee iteratsioonimeetodiks ülesande $\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$ lahendamisel: kui lähend x_k on leitud (võib olla alglähend), siis järgmist lähendit x_{k+1} võib otsida, liikudes suunas $-f'(x_k)$.

Olgu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferentseeruv. Vaatleme ülesannet $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

Definitsioon. Iteratsioonimeetodeid $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$, $\alpha_k > 0$, miinimumülesande lahendamisel nimetatakse gradientmeetoditeks.

Definitsioon. Kui gradientmeetodis $\alpha_k > 0$ määratakse tingimusest

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) = \min_{\alpha>0} f(x_k - \alpha f'(x_k))$$

(suunas $-f'(x_k)$ liigutakse seni, kuni jõutakse funktsiooni f vähima väärtuseni sellel suunal), siis räägitakse kiireima languse meetodist.

Gradientmeetodite koondumise uurimisel läheb meil vaja järgmist abitulemust.

Lemma (lemma jääkliikme hinnagust)**.** *Olgu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ selline, et mingi L korral (kasutame 2-normi)*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant L\|x-y\| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n, \quad x\neq y$$

(tuletis rahuldab Lipschitzi tingimust). Siis Taylori arendises

$$f(x+h) = f(x) + (f'(x), h) + \alpha(x;h) \tag{2}$$

on jääkliige hinnatav $|\alpha(x;h)| \leqslant \dfrac{L}{2}\|h\|^2$.

Tõestus. Newton–Leibnizi valemit kasutades saame

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x+sh)\,\mathrm{d}s = f(x+sh)\Big|_{s=0}^{s=t} = f(x+th) - f(x).$$

Leiame mitme muutuja liitfunktsiooni tuletist arvutades

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x+sh) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x_1+sh_1,\dots,x_n+sh_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+sh_1,\dots,x_n+sh_n)h_i = \\ &= (f'(x+sh), h).\end{aligned}$$

Eelnevate võrduste ja arendise (2) põhjal

$$\alpha(x;th) = f(x+th) - f(x) - (f'(x), th) =$$

$$= \int_0^t (f'(x+sh), h)\,\mathrm{d}s - \int_0^t (f'(x), h)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^t (f'(x+sh) - f'(x), h)\,\mathrm{d}s.$$

Saadud võrduse alusel hindame (olgu $t > 0$)

$$|\alpha(x;th)| \leqslant \int_0^t \|f'(x+sh) - f'(x)\|\,\|h\|\,\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t Ls\|h\|^2\,\mathrm{d}s = L\|h\|^2 \int_0^t s\,\mathrm{d}s = \frac{Lt^2}{2}\|h\|^2.$$

Lemmas väidetud võrratuse saamiseks võtame $t = 1$, aga lemma ja tõestuses saadud võrratused on tegelikult samaväärsed, sest kui lemmas väidetud võrratuses võtta h asemel th, on meil just tõestuses saadud võrratus.

Lisame märkusena, et kui f' rahuldab Lipschitzi tingimust mingite eukleidilisest normist erinevate normide korral, siis normide ekvivalentsus ruumis $\mathbb{R}^n$ tagab ka Lipschitzi tingimuse täidetuse 2-normi suhtes, muutuda võib küll kordaja L.

Ülesanne 9. Tõestada, et kiireima languse meetodis $(x_{k+1} - x_k,\, x_{k+2} - x_{k+1}) = 0$, s.t. kaks järjestikust liikumissuunda on ortogonaalsed.

Ülesanne 10. Tõestada, et kui $f'(x_k) \neq 0$, siis kiireima languse meetodis leiab aset $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Ülesanne 11. Olgu $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, kus A on sümmeetriline positiivselt määratud $n \times n$ maatriks ja $b \in \mathbb{R}^n$. Tõestada, et selle funktsiooni korral kiireima languse meetodi arvutuseeskiri on

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|g_k\|^2}{(Ag_k, g_k)} g_k, \quad g_k = f'(x_k) = Ax_k - b.$$

Ülesandes 11 vaadeldavat funktsiooni nimetatakse ruutfunktsionaaliks. Lisame märkusena, et iga $n \times n$ maatriksi A korral $(Ax, x) = \left(\dfrac{1}{2}\left(A + A^T\right)x, x\right)$, sest

$$(Ax, x) = \left(\frac{1}{2}(A + A)\,x, x\right) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}\left(x, A^T x\right) = \frac{1}{2}\left(\left(A + A^T\right)x, x\right).$$

Seejuures on maatriks $\dfrac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ sümmeetriline, sest $\left(A + A^T\right)^T = A + A^T$. Seega ei ole ruutfunktsionaalis maatriksi sümmeetrilisus kitsendav tingimus. Küll on oluline positiivne määratus: on olemas $\gamma > 0$ nii, et $(Ax, x) \geqslant \gamma \|x\|^2$ iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral.

Kiireima languse meetodis esineval ülesandel $\min\limits_{\alpha>0} f(x_k - \alpha f'(x_k))$ ei tarvitse lahendit olla või on seda täpselt raske leida. Seejuures on alati olemas $f_k^* = \inf\limits_{\alpha>0} f(x_k - \alpha f'(x_k))$. Meetodit, kus $\alpha_k > 0$ leitakse nii, et

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) \leqslant f_k^* + \delta_k, \quad \delta_k \geqslant 0, \quad \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0,$$

nimetame ligikaudseks kiireima languse meetodiks. See on alati realiseeritav eeldusel, et $f_k^* > -\infty$. Kiireima languse meetod on ühtlasi ligikaudne kiireima languse meetod, siis $\delta_k = 0$.

Teoreem 1. *Kui f on alt tõkestatud, f' rahuldab Lipschitzi tingimust ja ligikaudses kiireima languse meetodis $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$, siis $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = 0$.*

Tõestus. Kasutame lemmas saadud jääkliikme hinnangust tulenevat võrratust

$$f(x + th) \leqslant f(x) + t(f'(x), h) + \frac{Lt^2}{2}\|h\|^2.$$

Võtame selles $x = x_k$, $h = f'(x_k)$ ja $t = -\alpha$, siis

$$f(x_k - \alpha f'(x_k)) \leqslant f(x_k) + \left(-\alpha + \frac{L}{2}\alpha^2\right) \|f'(x_k)\|^2.$$

Selles võrratuses võtame algul vasakul infiimumi üle $\alpha > 0$, sinna saame f_k^*, seejärel paremal infiimumi üle $\alpha > 0$.

Vahepealses arvutuses olgu $\varphi(\alpha) = -\alpha + \frac{L}{2}\alpha^2$, siis $\varphi'(\alpha) = -1 + L\alpha$ ja $\varphi'(\alpha) = 0$ annab $\alpha = \frac{1}{L}$. Et $\varphi''(\alpha) = L > 0$, siis punktis $\alpha = \frac{1}{L}$ on φ väärtus minimaalne ja $\varphi\left(\frac{1}{L}\right) = -\frac{1}{L} + \frac{L}{2}\frac{1}{L^2} = -\frac{1}{2L}$.

Selliselt oleme jõudnud võrratuseni

$$f_k^* \leqslant f(x_k) - \frac{1}{2L}\|f'(x_k)\|^2. \tag{3}$$

Kasutame nüüd järjest seda, et tegemist on gradientmeetodiga, seejärel ligikaudse kiireima languse meetodiga ja lõpuks rakendame võrratust (3). Seega

$$f(x_{k+1}) = f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) \leqslant f_k^* + \delta_k \leqslant$$

$$\leqslant f(x_k) - \frac{1}{2L}\|f'(x_k)\|^2 + \delta_k. \tag{4}$$

Võrratusest (4) saab vahetult $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k) + \delta_k$ ning seda korduvalt kasutades

$$\begin{aligned} f(x_{k+i+1}) &\leqslant f(x_{k+i}) + \delta_{k+i} \leqslant \\ &\leqslant f(x_{k+i-1}) + \delta_{k+i-1} + \delta_{k+i} \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant f(x_k) + \delta_k + \ldots + \delta_{k+i} \leqslant \\ &\leqslant f(x_k) + \sum_{j=k}^{\infty} \delta_j. \end{aligned} \tag{5}$$

Võrratuses (5) võtame vasakul ülemise piirväärtuse i järgi, mis on ka ülemine piirväärtus tervest jadast, niisiis

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, f(x_{k+i+1}) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, f(x_k) \leqslant f(x_k) + \sum_{j=k}^{\infty} \delta_j. \tag{6}$$

Võrratuses (6) võtame paremal alumise piirväärtuse, kusjuures arvestame seda, et $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=k}^{\infty} \delta_j = 0$. Seega $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, f(x_k) \leqslant \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, f(x_k)$, mistõttu eksisteerib $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. See piirväärtus on lõplik, sest f alt tõkestatuse tõttu ei saa see olla $-\infty$, aga võrratus (6) annab, et $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) < \infty$.

Võrratusest (4) saame

$$\|f'(x_k)\|^2 \leqslant 2L(f(x_k) - f(x_{k+1}) + \delta_k),$$

mille abil

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\, \|f'(x_k)\|^2 &\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \|f'(x_k)\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2L\, \overline{\lim_{k\to\infty}}\, (f(x_k) - f(x_{k+1}) + \delta_k) = \\ &= 2L \lim_{k\to\infty} (f(x_k) - f(x_{k+1}) + \delta_k) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

seejuures on $\lim\limits_{k\to\infty} (f(x_k) - f(x_{k+1})) = 0$ saamisel oluline, et piirväärtus $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ oleks lõplik. Nüüd (7) põhjal $\lim\limits_{k\to\infty} \|f'(x_k)\|^2 = 0$ ehk $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = 0$.

Teoreem 1 on tõestatud.

Märkus. Vaikimisi eeldasime tõestuse käigus, et $L > 0$. Kui $L = 0$, siis $f'(x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral, f on konstantne funktsioon ja miinimumülesande lahendamist ei ole mõtet uurida. Tõestus küll sel juhul ei kannata, sest me võime $L = 0$ asemel võtta positiivse kordaja.

Ülesanne* **4.** Tõestada, et kui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on alt tõkestatud ja f' rahuldab Lipschitzi tingimust kordajaga L, siis valides gradientmeetodis $\alpha_k = \frac{2}{L} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ on väike (erijuhul $\alpha_k = \frac{1}{L}$), kehtib $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = 0$.

Teoreem 1 annab tehtud eeldustel küll koondumise $f'(x_k) \to 0$, aga mitte veahinnangut ja meetodi enda ehk jada x_k koondumist miinimumülesande lahendiks. Selliste tulemuste saamiseks eeldame funktsioonilt f rohkem, milleks vajame mõningaid mõisteid.

Funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nimetatakse kumeraks, kui iga $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, ja iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nimetatakse rangelt kumeraks, kui iga $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, ja iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nimetatakse tugevalt kumeraks, kui eksisteerib $\gamma > 0$ nii, et

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \lambda(1-\lambda)\gamma \|x-y\|^2$$

iga $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$, ja iga $\lambda \in (0,1)$ korral.

Definitsioonidest on selge, et tugevalt kumer funktsioon on rangelt kumer ja rangelt kumer funktsioon on kumer. Teistpidised järeldused ei kehti.

Ülesanne 12. Tõestada, et funktsioon $f(x) = (x, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, on tugevalt kumer.

Ülesanne 13. Tõestada, et kumera funktsiooni iga lokaalne miinumumkoht on tema globaalne miinimumkoht. Järeldada sellest, et rangelt kumeral funktsioonil saab olla ülimalt üks miinumumkoht.

Teoreem 2. *Kui f on tugevalt kumer ja f' rahuldab Lipschitzi tingimust, siis ülesandel $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ on olemas ühene lahend x^* ja kiireima languse meetodi korral kehtivad võrratused*

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leqslant (f(x_0) - f(x^*)) q^k, \\ \|x_k - x^*\|^2 &\leqslant \frac{1}{\gamma}(f(x_0) - f(x^*)) q^k, \end{aligned}$$

kus $q = 1 - \frac{2\gamma}{L}$ (γ ja L on arvud vastavalt f tugeva kumeruse võrratusest ja f' Lipschitzi tingimusest).

Tõestus. Tõestame, et funktsioonil f on olemas miinimumpunkt. Fikseerime suvaliselt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Olgu $f_1 = \min\limits_{\|y-x_0\|=1} f(y)$ ja $r = \max\left\{2, \dfrac{2(f(x_0)-f_1)}{\gamma}\right\}$. Olgu $z \in \mathbb{R}^n$ selline, et $\|z-x_0\| \geqslant r$. Võtame $\lambda = \dfrac{1}{\|z-x_0\|}$. Et $r \geqslant 2$, siis $\|z-x_0\| \geqslant 2$ ja $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Funktsiooni f tugev kumerus annab

$$f(\lambda z + (1-\lambda)x_0) \leqslant \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x_0) - \lambda(1-\lambda)\gamma\|z-x_0\|^2,$$

sellest

$$f(x_0 + \lambda(z-x_0)) - f(x_0) + \lambda(1-\lambda)\gamma\|z-x_0\|^2 \leqslant \lambda(f(z)-f(x_0)). \tag{8}$$

Võrratuse (8) vasakul poolel $f(x_0 + \lambda(z-x_0)) \geqslant f_1$, sest $\|\lambda(z-x_0)\| = 1$, peale selle hindame $1-\lambda \geqslant \dfrac{1}{2}$, seejärel $\|z-x_0\| \geqslant r$ abil

$$\lambda(1-\lambda)\gamma\|z-x_0\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\lambda\gamma r\|z-x_0\| = \frac{1}{2}\gamma r,$$

kus jällegi kasutasime võrdust $\lambda\|z-x_0\| = 1$. Nüüd r valiku tõttu $r \geqslant \dfrac{2(f(x_0)-f_1)}{\gamma}$, seepärast $\dfrac{1}{2}\gamma r \geqslant f(x_0) - f_1$. Niisiis saame võrratuse (8) vasakut poolt alt hinnata arvuga 0 ja seepärast $f(z) \geqslant f(x_0)$. Selle tõttu $\inf\limits_{z\in\mathbb{R}^n} f(z) = \inf\limits_{\|z-x_0\|\leqslant r} f(z)$. Funktsioon f saavutab keras $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\| \leqslant r\}$ Weierstrassi teoreemi põhjal miinimumi, selle tähistame x^*. Miinimumpunkti ühesuse tagab funktsiooni f tugev kumerus.

Teoreemi 1 tõestamisel saadud võrratuses (4) on antud juhul $\delta_k = 0$, seega praegu

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leqslant -\frac{1}{2L}\|f'(x_k)\|^2. \tag{9}$$

Tugeva kumeruse võrratusest

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x_k) \leqslant \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x_k) - \lambda(1-\lambda)\gamma\|x_k-x^*\|^2$$

ehk

$$\frac{f(x_k + \lambda(x^*-x_k)) - f(x_k)}{\lambda} \leqslant f(x^*) - f(x_k) - (1-\lambda)\gamma\|x_k-x^*\|^2$$

saame piiril $\lambda \to 0$ võrratuse

$$(f'(x_k), x^*-x_k) \leqslant f(x^*) - f(x_k) - \gamma\|x_k-x^*\|^2$$

(märgime, et me arvutame punktis x_k tuletise suunas $x^* - x_k$; teistes terminites arvutame Gâteaux' tuletise, mis avaldub Fréchet' tuletise kaudu, sest Fréchet' mõttes diferentseerimist me eeldame). Edasi teisendades

$$f(x_k) - f(x^*) \le (f'(x_k), x_k - x^*) - \mu \| x_k - x^* \|^2 \le$$

$$\le \|f'(x_k)\| \|x_k - x^*\| - \mu \| x_k - x^* \|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4\mu} \| f'(x_k) \|^2, \qquad (10)$$

kus viimase võrratuse saamisel kasutame seda, et

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \| f'(x_k) \| - \sqrt{\mu} \| x_k - x^* \|\right)^2 \ge 0$$

ehk

$$\frac{1}{4\mu} \| f'(x_k) \|^2 - \| f'(x_k) \| \|x_k - x^*\| + \mu \| x_k - x^* \|^2 \ge 0.$$

Võrratuse (10) kirjutame ümber kujul

$$- \| f'(x_k) \|^2 \le -4\mu \left(f(x_k) - f(x^*) \right).$$

Seda ja võrratust (9) arvestades saame

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) = f(x_k) - f(x^*) + f(x_{k+1}) - f(x_k) \le$$

$$\le f(x_k) - f(x^*) - \frac{1}{2L} \| f'(x_k) \|^2 \le$$

$$\le \left(1 - \frac{4\mu}{2L}\right)\left(f(x_k) - f(x^*)\right) = q\left(f(x_k) - f(x^*)\right). \qquad (11)$$

Võrratuse (11) abil

$$f(x_k) - f(x^*) \le \left(f(x_{k-1}) - f(x^*)\right) q \le \ldots \le$$

$$\le \left(f(x_0) - f(x^*)\right) q^k,$$

millega on teoreemis väidetud esimene hinnang tõestatud.

Teoreemi teise hinnangu saamiseks lähtume tugeva kumeruse võrratusest

$$f(\lambda x_k+(1-\lambda)x^*)\le \lambda f(x_k)+(1-\lambda)f(x^*)-\lambda(1-\lambda)\mu\,\|x_k-x^*\|^2.$$

Sellest

$$\frac{f(x^*+\lambda(x_k-x^*))-f(x^*)}{\lambda}\le f(x_k)-f(x^*)-(1-\lambda)\mu\,\|x_k-x^*\|^2.$$

Minnes siin piirile $\lambda\to 0$ saame

$$(f'(x^*),\,x_k-x^*)\le f(x_k)-f(x^*)-\mu\,\|x_k-x^*\|^2.$$

Miinimumpunktis x^* kehtib $f'(x^*)=0$, seepärast säilib võrratus

$$\mu\,\|x_k-x^*\|^2\le f(x_k)-f(x^*),$$

millest teoreemi esimesele koondumise iseloomustavale hinnangule tuginedes saame

$$\|x_k-x^*\|^2\le \frac{1}{\mu}\left(f(x_k)-f(x^*)\right)\le \frac{1}{\mu}\left(f(x_0)-f(x^*)\right)q^k.$$

Teoreem 2 on tõestatud.

<u>Täiendused</u>. 1. On teada, et kumer funktsioon $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ on pidev (vt. [,]). Seepärast võib Teoreemi 2 tõestuse põhjal väita, et ülesande $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ ühese lahendi olemasolu tagab funktsiooni f tugev kumerus, diferentseeruvust ja Lipschitzi tingimuse rahuldatust tuletise poolt selleks ei vajata.

2. Näeme (just teoreemi tõestusest), et $f(x_k)-f(x^*)$ kahaneb geomeetrilise progressiooni

kiirusega, mille tegur on q. Viga $\|x_k - x^*\|$ kahaneb samuti geomeetrilise progressiooni kiirusega, mis nähtub hinnangust

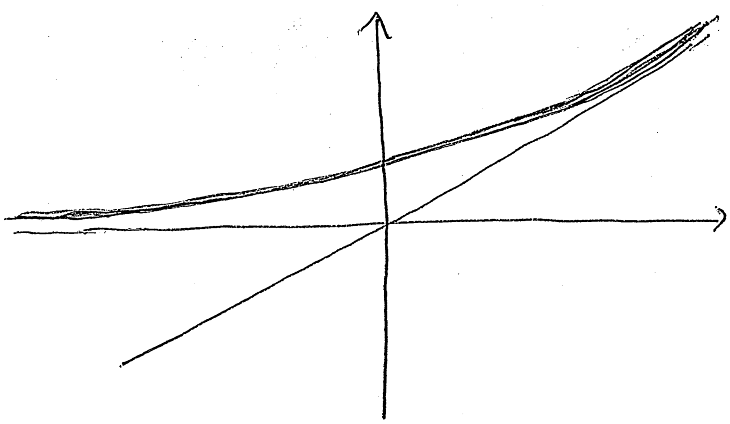
$$\|x_k - x^*\| \le \left(\frac{1}{\gamma}\left(f(x_0) - f(x^*)\right)\right)^{1/2}(q^{1/2})^k,$$

kuid üldjuhul $q^{1/2} > q$, s.t. $\|x_k - x^*\|$ kahanemine on aeglasem, kui $f(x_k) - f(x^*)$ kahanemine. Teoreemi tõestuse käigus oleme ühtlasi saanud, et $\frac{2\gamma}{L} \le 1$, sest $q \ge 0$. Muidugi kehtib $q < 1$, sest kui $L = 0$, siis f ei saa olla tugevalt kumer, ja teoreemi eeldustel tegelikult $L > 0$.

3. Loomulik on küsida, kas Teoreemis 2 võib tugeva kumeruse asendada näiteks range kumerusega? Funktsioon $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, on rangelt kumer, aga mitte tugevalt kumer, tal ei ole miinimumpunkti. Selle funktsiooni tuletis ei rahulda küll Lipschitzi tingimust, aga sellest saab üle nii, et $x \to \infty$ korral defineerime ta asümptootiliselt lähenevana lineaarsele funktsioonile. Sobivaks funktsiooniks on näiteks

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}}, & x \le 1, \\ \frac{e^{1/2}}{4}\left(3x + \frac{1}{x}\right), & x \ge 1, \end{cases}$$

ja tema graafik on kujuga



Selline funktsioon on rangelt kumer ja tema tuletis rahuldab Lipschitzi tingimust, aga miinimumpunkti ei ole.

4. Ülesande $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ lahendamisel on kasutatav Newtoni meetod $x_{k+1} = x_k - (f''(x_k))^{-1} f'(x_k)$, milles alustatakse alglähendist x_0. Selle meetodiga lahendatakse tegelikult võrrandit (täpsemalt võrrandisüsteemi) $f'(x)=0$. Seda võib vaadelda kui gradientmeetodi üldistuse $x_{k+1} = x_k - A_k f'(x_k)$, $A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ühte erijuhtu, kusjuures gradientmeetodis $A_k = \alpha_k I$, $\alpha_k > 0$. Newtoni meetodit käsitlevast teooriast on teada, et see on ruutkoonduvusega, kui f'' rahuldab Lipschitzi tingimust. Nagu Newtoni meetodi puhul üldiselt, võib probleemiks olla alglähendi valik, sest ruutkoonduvuskiirus pääseb mõjule alles lahendi läheduses.

5. Newtoni meetodis võrrandi $f'(x)=0$ lahendamisel on $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$ sümmeetriline maatriks, seepärast on tema omaväärtused reaalsed. Kui x^* on funktsiooni f

miinimumpunkt, siis Taylori arendise

$$f(x^*+h) = f(x^*) + (f'(x^*), h) + \frac{1}{2}(f''(x^*)h, h) + \alpha(x^*; h)$$

ja $f'(x^*) = 0$, $\alpha(x^*; h) = o(\|h\|^2)$ abil näeme, et $f''(x^*)$ omaväärtused on mittenegatiivsed, sest kui oleks $\lambda < 0$ nii, et $f''(x^*)h = \lambda h$, $h \neq 0$, siis $(f''(x^*)h, h) = \lambda \|h\|^2 < 0$ ja piisavalt väikese $\|h\|$ korral $f(x^*+h) < f(x^*)$, mis on vastuolu. Ei ole välistatud, et maatriksil $f''(x^*)$ esineb omaväärtus $\lambda = 0$, ning siis $f''(x^*)$ ei ole pööratav ja ka $f''(x_k)$ Newtoni meetodis ei tarvitse olla pööratav. Võib isegi olla, et maatriksil $f''(x_k)$ on negatiivseid omaväärtusi, aga et maatriksi omaväärtused sõltuvad pidevalt maatriksi kordajatest, siis kaks korda pidevalt diferentseeruva f juhul on $f''(x_k)$ negatiivse omaväärtuse $\lambda_k < 0$ korral $|\lambda_k|$ väike, kui x_k asub x^* väikeses ümbruses. Siis võib kasutada meetodit $x_{k+1} = x_k - (f''(x_k) + \mu_k I)^{-1} f'(x_k)$, kus $\mu_k > 0$ on väike, aga selline, et $\mu_k + \lambda_k > 0$ maatriksi $f''(x_k)$ iga omaväärtuse λ_k korral. Siis muidugi on $f''(x_k) + \mu_k I$ pööratav.

<u>Ülesanne*6.</u> Olgu $f(x) = \|Ax - b\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, kus A on $m \times n$ maatriks ehk $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$ ja vaadeldakse 2-normi ruumis $\mathbb{R}^m$. Uurida, millest ja kuidas sõltuvad selle funktsiooni korral tugeva kumeruse kordaja μ ja tuletise Lipschitzi kordaja L.

§5. Kaasgradientide meetod

1. Ruutfunktsionaali minimiseerimine kaasgradientide meetodiga

Olgu antud ruutfunktsionaal $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, kus A on sümmeetriline positiivselt määratud $n \times n$ maatriks ja $b \in \mathbb{R}^n$. Maatriksi A positiivne määratus (eksisteerib $\gamma > 0$ nii, et $(Ax, x) \geqslant \gamma \|x\|^2$ iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral) tagab, et A on pööratav, sest kui $Ax = 0$, siis $x = 0$. Seepärast on olemas parajasti üks $x^* \in \mathbb{R}^n$ nii, et $Ax^* = b$ ($x^* = A^{-1}b$). Siis

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) = \\
&= \frac{1}{2}(A(x - x^* + x^*), x - x^* + x^*) - (b, x - x^* + x^*) = \\
&= \frac{1}{2}(A(x - x^*), x - x^*) + (A(x - x^*), x^*) + \frac{1}{2}(Ax^*, x^*) - \\
&\quad - (b, x - x^*) - (b, x^*) = \\
&= \frac{1}{2}(A(x - x^*), x - x^*) + f(x^*),
\end{aligned}$$

kus kasutasime võrdust $(A(x - x^*), x^*) = (x - x^*, Ax^*) = (x - x^*, b) = (b, x - x^*)$. Arvestades nüüd, et $(A(x-x^*), x-x^*) \geqslant \gamma \|x - x^*\|^2$, näeme, et $f(x) > f(x^*)$, kui $x \neq x^*$. Niisiis saavutab ruutfunktsionaal oma miinimumi parajasti ühes punktis $x^* = A^{-1}b$.

Ruutfunktsionaali f tuletis avaldub $f'(x) = Ax - b$, sest

$$\begin{aligned}
f(x + h) - f(x) &= \frac{1}{2}(A(x + h), x + h) - (b, x + h) - \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) = \\
&= (Ax - b, h) + \frac{1}{2}(Ah, h)
\end{aligned}$$

ja $\alpha(x; h) = \frac{1}{2}(Ah, h) \leqslant \frac{1}{2}\|A\|\|h\|^2 = o(\|h\|)$ (siin (Ah, h) ja $\alpha(x; h)$ on mittenegatiivsed).

Märgime veel, et (Ax, y), $x, y \in \mathbb{R}^n$, on skalaarkorrutis ruumis $\mathbb{R}^n$, selle tagab A sümmeetrilisus ja positiivne määratus. Kasutatakse tähistust $(x, y)_A = (Ax, y)$ ja räägitakse A-skalaarkorrutisest.

Asume kirjeldama kaasgradientide meetodit ruutfunktsionaali korral. Olgu antud $x_0 \in \mathbb{R}^n$, leiame $g_0 = Ax_0 - b$ (tuletis, gradient punktis x_0), $z_0 = -g_0$ (gradiendi vastassuund). Kui $g_0 = 0$, siis $x_0 = x^*$ ja miinimumülesanne on lahendatud. Oletame, et x_k, g_k, z_k on leitud, seejuures x_k on punkt, kus asutakse, $g_k = Ax_k - b$ on gradient, samuti jääkliige võrrandi $Ax - b$ lahendamisel, z_k on liikumissuund punktist x_k väljumisel. Eeldame, et $z_k \neq 0$. Leiame funktsiooni $f(x_k + \alpha z_k)$ miinimumkoha, vaadeldes α argumendina. Arvutame

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha z_k) &= \frac{1}{2}(A(x_k + \alpha z_k), x_k + \alpha z_k) - (b, x_k + \alpha z_k) = \\ &= \frac{1}{2}(Ax_k, x_k) + \alpha(Ax_k, z_k) + \frac{1}{2}\alpha^2(Az_k, z_k) - \\ &\quad - (b, x_k) - \alpha(b, z_k) = \varphi(\alpha), \end{aligned}$$

kus argumendist α sõltuva funktsiooni jaoks kasutame tähist φ. Siis

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= (Ax_k, z_k) - (b, z_k) + \alpha(Az_k, z_k) = \\ &= (Ax_k - b, z_k) + \alpha(Az_k, z_k) = \\ &= (g_k, z_k) + \alpha(Az_k, z_k) = 0 \end{aligned}$$

parajasti siis, kui $\alpha = \dfrac{-(g_k, z_k)}{(Az_k, z_k)}$. Lisaks $\varphi''(\alpha) = (Az_k, z_k) > 0$, mis ütleb, et $\alpha_k = \dfrac{-(g_k, z_k)}{(Az_k, z_k)}$ on miinimumkoht. Määrame

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k z_k = x_k - \frac{(g_k, z_k)}{(Az_k, z_k)} z_k, \qquad (1) \\ g_{k+1} &= f'(x_{k+1}) = Ax_{k+1} - b \quad \text{(gradient, jääkliige)}, \\ z_{k+1} &= -g_{k+1} + \gamma_k z_k, \end{aligned}$$

kus $\gamma_k = \dfrac{(g_{k+1}, Az_k)}{(Az_k, z_k)}$; siin z_{k+1} on punktist x_{k+1} väljumisel liikumissuund, mis on gradiendi vastassuuna $-g_{k+1}$ korrigeeritud suund.

Ülesanne 14. Tõestada, et nullist erinevad paarikaupa ortogonaalsed vektorid on lineaarselt sõltumatud. Formaalselt: kui $x_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, $(x_k, x_j) = 0$, $k \neq j$, siis x_k, $k = 1, \ldots, n$, on lineaarselt sõltumatud.

Teoreem. *Kui ruutfunktsionaali korral lähendid x_k on leitud kaasgradientide meetodil, siis leidub $k \leqslant n$ nii, et $x_k = x^*$.*

Tõestus. Alustame abiarvutustega.

1) näeme, et

$$\begin{aligned}(Az_{k+1}, z_k) &= (z_{k+1}, Az_k) = \\ &= (-g_{k+1}, Az_k) + \gamma_k(z_k, Az_k) = \\ &= -(g_{k+1}, Az_k) + \frac{(g_{k+1}, Az_k)}{(Az_k, z_k)}(z_k, Az_k) = 0,\end{aligned}$$

mis tähendab, et vektorid z_k ja z_{k+1} (järjestikused liikumissuunad) on ortogonaalsed A-skalaarkorrutise suhtes;

2) veel saame

$$\begin{aligned}(g_{k+1}, z_k) &= (Ax_{k+1} - b, z_k) = \\ &= (A(x_k + \alpha_k z_k) - b, z_k) = \\ &= (Ax_k - b, z_k) + \alpha_k(Az_k, z_k) = \\ &= (g_k, z_k) + \frac{-(g_k, z_k)}{(Az_k, z_k)}(Az_k, z_k) = 0;\end{aligned}$$

3) kasutades järgnevas tulemust osas 2) ja z_k leidmise reeglit, teisendame

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{-(g_k, z_k)}{(Az_k, z_k)} = \frac{-(g_k, -g_k + \gamma_{k-1}z_{k-1})}{(Az_k, z_k)} = \\ &= \frac{\|g_k\|^2 - \gamma_{k-1}(g_k, z_{k-1})}{(Az_k, z_k)} = \frac{\|g_k\|^2}{(Az_k, z_k)},\end{aligned}$$

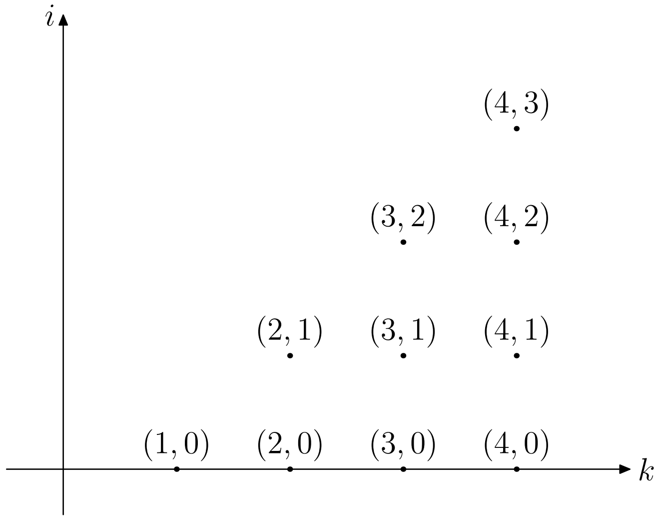
millest näeme, et $\alpha_k > 0$, kui $g_k \neq 0$ (üldiselt eeldasime, et $z_k \neq 0$);

4) kasutades nüüd 1) ja 3), samuti z_k ja g_k vahekorda, arvutame

$$\begin{aligned}(g_{k+1}, g_k) &= (Ax_{k+1} - b, g_k) = \\ &= (A(x_k + \alpha_k z_k) - b, g_k) = \\ &= (Ax_k - b + \alpha_k Az_k, g_k) = \\ &= (g_k + \alpha_k Az_k, g_k) = \\ &= \|g_k\|^2 + \alpha_k(Az_k, g_k) = \\ &= \|g_k\|^2 + \alpha_k(Az_k, -z_k + \gamma_{k-1}z_{k-1}) = \\ &= \|g_k\|^2 - \alpha_k(Az_k, z_k) + \alpha_k\gamma_{k-1}(Az_k, z_{k-1}) = 0,\end{aligned}$$

millega oleme näidanud, et naabergradiendid ehk jääkliikmed on ortogonaalsed tavalise skalaarkorrutise suhtes;

5) järgnevalt näitame, et $(g_k, g_i) = 0$, $k \neq i$, ja $(Az_k, z_i) = 0$, $k \neq i$, ehk punktides 1) ja 4) saadud ortogonaalsused leiavad aset kõikide erinevate indeksitega vektorite vahel. Võime eeldada, et $i < k$. Deklareeritud väited tõestame induktsiooniga. Induktsiooniskeemi iseloomustab joonis



milles diagonaalil toodud indeksipaaride $(k, k-1)$ korral on väited tõestatud. Skeemis liigume veergude kaupa paremale, igas veerus ülevalt alla, kasutades eelmiste indeksipaaride korral tõestatud ortogonaalsusi. Sisuliselt järjestame indeksite paarid lineaarselt liikumisskeemi kohaselt, et teostada induktsiooni. Tõestame indeksipaari $(k+1, i)$ korral mõlema vektoripaari ortogonaalsused, seejärel liigume järgmise indeksipaari juurde induktsiooniskeemi kohaselt.

a) arvutame (lisades vahele selgitusi eelneva võrduse kohta)

$$\begin{aligned}
&(g_{k+1}, g_i) = (g_k + \alpha_k A z_k, g_i) = \\
&/g_{k+1} = Ax_{k+1} - b = A(x_k + \alpha_k z_k) - b = \\
&\quad = Ax_k - b + \alpha_k A z_k = g_k + \alpha_k A z_k/ \\
&\quad = \alpha_k (A z_k, g_i) = \\
&/(g_k, g_i) = 0 \quad \text{eelmises veerus}/
\end{aligned}$$

$$= \alpha_k (Az_k, -z_i + \beta_{i-1} z_{i-1}) =$$

/ g_i ja z_i vahekord /

$$= -\alpha_k (Az_k, z_i) + \alpha_k \beta_{i-1} (Az_k, z_{i-1}) = 0$$

/ mõlemas skalaarkorrutises kasutame eelmist väigu /;

b) teise vektoripaari korral teisendame

$$(Az_{k+1}, z_i) = (z_{k+1}, Az_i) = (-g_{k+1} + \beta_k z_k, Az_i) =$$

$$= (-g_{k+1}, Az_i) + \beta_k (z_k, Az_i) =$$

$$= -(g_{k+1}, Az_i)$$

/ $(z_k, Az_i) = 0$ eelmise vaeme põhjal /.

Leiame $g_{i+1} = Ax_{i+1} - b = A(x_i + \alpha_i z_i) - b =$
$= Ax_i - b + \alpha_i Az_i = g_i + \alpha_i Az_i$, millest $\alpha_i \neq 0$
korral $Az_i = \frac{1}{\alpha_i}(g_{i+1} - g_i)$, ja jätkates teisendust, saame

$$(Az_{k+1}, z_i) = -\left(g_{k+1}, \frac{1}{\alpha_i}(g_{i+1} - g_i)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_i}(g_{k+1}, g_{i+1}) + \frac{1}{\alpha_i}(g_{k+1}, g_i) = 0$$

/ $(g_{k+1}, g_{i+1}) = 0$ eelneva indeksipaari põhjal ja $(g_{k+1}, g_i) = 0$ on saadud osas 5a) /.

Kui aga $\alpha_i = 0$, siis $\alpha_i = \dfrac{\|g_i\|^2}{(Az_i, z_i)}$ ja $z_i \neq 0$ alusel $g_i = 0$, s.t. $x_i = x^*$ ja põhiväide on tõestatud. Kui $z_i = 0$, siis muidugi $(Az_{k+1}, z_i) = 0$.

Tõestuse lõpetab järgmine arutelu, milles tugineme ülesandele 15. Nägime, et vektorid g_k moodustavad paarikaupa ortogonaalse süsteemi. Seejuures ei ole võimalik, et $g_k \neq 0$, $k = 0, \dots, n$, sest siis oleks ruumis $\mathbb{R}^n$ $n+1$ lineaarselt sõltumatut elementi. Seega on olemas $g_k = 0$, $k \leq n$, mis tähendab, et $Ax_k - b = 0$ ehk $x_k = x^*$.

Teoreem on tõestatud.

<u>Ülesanne 16.</u> Tõestada, et $g_0 \neq 0, \dots, g_k \neq 0$ parajasti siis, kui $z_0 \neq 0, \dots, z_k \neq 0$.

2. Üldisema funktsiooni minimiseerimine kaasgradientide meetodiga

Vaatleme ülesannet $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, kus $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv. Kaasgradientide meetodis võetakse alglähend x_0, leitakse $g_0 = f'(x_0)$ ja võetakse $z_0 = -g_0$. Kui on juba leitud x_k, $g_k = f'(x_k) \neq 0$ ja $z_k \neq 0$, siis leitakse $\alpha_k > 0$ nii, et $f(x_k + \alpha_k z_k) = \min\limits_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha z_k)$. Seejärel leitakse $x_{k+1} = x_k + \alpha_k z_k$, $g_{k+1} = f'(x_{k+1})$

ja määratakse $z_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k z_k$, kus

$$\beta_k = \frac{(g_{k+1}, g_{k+1} - g_k)}{\| g_k \|^2} . \qquad (2)$$

Veendume, et äsjäkirjeldatud meetod ühtib ruutfunktsionaali korral ~~…~~ eelmises punktis analüüsitud meetodiga. Selleks piisab näidata, et võrdusega (2) määratud kordaja β_k tuleb ruutfunktsionaali korral sama, mis oli varem valitud. Arvutame

$$\beta_k = \frac{(g_{k+1}, g_{k+1} - g_k)}{\| g_k \|^2} =$$

$$= \frac{(g_{k+1}, A x_{k+1} - b - (A x_k - b))}{\| g_k \|^2} =$$

$$= \frac{(g_{k+1}, A(x_{k+1} - x_k))}{\| g_k \|^2} =$$

$$= \frac{\alpha_k (g_{k+1}, A z_k)}{\| g_k \|^2}$$

$$/ x_{k+1} = x_k + \alpha_k z_k /,$$

kuid $\alpha_k = \dfrac{\| g_k \|^2}{(A z_k, z_k)}$ annab varem esinenud

$$\beta_k = \frac{(g_{k+1}, A z_k)}{(A z_k, z_k)} .$$

Üldisema funktsiooni korral on veel kasutusel meetod, kus

$$\gamma_k = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}. \qquad (3)$$

Ruutfunktsionaali korral (2) ja (3) ühtivad, sest teame, et sel juhul $(g_{k+1}, g_k) = 0$.

3.* Kaasmundade meetod ruutfunktsionaali korral

Vaatleme punktis 1 esinenud ülesannet, kus on antud ruutfunktsionaal $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ja lahendatakse ülesannet $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Öeldame, et ruumis $\mathbb{R}^n$ on antud elemendid $p_i \neq 0$, $i = 0, \ldots, n-1$, seejuures $(Ap_i, p_j) = 0$, kui $i \neq j$. Vektorid p_i on ortogonaalsed A-skalaarkorrutise suhtes, öeldakse ka, et nad on kaasortogonaalsed, ja sellepärast nimetatakse selles punktis käsitlusele tulevaid meetodeid kaasmundade või kaasortogonaalsete mundade meetoditeks.

Kaasmundade meetodis $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $k = 0, 1, \ldots$ (x_0 on alglähend), kus $\alpha_k > 0$ leitakse nii, et $f(x_k + \alpha_k p_k) = \min\limits_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha p_k)$. Arvu α_k leidmine toimub sama arutelu ga nagu punktis 1, seega

$$\alpha_k = \frac{-(g_k, p_k)}{(A p_k, p_k)}$$

ja

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(g_k, p_k)}{(A p_k, p_k)} p_k \qquad (4)$$

(tegelikult piisab (4) saamiseks ainult sellest, et $p_k \neq 0$). Nagu varemgi, olgu x^* selline, et $Ax^* = b$ ehk x^* on miinimumülesande lahend. Esitame lineaarselt sõltumatu süsteemi kaudu

$$x^* - x_0 = \beta_0 p_0 + \ldots + \beta_{n-1} p_{n-1}. \qquad (5)$$

Ilamtades $p_0, \ldots, p_{n-1}$ kaasortogonaalsust, saame (5) abil

$$(A(x^* - x_0), p_k) = \beta_k (A p_k, p_k),$$

millest

$$\beta_k = \frac{(A(x^* - x_0), p_k)}{(A p_k, p_k)}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \qquad (6)$$

Vaadeldavas meetodis

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1} = \ldots = x_0 + \alpha_0 p_0 + \ldots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$$

ehk

$$x_k - x_0 = \alpha_0 p_0 + \ldots + \alpha_{k-1} p_{k-1}. \qquad (7)$$

Võrdusest (7) saame inna $p_0, \ldots, p_{n-1}$ kaasortogonaalsust kasutades

$$(A(x_k - x_0), p_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1 \qquad (8)$$

(see arvutus sobib $k \geq 1$ korral, $k = 0$ korral kehtib (8) triviaalselt). Nüüd (8) abil ja α_k avaldist arvestades

$$(A(x^* - x_0), p_k) = (A(x^* - x_k), p_k) + (A(x_k - x_0), p_k)$$
$$= (b - Ax_k, p_k) =$$
$$= -(g_k, p_k) = \alpha_k (Ap_k, p_k),$$

millest

$$\alpha_k = \frac{(A(x^* - x_0), p_k)}{(Ap_k, p_k)}, k = 0, \ldots, n-1.$$

See koos võrdustega (6) annab $\alpha_k = \beta_k, k = 0, \ldots, n-1$, ja (5) ning (7) põhjal $x_n = x^*$. Muidugi võib esineda olukord, kus $x_k = x^*, k < n$, kui näiteks $\alpha_{n-1} = 0$. Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse.

<u>Teoreem.</u> Kui $p_i \neq 0, i = 0, \ldots, n-1$, on kaasortogonaalsed, siis kaasmuundade meetod ruutfunktsionaali minimiseerimisel annab hiljemalt $k = n$ korral lahendi $x_k = x^*$.

On arusaadav, et kaasgradientide meetod on erijuhul kaasmuundade meetodist, milles määratakse kaasortogonaalsed liikumissuunad kindla eeskirja kohaselt.

§ 6. Lineaarne planeerimine

Me pöörame lineaarsele planeerimisele erilist tähelepanu, selleks on mitmeid põhjuseid. Lineaarsel planeerimisel on palju rakendusi mitmetes eluvaldkondades, millest ~~st~~ mainsalo välja tuua majandust. Ei saa unustada ka ajaloolist rolli, kus lineaarne planeerimine on olnud optimiseerimismeetodite uurimisel esirinnas. Paljud lineaarses planeerimises esinenud ideed, sealhulgas näiteks duaalsete ülesannete teooria, on leidnud viljakat arendust üldisemate ülesannete käsitlemisel. Selles paragrahvis esitame kõik (olulised) tulemused koos üksikasjalike põhjendustega, millest mitmed on küll toodud abimaterjalina ja varustatud sümboliga *.

1. Lineaarse planeerimise ülesannete tähtsamad kujud

Selles paragrahvis tähistame vektorite $x, y \in \mathbb{R}^n$ skalaarkorrutist $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Lineaarse planeerimise ülesanne üldkujul on järgmine. Antud on (lineaarne) sihifunktsioon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \cdot x$, lubatav hulk Ω kujul

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a^i \cdot x \leq b_i,\ i \in I_1 \\ a^i \cdot x = b_i,\ i \in I_2 \\ a^i \cdot x \geq b_i,\ i \in I_3 \end{array} \right\},$$

kus I_1, I_2, I_3 on paarikaupa mittelõikuvad ($I_k \cap I_j = \emptyset$, kui $k \neq j$) indeksite hulgad, iga I_k on lõplik või tühi. On vaja leida $x^* \in \Omega$ nii, et $f(x^*) = \min\limits_{x \in \Omega} f(x)$ või $f(x^*) = \max\limits_{x \in \Omega} f(x)$ (konkreetses ülesandes üks nendest nõuetest).

Definitsioon. Lineaarse planeerimise ülesanne kanoonilisel kujul on $\max\limits_{x \in \Omega} c \cdot x$, kus

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i,\ i \in I,\ x \geq 0\}.$$

Lisame selgituseks, et $x \geq 0$ tähendab, et $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Need tingimused on kirjutatavad $e^i \cdot x \geq 0$, kus $e^i = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$, seepärast on kanooniline kuju erijuht üldkujust.

Olgu $m = |I|$ (hulga I elementide arv), A $m \times n$ maatriks, mille read on $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i \in I$, $b \in \mathbb{R}^m$ komponentidega b_i, $i \in I$. Siis tingimused $a^i \cdot x = b_i$, $i \in I$, võib kirjutada samaväärselt $Ax = b$ ning kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatav hulk on $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Kasutame edaspidi ka ülesande üleskirjutust kujul $\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

<u>Definitsioon.</u> Lineaarse planeerimise ülesanne põhikujul on $\max\limits_{x \in \Omega} c \cdot x$, kus

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}.$$

Lisame, et $x, y \in \mathbb{R}^n$ korral tähendab kirjutis $x \leq y$, et $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Seda sümboolselt juba kasutasime juhul $x \geq 0$.

<u>Lause.</u> Iga lineaarse planeerimise ülesannet saab esitada temaga samaväärsel kanoonilisel või põhikujul.

Erijuhul tähendab see põhikujul oleva ülesande viimist samaväärsele kanoonilisele kujule, samuti kanoonilisel kujul oleva ülesande viimist samaväärsele põhikujule.

<u>Tõestus.</u> Märgime kõigepealt, et kui on vaja minimiseerida $c \cdot x$, siis see on samaväärne $-c \cdot x = (-c) \cdot x$ maksimiseerimisega, ka $(-c) \cdot x$ on lineaarne sihifunktsioon. Järgnevas vaatame kitsenduste teisendamist vajalikule kujule võtetega, mis sobivad igas antud ülesandes, seepärast võib seda nimetada standardmetoodikaks.

1) käsitleme algul põhikitsenduste teisendamist kanoonilisele kujule viimisel. Kui on antud võrratus $a^i \cdot x \leq b_i$, siis võtame kasutusele lisamuutuja $z_i = b_i - a^i \cdot x$. Võrratus

$a^i \cdot x \leq b_i$ on siis samaväärne sellega, et $z_i \geq 0$. Samal ajal $a^i \cdot x + z_i = b_i$ on võrdusega antud põhikitsendus $(a^i_1, \dots, a^i_n, 1) \cdot (x_1, \dots, x_n, z_i) = b_i$. Kui on antud võrratus $a^i \cdot x \geq b_i$, siis muidugi võib seda vaadelda kujul $(-a^i) \cdot x \leq -b_i$ ja kasutada äsjavaadeldud võtet. See on aga samaväärne sellega, et lisame muutuja $z_i = a^i \cdot x - b_i$ ja $a^i \cdot x \geq b_i$ on samaväärne tingimusega $z_i \geq 0$. Lisaks oleme jõudnud tavakujul võrduskitsenduseni $a^i \cdot x + (-1) z_i = b_i$. Märgime, et uute muutujate lisamisel sihifunktsioon nendest ei sõltu; võime kirjutada $c \cdot x = \bar{c} \cdot \bar{x}$, kus $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, z_j, j \in I_1 \cup I_3)$. Uute muutujate lisamisega ei suurene maatriksi A ridade arv, ka b jääb samaks, pikenevad A read.

2) kui algülesandes ei ole mingi muutuja x_j mittenegatiivsuse nõuet, siis võtame kasutusele asendusmuutuja $x_j' \geq 0$ ja veel lisamuutuja $x_{n+1} \geq 0$ ning teeme muutujavahetuse $x_j = x_j' - x_{n+1}$ (x_j on vana muutuja, x_j', x_{n+1} uued). Siin x_{n+1} võib olla sama kõigi nende muutujate vahetamisel, kus mittenegatiivsuse nõuet ei ole. Selle käigus teisenevad sihifunktsioon

$$c \cdot x = \sum_{x_j \geq 0} c_j x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j x_j =$$

$$= \sum_{x_j \geq 0} c_j x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j (x_j' - x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{x_j \geq 0} c_j x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j x_j' + \Big(\sum_{x_j \in \mathbb{R}} (-c_j)\Big) x_{n+1} =$$

$$= \bar{c} \cdot \bar{x},$$

mis on ikka lineaarne sihifunktsioon. Põhikitsendused teisenevad järgmiselt:

$$A x = b \Leftrightarrow a^i \cdot x = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x_j \geq 0} a_{ij} x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij} (x_j' - x_{n+1}) = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x_j \geq 0} a_{ij} x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij} x_j' + \Big(- \sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij}\Big) x_{n+1} = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{A} \begin{pmatrix} x_j,\ x_j \geq 0 \\ x_j',\ x_j \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow \bar{A} \bar{x} = b,$$

kus maatriksi $\bar{A}$ ridade arv ei muutu, aga read on ühe elemendi $-\sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij}$ võrra pikemad, $\bar{x}$ aga on osa vanade ja uute muutujate vektor, mis esines juba eespool teisendatud sihifunktsioonis.

3) vaatame veel põhimõjule viimist. Võrratuse $a^i \cdot x \geq b_i$ võib kirjutada samaväärsel kujul $(-a^i) \cdot x \leq -b_i$. Võrduse $a^i \cdot x = b_i$ saab asendada kahe võrratusega $a^i \cdot x \leq b_i, (-a^i) \cdot x \leq -b_i$, mis tähendab ühtlasi kitsenduste arvu suurenemist. Kui mõnel muutujal pole mittenegatiivsuse nõuet, siis punktis 2) käsitletud muutujavahetus sobib ka siin, kusjuures sihifunktsioon teiseneb täpselt samamoodi, tingimused $Ax \leq b$ teisenevad samaväärseteks $\bar{A}\bar{x} \leq b$, milles $\bar{A}$ ja $\bar{x}$ on sama tähendusega nagu punktis 2).

Lause on tõestatud.

Lauses toodud standardmetoodika võtete asemel saab kasutada teisi, mõneti lihtsamaid, mida võib nimetada ökonoomseks metoodikaks.

1) kitsendus $x_k \geq d_k$ on erijuht üldkujust $a^k \cdot x \geq b_k$, kus $a^k = e^k$, ja seda saab teisendada standardmetoodikas esinenud lisamuutuja kasutuselevõtuga. Siin võib teha muutujavahetuse $x_k' = x_k - d_k$, siis $x_k \geq d_k$ on samaväärne sellega, et $x_k' \geq 0$. Seejuures sihifunktsioon teiseneb

$$c \cdot x = c_k x_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} c_j x_j = c_k (x_k' + d_k) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} c_j x_j =$$

$$= c_k x_k' + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} c_j x_j + c_k d_k = c \cdot \bar{x} + c_k d_k,$$

kus vektoris $\bar{x}$ on vektoriga x võrreldes komponendi x_k asemel x_k'. Sihifunktsioonidel $c \cdot x$ ja $c \cdot \bar{x}$ on aga samad miinimum- või maksimumpunktid, konstantne liidetav $c_k d_k$ neid ei mõjuta. Põhikitsendused teisenevad sarnaselt nii kanoonilisele kui põhikujule viimisel, näiteks

$$A x = b \Leftrightarrow a^i \cdot x = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} x_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} (x_k' + d_k) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} x_k' + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{ij} x_j = b_i - a_{ik} d_k,\ i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \bar{x} = \bar{b},$$

kus näeme, et ei muutu maatriks A (nagu ei muutunud ka sihifunktsiooni määrav vektor c), küll aga võib muutuda vektor b.

Üksiktingimuse $x_k \leq d_k$ korral võtame $x_k' = d_k - x_k$

ja saadakse samaväärne kitsendus $x_k' \geq 0$. Selles asenduses on märgimuutus vektori c ühes komponendis ja maatriksi A ühe veeru elementides, mida näeb eespooltoodud teisenduste analüüsides. Selles punktis näidatud teisendustes ei suurene muutujate arv.

2) põhikujule viimisel näeme, et põhikitsendustes esinevad võrdused võib asendada kahe võrratusega. Siin saab kokkuhoidu teha nii, et võrdused $a^i \cdot x = b_i$, $i \in I$, asendatakse võrratustega $a^i \cdot x \leq b_i$, $i \in I$, ja ühe lisavõrratusega $\sum_{i \in I} (a^i \cdot x - b_i) \geq 0$. Viimane on samaväärne sellega, et $(-\sum_{i \in I} a^i) \cdot x \leq -\sum_{i \in I} b_i$.

See suurendab kitsenduste arvu aimult ühe võrra terve ülesande peale.

<u>Ülesanne 17.</u> Viia ülesanne

$$x_2 - x_1 \to \min,$$
$$3x_1 = x_2 - 5,$$
$$|x_2| \leq 2,$$
$$x_1 \leq 0$$

kanoonilisele ja põhikujule nii standard- kui ka ökonoomse metoodikaga.

2. Lineaarse planeerimise ülesande lahendi olemasolust

2.1. Lubatava hulga omadused

Vaatleme algul kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c\cdot x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Siin lubatav hulk on $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i, i \in I, x \geq 0\}$. Süsteemil $Ax = b$ on olemas lahend parajasti siis, kui A astak võrdub laiendatud maatriksi $(A\ b)$ astakuga (seda väidab Kronecker–Capelli teoreem). Seega, kui astakud ei ole võrdsed, siis pole võrrandisüsteemil $Ax = b$ lahendeid ja $\Omega = \emptyset$ (muidugi puudub siis ka planeerimisülesandel lahend). Näiteks sobib süsteem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Edaspidi vaatleme juhtu, kus astakute võrdsus leiab aset. Siis võib lineaarselt sõltuvad võrrandid ära jätta ja eeldame, et seda on tehtud. Sel juhul on maatriksi A read lineaarselt sõltumatud ja maatriksi astak on $m = |I|$. Et A astak ei saa ületada arvu n, siis $m \leq n$, mis on iseloomulik konstateerid (lineaarselt teistest võrranditest sõltuvad võrrandid kõrvaldatud) kanoonilisel kujul olevale ülesandele. Kui süsteemi $Ax=b$ lahendite x hulgas on selliseid, et $x \geq 0$, siis $\Omega \neq \emptyset$. Juhul $m=n$ on süsteemil parajasti üks lahend ja kui selle komponendid on mittenegatiivsed, siis on see lubatava hulga Ω ainus element ja loomulikult ka ülesande lahend. Sisukas kanoonilisel kujul olevas ülesandes on $m<n$ ja süsteemil $Ax=b$ lõpmatu hulk lahendeid. Siis Ω võib olla tühi, üheelemendiline või lõpmatu hulk, selle väite detailse põhjenduse esitame hiljem.

Vaatleme nüüd eelkõige põhikujul olevat ülesannet

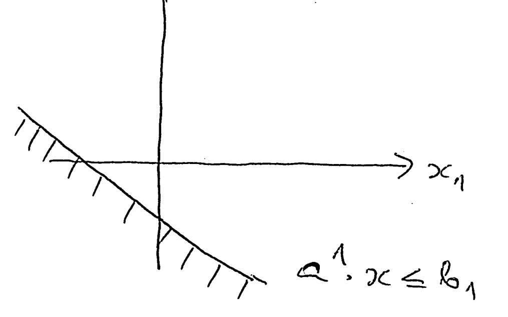
$$\max\{c\cdot x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}.$$

Lubatava hulga $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ iseloomustamiseks võtame kasutusele mõned mõisted. Olgu $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Hulka $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a\cdot x = b\}$ nimetatakse hüpertasandiks. Näiteks $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ on sirge tasandil $\mathbb{R}^2$, $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$ on tasand ruumis $\mathbb{R}^3$. Hulka $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a\cdot x \leq b\}$ nimetatakse (kinniseks) poolruumiks. Tasandil $\mathbb{R}^2$ on see vastavast sirget ühele poole jääv ja sirget ennast sisaldav pooltasand, ruumis $\mathbb{R}^3$ tasandist ühele poole jääv ja tasandit ennast sisaldav poolruum. Seejuures

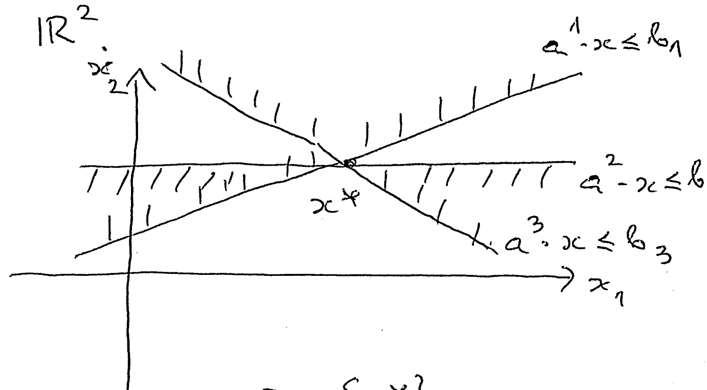
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid (-a) \cdot x \leq -b\},$$

s.t. hüpertasand on kahe poolruumi ühisosa. Lõpliku hulga poolruumide ühisosa nimetatakse polüeedriliseks hulgaks. Tõkestatud polüeedrilist hulka nimetatakse polüeedriks ehk hulktahukaks. On selge, et iga lineaarse planeerimise ülesande lubatav hulk on polüeedriline hulk, mis võib olla tõkestatud või tõkestamata.

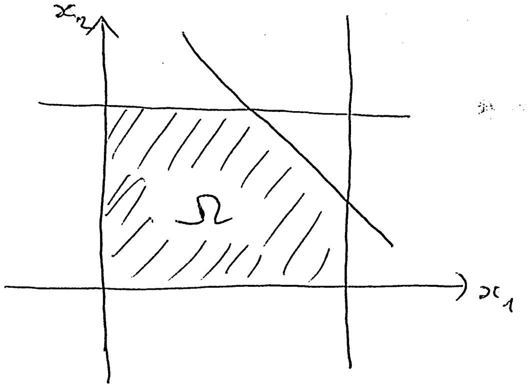
Põhikujul oleva ülesande lubatav hulk Ω on niisiis polüeedriline hulk ja siin võib põhikitsenduste arv m olla kuitahes suur, sest kasvõi näiteks $n=2$ korral võib hulknurga servade arv olla kuitahes suur. Esitame selle alapunkti lõpetuseks mõned näited põhikujul oleva ülesande lubatavatest hulkadest tasandil $\mathbb{R}^2$.



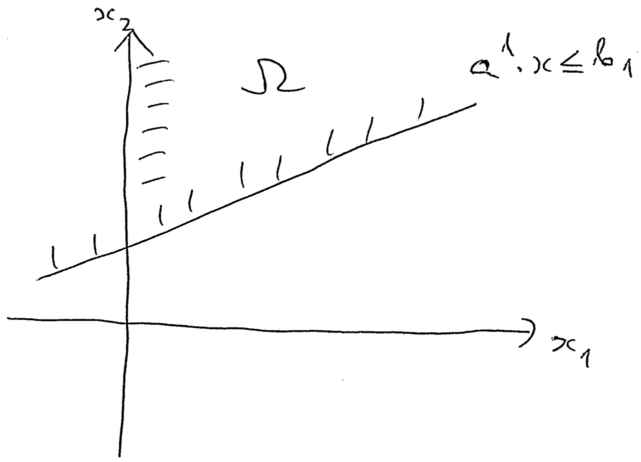
$\Omega = \emptyset$



$\Omega = \{x^*\}$



Ω on tõkestatud, lõpmatu



Ω on tõkestamata

Tulles veel tagasi kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatava hulga juurde, siis ka see on lõpliku arvu poolruumide ühisosa ehk polüeedriline hulk. Ta on aga mõneti spetsiifilise kujuga, sest süsteemi $Ax = b$ lahendite hulk on ruumi $\mathbb{R}^n$ alamruumi nihe ja lubatav hulk ise alamruumi nihke ühisosa hulgaga $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$. Seepärast ei sobi eespool tasandil $\mathbb{R}^2$ näidetena toodud lõpmatud hulgad Ω kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatavaks hulgaks.

2.2. Lahendi olemasolust

Peatume lühidalt lineaarse planeerimise ülesande lahendi olemasolul. Vaatleme kanoonilisel või põhikujul olevat ülesannet, sest selliseks saab viia igat üldkujulist ülesannet.

Märgime, et polüeedriline hulk (seega ka lineaarse planeerimise ülesande lubatav hulk) on alati kinnine. Kui lubatav hulk Ω on mittetühi ja tõkestatud, siis on ülesandel lahend olemas Weierstrassi teoreemi põhjal. See haarab ka erijuhu $\Omega = \{x^*\}$, kus Weierstrassi teoreemi tegelikult vaja ei olegi.

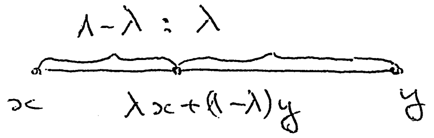
Kui Ω on tõkestamata ja sihifunktsioon on hulgas Ω ülalt tõkestamata, siis lahend puudub. Kui aga sihifunktsioon on ülalt tõkestatud tõkestamata hulgas Ω, siis on ülesandel lahend olemas. Viimase väite põhjendame hiljem.

3. Kumerad hulgad

Olgu V vektorruum.

Definitsioon. Hulka $X \subset V$ nimetatakse kumeraks, kui iga $x, y \in X$, $x \neq y$, ja iga $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda x + (1-\lambda) y \in X$.

Hulka $\{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\}$ nimetatakse punkte x ja y ühendavaks lõiguks, mõnikord tähistatakse seda $[x, y]$. Hulk on kumer parajasti siis, kui ta sisaldab igat oma kahte punkti ühendavat lõiku. Järgmisel joonisel



on näha, kuidas $\lambda x + (1-\lambda) y$, $\lambda \in (0,1)$, on punktide

x ja y vahel ja kuidas suhtuvad $\lambda x+(1-\lambda)y$ kaugused punktidest x ja y. On selge, et lõigus $[x, y]$ vastab arvule $\lambda=0$ punkt y ja arvule $\lambda=1$ punkt x.

Meenutame, et hulka $X\subset\mathbb{R}^n$ nimetatakse kinniseks, kui $x_k\in X$, $x_k\to x$ korral $x\in X$.

Ülesanne 18. Tõestada, et poolruum $\{x\in\mathbb{R}^n \mid a\cdot x\le b\}$ on kumer ja kinnine.

Ülesanne 19. Tõestada, et kui hulgad X_α on kumerad, siis $\bigcap_\alpha X_\alpha$ on kumer.

On muidugi teada, et kui hulgad X_α on kinnised, siis $\bigcap_\alpha X_\alpha$ on kinnine.

Järeldus. Iga polüeedriline hulk (lineaarse planeerimise ülesande lubatav hulk) on kumer ja kinnine.

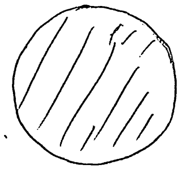
Polüeedrilise hulga kumerusest järeldub, et kui selles on vähemalt kaks erinevat elementi, siis see hulk on lõpmatu, sest kahte punkti ühendav lõik on lõpmatu hulk. Seda väitsime juba punktis 2.1 ilma põhjenduseta.

Definitsioon. Kumera hulga tipuks nimetatakse selle hulga punkti, mis ei ole ühegi sellesse hulka kuuluva lõigu sisepunktiks.

Lahtiseletatult tähendab see, et $x\in X$ on hulga X tipp parajasti siis, kui ei ole võimalik esitus $x=\lambda y+(1-\lambda)z$, $\lambda\in(0,1)$, $y,z\in X$, $y\neq z$.

Näideteks toome

on kolm tippu



iga ringjoone punkt on ringi tipp

Mõnikord nimetatakse tippe ekstremaalseteks punktideks.

4. Graafiline lahendamine

Praktiliselt saab graafiliselt lahendada lineaarse planeerimise ülesannet (üldkujul), kui $n = 2$, mõningatel juhtudel $n = 3$ korral. Enne lahendusalgoritmi esitamist tutvume veel ühe mõistega. Vaatleme sihifunktsiooni $c \cdot x$, kus $c \neq 0$. Võttes $\alpha \in \mathbb{R}$, saame hüpertasandi $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c \cdot x = \alpha\}$, mida nimetatakse sihifunktsiooni nivootasandiks (juhul $n = 2$ nivoosirgeks). Erinevatele α väärtustele vastavad erinevad nivootasandid, mis ei lõiku, olles seega paralleelsed.

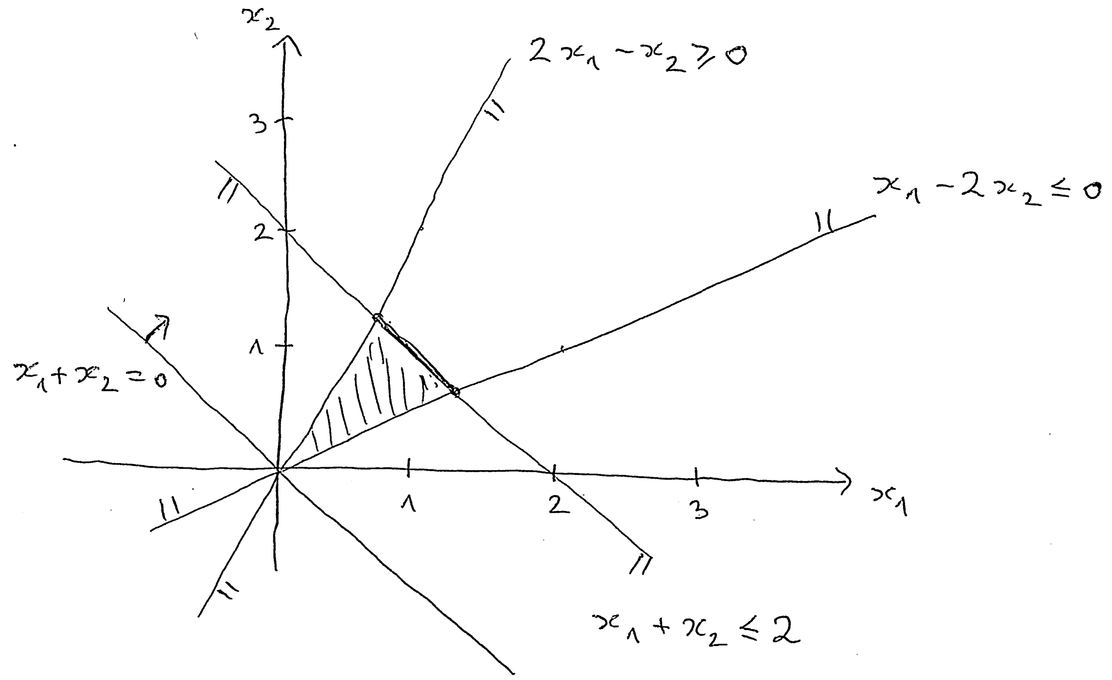
Graafiline lahendamine koosneb järgmistest etappidest (kirjeldame juhtu $n = 2$):

1) kantakse joonisele lubatav hulk – polüeedriline hulk (erijuhul polüeeder), see on pooltasandite ühisosa;

2) võetakse üks nivoosirge, määratakse näiteks sihifunktsiooni kasvamise suund nivoosirge paralleellükkel;

3) lükatakse nivoosirgega maksimiseerimisülesandes kasvamise suunas, minimiseerimisülesandes kahanemise suunas seni kuni edasi minnes nivoosirge lubatavat hulka enam ei lõika. Viimase nivoosirge ja lubatava hulga ühisosa ongi siis lahendite hulk.

Näide. On vaja maksimiseerida $x_1 + x_2$ kitsendustel $x_1 - 2x_2 \leq 0$, $2x_1 - x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 2$. Joonisel

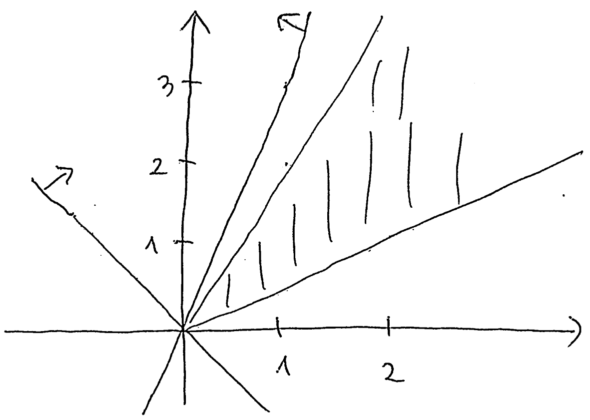


on esitatud sirged $2x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - 2x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 2$ ja nende poolt määratud pooltasandid, mille ühisosa annab viimatatud kolmnurga – lubatava hulga. On näha, et kitsendused $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ei muuda lubatavat hulka, seepärast on sisuliselt tegemist põhikujul oleva ülesandega. Veel on esitatud nivoosirge $x_1 + x_2 = 0$ ja märgitud noolega sihifunktsiooni ~~[illegible]~~ kasvamise suund. Kui liikuda nivoosirgega sihifunktsiooni kasvamise suunas, siis viimane ühisosa on juhul $x_1 + x_2 = 2$. Seega saavutab sihifunktsioon maksimaalse väärtuse lubatavas hulgas näiteks punktis, mis määratakse kahe sirge $x_1 + x_2 = 2$ ja $x_1 - 2x_2 = 0$ lõikepunktis, selles $x_1 = \frac{4}{3}$ ja $x_2 = \frac{2}{3}$. Samuti on lahendiks $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, mis on sirgete $x_1 + x_2 = 2$ ja $2x_1 - x_2 = 0$ lõikepunkt. Lahendiks on ka iga leitud kahte punkti ühendava sirglõigu punkt.

Kui jätame ära viimase kitsenduse ehk vaatame ülesannet

$$x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 0,$$
$$2x_1 - x_2 \geq 0,$$

siis selle lubatav hulk on järgmisel joonisel



ja sihifunktsioon $x_1 + x_2$ on lubatavas hulgas ülalt tõkestamata, mis tähendab, et ülesandel lahend puudub. Kui võtta sihifunktsiooniks $-3x_1 + x_2$ ja see maksimiseerida, siis joonisel on näha, et lahendiks on punkt $(0,0)$.

<u>Ülesanne 20.</u> Lahendada graafiliselt

$$
\begin{aligned}
&4x_1 + x_2 \to \max \\
&2x_1 + x_2 \geq 2, \\
&x_1 - x_2 \leq 1, \\
&x_1 \leq 3, \\
&3x_2 - x_1 \leq 6.
\end{aligned}
$$

Näiteülesande, mis oli põhikujul, lahendamisel võis tähele panna, et lahenditest vähemalt üks oli alati lubatava hulga tipus. Edaspidi näeme, et see asjaolu ei ole juhuslik.

Järgnevalt teeme kindlaks mitmeid lineaarse planeerimise ülesande omadusi. Need saavad olema aluseks lahendusmeetodite uurimisel.

5. Lahendite paiknemine

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}, \tag{1}$$

milles lubatav hulk on $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Teoreem. Kui ülesandel (1) on olemas lahend, siis vähemalt üks lahenditest asub lubatava hulga tipus.

Tõestus. Kui 0 on ülesande (1) lahend, siis $0 \in \Omega$ ja tarvitseb veenduda, et 0 on siis hulga Ω tipp. Oletades vastuväiteliselt, et 0 ei ole Ω tipp, saab esitada $0 = \lambda x + (1-\lambda) y$, $\lambda \in (0,1)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$. Siis on olemas indeks i nii, et $x_i > 0$ või $y_i > 0$. Nüüd $0 = \lambda x_i + (1-\lambda) y_i > 0$, mis on vastuolu.

Märgime, et vektor 0 on alati hulga $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ tipp ja tegelikult näitasime siin, et kui $0 \in \Omega$, siis 0 on ka osahulga $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ tipp.

Järgnevas vaatleme juhtu, ~~kus~~ $x \neq 0$, x on ülesande (1) lahend ja x ei ole hulga Ω tipp. Olgu $x = \lambda y^1 + (1-\lambda) y^2$, $y^1, y^2 \in \Omega$, $y^1 \neq y^2$, $\lambda \in (0,1)$. Olgu lahendi x komponentidest k nullist erinevad (ehk positiivsed). Näitame, et on olemas ülesande (1) lahend, millel on ülimalt $k-1$ nullist erinevat komponenti. Et x on ülesande (1) lahend, siis $c \cdot x \geq c \cdot y^1$ ja $c \cdot x \geq c \cdot y^2$. Kasutades võrdust $x = \lambda y^1 + (1-\lambda) y^2$, saame

$$\lambda c \cdot y^1 = c \cdot x - (1-\lambda) c \cdot y^2 \geq c \cdot x - (1-\lambda) c \cdot x = \lambda c \cdot x,$$

millest järeldub $c\cdot y^1 \geq c\cdot x$ ja seega $c\cdot y^1 = c\cdot x$. Analoogiliselt saame $c\cdot y^2 = c\cdot x$, mistõttu y^1 ja y^2 on ülesande (1) lahendid. Olgu $z = y^1 - y^2$. Võime eeldada, et z mingi komponent on positiivne, sest $y^1 \neq y^2$ ja kui z kõik komponendid on mittepositiivsed, vaatleme $z = y^2 - y^1$. Olgu

$$\mu = \min\left\{\frac{x_i}{z_i} \,\middle|\, z_i > 0\right\}.$$

Siis $\mu = \frac{x_j}{z_j}$ mingi j korral. Lisaks, kui $z_i \neq 0$, siis $x_i > 0$, sest kui $x_i = 0$, siis, nagu eespoolses arutelus nägime, $y_i^1 = y_i^2 = 0$ ja $z_i = 0$. Seega $\mu > 0$. Võtame $y = x - \mu z$. Näitame kõigepealt, et $y \in \Omega$. Kui $z_i \leq 0$, siis $y_i = x_i - \mu z_i \geq x_i \geq 0$. Kui $z_i > 0$, siis $y_i = x_i - \mu z_i \geq x_i - \frac{x_i}{z_i} z_i = 0$. Seega $y \geq 0$. Lahutades võrdusest $Ay^1 = b$ ja $Ay^2 = b$, saame $Az = Ay^1 - Ay^2 = 0$. Et aga $Ax = b$, siis $Ay = Ax - \mu Az = b$, mistõttu $y \in \Omega$. Peale selle, $c\cdot y^1 = c\cdot y^2$, seepärast $c\cdot z = 0$ ja $c\cdot y = c\cdot x - \mu\, c\cdot z = c\cdot x$, millega oleme saanud, et y on ülesande (1) lahend.

Seejuures, kui $x_i = 0$, siis $z_i = 0$ ja $y_i = x_i - \mu z_i = 0$. Kuid $y_j = x_j - \mu z_j = x_j - \frac{x_j}{z_j} z_j = 0$, samal ajal $x_j > 0$. Niisiis on y ülesande (1) lahend, millel saab olla ülimalt $k-1$ nullist erinevat komponenti. Kui y on hulga Ω tipp, oleme saanud teoreemi väite. Kui lahend y ei ole Ω tipp, jätkame protseduuri ja ülimalt n sammuga jõuame lahendini, mis on hulga Ω tipp.

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne 21. Olgu X_0, X_1 kumerad hulgad ja $X_0 \subset X_1$. Tõestada, et kui $x_0 \in X_0$ ja x_0 on hulga X_1 tipp, siis x_0 on ka hulga X_0 tipp.

Järeldus (teoreemi tõestusest). Kui ülesande (1) lubatav hulk on mittetühi, siis lubataval hulgal on olemas tipp.

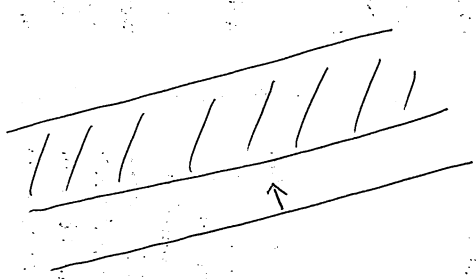
Ülesanne 22. Tõestada, et x on hulga $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ tipp parajasti siis, kui $(x, b - Ax)$ on hulga $\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0\}$ tipp. Siin A on $m \times n$ maatriks.

Märgime, et ülesandes 22 on näidatud põhikujult kanoonilisele kujule üleminekul saadavat lubatavat hulka.

Ülesanne 23. Tõestada, et kui põhikujul oleval ülesandel on olemas lahend, siis vähemalt üks lahenditest asub lubatava hulga tipus. Soovitus: kasutada ülesande 22 väidet.

Ülesanne* 7. Olgu $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \le b_i, i = 1, \dots, m\}$, kusjuures $m \ge n$ (hõlmab ka põhikujul oleva ülesande lubatavat hulka). Tõestada, et $x \in \Omega$ on hulga Ω tipp parajasti siis, kui x korral on rahuldatud vähemalt n võrdust $a^i \cdot x = b_i$, mille hulgas on n lineaarselt sõltumatut (vastavad vektorid a^i on lineaarselt sõltumatud).

Ei saa väita, et suvalises lineaarse planeerimise ülesandes, millel on lahend olemas, leidub lahend, mis on lubatava hulga tipp. Vastav näide on joonisel



kus kahe paralleelse sirgega määratud viirutatud osa on lubatav hulk, millel ei ole ühtegi tippu, ja nende sirgetega paralleelne on ka nivoosirge.

6. Võrrandisüsteemi baasilahendid

Siin uurime eelkõige kanoonilisel kujul oleva lineaarse planeerimise ülesande lubatavat hulka $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \ge 0\}$. Eeldame, et A on $m \times n$ maatriks (m rida, n veergu) ning tema astak on m, seega $m \le n$. Siit järeldub, et ka laiendatud maatriksi astak süsteemis $Ax=b$ on m. Olulisem juht on $m<n$, siis on süsteemil $Ax=b$ lõpmata palju lahendeid.

Et maatriksi A astak on m, siis leidub m lineaarselt sõltumatut veergu $a_{i_1},\dots,a_{i_m}$, olgu need välja valitud. Neid võib vaadelda ruumi $\mathbb{R}^m$ baasina, sellest tuleb nimetus baasiveerud. Tähistame $I=\{i_1,\dots,i_m\}$, nimetame selle elemente baasiindeksiteks, hulga $J=\{1,\dots,n\}\setminus I$ elemente nimetame baasiväliseks indeksiteks. Vastavalt sellele olgu $x_i, i\in I$, baasimuutujad, $x_j, j\in J$, baasivälised muutujad.

<u>Definitsioon</u>. Võrrandisüsteemi $Ax=b$ lahendit x, mille korral $x_j=0, j\in J$, nimetatakse baasilahendiks.

Ikameteme termineid: baasilahendi baasikomponendid $x_i, i\in I$, ja baasivälised komponendid $x_j, j\in J$ (muidugi $x_j=0, j\in J$). Baasilahendit x nimetatakse kidunud (kõdunud, mõnikord singulaarseks) baasilahendiks, kui leidub $i\in I$ nii, et $x_i=0$. Vastasel juhul on baasilahend mittekidunud (mõnikord nimetatakse regulaarseks), siis $x_i\neq 0$ iga $i\in I$ korral. Nendest mõistetest lähtub, et süsteemi $Ax=b$ lahend ei saa olla kidunud baasilahend ühe baasi suhtes ja mittekidunud teise baasi suhtes. Idüll võib olla ühe baasi suhtes kidunud baasilahend ka kidunud baasilahend teise baasi suhtes.

Definitsioon. Süsteemi $Ax=b$ baasilahendit x nimetatakse lubatavaks, kui $x_i \geq 0$, $i \in I$, ehk $x \geq 0$.

Oluline erijuht süsteemis $Ax=b$ on selline, kus $a_{i_1}=e_1, \dots, a_{i_m}=e_m$ (e_i, $i=1,\dots,m$, on veeruvektorid, mille komponent indeksiga i on 1, teised komponendid võrduvad nulliga). Sel juhul räägime ka ühikvektoritest koosnevatest baasivektoritest ehk baasist. Siis süsteemi $Ax=b$ vaatleme kujul

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \; i \in I. \qquad (1)$$

Juhime siin tähelepanu sellele, et baasi fikseerimisega saab iga võrrand oma indeksi $i \in I$, seejuures me ei nõua võrrandite järjekorda. Sisuliselt on siin süsteem lahendatud ehk on leitud süsteemi üldlahend

$$x_i = b_i - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j, \; i \in I,$$

kus x_j, $j \in J$, on vabad muutujad, suvaliselt valitavad. Idui baasivälised muutujad x_j, $j \in J$, on väärtuse saanud, saab baasimuutujad x_i, $i \in I$, üheselt määrata. Idui võtame

$x_j = 0, j \in J$, siis saame $x_i = b_i, i \in I$, ning kokku baasilahendi

$$\begin{cases} x_i = b_i, \ i \in I, \\ x_j = 0, \ j \in J. \end{cases}$$

Kui baasivektorid $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ ei ole ühikvektorid, siis saab süsteemi $Ax = b$ viia kujule (1) näiteks Gaussi elimineerimismeetodiga. Formaalselt, kui $B = (a_{i_1} \dots a_{i_m})$, mis on regulaarne $m \times m$ maatriks, siis $Ax = b$ on kirjutatav samaväärselt $B^{-1}Ax = B^{-1}b$ ja selles süsteemis on ühikvektoritest baas baasiindeksite hulgaga $I = \{i_1, \dots, i_m\}$. Vaadeldavat üleminekut võib veel esitada kui algse süsteemi $Ax = b$ kujul $B(x_i)_{i \in I} + C(x_j)_{j \in J} = b$ (C on sobiv maatriks) teisendamist samaväärsele kujule $(x_i)_{i \in I} + B^{-1}C(x_j)_{j \in J} = B^{-1}b$.

Siin toodud arutelu ja tähelepanekud on meil edaspidi aluseks tegelikele lahendusmeetoditele ja mõnede tulemuste põhjendamisele.

<u>Näide</u>. Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 = 3, \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 = 2. \end{cases}$$

Võime võtta näiteks $I = \{1, 2\}$, siis $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on ühikvektoritest baas, süsteem on kujul (1) ja esimene võrrand on indeksiga 1, teine võrrand indeksiga 2. Võib võtta $I=\{2,3\}$, siis süsteem on ikka kujul (1), esimene võrrand on indeksiga 3 ja teine võrrand indeksiga 2. Esimesel juhul on baasilahend $x^1=(3,2,0,0)$, teisel juhul $x^2=(0,2,3,0)$, mõlemad on lubatavad. Ilga $\frac{1}{2}(x^1+x^2)$ on võrrandisüsteemi lahend, aga ta ei ole baasilahend. Ei saa võtta baasiindeksite hulgaks $I=\{1,3\}$, sest a_1 ja a_3 on lineaarselt sõltuvad. Kui võtame $I=\{3,4\}$, siis saame baasilahendi $x=(0,0,-1,2)$, kuid see ei ole lubatav baasilahend (meenutame, et baasilahendi mõistes olid üldised veeruvektorid baasis, mitte ainult ühikvektorid).

7. Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

Vaatleme hulka $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$. ja teeme süsteemi $Ax=b$ kohta samad eeldused, mis eelmises punktis, s.t. A on $m\times n$ maatriks ja tema astak on m. Siis $m\leq n$.

<u>Teoreem.</u> Süsteemi $Ax=b$ lubatavad baasilahendid ühtivad hulga Ω tippudega.

<u>Tõestus.</u> 1) olgu x süsteemi $Ax=b$ lubatav baasilahend, baasiindeksite hulk olgu $I=\{i_1,\dots,i_m\}$. Siis $x_i\geq 0,\ i\in I$, ja

$x_i = 0, i \notin I$, muidugi $x \in \Omega$. Oletame väitevastaselt, et x ei ole hulga Ω tipp. Siis leiduvad $x^1, x^2 \in \Omega$, $x^1 \neq x^2$, ja $\lambda \in (0,1)$ nii, et $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$. Kuna $x_i = 0$, siis ka $x_i^1 = 0$ ja $x_i^2 = 0$, seega $x_i^1 = x_i^2 = 0$, $i \notin I$. Et $x^1 \in \Omega$, siis $Ax^1 = b$, mille võib $x_i^1 = 0, i \notin I$, tõttu kirjutada

$$(a_{i_1} \ldots a_{i_m})(x_i^1)_{i \in I} = b.$$

Analoogiliselt

$$(a_{i_1} \ldots a_{i_m})(x_i^2)_{i \in I} = b.$$

Et aga maatriks $(a_{i_1} \ldots a_{i_m})$ on regulaarne, siis $x_i^1 = x_i^2$, $i \in I$, ja $x^1 = x^2$, mis on vastuolu.

2) olgu x hulga Ω tipp. Tähistame $I_+ = \{i \mid x_i > 0\}$. Võib olla, et $I_+ = \emptyset$, siis $x = 0$, $Ax = b = 0$ ja x on lubatav baasilahend iga baasi suhtes. Edaspidi olgu $I_+ \neq \emptyset$.

Näitame, et A veerud $a_i, i \in I_+$, on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et nad on lineaarselt sõltuvad. Siis leiduvad $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in I_+$, nii, et $\sum_{i \in I_+} |\alpha_i| \neq 0$ ja $\sum_{i \in I_+} \alpha_i a_i = 0$. Defineerime $\alpha_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I_+$, olgu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Võrdus $\sum_{i \in I_+} \alpha_i a_i = 0$ on ühtlasi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ ehk $A\alpha = 0$. Tähistame $\mu = \min\left\{ \frac{x_i}{|\alpha_i|} \mid \alpha_i \neq 0 \right\}$, siis muidugi $\mu > 0$. Moodustame vektorid $y = x + \mu\alpha$ ja $z = x - \mu\alpha$.

Et $Ax = b$ ja $A\alpha = 0$, siis $Ay = b$ ja $Az = b$. Kui $\alpha_i = 0$, siis $y_i = z_i = x_i \geq 0$. Kui aga $\alpha_i \neq 0$, siis $i \in I_+$ ja $x_i \pm \mu\alpha_i \geq x_i - \mu|\alpha_i| \geq x_i - \frac{x_i}{|\alpha_i|}|\alpha_i| = 0$. Sellega oleme näidanud, et $y \geq 0$ ja $z \geq 0$, mistõttu $y, z \in \Omega$. Seejuures $y \neq z$, sest eksisteerib $\alpha_i \neq 0$. Nüüd $x = \frac{1}{2}(y+z)$, mis on vastuolus sellega, et x on hulga Ω tipp. Oleme näidanud, et $a_i, i \in I_+$, on lineaarselt sõltumatud.

Maatriksi A veergudel on m komponenti, seepärast $|I_+| \leq m$. Kui $|I_+| = m$, siis $a_i, i \in I_+$, on baas ja x talle vastav lubatav baasilahend. Kui $|I_+| < m$, siis saab veergudele $a_i, i \in I_+$, lisada A veerge nii, et tulemuseks on lineaarselt sõltumatu süsteem $a_i, i \in I$, $I_+ \subset I$, $|I| = m$ (kui nii täiendada ei saaks, siis oleks A astak väiksem kui m). Seejuures $x_i = 0$, $i \notin I$, mistõttu x on baasile $a_i, i \in I$, vastav lubatav baasilahend.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatav hulk on mittetühi, siis sellel ülesandel on olemas lubatav baasilahend.

Täpsemalt öeldes on lubatav baasilahend lubatavas hulgas esineval lineaarsel süsteemil, aga vaadeldakse ka järelduses toodud väljendust.

Põhjenduseks märgime, et mittetühjal lubataval hulgal on olemas tipp (punkt 5), see on lubatav baasilahend.

Märkused, tähelepanekud. Kui baas $a_i, i \in I$, on välja valitud, siis talle vastab parajasti üks baasilahend, sest süsteemil $(a_{i_1} \dots a_{i_m})(x_i)_{i \in I} = b$ on parajasti üks lahend. See baasilahend võib olla lubatav või mitte. Teoreemi tõestuses nägime, et kui ta on lubatav, siis ta on lubatava hulga tipp. Kui ei ole lubatav, siis ta ei kuulu lubatavasse hulka.

Teiselt poolt, kui on valitud välja lubatava hulga tipp, siis on see lubatav baasilahend ja juhul $|I_+| = m$ on baas, millele ta vastab, üheselt määratud. See on mittekidunud ehk regulaarne lubatava baasilahendi juhtum. Kui aga $|I_+| < m$, mis tähendab, et lubatava hulga tipp ehk lubatav baasilahend on kidunud ehk singulaarne, võib baasi saada mitmel viisil veergude $a_i, i \in I_+$, täiendamise teel või on täiendamisvõimalusi ainult üks. Seega lubatava hulga kidunud tipp võib vastata mitmele baasile või võib vastata parajasti ühele baasile, teisiti öeldes, võib olla mitme baasi suhtes lubatav baasilahend või parajasti ühe baasi suhtes lubatav baasilahend.

8. Üleminek ühelt baasilt teisele

Hiljem näeme, et lineaarse planeerimise ülesannete lahendusmeetodid kasutavad üleminekut ühelt baasilt teisele, osa neist liiguvad lubatava hulga tipust tippu. Baase ja järelikult ka lubatava hulga tippe on seejuures lõplik hulk.

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

aga tegeleme algul ikka lubatava hulgaga $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Seejuures A on $m \times n$ maatriks, mille astak on m. Eeldame, et on välja valitud baasimuutujad ehk baasiindeksite hulk I, $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$ ja oleme süsteemi $Ax = b$ viinud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i = a_{i0}, \quad i \in I, \qquad (1)$$

kus võtsime kasutusele tähised a_{i0} vabaliikmete jaoks. Meenutame, et seda saab alati teha näiteks Gaussi meetodiga ja teoorias regulaarse maatriksiga süsteemi mõlemaid pooli korrutades. Ühtlasi on teada süsteemi (1) üldlahend

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j, \quad i \in I,$$

samuti baasilahend

$$\begin{cases} x_i = a_{i0}, & i \in I, \\ x_j = 0, & j \in J. \end{cases}$$

Vaatame niisugust üleminekut, kus ainult üks baasimuutuja ehk baasiindeks asendub uuega baasiväliste hulgast, ülejäänud ei asendu. Niisiis, baasimuutuja x_k, $k \in I$, asemele tuleb muutuja x_l, $l \in J$. Nõrandi (1) $k \in I$ korral kirjutame

$$x_k + a_{kl} x_l + \sum_{j \in J \setminus \{l\}} a_{kj} x_j = a_{k0},$$

kusjuures eeldame, et $a_{kl} \neq 0$. Sellest saame peale jagamist arvuga a_{kl}

$$x_l + \frac{1}{a_{kl}} x_k + \sum_{j \in J \setminus \{l\}} \frac{a_{kj}}{a_{kl}} x_j = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$$

ehk (uus nõrand saab indeksi l)

$$x_l + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{lj} x_j = \bar{a}_{l0}, \qquad (2)$$

kus $\bar{J} = (J \setminus \{l\}) \cup \{k\}$, $\bar{a}_{lk} = \frac{1}{a_{kl}}$, $\bar{a}_{lj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}$, $j \in J \setminus \{l\}$, $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$. Nõrandi (2) võib veel kirjutada

$$x_l = \bar{a}_{l0} - \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{lj} x_j. \qquad (3)$$

Seejärel elimineeritakse x_l süsteemi (1) nõranditest $i \in I \setminus \{k\}$ korral (x_l esineb summas $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j$), asendades ta (3) põhjal (muidugi tekib uude summasse x_k). Selle tulemusena saadakse võrrandid

$$x_i + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}, \quad i \in I \setminus \{k\}.$$

Lisades siia võrrandi (2), jõuame uue süsteemini

$$x_i + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}, \quad i \in \bar{I}, \tag{4}$$

kus $\bar{I} = (I \setminus \{k\}) \cup \{l\}$ on uus baasiindeksite hulk. Vastav baasilahend on

$$\begin{cases} x_i = \bar{a}_{i0}, & i \in \bar{I}, \\ x_j = 0, & j \in \bar{J}. \end{cases}$$

Vaatame järgnevas, kuidas teha praktilisi arvutusi. Eeldame alguses seletuse paremini arusaamiseks, et $I = \{1, \dots, m\}$, siis süsteem (1) on

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{1n} x_n = a_{10}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + a_{m,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{mn} x_n = a_{m0}. \end{cases}$$

Moodustame tabeli

$$\begin{array}{c|cccccccccccc|c}
 & x_1 & \dots & x_k & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_l & \dots & x_n & \\
\hline
a_{10} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & a^1 \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
a_{k0} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & a_{k,m+1} & \dots & \boxed{a_{kl}} & \dots & a_{kn} & a^k \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
a_{m0} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} & a^m \\
\hline
\end{array}$$

milles paremal servas on märgitud reavektorid

$a^i = (a_{i0}, 0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots, 0, a_{i,m+1}, \dots, a_{in})$, kusjuures neid tabelisse ei tarvitse kirjutada. Selles tabelis esimene veerg on indeksiga 0 ja veeruindeksid on loomulikus järjestuses. Süsteemi (4) tabel on järgmine (me ei muuda veergude järjestust)

	x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n	
$\bar a_{10}$	1	...	$\bar a_{1k}$	...	0	$\bar a_{1,m+1}$	...	0	...	$\bar a_{1n}$	$\bar a^1$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar a_{l0}$	0	...	$\bar a_{lk}$	...	0	$\bar a_{l,m+1}$	...	1	...	$\bar a_{ln}$	$\bar a^l$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar a_{m0}$	0	...	$\bar a_{mk}$	...	1	$\bar a_{m,m+1}$	...	0	...	$\bar a_{mn}$	$\bar a^m$.

Uus tabel sisaldab samuti m ühikveergu, indeksiga k veeru asemel on see nüüd veerus indeksiga l. Rida indeksiga k enam ei ole, selle asemel on rida indeksiga l. Süsteemilt (1) süsteemile (4) ehk uuele tabelile üleminek toimub elementaarteisendustega. Need on järgmised:

1) rida indeksiga ~~k~~ k jagatakse arvuga $a_{kl} \neq 0$, s.t.

$$\bar a^l = \frac{a^k}{a_{kl}} ; \qquad (5a)$$

2) igast reast indeksiga $i \in I \setminus \{k\}$ lahutatakse arvuga a_{il} korrutatud rida $\bar a^l$ (seda me eelnevalt valemitega ei väljendanud, aga see on x_l elimineerimine süsteemi (1) võrranditest indeksitega $i \in I \setminus \{k\}$). Selle tulemusena tekivad

veergu indeksiga l arvud 0 indeksitega $i \in I \setminus \{k\}$ ridadesse. Need teisendused väljenduvad võrdustega

$$\bar{a}^i = a^i - a_{il}\bar{a}^l = a^i - \frac{a_{il}}{a_{ik}} a^k, \quad i \in I \setminus \{k\}. \qquad (5b)$$

Algtabelis rida indeksiga k nimetatakse juhtreaks, veergu indeksiga l juhtveeruks, elementi a_{kl} juhtelemendiks.

Uue tabeliga võib jätkata samamoodi: valida baasiväliste veergudest uus juhtelement (mis tähendab juhtveeru ja juhtrea valikut), teha teisendused (5) ja sellega saada uus baas ja vastav baasilahend. On selge, et arvutuste alustamiseks ei pea baasiveerud paiknema tabeli vasakpoolses servas, oluline on, et nad on valitud ja teisendatud ühikveergudeks.

<u>Näide.</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	−1	1	1	0	0	a^3	baasilahend on
1	1	−1	0	1	0	a^4	$x = (0, 0, 1, 1, 2)$
2	$\boxed{1}$	1	0	0	1	a^5	valime $l = 1$, $k = 5$
3	0	$\boxed{2}$	1	0	1	$\bar{a}^3$	baasilahend on
−1	0	−2	0	1	−1	$\bar{a}^4$	$x = (2, 0, 3, -1, 0)$
2	1	1	0	0	1	$\bar{a}^1$	valime $l = 2$, $k = 3$
3/2	0	1	1/2	0	1/2	$\bar{\bar{a}}^2$	baasilahend on
2	0	0	1	1	0	$\bar{\bar{a}}^4$	$x = (1/2, 3/2, 0, 2, 0)$
1/2	1	0	−1/2	0	1/2	$\bar{\bar{a}}^1$	

Selliselt võib minna baasilt naaberbaasile ja loomulik on küsida, millise eesmärgiga? Seame endale kaks eesmärki:

1) saada lubatavaid baasilahendeid (s.t. $x \geq 0$). Näites nägime, et algselt meil juba oli selline olukord ja selle saime ka peale teist sammu;

2) minna lubatavalt baasilahendilt sellisele lubatavale baasilahendile (lubatava hulga tipust naabertippu), kus sihifunktsioon kasvab või vähemalt ei kahane. Näites nägime, et esimese sammuga lubatava hulga tipust teise tippu ei satutud.

9. Üleminek lubatavalt baasilahendilt lubatavale baasilahendile

Jätkame eelmise punkti meneratsiooniga. Eeldame siin, et süsteemist (1) saadud baasilahend on lubatav, s.t. $a_{i0} \geq 0, i \in I$. Seame eesmärgiks leida juhtelement nii, et saaksime peale üleminekut lubatava baasilahendi. Oletame, et juhtveerg (indeks l) on valitud. Võrdusest (5a) saame ridade esimeste liikmete jaoks $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$ ja võrdusest (5b) $\bar{a}_{i0} = a_{i0} - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a_{k0}, i \in I \setminus \{k\}$. Eelduse kohaselt $a_{k0} \geq 0$. Kui $a_{k0} = 0$, siis $\bar{a}_{l0} = 0$ ja $\bar{a}_{i0} = a_{i0} \geq 0$, $i \in I \setminus \{k\}$, mis tähendab, et uus baasilahend on lubatav. Kui $a_{k0} > 0$, siis ei ole võimalik saada $\bar{a}_{l0} = 0$, seepärast $\bar{a}_{l0} > 0$ ja see omakorda määrab, et $a_{kl} > 0$ ehk juhtelement a_{kl} peab olema positiivne, mida me edaspidi eeldame. Niisiis, $a_{k0} > 0$ korral $\bar{a}_{l0} > 0$. Peale selle, $\bar{a}_{i0} \geq 0$, $i \in I \setminus \{k\}$, leiab aset parajasti siis, kui

$a_{i0} - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a_{k0} \geq 0$ ehk $a_{i0} \geq \frac{a_{il}}{a_{kl}} a_{k0}, i \in I \setminus \{k\}$. See võrratus kehtib, kui $a_{il} \leq 0$, sest $a_{i0} \geq 0$ eelduse kohaselt. Kui aga $a_{il} > 0$, siis saame nõude $\frac{a_{i0}}{a_{il}} \geq \frac{a_{k0}}{a_{kl}}, i \in I \setminus \{k\}$. Seega juhtrida (indeks k) piisab valida nii, et

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{il}} \,\middle|\, a_{il} > 0, i \in I \right\}. \qquad (6)$$

Sõnadega formuleeringuna: kui juhtveerg (indeks l) on valitud, siis juhtrida indeksiga k valitakse nii, et selles reas ja veerus indeksiga l paiknev element (juhtelement) oleks positiivne ja veerus indeksiga 0 paikneva elemendi suhe veerus l oleva positiivse elemendiga oleks minimaalne. Nõudust (6) nimetame juhtelemendi valiku reegliks.

<u>Näide</u>. Jätkame eelmises punktis toodud tabeliga. Juhtrea valiku reeglit rikuti esimesel sammul, teeme selle uuesti.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	−1	1	1	0	0
1	$\boxed{1}$	−1	0	1	0
2	1	1	0	0	1
2	0	0	1	1	0
1	1	−1	0	1	0
1	0	2	0	−1	1

baasilahend on $x=(0,0,1,1,2)\geq 0$, valime $l=1$, siis (6) põhjal $k=4$ ehk $a_{41}=1$ on juhtelement

Ülesanne 24. Valida näite algtabelis $l=2$ ja juhtida reegli kohaselt. Teha ka teine ~~[illegible]~~ üleminek, valides vähima võimaliku indeksiga juhtveeru ja seejärel reeglikohase juhtrea. Mõlemal üleminekul näidata indekseeritud juhtelement.

10. Simpleksmeetod

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat lineaarse planeerimise ülesannet

$$\max\{c\cdot x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}. \qquad (1)$$

Punktis 5 nägime, et kui ülesandel (1) on lahend olemas, siis vähemalt üks lahenditest paikneb lubatava hulga tipus. Lubatava hulga tipp on süsteemi $Ax=b$ lubatav baasilahend ja kuna baaside hulk on lõplik, on lõplik ka lubatava hulga tippude hulk. Seega võib põhimõtteliselt läbi vaadata kõik tipud, arvutada neis välja sihifunktsiooni väärtused ja valida suurima sihifunktsiooni väärtusega tipp lahendiks. Tegelikkuses nii teha ei saa, sest see pole ökonoomne. Me nägime eespool, et tipu x komponentide leidmiseks tuleb lahendada $m \times m$ maatriksiga süsteem $(a_{i_1} \dots a_{i_m})(x_i)_{i \in I} = b$. Väheigi suurema tippude arvu korral ei ole ajaliselt võimalik seda teha ~~kõigi~~ kõikide tippude korral. Antud n ja m korral on baaside maksimaalne arv $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$. Kui näiteks $n = 100$ ja $m = 50$ (praktikas on vaja palju suuremamahulisi ülesandeid lahendada), siis kasutades Stirlingi valemit $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, leiame

$$\binom{100}{50} \sim \frac{\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{\left(\frac{50}{e}\right)^{50} \cdot \left(\frac{50}{e}\right)^{50}} = \frac{\left(2 \cdot \frac{50}{e}\right)^{100}}{\left(\frac{50}{e}\right)^{50} \cdot \left(\frac{50}{e}\right)^{50}} = 2^{100} > 10^{30}.$$

Hoopis mõistlikum on minna järjest naaberbaasidele (sealhulgas naabertippudele) nii, et sihifunktsiooni väärtus suureneb (või vähemalt ei kahane).

Asume kirjeldama simpleksmeetodit. Vaatleme ülesannet (1), kus $m \times n$ maatriksi A astak olgu m. Eeldame (need on simpleksmeetodi eeldused), et

1° Nõrmandisüsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = a_{i0}, \quad i \in I. \qquad (2)$$

Meenutame, et seda saab alati teha, vaadeldes $Ax = b$ kujul $(a_{i_1} \dots a_{i_m})(x_i)_{i\in I} + B(x_j)_{j\in J} = b$, mis on samaväärne süsteemiga $(x_i)_{i\in I} + \tilde{A}^{-1}B(x_j)_{j\in J} = \tilde{A}^{-1}b$, kus $\tilde{A} = (a_{i_1} \dots a_{i_m})$ on regulaarne $m \times m$ maatriks. Praktilistes arvutustes sobib selleks näiteks Gaussi elimineerimismeetod.

2° Baasiindeksite hulgale I vastav baasilahend on lubatav, s.t. $a_{i0} \geq 0$, $i \in I$.

3° Sihifunktsioon on (vähemalt lubatavas hulgas) esitatud kujul

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j\in J} a_{0j} x_j = x_0, \qquad (3)$$

kus võtsime kasutusele uue muutuja (sihimuutuja) x_0. Kujule (3) saab sihifunktsiooni viia järgmiselt:

$$c \cdot x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{j\in J} c_j x_j =$$

/ asendame x_i, $i \in I$, süsteemist (2) /

$$= \sum_{i\in I} c_i a_{i0} - \sum_{i\in I} c_i \sum_{j\in J} a_{ij} x_j + \sum_{j\in J} c_j x_j =$$

/ kasutame võrdust $\sum_{i\in I} c_i \sum_{j\in J} a_{ij} x_j = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} c_i a_{ij}\right) x_j$ /

$$= \sum_{i\in I} c_i a_{i0} - \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} c_i a_{ij} - c_j\right) x_j =$$

/ võtame kasutusele vastavad tähised /

$$= a_{00} - \sum_{j\in J} a_{0j} x_j .$$

Teisenduste käigus nägime, et neid saab teha süsteemi $Ax = b$ lahendite korral (kontarime (2)), seega ka lubatavas hulgas.

Lisame ühe tähelepaneku süsteemi esitamisel kujul (2). Idee lineaarse planeerimise ülesande esialgses sõnastuses on kitsendused esitatud võrratustena $Ax \leq b$ (näiteks põhikujus), s.t.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

siis kanoonilisele kujule viimisel võetakse kasutusele uued muutujad $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, nõudes nende mittenegatiivsust, ja kitsendused tulevad

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad = b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + \dots + x_{n+m} = b_m.$$

Muutujad $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ sobivad esialgseteks baasimuutujateks, mis vastavad saadud süsteemi maatriksis viimasele m veerule ühikvektoritest kui baasile.

Vaatame sihifunktsiooni (3). Baasiindeksite hulgale I vastava baasilahendi korral $c \cdot x = a_{00}$, sest $x_j = 0$, $j \in J$. Oletame, et esituses (3) leiab aset $a_{0j} \geq 0$, $j \in J$. Võtame mingi lubatava hulga elemendi x. Siis võib kasutada esitust (3) ja $x \geq 0$ tõttu $x_j \geq 0$, $j \in J$, seepärast

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j \leq a_{00},$$

mis tähendab, et eelduses 2° vaadeldud baasilahend $x_i = a_{i0}, i \in I, x_j = 0, j \in J$, on optimaalne. Sellega oleme saanud järgmise tulemuse.

<u>Lause</u> (optimaalsuse piisav tingimus). Kui sihifunktsioonis kujul (3) kehtib $a_{0j} \geq 0$ iga $j \in J$ korral, siis baasiindeksite hulgale I vastav lubatav baasilahend on optimaalne.

Enne simpleksmeetodi kirjelduse juurde asumist esitame veel kaks arutelu.

Süsteemi $Ax = b$ kujul (2) kirjutame

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j, \; i \in I. \qquad (4)$$

Eeldame, et $a_{i0} > 0, i \in I$, s.t. baasilahend on regulaarne (mittekidunud). Vaatame juhtu, kus leidub $a_{0l} < 0, l \in J$. Võtame $x_l > 0$ ja $x_j = 0, j \in J \setminus \{l\}$. Määrame $x_i, i \in I$, võrduste (4) abil, siis küllalt väikese $x_l > 0$ korral $x_i = a_{i0} - a_{il} x_l \geq 0, i \in I$, mis tähendab, et oleme saanud lubatava hulga elemendi. Selle korral on sihifunktsiooni väärtus $a_{00} - a_{0l} x_l > a_{00}$ (sest $a_{0l} < 0, x_l > 0$), s.t. vaadeldav baasilahend ei ole optimaalne. Niisiis, regulaarse baasilahendi korral on optimaalsuse piisav tingimus ka tarvilik. Esitatud arutelust nähtub, et optimaalsuse piisav tingimus on tarvilik ka mõningate kidunud baasilahendite korral. Nimelt, olgu $I_0 = \{i \in I \mid a_{i0} = 0\}$. Kui $a_{il} \leq 0$ iga $i \in I_0$ korral, siis vaadeldava baasilahendi optimaalsuseks on tarvilik, et $a_{0l} \geq 0$.

Teises arutelus oletame, et oleme juhtveeru indeksiga $l \in J$ välja valinud, kusjuures $a_{0l} < 0$. Vaatame juhtu, kus $a_{il} \leq 0$ iga $i \in I$ korral, s.t. pole võimalik rakendada juhtrea valiku reeglit. Siis võttes $x_l > 0$ (suvaliselt) ja $x_j = 0$, $j \in J \setminus \{l\}$, seejärel näiteks (4) abil $x_i = a_{i0} - a_{il} x_l$, $i \in I$, saame lubatava hulga elemendi, kuid sihifunktsiooni väärtus $a_{00} - a_{0l} x_l$ on kuitahes suur, kui x_l on kuitahes suur. Seega pole sihifunktsioon lubatavas hulgas ülalt tõkestatud, mis tähendab, et planeerimisülesanne (1) pole lahenduv.

Kui läheme üle uuele baasile, siis optimaalsuse tingimuse kontrollimisel peab sihifunktsioon olema avaldatud uute baasiväliste muutujate kaudu. Seega tuleb uus baasimuutuja x_l sihifunktsioonist elimineerida. Seda tehakse koos ühelt baasilt teisele üleminekul tehtava elimineerimissammuga, kirjutades (3) kujul $x_0 + \sum_{j \in J} a_{0j} x_j = a_{00}$ (seda nimetatakse sihivõrrandiks) ja lisades ta elimineerimistabelisse. Kui eeldame, et $I=\{1,\dots,m\}$ (tegelikult pole see vajalik), siis saame tabeli

$$
\begin{array}{c|c|ccccccccccc|c}
 & x_0 & x_1 & \dots & x_k & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_l & \dots & x_n & & \\
\hline
a_{00} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{0,m+1} & \dots & a_{0l} & \dots & a_{0n} & & a^0 \\
\hline
a_{10} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & & a^1 \\
\cdot & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & & \cdot \\
a_{k0} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & a_{k,m+1} & \dots & \boxed{a_{kl}} & \dots & a_{kn} & & a^k \\
\cdot & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & & - \\
a_{m0} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} & & a^m \\
\hline
\end{array}
$$

Veergu muutujaga x_0 ei kirjutata, sest see jääb teisenduste käigus muutumatuks. Rida a^0 nimetatakse sihifunktsiooni reaks. Tabelit nimetatakse simplekstabeliks (ka siis, kui eeldus 2° ei ole täidetud ja ei leia aset $I=\{1,\dots,m\}$), elimineerimissammu (üleminekut naaberbaasile koos sihifunktsiooni avaldamisega uue baasi suhtes baasiväliste muutujate kaudu) simpleksisammuks ehk simpleksteisenduseks.

Ütleme, et simplekstabel on lubatav, kui $a_{i0}\geq 0$ iga $i\in I$ korral. Seda me tegelikult eeldasime (eeldus 2°). Ütleme, et simplekstabel on duaalselt lubatav, kui $a_{0j}\geq 0$ iga $j\in J$ korral.

Kui simplekstabel on lubatav ja duaalselt lubatav, siis on täidetud optimaalsuse tingimus ja leitud baasilahend on optimaalne.

Peale simpleksisammu saame tabeli

	x_1	…	x_k	…	x_m	x_{m+1}	…	x_l	…	x_n	
$\bar{a}_{00}$	0	…	$\bar{a}_{0k}$	…	0	$\bar{a}_{0,m+1}$	…	0	…	$\bar{a}_{0n}$	$\bar{a}^0$
$\bar{a}_{10}$	1	…	$\bar{a}_{1k}$	…	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	…	0	…	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{a}^1$
.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	..
$\bar{a}_{l0}$	0	…	$\bar{a}_{lk}$	…	0	$\bar{a}_{l,m+1}$	…	1	…	$\bar{a}_{ln}$	$\bar{a}^l$
.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	..
$\bar{a}_{m0}$	0	…	$\bar{a}_{mk}$	…	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	…	0	…	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{a}^m$

Formuleerime nüüd simpleksmeetodi algoritmi. Teeme eeldused 1°–3°.

1) valime $l \in J$ nii, et $a_{0l} < 0$. Kui sellist kordajat ei leidu, on vaadeldav baasilahend optimaalne, selle baasikomponendid a_{i0} asuvad tabeli ridades a^i, $i \in I$, esimesel kohal. Kui kordajaid $a_{0l} < 0$, $l \in J$, on mitu, valitakse neist üks, näiteks vähima veeruindeksiga. Veerg indeksiga l saab juhtveeruks;

2) vaadatakse, kas veerus indeksiga l on ridades indeksitega $i \in I$ positiivseid elemente. Kui ei, siis on sihifunktsioon lubatavas hulgas ülalt tõkestamata ja planeerimisülesandel lahend puudub. Kui on, rakendatakse juhtrea valiku reeglit: leitakse $k \in I$ nii, et

$a_{kl} > 0$ ja

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{il}} \,\middle|\, a_{il} > 0, i \in I\right\}.$$

Kui seda tingimust rahuldavaid ridu on mitu, valitakse neist üks, näiteks vähima reaindeksiga. Element a_{kl} saab juhtelemendiks;

3) tehakse simplekssamm

$$\bar{a}^l = \frac{a^k}{a_{kl}},$$

$$\bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \; i \in (I \setminus \{k\}) \cup \{0\},$$

millega minnakse üle uuele baasile indeksite hulgaga $\bar{I} = (I \setminus \{k\}) \cup \{l\}$, tagades ühtlasi selle korral eeldused $1^\circ - 3^\circ$;

4) uue baasiga jätkatakse algoritmi etapiga 1).

Vaatame, kuidas muutub sihifunktsiooni väärtus simplekssammul. Selle käigus arvutatakse uus rida

$$\bar{a}^0 = a^0 - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a^k,$$

mis tähendab, et

$$\bar{a}_{00} = a_{00} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{k0}.$$

Juhtveeru valiku kohaselt $a_{0l} < 0$, juhtrea valiku kohaselt $a_{kl} > 0$. Kui baasilahend enne simplekssammu on regulaarne (mittekidunud), siis $a_{k0} > 0$ (baasilahendi komponendi x_k väärtus). Seega sel juhul $\bar{a}_{00} > a_{00}$, s.t. sihifunktsiooni väärtus suureneb. Isegi kui baasilahend enne simpleksisamme on singulaarne (kidunud), aga $a_{k0} > 0$, siis ikkagi sihifunktsioon muureneb. See on võimalik, kui kõigi nende indeksite $i \in I$ korral, kus $a_{i0} = 0$, kehtib $a_{ie} \leq 0$, sest siis ei saa nende indeksite hulgast valida juhtrea indeksit. Sihifunktsiooni väärtus jääb samaks, kui baasilahend on niiviisi singulaarne, et $a_{k0} = 0$ ja rida indeksiga k on juhtrida, s.t. $a_{ke} > 0$.

Järeldus. Kui ülesandel (1) on lahend olemas ja ei ole ühtegi singulaarset lubatavat baasilahendit (lubataval hulgal ei ole ühtegi singulaarset tippu), siis suvalisest lubatavast baasilahendist algav simpleksmeetod annab lõpliku arvu sammudega optimaalse lahendi.

Näide. Antud on kitsendused

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 2,$$

on vaja leida $x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$ nii, et $x_1 + 2x_2$ oleks maksimaalne.

Algtabel on

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & x_1 & \overset{\downarrow}{x_2} & x_3 & x_4 & x_5 \\
\hline
0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & -1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Siin $I = \{3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2\}$, $c \cdot x = -(-1)x_1 - (-2)x_2$

on avaldatud baasiväliste muutujate x_1 ja x_2 kaudu; kui seda ei oleks, võiksime kõik muutujate kordajad sihifunktsiooni kanda tabelisse ja elimineerida x_3, x_4, x_5 kordajad. Algtabel on lubatav, ei ole duaalselt lubatav. Valime juhtveeru indeksiks $l=2$, siis juhtrea valiku reegli kohaselt $k=3$. Simpleks-sammu järel saame tabeli

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	−3	0	2	0	0
1	−1	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0
1	$\boxed{2}$	0	−1	0	1

Ka see tabel ei ole duaalselt lubatav, juhtveeruks saab valida ainult veeru indeksiga $l=1$ ja seejärel on juhtrea ainuke võimalik indeks $k=5$. Simpleksisamm viib tabelini

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$3\frac{1}{2}$	0	0	$1/2$	0	$3/2$
$3/2$	0	1	$1/2$	0	$1/2$
2	0	0	1	1	0
$1/2$	1	0	$-1/2$	0	$1/2$

Saadud tabel on lubatav ja duaalselt lubatav, ülesande optimaalne lahend on $x^* = (1/2, 3/2, 0, 2, 0)$, sihifunktsiooni maksimaalne väärtus on $c \cdot x^* = 3\frac{1}{2}$.

Ülesanne 25. Valida kõik võimalikud juhtelemendid tabelis

0	0	1	−2	−1	0	0	0	0
2	3	5	2	−4	0	0	1	0
3	2	2	2	4	0	0	0	1
7	4	4	1	8	1	0	0	0
6	4	4	4	8	0	1	0	0

simpleksmeetodi kohaselt. Põhjendada ja anda juhtelementide indeksid.

Ülesanne 26. Lahendada simpleksmeetodiga ülesanne

$$x_1 + x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 8,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_4 = 2,$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0.$$

Kui jõuame simpleksmeetodi rakendamisel lubatava baasilahendini, kus juhtreas leiab aset võrdus $a_{k0} = 0$ (see on võimalik kõdunud baasilahendi korral), ja see nähtus kordub ka järgmistel sammudel, siis võime tagasi jõuda sama baasini. Sellist olukorda nimetatakse tsükliks. On tõestatud, et

1) tsükkel võib tegelikult tekkida;

2) tsükkel on vähemalt 6 sammu pikk;

3) tsükkel saab tekkida, kui simplekstabeli veerus indeksiga 0 on vähemalt kaks elementi $a_{i0} = 0$, $i \in I$.

11. Leksikograafiline simpleksmeetod

Eelmise punkti lõpus märkisime, et simpleksmeetodis võib tegelikult esineda tsükkel ja seda juhul, kui on olemas singulaarseid tippe. Tsükli vältimiseks täiustatakse juhtrea valiku reeglit ja see on leksikograafilise simpleksmeetodi mõte.

Defineerime hulgas $\mathbb{R}^n$ leksikograafilise järjestuse. Kui $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, y_n)$, siis $x \succ y$ tähendab, et $x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \vee \dots \vee (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n > y_n)$. Selliselt defineeritakse range järjestuse seos. Näiteks $x \succ 0$ tähendab, et vektori x esimene nullist erinev komponent on positiivne. Samuti võib vahekorda $x \succ y$ väljendada samaväärselt $x - y \succ 0$.

Järjestusseos ise määratakse samaväärsusega $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succ y \vee x = y$ ja see on lineaarne. Varem kasutatud seos $x \geqslant y$ on vaid osaline järjestus.

Asume kirjeldama leksikograafilist simpleksmeetodit. Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Peame silmas eelmise punkti tähistusi ja mõisteid. Eeldame, et

1° Süsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = a_{i0}, \; i \in I.$$

2° Kehtib $a^i \succ 0, i \in I$.

3° Vähemalt lubatavas hulgas

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j .$$

Märgime, et eeldus 2° tingib selle, et $a_{i0} \geq 0, i \in I$, ehk simpleksitabeli lubatavuse. Lubatavas tabelis on eeldus 2° täidetud, kui baasilahend on regulaarne, sest siis $a_{i0} > 0$ iga $i \in I$ korral. Kui baasilahend on singulaarne, siis on 2° täidetud näiteks juhul $I = \{1, \ldots, m\}$. Singulaarse baasilahendi juhul võib vajaduse veergude järjekorda muuta, tõstes ühikveerud (need on 1° põhjal olemas) algtabelis vasakule. See tingib simpleksitabelis teistmugse muutujate järjestuse, mis säilitatakse lahendamise jooksul.

Seame eesmärgiks minna uuele baasile nii, et simplekstabelis uued read (nende hulka ei loe sihifunktsiooni rida) tuleksid leksikograafiliselt positiivsed, s.t. $\bar{a}^i \succ 0, i \in I$. Kui teeme simplekssammu regulaarsete baasilahenditega, siis see leiab aset. Igal juhul simplekssammus $a^k \succ 0$ ja $a_{kl} > 0$ tagab, et $\bar{a}^k = \frac{a^k}{a_{kl}} \succ 0$. Ridades indeksitega $i \in I \setminus \{k\}$ soovime saada, et

$$\bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k \succ 0.$$

Teame, et $a^i \succ 0, a^k \succ 0$ ja kui $a_{il} \leq 0$, siis $\bar{a}^i \succ 0$ leiab aset. Kui aga $a_{il} > 0$, siis

$$a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k \succ 0 \Leftrightarrow \frac{a^i}{a_{il}} \succ \frac{a^k}{a_{kl}}.$$

Seega piisab valida juhtrida nii, et

$$\frac{a^k}{a_{kl}} = \operatorname{lexmin} \left\{ \frac{a^i}{a_{il}} \,\middle|\, a_{il} > 0, i \in I \right\}. \qquad (1)$$

Selline reegel määrab juhtrea üheselt, sest read $a^i, i \in I$, on lineaarselt sõltumatud ja seetõttu on omavahel erinevad need read, millest võetakse leksikograafiliselt minimaalne. Meenutame, et tavalises simpleksmeetodis määrati juhtrida reegliga

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{il}} \,\middle|\, a_{il} > 0, i \in I \right\}. \qquad (2)$$

Kui (2) määrab juhtrea üheselt, siis kehtib

$\frac{a_{i0}}{a_{il}} > \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$ iga $i \in I \setminus \{k\}$ korral, kus $a_{il} > 0$.

Järelikult siis $\frac{a^i}{a_{il}} \succ \frac{a^k}{a_{kl}}$ iga $i \in I \setminus \{k\}$ korral, kus $a_{il} > 0$, mis tähendab, et kehtib (1).

Vaatame, mida teeb tingimuse (1) täidetuse korral sihifunktsiooni rida. Siis $\bar{a}^0 = a^0 - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a^k$ ning et $a_{0l} < 0$ (juhtveeru valik), $a_{kl} > 0$ (juhtrea valik), siis $-\frac{a_{0l}}{a_{kl}} > 0$ ja $a^k \succ 0$ annavad, et $\bar{a}^0 \succ a^0$. Seega sihifunktsiooni rida kasvab leksikograafiliselt. See veel ei näita, et sihifunktsiooni väärtus suureneb, aga välistatud on jõudmine juba esinenud baasile. Põhjenduseks märgime, et baasi valikuga on üheselt määratud eelduses 1° toodud süsteemi $Ax = b$ teisendatud kuju, mis, nagu eespool nägime, saadakse baasiveergudest moodustatud maatriksi rakendamisega. Järelikult eelduses 1° saadud süsteemi abil viidi sihifunktsioon eelduses 3° näidatud kujule, mis määrab valitud baasi korral üheselt sihifunktsiooni rea simplekstabelis.

<u>Järeldus</u>. Kui lineaarse planeerimise ülesandel on lahend olemas, siis leksikograafiline simpleksmeetod annab lõpliku arvu sammudega optimaalse lahendi.

Ülesanne 27. Valida ülesandes 25 toodud tabelis kõik võimalikud juhtelemendid leksikograafilise simpleksmeetodi kohaselt. Põhjendada ja anda juhtelementide indeksid.

Kui vaatame üle siiani esitatud teooria, siis näeme, et ainuke lahendamata probleem suvalise lineaarse planeerimise ülesande lahendamisel on lubatava baasilahendi ehk lubatava hulga tipu leidmine, s.t. eelduse 2° täidetuse tagamine. Järgnevas teeme veel eeltööd, mis viib muude tulemuste kõrval ka selle probleemi lahendamiseni.

12. Duaalne simpleksmeetod

Vaatleme ülesannet

$$\max\{c\cdot x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$$

tavaliste eeldustega maatriksi A kohta. Eeldame, et

1° Süsteem $Ax=b$ on viidud kujule

$$x_i+\sum_{j\in J} a_{ij}x_j=a_{i0},\ i\in I.$$

2° Sihifunktsioon on avaldatud baasiväliste muutujate kaudu (vähemalt süsteemi $Ax=b$ lahendite korral)

$$c\cdot x=a_{00}-\sum_{j\in J}a_{0j}x_j.$$

3° Kehtib $a_{0j}\geq 0$, $j\in J$, s.t. simplekstabel on duaalselt lubatav.

Me ei eelda, et simplekstabel oleks lubatav, s.t. ei eelda, et $a_{i0} \geq 0$, $i \in I$. Kui tabel on eeldustel $1^\circ - 3^\circ$ lubatav, siis on optimaalne lahend leitud.

Asume kirjeldama duaalset simpleksmeetodit. Meenutame, et simpleksmeetodi algoritm sisaldas etapid: 1) valiti juhtveerg; 2) valiti juhtelement; 3) tehti simpleksamm. Seejärel jätkati vajadusel 1. etapiga. Duaalses simpleksmeetodis säilib 3. etapina simpleksamm

$$\bar{a}^l = \frac{1}{a_{kl}} a^k,$$

$$\bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \quad i \in (I \setminus \{k\}) \cup \{0\}.$$

Alustuseks leitakse $k \in I$ nii, et $a_{k0} < 0$ (1. etapp), see määrab juhtrea. Enne järgmist tegevust kirjeldame eesmärki. Meenutame, et simpleksmeetodis minnakse naaberbaasile nii, et säilib tabeli lubatavus. Duaalses simpleksmeetodis seame eesmärgiks tabeli duaalse lubatavuse säilimise. Ühtlasi soovime vabaneda mittelubatavuse nähtusest $a_{k0} < 0$, seepärast tahame saada uue rea $\bar{a}^l$ esimeseks komponendiks positiivset elementi. Simpleksammul arvutatakse $\bar{a}^l = \frac{1}{a_{kl}} a^k$, seepärast peab juhtelement a_{kl} olema negatiivne, sest $a_{k0} < 0$ ja $a_{kl} < 0$ tagavad, et $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}} > 0$.

Märkus. Kui reas a^k pole negatiivseid elemente peale a_{k0}, siis on lubatav hulk tühi: lubatava hulga elemendi $x \geq 0$ korral on võrduses

$$x_k + \sum_{j \in J} a_{kj} x_j = a_{k0}$$

vasak pool mittenegatiivne, sest $x_k \geq 0, a_{kj} \geq 0$, $x_j \geq 0, j \in J$, aga parem pool $a_{k0} < 0$, mis on vastuolu.

Vaatame nüüd, millal säilib simplekstabeli duaalne lubatavus. Teame simpleks-sammust, et

$$\bar{a}^0 = a^0 - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a^k,$$

mis komponentide kaupa on

$$\bar{a}_{0j} = a_{0j} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{kj}, \; j \in I \cup J \cup \{0\}. \qquad (1)$$

Sellest saame $\bar{a}_{0j} \geq 0, j \in I \cup J$, ehk $a_{0j} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{kj} \geq 0$, $j \in I \cup J$, kui $a_{kj} \geq 0$, sest $a_{0j} \geq 0$ (duaalne lubatavus), $a_{0l} \geq 0$ (duaalne lubatavus), $a_{kl} < 0$ (juhtelement). Seejuures tingimus $a_{kj} \geq 0$ on täidetud $j \in I$ korral, sest $a_{kk} = 1$ ja $a_{kj} = 0, j \in I \setminus \{k\}$.

Kui aga $a_{kj} < 0$, mis saab olla ainult $j \in J$ korral, siis

$$a_{0j} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{kj} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{0j} - \frac{a_{0l}}{|a_{kl}|} |a_{kj}| \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{0j}}{|a_{kj}|} \geq \frac{a_{0l}}{|a_{kl}|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_{0l}}{|a_{kl}|} = \min\left\{ \frac{a_{0j}}{|a_{kj}|} \,\middle|\, a_{kj}<0,\, j\in J \right\}.$$

Taolise reegli kohaselt valitakse juhtveerg (2. etapp duaalses simpleksmeetodis). Nagu eespool mainitud, järgneb sellele simpleksisamm ja vajadusel jätk 1. etapist.

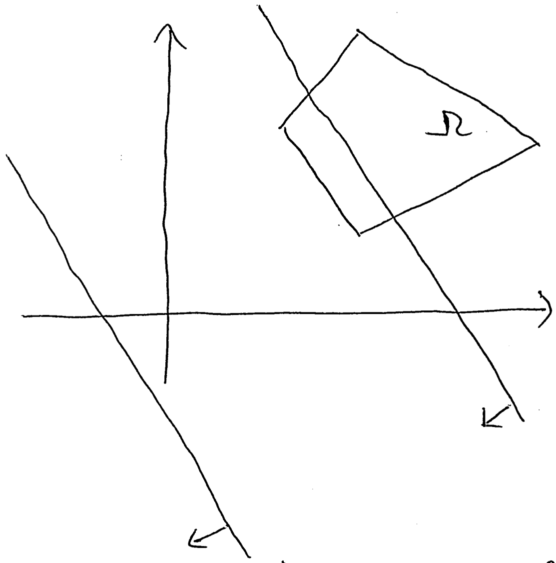
Sihifunktsiooni väärtuse muutumist saame näha võrdustest (1) $j=0$ korral

$$\bar{a}_{00} = a_{00} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{k0}.$$

Siin $a_{k0}<0$ (juhtrea valik), $a_{kl}<0$ (juhtelement) ja $a_{0l}\geq 0$ (duaalne lubatavus), seepärast $\bar{a}_{00} \leq a_{00}$. See tähendab, et sihifunktsiooni väärtus väheneb või jääb samaks, selle määrab, kas $a_{0l}>0$ või $a_{0l}=0$. Selline sihifunktsiooni monotoonne kahanemine (kuigi otsime maksimumi) ei ole millegagi vastuolus, sest asume algse baasitahendiga väljaspool lubatavat hulka, veelgi enam, väljaspool hulka $\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x\geq 0\}$. Seejuures maksimiseerime sihifunktsiooni

$$c\cdot x = a_{00} + \sum_{j\in J} (-a_{0j})\, x_j,$$

milles $-a_{0j}\leq 0$, $j\in J$, selle maksimaalne väärtus hulgas $\mathbb{R}^n_+$ on punktis $x=0$ ja kui nivootasand lõikab lubatavat hulka, peame maksimumi saavutamiseks liikuma punkti $x=0$ läbimise suunas. Et me asume väljaspool hulka $\mathbb{R}^n_+$, peame liikuma nivootasandiga sihifunktsiooni kahanemise suunas. Illustreeriv pilt juhul $n=2$ on näiteks



Kui $a_{0l} > 0$ igal sammul või juhtudel $a_{0l} = 0$ ei teki tsüklit, annab duaalne simpleksmeetod lõpliku arvu sammudega optimaalse lahendi, sest me liigume mööda mittelubatavaid baasilahendeid, nende arv on lõplik, lõpuks jõuame lubatava baasilahendini ehk lubatava ja duaalselt lubatava baasilahendini.

Duaalses simpleksmeetodis on samuti nagu simpleksmeetodis võimalik tsükli teke. Selle vältimise üks võimalusi on leksikograafiline duaalne simpleksmeetod, mida käsitleme hiljem.

Näide. Leida $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ nii, et

$$-2x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -3$$

ja $-x_2 - 3x_3$ oleks maksimaalne.

Viime ülesande kanoonilisele kujule, võttes kasutusele muutujad $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ ja saades kitsendused

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -1,$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -3.$$

Simplekstabel tuleb

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	1	3	0	0	0
2	-2	1	0	1	0	0
-1	-2	-1	-1	0	1	0
-3	1	$\boxed{-1}$	-2	0	0	1

ja see on duaalselt lubatav, ei ole lubatav. Valime juhtrea indeksiga $k=6$ (absoluutväärtuselt maksimaalne negatiivne a_{k0}), seejärel juhtveeru valikureegli kohaselt $l=2$, sest $\frac{1}{|-1|} < \frac{3}{|-2|}$.

Simpleksisammuga saame tabeli

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	1	0	1	0	0	1
-1	-1	0	$\boxed{-2}$	1	0	1
2	-3	0	1	0	1	-1
3	-1	1	2	0	0	-1

mis ei ole veel lubatav. Juhtrea indeksiks saab olla ainult $k=4$, seejärel tuleb juhtveeru indeksiks $l=3$. Simpleksisammu järel on tabel

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
2	-2	1	0	1	0	0

lubatav ning võime välja kirjutada lahendi $x^* = (0, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0)$ või algülesande jaoks $x^* = (0, 2, \frac{1}{2})$. Sihifunktsiooni väärtus on $c \cdot x^* = -3\frac{1}{2}$.

<u>Ülesanne 28.</u> Leida $x \geq 0$ nii, et $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ oleks minimaalne ja

$$x_1 + 3x_3 \geq 3,$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq -6.$$

13. Duaalse ja primaarse simpleksmeetodi järjestikune rakendamine

Kui räägitakse korraga duaalsest simpleksmeetodist ja lihtsalt simpleksmeetodist, siis viimast nimetatakse primaarseks simpleksmeetodiks. Simpleksmeetod on ka üldnimi kõigile meetoditele, mis kasutavad simpleksisammu, olgu see meetod siis primaarne või duaalne, leksikograafiline või mitte, erinevad on ainult juhtrea ja -veeru ehk juhtelemendi valikud, mis eelnevad simpleksisammule. Kõik need meetodid annavad optimaalse baasilahendi juhul kui ülesandel on lahend olemas ja ei teki tsüklit.

Eeldame, et lahendatavse kanoonilisel kujul olevat ülesannet, süsteem $Ax=b$ on viidud kujule $x_i + \sum_{j\in J} a_{ij} x_j = a_{i0}, i\in I$ (nägime, et seda saab alati teha), ja sihifunktsioonil on kuju $c \cdot x = a_{00} - \sum_{j\in J} a_{0j} x_j$ (ka seda saab süsteemi $Ax=b$ lahendite hulgas alati teha). Meenutame, et primaarse simpleksmeetodi kasutamise eelduseks oli simplekstabeli lubatavus ($a_{i0} \geq 0, i\in I$), duaalse simpleksmeetodi korral tabeli duaalne lubatavus ($a_{0j} \geq 0, j\in J$). Oletame, et tabel ei ole lubatav ega duaalselt lubatav. Siis saab toimida järgnevalt. Lisame tabeli algusesse ühe rea, milles baasiveergude kohal on arvud 0 ja mujal mittenegatiivsed arvud baasiväliste veergude kohal (näiteks võib lisada arvudest 0 koosneva rea). Sisuliselt kasutame siis mingit teist fiktiivset sihifunktsiooni. Seejuures jätame tabelis alles ka õige sihifunktsiooni rea a^0. Siis on tabel duaalselt lubatav ja duaalne simpleksmeetod rakendatav. Selle käigus me ei vali rida a^0 juhtreaks, vaid teeme temaga simpleksisammul vajalikud elimineerimised, et avaldada sihifunktsioon uute baasiväliste muutujate kaudu. Duaalse simpleksmeetodi lõppemisel saame lubatava baasilahendi. Seejärel teostame 2. etapi: rakendame primaarset simpleksmeetodit õige sihifunktsiooniga, kuni jõuame optimaalse lahendini. Meetodi lõplikkuse garanteerimiseks võib mõlemas meetodis kasutada leksikograafilist varianti või Blandi modifikatsiooni, millest siiani oleme tuttavad vaid primaarse simpleksmeetodi leksikograafilise variandiga. Duaalse simpleksmeetodi leksikograafilise variandi esitamiseks arendame järgnevas veel tehnikat.

<u>Näide</u>. Olgu vaja maksimiseerida $x_1 + 3x_2$ kitsendustel

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Võtame kasutusele uued muutujad $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$, need saavad baasimuutujateks, ning teisendame põhikitsendused kujule

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_4 = -2.$$

Sihifunktsioon $c \cdot x = -(-1)x_1 - (-3)x_2$ on esitatud baasivälise muutujate x_1, x_2 kaudu. Simplekstabel on

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	-1	-3	0	0
1	1	1	1	0
-2	-1	$\boxed{-2}$	0	1

mis ei ole lubatav aga duaalselt lubatav. Sellele on mõtteliselt lisatud arvudest 0 koosnev fiktiivse sihifunktsiooni rida, mida ei ole vajadust välja kirjutada. Juhtrea indeksiks sobib ainult $k=4$. Juhtveeru indeksi valikuks on võimalused $l=1$ ja $l=2$, sest fiktiivse rea korral $\frac{0}{|-1|} = \frac{0}{|-2|}$, valime nendest $l=2$. Simplekssammuga saame tabeli

	x_1	x_2	x_3	x_4
3	$1/2$	0	0	$-3/2$
0	$1/2$	0	1	$\boxed{1/2}$
1	$1/2$	1	0	$-1/2$

mis on lubatav, aga mitte duaalselt lubatav. Primaarses simpleksmeetodis õige sihifunktsiooniga saab võtta veeruindeksiks ainult $l=4$ ja seejärel reaindeksiks $k=3$. Simplekssamm annab tabeli

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

mis on lubatav ja duaalselt lubatav. Sellest saame kanoonilisele kujule viidud ülesande lahendi $x^* = (0, 1, 0, 0)$ ehk algülesande lahendi $x^* = (0, 1)$. Sihifunktsiooni väärtus optimaalsel lahendil on $c \cdot x^* = 3$.

Ülesanne 29. Lahendada näiteülesanne, valides igal sammul read ja veerud minimaalse võimaliku indeksiga.

14. Simplekstabeli veeruteisendused

Siin toome peamiselt eeltööd duaalse simpleksmeetodi leksikograafilise variandi käsitlemiseks, kuid näeme ka alternatiivset tehnikat simplekssammu teostamiseks.

14.1. Vähendatud simplekstabel

Vaatleme ülesannet

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = a_{i0}, \quad i \in \{0\} \cup I, \qquad (1)$$

kus otsitakse võrduseid (1) rahuldavat vektorit komponentidega $x_i \geq 0$, $i \in I \cup J$, nii, et x_0 oleks maksimaalne. See on lineaarse planeerimise ülesanne, mis on viidud simplekssammu teostamiseks sobivale kujule.

Tavaliselt eeldasime alustuseks, et $I=\{1,\dots,m\}$, ja sel juhul oli simplekstabel

	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n	
a_{00}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{0,m+1}$	$\dots$	a_{0l}	$\dots$	a_{0n}	a^0
a_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1l}	$\dots$	a_{1n}	a^1
$\dots$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$\dots$
a_{k0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$a_{k,m+1}$	$\dots$	$\boxed{a_{kl}}$	$\dots$	a_{kn}	a^k
$\dots$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$\dots$
a_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{ml}	$\dots$	a_{mn}	a^m

Oletame, et juhtelement a_{kl} on valitud, selleks oleme tuttavad siiani kolme meetodiga. Seejärel tehakse simplekssamm

$$\begin{aligned} \bar{a}^l &= \frac{1}{a_{kl}} a^k, \\ \bar{a}^i &= a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}). \end{aligned} \qquad (2)$$

Selliselt teostatud simplekssammu nimetame reateisenduseks, mille käigus ridadelt a^i, $i\in\{0\}\cup I$, minnakse ridadele $\bar{a}^i$, $i\in\{0\}\cup \bar{I}$. Niisuguse ülemineku käigus veerg indeksiga l muutub ühikveeruks ja veerg indeksiga k baasiväliseks veeruks. Arvuti kasutamisel ei ole vajadust säilitada ühikveerge, seepärast neid ei programmeeritagi ja kasutatakse vähendatud simplekstabelit

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
 & 1 & -x_{m+1} & \dots & -x_l & \dots & -x_n \\
\hline
x_0 & a_{00} & a_{0,m+1} & \dots & a_{0l} & \dots & a_{0n} \\
\hline
x_1 & a_{10} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_k & a_{k0} & a_{k,m+1} & \dots & \boxed{a_{kl}} & \dots & a_{kn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_m & a_{m0} & a_{m,m+1} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
\qquad (3)
$$

Tabeli ülaserva märgitakse baasivälised muutujad märgiga −, vasakusse serva baasimuutujad (ilma märgita, mis tähendab märki +). Võrdustest (1) kujul

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in \{0\} \cup I,$$

võib mõelda nii, et tabeli vasakus servas olevad muutujad x_i, $i \in \{0\} \cup I$, võrduvad tabeli rea $(a_{i0}, a_{i,m+1}, \dots, a_{in})$ ja ülaservas oleva vektori $(1, -x_{m+1}, \dots, -x_n)$ skalaarkorrutisega.

Peale simplekssammu saame tabeli, mis kirjutatakse vähendatud kujul

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
 & 1 & -x_{m+1} & \dots & -x_k & \dots & -x_n \\
\hline
x_0 & \bar{a}_{00} & \bar{a}_{0,m+1} & \dots & \bar{a}_{0k} & \dots & \bar{a}_{0n} \\
\hline
x_1 & \bar{a}_{10} & \bar{a}_{1,m+1} & \dots & \bar{a}_{1k} & \dots & \bar{a}_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_l & \bar{a}_{l0} & \bar{a}_{l,m+1} & \dots & \bar{a}_{lk} & \dots & \bar{a}_{ln} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_m & \bar{a}_{m0} & \bar{a}_{m,m+1} & \dots & \bar{a}_{mk} & \dots & \bar{a}_{mn} \\
\hline
\end{array}
\qquad (4)
$$

Tabelis (3) oleva baasivälise veeru indeksiga l asemele kirjutatakse uus baasiväline veerg indeksiga k. See on oluline erinevus tavalise simplekstabeliga võrreldes, sest veerud ei tarvitse asetseda enam indeksite kasvamise järjekorras. Samuti ei pea asetsema indeksite kasvamise järjekorras ka tabeli read, aga nii võis olla juba tavalises simpleksstabelis. Muidugi võivad ka algtabelis olla baasimuutujad ja baasivälised muutujad suvalises järjekorras. Näeme, et vähendatud tabelis esinevad parajasti need tabeli elemendid a_{ij}, mis võivad arvutuste tulemusel muutuda ja mida peab simpleksammu teostamise käigus säilitama.

N̰ä̰ḭd̰ḛ. On vaja minimiseerida $x_1 + 4x_2 + x_3$ tingimustel

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1,$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Võtame kasutusele lisamuutujad $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ (need saavad baasimuutujateks) ja viime ülesande kanoonilisele kujule, seejärel kirjutame vähendatud simpleksstabeli

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	1	4	1
x_4	2	1	1	2
x_5	-1	$\boxed{-1}$	-2	-1
x_6	-1	1	-1	-2

Tabel on duaalselt lubatav, aga mitte lubatav, seega on rakendatav duaalne simpleksmeetod. Valime juhtrea indeksiks $k=5$, seejärel veeruindeksiks $l=1$. Esimese arvutusena tuleb juhtrida jagada juhtelemendiga $a_{51}=-1$, selle kohale tuleb uues tabelis $\bar{a}_{15}=-1$, sest see saadakse elemendi $a_{55}=1$ jagamisel juhtelemendiga -1. Ülejäänud elemendid uues tabelis tekivad tavalise elimineerimise käigus, vaid uue tabeli veerus indeksiga 5 tuleb silmas pidada, et tehakse tehteid algtabeli ühikveeruga. Uus vähendatud tabel on

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_4	1	1	-1	1
x_1	1	-1	2	1
x_6	-2	1	-3	$\boxed{-3}$

Siin on juhtelement duaalses simpleksmeetodis üheselt määratud ja simpleksamm viib tabelini

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_6$
x_0	-1	1	2	0
x_4	$1/3$	$4/3$	-2	$1/3$
x_1	$1/3$	$-2/3$	1	$1/3$
x_3	$2/3$	$-1/3$	1	$-1/3$

Saadud tabel on lubatav ja duaalselt lubatav, seejuures optimaalse lahendi baasikomponendid on veerus indeksiga 0, mille kõrval on näidatud ka baasimuutujad. Niisiis, tabelist saame $x^* = (1/3, 0, 2/3, 1/3, 0, 0)$, algülesandes $x^* = (1/3, 0, 2/3)$. Sihifunktsiooni minimaalne väärtus algülesandes on $c \cdot x^* = 1$, sest kanoonilisele kujule viimisel muutsime sihifunktsiooni märki, et saada maksimiseerimisülesanne.

<u>Ülesanne 30.</u> Lahendada ülesanne 28 vähendatud simplekstabeliga.

<u>14.2. Veeruteisendused</u>

Vaatleme vähendatud simplekstabelit (3) ja lisame selle ridadesse triviaalsed võrdused $x_j = -(-x_j)$, $j \in 3$. Selliselt saame

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & 1 & -x_{m+1} & \dots & -x_l & \dots & -x_n \\
\hline
x_0 & a_{00} & a_{0,m+1} & \dots & a_{0l} & \dots & a_{0n} \\
\hline
x_1 & a_{10} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_k & a_{k0} & a_{k,m+1} & \dots & \boxed{a_{kl}} & \dots & a_{kn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_m & a_{m0} & a_{m,m+1} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} \\
x_{m+1} & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_l & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \\
\hline
 & a_0 & a_{m+1} & \dots & a_l & \dots & a_n
\end{array}
\qquad (5)
$$

Seda tabelit nimetame vähendatud simplekstabeli laiendiks. Veergude alla märgime veeruvektorite $a_j=(a_{0j},\dots,a_{nj})^T$, $j\in\{0\}\cup J$, tähised. Peale simpleksteisendust vähendatud tabeliga (3) paneme kirja saadud tabeli (4) laiendi, kuid säilitame sama ridade järjekorra, mis on tabelis (5), seega saame

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & 1 & -x_{m+1} & \dots & -x_k & \dots & -x_n \\
\hline
x_0 & \bar a_{00} & \bar a_{0,m+1} & \dots & \bar a_{0k} & \dots & \bar a_{0n} \\
x_1 & \bar a_{10} & \bar a_{1,m+1} & \dots & \bar a_{1k} & \dots & \bar a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_k & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_m & \bar a_{m0} & \bar a_{m,m+1} & \dots & \bar a_{mk} & \dots & \bar a_{mn} \\
x_{m+1} & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_l & \bar a_{l0} & \bar a_{l,m+1} & \dots & \bar a_{lk} & \dots & \bar a_{ln} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \\
\hline
 & \bar a_0 & \bar a_{m+1} & \dots & \bar a_k & \dots & \bar a_n
\end{array}
$$

Veeruteisendusteks nimetatakse üleminekut tabeli (5) veergudelt a_j, $j \in \{0\} \cup J$, tabeli (6) veergudele $\bar{a}_j$, $j \in \{0\} \cup \bar{J}$. Meie eesmärgiks siin on anda vastav eeskiri nagu oli reateisendustes (2). Teisendused (2) koordinaatkujul vähendatud simplekstabeli elementide jaoks on

$$\bar{a}_{\ell j} = \frac{1}{a_{k\ell}} a_{kj} = \frac{-a_{kj}}{a_{k\ell}}(-1), j \in \{0\} \cup \bar{J} = \\ = \{0\} \cup (J \setminus \{\ell\}) \cup \{k\}, \quad (7)$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i\ell}}{a_{k\ell}} a_{kj} = \\ = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{k\ell}} a_{i\ell}, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}), \; j \in \{0\} \cup (J \setminus \{\ell\}) \cup \{k\}. \quad (8)$$

Toome nendes eraldi välja juhu $j = k$

$$\bar{a}_{\ell k} = \frac{1}{a_{k\ell}} = -\frac{1}{a_{k\ell}} \cdot (-1), \text{ sest } a_{kk} = 1, \quad (7')$$

$$\bar{a}_{ik} = -\frac{a_{i\ell}}{a_{k\ell}} = -\frac{1}{a_{k\ell}} a_{i\ell}, \; i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}), \quad (8')$$

sest $a_{ik} = 0$ (väljaspool diagonaali on $i \neq k$), $a_{kk} = 1$.

Ühendame võrdused (7) ja (8) veergude kaupa, siis saame kõigepealt

$$\bar{a}_k = -\frac{1}{a_{k\ell}} a_\ell, \quad (9)$$

mis tuleb võrdustest (7') ja (8'). Selgituseks lisame, et tabeli (5) veerus a_ℓ tuleb tabeli (6) veeru $\bar{a}_k$ saamiseks komponentidega, mille indeksid on $i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}) \cup \{l\}$, teha tegelikke arvutusi, mujal on komponendiks 0 või veeru a_l komponent a_{kl} jagatakse arvuga $-a_{kl}$ ja tulemuseks on -1 veerus $\bar{a}_k$. Lisaks saame

$$\bar{a}_j = a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_l, \quad j \in \{0\} \cup (J \setminus \{l\}), \qquad (10)$$

kus ühendame (7) ja (8) juhul $j \neq k$. Selgitus on siin analoogiline sellega, mille toome võrduse (9) põhjendamisel, pöörates tähelepanu komponentidele indeksitega $i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}) \cup \{l\}$, kusjuures $i = l$ korral $a_{ij} = 0$, sest $j \neq l$. Arutelu tulemusena oleme tõestanud järgmise tulemuse.

<u>Teoreem</u>. Vähendatud simplekstabelis tehtav reateisendus (üleminek (3) $\to$ (4)) ühtib vähendatud simplekstabeli laiendis tehtava veeruteisendusega (9), (10) (üleminek (5) $\to$ (6)).

Märgime, et võrdust (10) võib võrdust (9) arvestades esitada veel

$$\bar{a}_j = a_j + a_{kj} \bar{a}_k, \quad j \in \{0\} \cup (J \setminus \{l\}).$$

Võrreldes reateisendusega, kus juhtveerg teisendatakse ühikveeruks, on veeruteisendus selline, et juhtrida teisendatakse miinus-ühikreaks.

<u>Näide</u>. Vaatleme eelmist näidet, kus oli vähendatud simplekstabeliga arvutamine. Need arvutused veeruteisendustega on järgmised:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	1	4	1
x_1	0	-1	0	0
x_2	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1
x_4	2	1	1	2
x_5	-1	$\boxed{-1}$	-2	-1
x_6	-1	1	-1	-2
	a_0	a_1	a_2	a_3

Juhtveerg a_1 jagatakse juhtelemendi vastandarvuga ehk arvuga 1, seega $\bar{a}_5$ ühtib veeruga a_1. Veergudest a_0 ja a_3 lahutatakse juhtveerg a_1, veerust a_2 kahekordne juhtveerg ehk $2a_1$.

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_1	1	-1	2	1
x_2	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1
x_4	1	1	-1	1
x_5	0	-1	0	0
x_6	-2	1	-3	$\boxed{-3}$
	$\bar{a}_0$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$

Siin juhtveerg $\bar{a}_3$ jagatakse arvuga 3, seejärel elimineeritakse reas indeksiga 6 teised elemendid.

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_6$
x_0	-1	1	2	0
x_1	$1/3$	$-2/3$	1	$1/3$
x_2	0	0	-1	0
x_3	$2/3$	$-1/3$	1	$-1/3$
x_4	$1/3$	$4/3$	-2	$1/3$
x_5	0	-1	0	0
x_6	0	0	0	-1

Tabelist saab $x^* = (1/3, 0, 2/3, 1/3, 0, 0)$, komponendid on veerus indeksiga 0 õiges järjekorras. Algülesandes $x^* = (1/3, 0, 2/3)$ ja $c \cdot x^* = 1$.

Ülesanne 31. Lahenda selle alapunkti näiteülesanne veeruteisendustega, võttes algul juhtrea indeksiga 6.

15. Leksikograafiline duaalne simpleksmeetod

Eelmises punktis tooduд teoreemis nägime, et veeruteisendustega tehakse simplekssamm, s.t. minnakse ühelt baasilahendilt teisele. Näiteks võib primaarse ja duaalse simpleksmeetodi teostada veeruteisendustega. Seepärast on ka veeruteisendustes võimalik tsükli tekkimine. Tsükli vältimiseks duaalses simpleksmeetodis on võimalik kasutada leksikograafilist varianti, mida saab realiseerida veeruteisendustega.

Kasutame eelmise punkti tähiseid. Eeldame, et tabelis (5) on veerud a_j, $j \in J$, leksikograafiliselt positiivsed. Sellest järeldub duaalne lubatavus. Valime juhtrea nii, et temas element indeksiga 0 on negatiivne, s.t. $a_{k0} < 0$, $k \in I$. Selliselt toimisime ka duaalses simpleksmeetodis. Seejärel valiti juhtveerg (koos ka juhtelement a_{ke}) nii, et säiliks tabeli duaalne lubatavus. Leksikograafilises variandis valime a_{ke} nii, et saavutame veergude $\bar{a}_j$, $j \in J$, leksikograafilise positiivsuse. Võrduse (9) põhjal saame $\bar{a}_k > 0$ alati, kui $a_{kl} < 0$, sest eeldasime, et $a_l \succ 0$. Võrdus (10) annab, et $j \in J \setminus \{l\}$ korral

$$\bar{a}_j \succ 0 \Leftrightarrow a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_l \succ 0.$$

Kui $a_{kj} \geq 0$, siis $a_j \succ 0$ ja $a_l \succ 0$ tagavad $a_{kl} < 0$ tõttu, et $a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_l \succ 0$. Kui aga $a_{kj} < 0$, siis

$$a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_l \succ 0 \Leftrightarrow a_j \succ \frac{|a_{kj}|}{|a_{kl}|} a_l \Leftrightarrow \frac{a_j}{|a_{kj}|} \succ \frac{a_l}{|a_{kl}|}.$$

See annab juhtveeru (juhtelemendi) valiku reegli

$$\frac{a_l}{|a_{kl}|} = \operatorname{lexmin}\left\{ \frac{a_j}{|a_{kj}|} \,\middle|\, a_{kj} < 0,\ j \in J \right\}. \qquad (11)$$

Veeruteisendustega meetodit, mis kasutab juhtveeru valiku reeglit (11), nimetatakse leksikograafiliseks duaalseks simpleksmeetodiks.

Märgime, et reegel (11) määrab juhtveeru üheselt, sest veerud $a_j, j \in J$, on lineaarselt sõltumatud, mistõttu ei saa $a_{kj} < 0, j \in J$, korral veergude $\frac{a_j}{|a_{kj}|}$ hulgas olla kahte võrdset.

Võrdus (10) juhul $j = 0$ annab $\bar{a}_0 = a_0 - \frac{a_{k0}}{a_{kl}} a_l$. Meie valikutes $a_{k0} < 0$ (juhtrida) ja $a_{kl} < 0$ (juhtelement), eelduse $a_l \succ 0$ tõttu siis $\bar{a}_0 \prec a_0$. See tähendab, et veerus a_0 sihifunktsiooni väärtus (a_0 esimene komponent) kas väheneb või jääb samaks. Küll aga väheneb leksikograafilise järjestuse mõttes veerg ise ja seda igal sammul. Seega ei ole võimalik jõudmine juba esinenud baasile.

Järeldus. Kui lineaarse planeerimise ülesandel on lahend olemas, siis leksikograafiline duaalne simpleksmeetod on lõplik (annab lõpliku arvu sammudega optimaalse lahendi).

Märkus. Kui vaatlesime leksikograafilist (primaarset) simpleksmeetodit, siis lubatava tabeli korral juhul $I = \{1, \dots, m\}$ olid read a^i, $i \in I$, alati leksikograafiliselt positiivsed, üldjuhul aga saab ridade leksikograafilist positiivsust lubatavas tabelis vajadusel saavutada muutujate järjekorra muutmisega. Leksikograafilise duaalse simpleksmeetodi korral ei piisa duaalsest lubatavusest, et saada leksikograafiliselt positiivseid teisendatavaid veerge. Muutujate järjestuse (s.t. ridade järjestuse) muutmine ei tarvitse aidata, sest miinus-ühikridade ülespoole tõstmine ei tee veerge leksikograafiliselt positiivseks. Kui algtabel ei ole lubatav aga duaalselt lubatav, siis oli võimalik alustada fiktiivse sihifunktsiooniga duaalset simpleksmeetodit. Leksikograafilise variandi rakendamiseks võib võtta fiktiivse sihifunktsiooni $\tilde{c} \cdot x = \sum_{j \in J} (-x_{j}')$, see tagab veergude leksikograafilise positiivsuse.

<u>Näide</u>. Kui vaadata näidet punktis 14.2, siis algtabelis on veerud a_j, $j \in J$, leksikograafiliselt positiivsed. Juhtveeruks on valitud indeksiga $k=5$. Iga $j \in J$ korral $a_{5j} < 0$ ja reegel (11) annab juhtrea indeksiks $l=1$, sest esimeste komponentide võrdlus on $\frac{1}{|-1|}, \frac{4}{|-2|}, \frac{1}{|-1|}$ vahel, seejärel on $\frac{a_1}{|-1|}$ ja $\frac{a_3}{|-1|}$ vahel otsustavaks teiste komponentide võrdlus. Teisel sammul on ainult üks võimalik juhtveerg ja juba esimeste komponentide võrdlus määrab juhtrea üheselt.

16. Esialgse baasilahendi leidmine

Suvalise lineaarse planeerimise ülesande lahendamiseks on meil praeguseks küllaldaselt teadmisi. Selleks tuleb üldjuhul teostada 4 etappi: 1) viia ülesanne kanoonilisele kujule; 2) näiteks Gaussi elimineerimismeetodiga eraldada ühikvektoritest baas; 3) duaalse simpleksmeetodiga (fiktiivse sihifunktsiooniga) jõuda lubatava baasilahendini, kasutades vajadusel leksikograafilist varianti ja reeglitäiendusi;

4) primaarse simpleksmeetodiga (vajadusel leksikograafilise variandiga) õige sihifunktsiooni puhul leida optimaalne lahend. Etappides 3) ja 4) võib kasutada ka Blandi modifikatsiooni näiteks reaalteisendustes. Vaatame selles punktis ühte võimalust, kus võib piirduda etappidega 1) ja 4).

Vaatleme ülesannet $\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, kus $m \times n$ maatriksi A astak on m. Kirjutame selle ülesande nii, et $b \geq 0$, selleks korrutame vajadusel mõnda süsteemi $Ax = b$ võrrandit arvuga -1. Võtame kasutusele lisamuutujad $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ ja moodustame (laiendatud) ülesande

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad (1)\\
&a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\
&x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n+m, \\
&\quad c \cdot x - M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \to \max,
\end{aligned}
$$

kus M on (suur) positiivne arv. Kasutame tähistusi $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})$, $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n, -M, \dots, -M)$ ja võrrandid (1) kirjutame $\bar{A}\bar{x} = b$. Muutujaid $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ on sobiv vaadelda esialgsete baasimuutujatena ehk $I = \{n+1, \dots, n+m\}$.

Märgime, et sihifunktsioonist $c \cdot x - M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m})$ tuleb elimineerida baasimuutujad $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, seda võib teha eelsammuna näiteks võrrandite (1) abil. Et võrranditest (1) $x_{n+i} = b_i - a^i \cdot x$, $i = 1, \dots, m$, siis

$$\bar{c} \cdot \bar{x} = c \cdot x - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} =$$

$$= c \cdot x - M \sum_{i=1}^{m} b_i + M \left(\sum_{i=1}^{m} a^i\right) \cdot x =$$

$$= -M \sum_{i=1}^{m} b_i - \left(-c - M \sum_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot x =$$

$$= a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j ,$$

kus $a_{00} = -M \sum_{i=1}^{m} b_i$, $\sum_{j \in J} a_{0j} x_j = \left(-c - M \sum_{i=1}^{m} a^i\right) \cdot x$, $J = \{1, \dots, n\}$. Muidugi võib seda teha ka samaväärselt laiendatud ülesande simpleks-tabelis.

Tõestame algul mõned lihtsamad tulemused algülesande ja laiendatud ülesande kohta.

<u>Lause.</u> Laiendatud ülesande lubatava lahendi $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})$ n esimest komponenti $x = (x_1, \dots, x_n)$ on algülesande lubatav lahend parajasti siis, kui $x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0$.

Tõestus. Olgu $\bar{x}$ laiendatud ülesande lubatav lahend, s.t. $\bar{A}\bar{x} = b$ ja $\bar{x} \geq 0$.

1) Eeldame, et vektori $\bar{x}$ n esimest komponenti x on algülesande lubatav lahend. Siis $Ax = b$ ja see koos võrdusega $\bar{A}\bar{x} = b$ annab, et $x_{n+1} = \ldots = x_{n+m} = 0$.

2) Olgu $\bar{x}$ komponendid sellised, et $x_{n+1} = \ldots = x_{n+m} = 0$. Siis $\bar{A}\bar{x} = Ax$ ja $\bar{A}\bar{x} = b$ annab võrduse $Ax = b$. Lisaks $\bar{x} \geq 0$ tõttu $x \geq 0$, s.t. x on algülesande lubatav lahend.

Lisame, et laiendatud ülesandel on lubatav lahend alati olemas, see on $\bar{x} = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ ja ta on ka lubatav baasilahend. Algülesandel ei tarvitse seejuures lubatavat lahendit olla, nagu iga lineaarse planeerimise ülesandel.

Teoreem 1. Kui laiendatud ülesande optimaalses lahendis $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ on $x_{n+1}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$, siis $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ on algülesande optimaalne lahend, seejuures mõlema sihifunktsiooni maksimaalsed väärtused ühtivad.

Tõestus. Olgu $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ laiendatud ülesande optimaalne lahend ja $x_{n+1}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$. Siis Lause põhjal on $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ algülesande lubatav lahend. Oletame vastuväiteliselt, et x^* ei ole optimaalne. Siis leidub algülesande lubatav lahend x nii, et $c \cdot x > c \cdot x^*$. Nüüd $\bar{x} = (x, 0, \ldots, 0)$ on laiendatud ülesande lubatav lahend ja $\bar{c} \cdot \bar{x} = c \cdot x > c \cdot x^* = \bar{c} \cdot \bar{x}^*$, aga see on vastuolus $\bar{x}^*$ optimaalsusega. On selge, et $\bar{c} \cdot \bar{x}^* = c \cdot x^*$.

<u>Teoreem 2.</u> Kui algülesandel on lahend olemas, siis eksisteerib $M_0 > 0$ nii, et iga $M \geq M_0$ korral on laiendatud ülesanne lahenduv ja tema iga optimaalne lahend $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ on selline, et $x_{n+1}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$.

Tõestuse esitame punktis 20.

Teoreemist 2 järeldub, et kui võtta M küllalt suur, siis võib algülesande asemel lahendada laiendatud ülesande. Sellist meetodit nimetatakse kunstliku baasi meetodiks ja oluline on, et kanoonilisel kujul oleva ülesande korral saab piirduda ainult simpleksmeetodi või selle leksikograafilise variandiga, sest laiendatud ülesande algtabel on alati lubatav. Selle punkti algul toodud neljast etapist jääb ära kaks: ühikvektoritest baasi eraldamine ja duaalne simpleksmeetod lubatava baasilahendi leidmiseks.

Praktikas tähendab kunstliku baasi meetodi kasutamine, et kui valitud M korral jõutakse optimaalse lahendini, kus mingi $k \geq 1$ korral $x^*_{n+k} \neq 0$, siis tuleb arvu M suurendada ja laiendatud ülesanne uuesti lahendada.

Ei ole praktiliselt kasutatavat algoritmi arvu M_0 leidmiseks ja seetõttu ei ole selge, kui palju tuleb arvu M suurendada. Võib juhtuda, et ei ole teada, kas algülesandel on lahend olemas. Kui ei ole, siis arvu M suurendamine ei vii sihile, sest siis kuitahes suure M korral on laiendatud ülesande igas optimaalses lahendis mingi $k \geq 1$ korral $x^*_{n+k} \neq 0$.

Vaatame veel ühte meetodit algülesande lubatava baasilahendi leidmiseks, mis ühtlasi annab mõnikord võimaluse kindlaks teha, kas algülesanne on lahenduv või mitte.

Kasutame sihifunktsiooni $\bar{c} \cdot \bar{x} = -(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m})$ ja vaatleme ülesannet

$$\max\{\bar{c} \cdot \bar{x} \mid \bar{A}\bar{x} = b, \bar{x} \geq 0\}, \qquad (2)$$

kus eeldame nagu eelnevas, et $b \geq 0$. Nägime, et selle ülesande lubatav baasilahend on $\bar{x} = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$, kui valida $I = \{n+1, \ldots, n+m\}$.

Et ülesande (2) sihifunktsioon on lubatavas hulgas alt tõkestatud (arvuga 0), siis on ülesandel (2) lahend olemas (selle tõestame punktis 17.3). Simpleksmeetodiga (vajadusel leksikograafilise variandiga) saame leida optimaalse lahendi $\bar{x}^*$ ja see on ühtlasi baasilahend. On kaks võimalust: 1) $\bar{c}\cdot\bar{x}^*=0$; 2) $\bar{c}\cdot\bar{x}^*<0$. Juhul 1) on $\bar{x}^*=(x_1^*,\dots,x_{n+m}^*)$ korral $x_{n+1}^*=\dots=x_{n+m}^*=0$ (sest $\bar{x}^*\geq 0$) ja $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)$ on algülesande (lubatav) baasilahend. Põhjenduseks märgime, et juhul kui vektori $\bar{x}^*$ kui baasilahendi kõik baasiindeksid kuuluvad hulka $\{1,\dots,n\}$, on need ka baasiindeksid algülesandes. Kui aga hulka $\{1,\dots,n\}$ kuulub vaid osa $\bar{x}^*$ baasiindeksitest, saame neile vastavat maatriksi A veergude hulka laiendada baasiks, millele baasilahend x^* siis vastab. Juhul 2) on algülesande lubatav hulk tühi, sest kui $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ oleks algülesande lubatav lahend, siis $\bar{x}^0=(x_1^0,\dots,x_n^0,0,\dots,0)$ oleks ülesande (2) lubatav lahend, kuid $\bar{c}\cdot\bar{x}^0\leq\bar{c}\cdot\bar{x}^*<0$ annab $\bar{c}\cdot\bar{x}^0=0$ tõttu vastuolu.

17. Lineaarse planeerimise ülesannete duaalsus

17.1. Duaalsete ülesannete mõiste

Definitsioon. Põhikujul oleva ülesande

$$\max\{c\cdot x \mid Ax\le b,\ x\ge 0\} \qquad (1)$$

duaalseks ülesandeks nimetatakse ülesannet

$$\min\{b\cdot y \mid A^T y\ge c,\ y\ge 0\}. \qquad (2)$$

Öeldakse ka, et (2) on ülesandega (1) duaalne ülesanne. Meenutame, et põhikujul olevas ülesandes A on $m\times n$ maatriks, $b\in\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}^n$ ja $x\in\mathbb{R}^n$, seejuures $m,n\in\mathbb{N}$ on suvalised. Ülesandes (2) tähistab A^T transponeeritud maatriksit, see on $n\times m$ maatriks.

Lause. Ülesande (2) duaalseks ülesandeks on ülesanne (1), s.t. duaalsus on vastastikune.

Tõestus. Paneme tähele, et ülesanne (2) ei ole põhikujul ja rangelt võttes ei saa talle definitsiooni rakendada. Siin mõeldakse seda, et ülesanne (2) viiakse standardmetoodikaga ekvivalentsele põhikujule ja siis kasutatakse duaalse ülesande mõistet. Ülesanne (2) on samaväärne ülesandega

$$-\max\{(-b)\cdot y \mid -A^T y\le -c,\ y\ge 0\}, \qquad (3)$$

kus $-\max$ näitab, et $-b \cdot y$ maksimiseerimise järel tuleb sihifunktsiooni väärtus võtta vastandmärgiga. Ülesande (3) duaalne ülesanne on

$$-\min\{(-c)\cdot x \mid (-A^T)^T x \geqslant -b,\ x \geqslant 0\}$$

ehk

$$\max\{c \cdot x \mid Ax \leq b,\ x \geqslant 0\}.$$

Toome veel välja duaalsuse juures esinevad vastavused:

1) üks on maksimiseerimisülesanne, teine minimiseerimisülesanne;

2) põhikitsendustes on ühes $\leq$, teises $\geqslant$;

3) vabaliikmete vektor ja sihifunktsiooni vektor lähevad vastastikku üle, seega vahetavad kohad ka põhikitsenduste arv ja muutujate arv;

4) põhikitsenduste maatriksid on vastastikku transponeeritud.

<u>Näide</u>. Antud on ülesanne

$$3x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1 - 2x_2 \geqslant -4, \quad (\Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 \leq 4)$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$
$$x_1 + x_2 \to \max.$$

Siin $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, duaalne ülesanne on

$$3y_1 - y_2 \geq 1,$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 1,$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,$$
$$3y_1 + 4y_2 \to \min.$$

Ülesanne 32. Viia ülesanne

$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 7,$$
$$x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 16,$$
$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$-5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

põhikujule ja esitada duaalne ülesanne.

Ülesanne*8. Näidata, et ülesande $\max\{c\cdot x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ duaalne ülesanne on $\min\{b\cdot y \mid A^T y \geq c\}$.

17.2. Duaalsete ülesannete peamised omadused

Vaatleme ülesandeid (1) ja (2).

Lause 1. Kui x ja y on vastavalt ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid, siis $c\cdot x \leq b\cdot y$.

Tõestus. Kehtib

$$c\cdot x \leq (A^T y)\cdot x = y\cdot Ax \leq y\cdot b,$$

milles esimene võrratus järeldub sellest, et $c \leq A^T y$ ja $x \geq 0$, teine võrratus aga sellest, et $Ax \leq b$ ja $y \geq 0$.

<u>Lause 2.</u> Kui ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid x^* ja y^* rahuldavad võrdust $c \cdot x^* = b \cdot y^*$, siis x^* ja y^* on nende ülesannete optimaalsed lahendid.

<u>Tõestus.</u> Kui x on ülesande (1) lubatav lahend, siis Lauset 1 ja eeldust kasutades saame

$$c \cdot x \leq b \cdot y^* = c \cdot x^*,$$

mis tähendab, et x^* on ülesande (1) optimaalne lahend. Analoogiliselt, kui y on ülesande (2) lubatav lahend, siis eeldust ja Lauset 1 kasutades

$$b \cdot y^* = c \cdot x^* \leq b \cdot y,$$

mistõttu y^* on ülesande (2) optimaalne lahend.

<u>Lause 3.</u> Kui ülesande (1) sihifunktsioon on lubatavas hulgas ülalt tõkestamata, siis ülesande (2) lubatav hulk on tühi; kui ülesande (2) sihifunktsioon on lubatavas hulgas alt tõkestamata, siis ülesande (1) lubatav hulk on tühi.

<u>Tõestus.</u> Olgu ülesande (1) sihifunktsioon ülalt tõkestamata hulgas $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$. Siis on olemas jada $x^k \in \Omega$ nii, et $c \cdot x^k \to \infty$. Kui oletada, et ülesandel (2) on olemas lubatav lahend y, siis Lause 1 põhjal $c \cdot x^k \leq b \cdot y$, mis on vastuolu. Lause 3 teise osa tõestus on analoogiline.

<u>Ülesanne</u> *9. Tõestada, et duaalne simpleksmeetod algülesande lahendamisel ühtib simpleksmeetodiga duaalse ülesande lahendamisel.

<u>Märkus</u>. Ülesandes *9 peetakse silmas, et ülesanne (1) viiakse standardmetoodikaga kanoonilisele kujule ja seejärel rakendatakse duaalset simpleksmeetodit, milleks vajalikud eeldused on täidetud. Sarnaselt toimitakse ka simpleksmeetodi rakendamisel duaalses ülesandes.

17.3. Lineaarse planeerimise põhiteoreemid

Need teoreemid puudutavad nagu eelmise alapunkti väited duaalsete ülesannete paare, seepärast nimetatakse neid veel duaalsuse teoreemideks.

<u>Teoreem 1</u>. Kui ühel duaalsetest ülesannetest on olemas optimaalne lahend, siis on optimaalne lahend olemas ka teisel ja sihifunktsioonide ekstremaalsed väärtused ühtivad.

<u>Tõestus</u>. Oletame, et ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend (kui on ülesandel (2), siis saab kasutada duaalsust). Ülesanne (1) on samaväärne kanoonilisel kujul oleva ülesandega

$$\max\{c\cdot x \mid Ax + x' = b,\ x \geq 0,\ x' \geq 0\}, \qquad (4)$$

kus $x' = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T$ on võrratustelt võrdustele üleminekul lisatavad muutujad. Ülesande (4) lähtetabel on

0	$-c$	0
b	A	I_m

milles I_m tähistab $m \times m$ ühikmaatriksit. Ülesanne (4) lahendatakse üldjuhul duaalse ja primaarse simpleksmeetodi järjestikuse rakendamisena, tulemusena saadakse optimaalne baaslahend (lubatava hulga tipp), mis vastaku baasiindeksite hulgale $I \subset \{1, \dots, n+m\}$, seejuures $|I| = m$. Süsteem $Ax + x' = b$ on $M x_I + B x_J = b$, kus x_I on indeksite hulgale I vastavate baasimuutujate vektor, $J = \{1, \dots, n+m\} \setminus I$, $|J| = n$ ja x_J on baasiväliste indeksitele vastavate muutujate vektor. Maatriks M koosneb baasiveergudest ja on seepärast pööratav. Lahendamise käigus tehtavad teisendused süsteemiga $Ax + x' = b$ on samaväärsed maatriksi M^{-1} rakendamisega sellele süsteemile, s.t. saadakse $M^{-1}Ax + M^{-1}x' = M^{-1}b$ ehk $x_I + M^{-1}B x_J = M^{-1}b$.

Ülesande (4) võib kirjutada samaväärselt

$$\max\{c \cdot x - (M^{-1}Ax + M^{-1}x' - M^{-1}b) \cdot c_I \mid M^{-1}Ax + M^{-1}x' = M^{-1}b, x \geq 0, x' \geq 0\}, \quad (5)$$

kus $c_I \in \mathbb{R}^m$ on suvaline, sest kordajate vektor

$M^{-1}Ax + M^{-1}x' - M^{-1}b = 0$ lubatavas hulgas. Võtame $(c_I)_i = c_i$, kui $i \in \{1, \dots, n\} \cap I$, $(c_I)_i = 0$ mujal. Paneme tähele, et sellise c_I valikuga saab sihifunktsiooni esituse baasiväliste muutujate kaudu, sest $M^{-1}Ax + M^{-1}x' - M^{-1}b$ on tegelikult $x_I + M^{-1}Bx_J - M^{-1}b$ ja kui $i \in \{1, \dots, n\} \cap I$, siis x_i kordaja sihifunktsioonis tuleb $c_i - c_i = 0$ (esimene c_i liikmest $c \cdot x$, teine c_i liikmest $x_I \cdot c_I$), aga kui $i \in I$ ja $i > n$, siis c_I vastav komponent on 0. Niisiis on sellise c_I valiku korral ülesande (5) sihifunktsioon ja võrrandisüsteem sellisel kujul, mida eeldatakse simpleks-tabelis. Simplekstabel aga vastab optimaalsele lahendile. Seepärast on sihifunktsioonis muutujate kordajad mittepositiivsed (tabelis mittenegatiivsed, sest sihifunktsioon on kujul $a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j$ ja $a_{0j} \geq 0$, $j \in J$). Teisendame sihifunktsiooni:

$$c \cdot x - (M^{-1}Ax + M^{-1}x' - M^{-1}b) \cdot c_I =$$

$$= c \cdot x - (M^{-1}A)^T c_I \cdot x - (M^{-1})^T c_I \cdot x' + (M^{-1})^T c_I \cdot b.$$

Siin puuduvad baasimuutujad, baasilahendil on baasivälised muutujad $x_j = 0$, $j \in J$, seepärast on sihifunktsiooni maksimaalne väärtus $b \cdot (M^{-1})^T c_I$. Lisaks on x kordajate vektor $c - (M^{-1}A)^T c_I \leq 0$ ehk $c \leq A^T (M^{-1})^T c_I$, x' kordajate vektor $-(M^{-1})^T c_I \leq 0$ ehk $(M^{-1})^T c_I \geq 0$.

Defineerime $y = (M^{-1})^T c_I$, siis $y \geq 0$ ja $A^T y \geq c$, mis tähendab, et y on duaalse ülesande (2) lubatav lahend. Näeme veel, et ülesande (2) sihifunktsiooni väärtus lubataval lahendil y on

$$b \cdot y = b \cdot (M^{-1})^T c_I, \qquad (6)$$

mis tõestuse põhjal ühtib algülesande (1) sihifunktsiooni väärtusega optimaalsel lahendil. Lause 2 põhjal on y ülesande (2) optimaalne lahend.

Tõestuse käigus saime ka sihifunktsioonide ekstremaalsete väärtuste ühtimise, mida väljendas võrdus (6).

Teoreem 1 on tõestatud.

Järeldus 1. Selleks, et ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid x ja y oleksid optimaalsed, on tarvilik ja piisav, et $c \cdot x = b \cdot y$.

Põhjenduseks märgime, et kui võrdus $c \cdot x = b \cdot y$ kehtib, siis x ja y on optimaalsed Lause 2 põhjal, kui aga x ja y on optimaalsed, siis Teoreemi 1 põhjal kehtib võrdus $c \cdot x = b \cdot y$.

Järeldus 2. Ülesande (4) optimaalsele baasilahendile vastavas simplekstabelis on sihifunktsiooni reas lisamuutujate x' kordajate vektor duaalse ülesande lahend.

Tõestus. Teoreemi 1 tõestuses toodud ülesande (4) lähtetabel teiseneb vaadeldava lahenduse käigus kujule

$b \cdot (M^{-1})^T c_I$	$(M^{-1}A)^T c_I - c$	$(M^{-1})^T c_I$
$M^{-1}b$	$M^{-1}A$	M^{-1}

ja nagu nägime, on $(M^{-1})^T c_I$ duaalse ülesande lahend.

Ülesanne 33. Antud on ülesanne

$$x_1 + 2x_2 \to max,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 - x_2 \leq 2,$$
$$x_1 + x_2 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Esitada duaalne ülesanne. Lahenda algülesanne ja leida saadud simplekstabelist duaalse ülesande lahend.

Enne järgmist teoreemi toome ühe abitulemuse, mille tõestame hiljem punktis 19*.

Lemma (lemma lubatava hulga esitusest). Hulk $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ koosneb elementidest kujul

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j e^j, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0, \qquad (7)$$

kus $x^1, \ldots, x^p$ on hulga Ω tipud, $e^1, \ldots, e^q$ hulga Ω tõkestamata servade sihivektorid.

Märkus. Kui $\Omega \neq \emptyset$, siis punktis 5 toodud järelduse ja ülesande 22 põhjal on hulgal Ω vähemalt üks tipp olemas.

<u>Järeldus</u>. Kui ülesande (1) sihifunktsioon on lubatavas hulgas Ω ülalt tõkestatud, siis ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend.

<u>Tõestus</u>. Tugineme esitusele (7). Siis iga $j=1,\dots,q$ korral $c\cdot e^j\le 0$, sest kui oleks mingi j_0 korral $c\cdot e^{j_0}>0$, siis võttes $\mu_{j_0}>0$ kuitahes suure, $\mu_j=0$, $j\ne j_0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_i=0, i\ne 1$, saame hulga Ω elemendi $x=x^1+\mu_{j_0}e^{j_0}$ korral $c\cdot x=c\cdot x^1+\mu_{j_0}\,c\cdot e^{j_0}$ kuitahes suure, mis on vastuolus ülesande (1) sihifunktsiooni ülalt tõkestatusega hulgas Ω.

Võtame suvaliselt $x\in\Omega$, mille esitame (7) abil. Siis

$$c\cdot x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(c\cdot x^i)+\sum_{j=1}^{q}\mu_j(c\cdot e^j)\le\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(c\cdot x^i).$$

Valime sellise tipu x^k, et

$$c\cdot x^k=\max_{1\le i\le p}c\cdot x^i.$$

Nüüd

$$c\cdot x\le\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(c\cdot x^i)\le\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(c\cdot x^k)=c\cdot x^k,$$

kus kasutasime seda, et $\lambda_i\ge 0, i=1,\dots,p$, ja $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1$.

See aga tähendab, et lubatava hulga Ω element (tipp) x^k on ülesande (1) optimaalne lahend.

<u>Teoreem 2</u>. Lineaarse planeerimise ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend parajasti siis, kui temal ja temaga duaalsel ülesandel (2) on olemas lubatav lahend.

Tõestus. Tarvilikkus. Kui ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend, siis Teoreemi 1 põhjal on optimaalne lahend olemas ka ülesandel (2) ja need on ühtlasi lubatavad lahendid.

Piisavus. Eeldame, et ülesannetel (1) ja (2) on olemas lubatavad lahendid vastavalt x^0 ja y^0. Siis Lause (1) põhjal $c \cdot x \leq b \cdot y^0$ ülesande (1) lubatava hulga $\Omega \neq \emptyset$ iga elemendi x korral. Seega on ülesande (1) sihifunktsioon lubatavas hulgas Ω ülalt tõkestatud. Teoreemile eelneva järelduse põhjal on ülesandel (1) optimaalne lahend olemas.

Teoreem 3. Ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid x^* ja y^* on optimaalsed parajasti siis, kui

$$(Ax^* - b) \cdot y^* = 0 \quad \text{ja} \quad (A^T y^* - c) \cdot x^* = 0$$

(ortogonaalsuse tingimused) ehk

$$\begin{aligned} (a^i \cdot x^* - b_i)\, y_i^* &= 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ (a_j \cdot y^* - c_j)\, x_j^* &= 0, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{8}$$

kus a^i on $m \times n$ maatriksi A read ja a_j on A^T read ehk A veerud.

Tõestus. Oletame, et ortogonaalsuse tingimused on rahuldatud. Siis

$$c \cdot x^* = A^T y^* \cdot x^* = y^* \cdot Ax^* = b \cdot y^*,$$

millest Lause 2 põhjal järeldub x^* ja y^* optimaalsus.

Teistpidi, eeldame, et x^* ja y^* on optimaalsed. Teoreemi 1 (või Järelduse 1) põhjal kehtib võrdus $c \cdot x^* = b \cdot y^*$. Teame, et $x^* \geq 0$, $y^* \geq 0$, $b - Ax^* \geq 0$ (sest $Ax^* \leq b$), $A^T y^* - c \geq 0$ (sest $A^T y^* \geq c$). Siis

$$(b - Ax^*) \cdot y^* \geq 0 \text{ ja } (A^T y^* - c) \cdot x^* \geq 0,$$

seepärast

$$0 \leq (b - Ax^*) \cdot y^* + (A^T y^* - c) \cdot x^* =$$

$$= b \cdot y^* - c \cdot x^* - Ax^* \cdot y^* + A^T y^* \cdot x^* = 0,$$

millest järeldub ortogonaalsuse tingimuste rahuldatus.

On selge, et võrdustest (8) järelduvad ortogonaalsuse tingimused. Tingimused $Ax^* - b \leq 0$ ja $y^* \geq 0$ ~~[illegible]~~ tähendavad, et $a^i \cdot x^* - b_i \leq 0$ ja $y_i^* \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, seepärast $(a^i \cdot x^* - b_i) y_i^* \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Kui ortogonaalsuse tingimused on rahuldatud, siis $(Ax^* - b) \cdot y^* = \sum_{i=1}^{n} (a^i \cdot x^* - b_i) y_i^* = 0$, mis on võimalik ainult siis, kui $(a^i \cdot x^* - b_i) y_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Analoogiliselt näidatakse tingimuste (8) teise osa täidetust.

Teoreem 3 on tõestatud.

Tingimustest (8) saame järgmised tulemused.

<u>Järeldus 1.</u> Kui ülesande (1) või (2) optimaalse lahendi mingi komponent on rangelt positiivne, siis sama indeksiga põhikitsendus

teises ülesandes on rahuldatud võrdusena.

Formaalselt: $x_j^* > 0 \Rightarrow a_j \cdot y^* = c_j$ ja $y_i^* > 0 \Rightarrow a^i \cdot x^* = b_i$.

Järeldus 2. Kui ülesandes (1) või (2) on optimaalse lahendi korral mingi põhikitsendus rahuldatud range võrratusena, siis teise ülesande optimaalse lahendi sama indeksiga komponent on 0. Formaalselt: $a^i \cdot x^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$ ja $a_j \cdot y^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0$.

Näide. Algülesanne on

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \to \max.$$

Selle ülesande duaalne ülesanne on

$$2y_1 + 4y_2 \geq 1,$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 1,$$
$$2y_1 + y_2 \geq 1,$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,$$
$$2y_1 + 2y_2 \to \min.$$

Lahendame algülesande simpleksmeetodiga, mille tabelid on

0	-1	-1	-1	0	0
2	2	1	2	1	0
2	4	$\boxed{2}$	1	0	1
1	1	0	$-1/2$	0	$1/2$
1	0	0	$\boxed{3/2}$	1	$-1/2$
1	2	1	$1/2$	0	$1/2$
$4/3$	1	0	0	$1/3$	$1/3$
$2/3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$
$2/3$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$

Sellest saame leida laiendatud (kanoonilisele kujule viidud) ülesande lahendi $\bar{x}^* = (0, \frac{2}{3}; \frac{2}{3}, 0, 0)$, algülesande lahendi $x^* = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ja duaalse ülesande lahendi $y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

On näha, et $c \cdot x^* = b \cdot y^*$. Analüüsime kitsendusi. Algülesandes $2x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 2$ (järeldub ka tingimusest $y_1^* > 0$), samuti $4x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 2$ (sest $y_2^* > 0$). Duaalses ülesandes $2y_1^* + 4y_2^* = 2 > 1$ (sellest järeldub ka, et $x_1^* = 0$), $y_1^* + 2y_2^* = 1$ (sest $x_2^* > 0$), $2y_1^* + y_2^* = 1$ (sest $x_3^* > 0$).

Ülesanne 34. Leida järgmise ülesande ja temaga duaalse ülesande optimaalne lahend:

$$8x_1 + 120x_2 + 114x_3 \to \min,$$

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 4,$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 5,$$

$$x_1 + 3x_2 + 10x_3 \geq 9,$$

$$x_1 + 2x_2 + 15x_3 \geq 11,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

On teada, et optimaalses lahendis $x_1^* > 0, x_3^* > 0$ ja duaalse ülesande optimaalses lahendis $y_1^* = y_2^* = 0$. Kasutada Teoreemi 3 ja järeldusi temast.

18. Blandi modifikatsioon tsükli vältimiseks

Simpleksmeetodi käsitlemisel nägime, et üks võimalus tsükli vältimiseks on leksikograafiline variant, milles kasutatakse täpsemat juhtrea valiku reeglit (mitme võimaluse korral simpleksmeetodis määrab leksikograafiline variant juhtrea üheselt). Selles punktis tutvume teise võimalusega juhtelemendi määramiseks, mida nimetatakse Blandi modifikatsiooniks või Blandi strateegiaks.

Vaatleme ülesannet $\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, milles teeme tavalised simpleksmeetodi alustamise eeldused:

1° $Ax=b$ on kujul $x_i + \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = a_{i0},\ i\in I$,

2° $a_{i0}\geq 0,\ i\in I$,

3° $c\cdot x = a_{00} - \sum_{j\in J} a_{0j}x_j$.

Siin A on $m\times n$ maatriks, I on baasiindeksite hulk, $J=\{1,\dots,n\}\setminus I$ on baasiväliste indeksite hulk. Teame, et eelduses 1° toodud kuju saab alati saavutada ja esitust 3° süsteemi $Ax=b$ lahendite hulgas samuti.

Blandi strateegia simpleksmeetodis seisneb selles, et mitme võimaluse korral valitakse alati minimaalse indeksiga veerg ja rida, seega veeruindeks $l=\min\{j\in J \mid a_{0j}<0\}$, seejärel reaindeks $k=\min\{p\in I \mid \frac{a_{p0}}{a_{pl}} = \min \frac{a_{i0}}{a_{il}}, a_{il}>0, i\in I\}$.

Simpleksisammu reateisendustes on (ridade tähistused on samad, mis olid eespool)

$$\bar{a}^l = \frac{1}{a_{kl}}a^k,$$

$$\bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}}a^k,\ i\in\{0\}\cup(I\setminus\{k\}).$$

<u>Teoreem</u>. Blandi strateegia kasutamisel simpleksmeetodis tsüklit ei teki.

<u>Tõestus*</u>. Simpleksisammu analüüsil nägime, et kui $a_{k0}>0$ (see leiab aset alati, kui asume lubatava hulga $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b, x\geq 0\}$

regulaarses tipus ehk lähtume regulaarsest lubatavast baasilahendist), siis sihifunktsiooni väärtus kasvab rangelt ja sellesse tippu hiljem tagasi ei jõuta. Selline simpleks-samm viib teise tippu, sest algselt $x_l = 0$ $(l \in J)$, aga simpleksisammu järel $x_l = \frac{1}{a_{kl}} a_{k0} > 0$. Kui tehakse simpleksisamm singulaarses tipus ja seejuures $a_{k0} = 0$, siis $\bar{a}_{l0} = 0$, $\bar{a}_{i0} = a_{i0}$, $i \in I \setminus \{k\}$, mis on tipu baasikomponendid peale simpleks-sammu ja nad olid sellised ka enne simpleksisammu, sest $x_l = 0$ $(l \in J)$. Baasivälised komponendid $x_j = 0$, $j \in J \setminus \{l\}$, olid sama väärtusega ka enne simpleksisammu, lisaks uus baasiväline komponent $x_k = 0$, millel oli ka sama väärtus $a_{k0} = 0$ enne simpleksisammu. Seega juhul $a_{k0} = 0$ jääme samasse tippu ja muidugi ei muutu ka sihifunktsiooni väärtus. Sellest analüüsist saame järeldada, et tsükli juhul asume kogu aeg samas (singulaarses) tipus, kuigi baasiindeksite hulk muutub igal sammul.

Vaatame süsteemi $Ax = b$, kus oleme välja toonud baasiindeksite hulga I, $|I| = m$, ja baasiväliste indeksite hulga J, $|J| = n - m$. Olgu $x = x_I + x_J$, kus võetakse vastavad komponendid ja võib vajadusel vaadelda $x_I \in \mathbb{R}^m$, $x_J \in \mathbb{R}^{n-m}$, aga võime neid vektoreid täiendada komponentidega 0, siis $x_I, x_J \in \mathbb{R}^n$. Võime kirjutada

$$Ax = b = A_I x_I + A_J x_J = b,$$

kus A_I on $m \times m$ maatriks, A_J on $(n-m)\times m$ maatriks ja nad koosnevad A vastavatest veergudest. Siis

$$Ax = b \Leftrightarrow x_I + A_I^{-1} A_J x_J = A_I^{-1} b. \qquad (1)$$

Sihifunktsioonis vaatleme esitust $c \cdot x = $ $= c_I \cdot x_I + c_J \cdot x_J$, kus $c_I \in \mathbb{R}^m$, $c_J \in \mathbb{R}^{n-m}$ ja nendes võetakse c vastavad komponendid. Ka siin võib neid vektoreid täiendada vajadusel komponentidega 0 ja siis $c_I, c_J \in \mathbb{R}^n$. Nüüd (1) abil

$$c \cdot x = c_I \cdot x_I + c_J \cdot x_J =$$

$$= c_I \cdot (A_I^{-1} b - A_I^{-1} A_J x_J) + c_J \cdot x_J =$$

$$= c_I \cdot A_I^{-1} b - c_I \cdot A_I^{-1} A_J x_J + c_J \cdot x_J =$$

$$= c_I \cdot A_I^{-1} b - (A_I^{-1} A_J)^T c_I \cdot x_J + c_J \cdot x_J =$$

$$= c_I \cdot A_I^{-1} b - ((A_I^{-1} A_J)^T c_I - c_J) \cdot x_J,$$

mis on meile tuttav esitus $c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j$.

Tähistame

$$\bar{c}_J = (A_I^{-1} A_J)^T c_I - c_J \,, \qquad (2)$$

mis on kordajate $a_{0j}, j \in J$, vektor. Võime kirjutada ka

$$c \cdot x = c_I \cdot A_I^{-1} b - \bar{c}_J \cdot x_J = (A_I^{-1})^T c_I \cdot b - \bar{c}_J \cdot x_J .$$

Võrdusest (2) saame

$$\bar{c}_J = A_J^T (A_I^{-1})^T c_I - c_J = (A - A_I)^T (A_I^{-1})^T c_I - c_J =$$

$$= A^T (A_I^{-1})^T c_I - c_I - c_J = A^T \lambda - c,$$

kus tähistasime $\lambda = (A_I^{-1})^T c_I$, ja sellest $c = A^T \lambda - \bar{c}_J$.

Märgime, et siin täiendame maatriksit A_I 0-veergudega, et vaadelda $m \times n$ maatriksit $A - A_I$. Nüüd süsteemi $Ax = b$ lahendi x korral

$$c \cdot x = (A^T \lambda) \cdot x - \bar{c}_J \cdot x = \lambda \cdot Ax - \bar{c}_J \cdot x = \lambda \cdot b - \bar{c}_J \cdot x .$$

Kui $\bar{x}$ on hulga Ω tipp ehk lubatav baasilahend indeksite hulkadega I ja J, siis $\bar{x}_J = 0$ ja $c \cdot \bar{x} = \lambda \cdot b$, sest $\bar{c}_J \cdot \bar{x} = 0$. Seega

$$c \cdot x = c \cdot \bar{x} - \bar{c}_J \cdot x , \qquad (3)$$

kus x on suvaline süsteemi $Ax = b$ lahend ja $\bar{x}$ tipp, mis vastab indeksihulkadele I ja J.

Peale sellist tehnilist ettevalmistust võime nüüd otsesemalt asuda teoreemi väidet tõestama. Oletame vastuväiteliselt, et Blandi strateegiaga tekib tsükkel. Selles on baasiindeksite hulgad $I_0, I_1, \ldots, I_s = I_0$. Kui vaja, siis olgu $I_{i+s} = I_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Tähistame

$$K = \{i \mid \text{eksisteerib } j \in \{1, \ldots, s\} \text{ nii, et } i \in I_j \text{ ja}$$
$$\text{eksisteerib } k \in \{1, \ldots, s\} \text{ nii, et } i \notin I_k\}.$$

Hulk K on niisiis kõikide indeksite hulk, mis tsükli jooksul saavad baasiindeksiks ja väljuvad tsükli jooksul baasiindeksite hulgast.

Olgu $l = \max\{i \mid i \in K\}$. Indeks l peab esinema mingi simplekstabeli kohal, mis vastaku indeksihulkadele I_α, J_α, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$, baasiväliste indeksite hulgas J_α (s.t. $l \in J_\alpha$), aga $l \notin J_{\alpha+1}$ ehk $l \in I_{\alpha+1}$ (hulkadele I_α ja J_α vastavas tabelis on l juhtveeru indeks). Siis selles tabelis $a_{0l} < 0$ (sest ei ole duaalset lubatavust), $a_{0j} \geq 0$, kui $j < l$, $j \in J_\alpha$ (Blandi strateegia tõttu). Tsükli käigus tuleb hiljem tabel (vastaku indeksite hulkadele I_β ja J_β, $\beta \in \{1, \ldots, s\}$), kus l väljub baasiindeksite hulgast, mis tähendab, et $l \in I_\beta$, $l \notin I_{\beta+1}$. Indeksi l asemele tuleb baasiindeksite hulka $r \in I_{\beta+1}$, seejuures $r \notin I_\beta$, samuti $r \in J_\beta$, $r \notin J_{\beta+1}$ (I_β, J_β tabelis on r juhtveeru indeks). Tabelis indeksite hulkadega I_β, J_β on $a_{l0} = 0$ (l on juhtrea indeks ja toimetame sobivas singulaarses tipus), $a_{lr}>0$ (juhtelement), $a_{0r}<0$ (juhtveeru valik). Et kasutame Blandi strateegiat, siis $i\in I_\beta$ korral, kui $i<l$ ja $a_{i0}=0$, siis ei saa olla $a_{ir}>0$ (on $a_{ir}\leq 0$). Samuti $a_{0j}\geq 0$, kui $j\in J_\beta$, $j<r$ (Blandi strateegia valib minimaalse võimaliku indeksiga r juhtveeru).

Vaatame indeksihulkadele I_β, J_β vastavas tabelis veergu indeksiga r (teame, et $r\in J_\beta$), olgu selle veeru elemendid $\tilde{a}_{ir}$, $i\in I_\beta$ (kui $I_\beta=\{1,\dots,m\}$, siis on see veerg $(\tilde{a}_{1r}\ \dots\ \tilde{a}_{mr})^T$). Defineerime vektori $y\in\mathbb{R}^n$ järgmiselt:

$$y_i=\begin{cases}1, \text{ kui } i=r & (r\notin I_\beta, \text{ sest } r\in J_\beta),\\ -\tilde{a}_{ir}, \text{ kui } i\in I_\beta, & \\ 0 \quad \text{mujal.} & \end{cases}$$

Vaadeldavas tabelis (vastab hulkadele I_β, J_β) olgu baasiindeksitele hulgast I_β vastavad A veerud $m\times m$ maatriks A_β (eespool toodud tähistes A_{I_β}). Siis eksisteerib A_β^{-1}, olgu $\bar{A}_\beta=A_\beta^{-1}A$. Maatriksi $\bar{A}_\beta$ veerud, mille indeksid on hulgast I_β, on ühikveerud. Saame $\bar{A}_\beta y=0$, seejuures näiteks $I_\beta=\{1,\dots,m\}$ korral

$$\bar{A}_\beta y=\begin{pmatrix} & & \tilde{a}_{1r} & \\ I & \dots & \vdots & \dots\\ & & \tilde{a}_{mr} & \end{pmatrix} y=\begin{pmatrix}-\tilde{a}_{1r}+\tilde{a}_{1r}\cdot 1\\ \dots\dots\dots\\ -\tilde{a}_{mr}+\tilde{a}_{mr}\cdot 1\end{pmatrix}=0,$$

aga üldisemalt on vektoril $\bar{A}_\beta y$ m komponenti ja need on $-\tilde{a}_{ir}+\tilde{a}_{ir}\cdot 1=0, i\in I_\beta$. Et $\bar{A}_\beta y=0$ ehk $A_\beta^{-1}Ay=0$, siis $Ay=0$. Süsteemi $Ax=b$ iga lahendi x korral $A(x+y)=b$. Kasutades võrdust (3), saame

$$c\cdot(\bar{x}+y)=c\cdot\bar{x}-\bar{c}_{J_\alpha}\cdot(\bar{x}+y)=c\cdot\bar{x}-\bar{c}_{J_\alpha}\cdot y,$$

$$c\cdot(\bar{x}+y)=c\cdot\bar{x}-\bar{c}_{J_\beta}\cdot(\bar{x}+y)=c\cdot\bar{x}-\bar{c}_{J_\beta}\cdot y,$$

sest $\bar{c}_{J_\alpha}\cdot\bar{x}=\bar{c}_{J_\beta}\cdot\bar{x}=0$ ($\bar{x}_j=0$, kui $j\in J_\alpha$ või $j\in J_\beta$, sest $\bar{x}$ on baasilahend mõlemal juhul).

Nüüd

$$\bar{c}_{J_\beta}\cdot y=\sum_{i\in I_\beta}(\bar{c}_{J_\beta})_i y_i+\sum_{j\in J_\beta}(\bar{c}_{J_\beta})_j y_j=(\bar{c}_{J_\beta})_r y_r<0,$$

sest $(\bar{c}_{J_\beta})_i=0, i\in I_\beta$, ja $(\bar{c}_{J_\beta})_r<0$ (juhtveeru valik, tuleb kasutada esitust (2) ja sellele eelnevat $c\cdot x$ esitust), $y_r=1$. Samal ajal

$$\bar{c}_{J_\alpha}\cdot y=\sum_{i\in I_\alpha}(\bar{c}_{J_\alpha})_i y_i+\sum_{j\in J_\alpha}(\bar{c}_{J_\alpha})_j y_j=$$

$$=(\bar{c}_{J_\alpha})_r y_r+(\bar{c}_{J_\alpha})_l y_l>0,$$

sest $r<l$ (l valik hulgas K) ja $(\bar{c}_{J_\alpha})_r\geq 0$ (Blandi strateegia valis l juhtveeruks I_α, J_α tabelis); $(\bar{c}_{J_\alpha})_l<0$ (juhtveeru valik) ja $y_l<0$ ($l\in I_\beta$ ja $y_l=-\tilde{a}_{lr}$, seejuures $\tilde{a}_{lr}>0$ kui juhtelement).

Sellega oleme saanud $c\cdot(\bar{x}+y)$ kaks erinevat väärtust, mis on vastuolu.

Teoreem on tõestatud.

19*. Lubatava hulga esitusest

Ühe duaalsuse teoreemi (Teoreem 2 punktis 17.3) tõestamisel kasutasime lemmat lubatava hulga esitusest: hulk $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ koosneb elementidest kujul

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j e^j, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0, \qquad (1)$$

kus $x^1, \ldots, x^p$ on hulga Ω tipud, $e^1, \ldots, e^q$ hulga Ω tõkestamata servade sihivektorid. Esitame siin selle väite tõestuse.

Alustame üldisemate mõistetega. Paljud neist on kasutatavad suvalises vektorruumis, aga piirdume siin ruumiga $\mathbb{R}^n$.

Vektoralamruumi $Y \subset \mathbb{R}^n$ nihe on hulk $x + Y = \{x + y \mid y \in Y\}$, seda nimetatakse ka afiinseks ruumiks ja lineaarseks muutkonnaks. Hulga $x + Y$ dimensiooniks loetakse alamruumi Y dimensiooni. Varem vaadeldud hulkadest on hüpertasand afiinne ruum dimensiooniga $n-1$, punkt dimensiooniga 0.

Lause 1. Iga afiinne ruum $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \mathbb{R}^n$, on parajasti lõpliku hulga hüpertasandite ühisosa.

Tõestus. Olgu $X = x^0 + Y \subset \mathbb{R}^n$, kus Y on vektoralamruum ruumis $\mathbb{R}^n$, $Y \neq \mathbb{R}^n$. Ruumil Y on olemas üheselt määratud ortogonaalne

täiend Z, seejuures $\dim Y + \dim Z = n$. Võtame ruumis Z baasi $a^i, i \in I$ (a^i on lineaarselt sõltumatud ja $|I| = \dim Z$). Siis $Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = 0, i \in I\}$ ehk $Y = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = 0\}$. Tähistame $a^i \cdot x^0 = b_i, i \in I$. Siis $X = x^0 + Y =$
$= \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i\}$ ($x^0 + Y$ on süsteemi $a^i \cdot x = b_i, i \in I$, kõigi lahendite hulk).

Teistpidi, vaatleme hulka $X = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i\}$, mille juures eeldame, et $X \neq \emptyset$ ja I on lõplik hulk. Homogeense süsteemi $a^i \cdot x = 0, i \in I$, lahendid moodustavad vektoralamruumi $Y \subset \mathbb{R}^n$. Mittehomogeensel süsteemil $a^i \cdot x = b_i, i \in I$, (see on tegelikult homogeenne süsteem, kui $b_i = 0$ iga $i \in I$ korral) on olemas lahend x^0, sest $X \neq \emptyset$. Selle süsteemi kõik lahendid moodustavad hulga $x^0 + Y$ ehk oleme saanud võrduse $X = x^0 + Y$, millega on Lause 1 tõestatud.

<u>Märkus</u>. Lause 1 tõestuses nägime, et afiinse ruumi esitusel hüpertasandite ühisosana võib eeldada, et hüpertasandite määratluses olevad vektorid a^i on lineaarselt sõltumatud ning sel juhul nende arvu ja afiinse ruumi dimensiooni summa on n (kasutatud tähistuses $|I| + \dim Y = n$).

Tühimeta hulga $X \subset \mathbb{R}^n$ dimensioon on q, kui on olemas affiinne muun dimensiooniga q, milles X on osahulk, kuid X ei sisaldu üheski affiinses muunis dimensiooniga $q-1$.

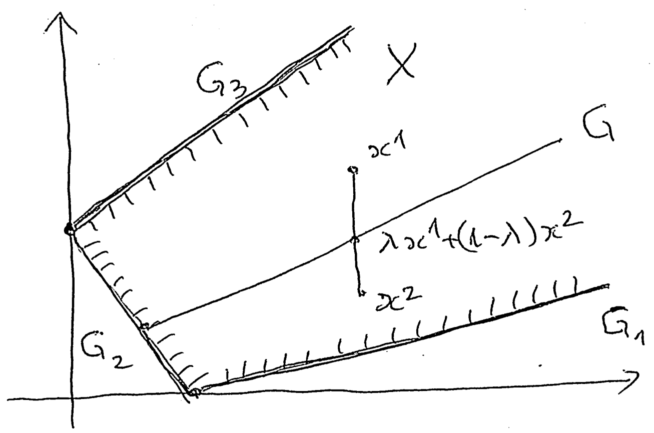
Polüeedrilise hulga $X \subset \mathbb{R}^n$ osahulka $G \subset X$ nimetatakse q-mõõtmeliseks rajahulgaks, kui on täidetud tingimused:

1) G dimensioon on q;

2) kui $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in G$, $\lambda \in (0,1)$, $x^1, x^2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, siis $x^1, x^2 \in G$.

Tingimus 1) sisaldab varjatult nõuet, et G on kumer hulk, tingimus 2) aga seda, et q-mõõtmelise rajahulga G hulgast G erinevat kumerat hulga G osahulka, mis on q-mõõtmeline, me ei loe q-mõõtmeliseks rajahulgaks. Tingimus 2) tähendab veel seda, et G asub hulga X „ääres", olles seejuures, nagu eelmises lauses öeldud, sisalduvuse mõttes maksimaalne. Juhul $q = 0$ on rajahulk hulga X tipp, $q = 1$ juhul (ühemõõtmeline) serv, mis on sirge muunis $\mathbb{R}^n$ või sirge ühisosa hulgaga X. Kui hulga X dimensioon on q, siis X on iseenda q-dimensionaalne rajahulk.

Illustratsiooniks toome tasandil $\mathbb{R}^2$ paikneva tõkestamata hulga X, mida näeme järgneval joonisel.



Hulk X on kahedimensionaalne, tal on kolm ühedimensionaalset rajahulka G_1, G_2, G_3, kusjuures G_1 ja G_3 on tõkestamata sirged (kiired), G_2 aga lõik. Nende korral on tingimus 2) täidetud. Hulk G (kiir) on ühedimensionaalne ja ta ei ole hulga X ühegi ühedimensionaalse osahulga pärisosahulk. Kuid G ei asu hulga X „ääres": tingimust 2) hulk G ei rahulda, mistõttu G ei ole hulga X ühedimensionaalne rajahulk.

Meenutame, et polüeedriline hulk on $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \le b_i, i \in I\}$, kus I on lõplik hulk (kui $I = \emptyset$, siis oleks $\mathbb{R}^n$, aga meie esitatava teooria seisukohalt ei ole see oluline juht).

<u>Lause 2.</u> Kui G on polüeedrilise hulga X rajahulk ja G_0 on polüeedrilise hulga G rajahulk, siis G_0 on hulga X rajahulk.

<u>Tõestus</u>. On selge, et hulga G_0 dimensioon ei sõltu sellest, kas vaatame teda hulga G või hulga X osahulgana. Kui $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in G_0$,

$\lambda \in (0,1)$, $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, siis sama esitusega on sisaldumus $x \in G$. Et G on hulga X rajahulk, siis $x^1, x^2 \in G$. Kasutades nüüd asjaolu, et G_0 on hulga G rajahulk, saame $x^1, x^2 \in G_0$, mis lõpetab tõestuse.

Lause 3. Polüeedrilise hulga $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq b_i, i \in I\}$ q-dimensionaalne osahulk G on hulga X q-dimensionaalne rajahulk parajasti siis, kui hulga G kõik elemendid rahuldavad $n-q$ võrdust $a^i \cdot x = b_i$, $i \in I_0 \subset I$, kus a^i, $i \in I_0$, on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus. 1. Olgu G vaadeldava hulga X q-dimensionaalne rajahulk. Defineerime $I_G = \{ i \in I \mid a^i \cdot x = b_i$ iga $x \in G$ korral$\}$. Vaatleme hulka $G' = \{x \in X \mid a^i \cdot x = b_i, i \in I_G\}$, millest on selge, et $G \subset G'$. Näitame esmalt, et $G' \subset G$. Juhul $G = X$ (siis $I_G = I$) see sisaldumus muidugi leiab aset. Seepärast vaatleme juhtu $G \neq X$. Võtame suvaliselt $x \in G'$. Olgu $x^0 \in G$ selline, et $a^i \cdot x^0 = b_i$, $i \in I_G$, ja $a^i \cdot x^0 < b_i$, $i \in I \setminus I_G$ (täpsustuseks lisame, et $G \neq X$ tõttu on iga $j \in I \setminus I_G$ korral olemas x^j nii, et $a^j \cdot x^j < b_j$ ja $a^i \cdot x^j = b_i$, $i \in I_G$, $a^i \cdot x^j \leq b_i$, $i \in I \setminus I_G$. Seejärel võtame $x^0 = \frac{1}{r} \sum_{j \in I \setminus I_G} x^j$, kus $r = |I \setminus I_G|$).

Vaatame elementi $x' = x^0 + \varepsilon(x^0 - x)$, $\varepsilon > 0$. Siis $a^i \cdot x' = b_i$, $i \in I_G$, iga ε korral ja $a^i \cdot x' \le b_i$, $i \in I \setminus I_G$, kui ε on piisavalt väike. Seega piisavalt väikese ε korral $x' \in G'$. Niisiis $x, x' \in G' \subset X$, $x^0 \in G$, kusjuures

$$x^0 = \frac{1}{1+\varepsilon} x' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x .$$

Et G on rajahulk, siis $x', x \in G$, s.t. suvaline hulga G' element x on hulgas G, mis tähendab, et $G' \subseteq G$. Seega $G = G'$ ja jääb näidata, et vektorite a^i, $i \in I_G$, hulgas on $n-q$ lineaarselt sõltumatut.

Näeme, et $G = G' \subset \bigcap_{i \in I_G} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i\}$ ehk G sisaldub hüpertasandite ühisosas, mis on $(n-p)$-dimensionaalne afiinne ruum, kui vektorite a^i, $i \in I_G$, hulgas on parajasti p lineaarselt sõltumatut. Kuna G on q-dimensionaalne, siis $q \le n - p$.

Kui $I_G = I$ (ehk $G = X$), siis $G = \bigcap_{i \in I_G} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i\}$ ja $q = n - p$, mis tähendab, et a^i, $i \in I_G$, hulgas on $p = n - q$ lineaarselt sõltumatut (siin tugineme Lause 1 tõestusele järgnenud märkusele). Seepärast jääb analüüsida juhtu $I_G \ne I$. Siis iga $j \in I \setminus I_G$ korral on olemas $y^j \in G$ nii, et $a^j \cdot y^j < b_j$ ja $a^i \cdot y^j = b_i$, $i \in I_G$. Olgu

$y^0 = \frac{1}{r} \sum_{j \in I \setminus I_G} y^j$, kus $r = |I \setminus I_G|$. Sel juhul $a^j \cdot y^0 < b_j$, $j \in I \setminus I_G$, ning $y^0 \in G$ hulga G kumeruse tõttu.

Vaatleme võrrandisüsteemi $a^i \cdot x = 0$, $i \in I_G$, mille kohta teame, et süsteemi maatriksi astak on p. Sellel süsteemil on $n-p$ lineaarselt sõltumatut lahendit x^j, $j = 1, \ldots, n-p$. Kui $\varepsilon > 0$ on küllalt väike, siis iga $j \in \{1, \ldots, n-p\}$ korral $a^i \cdot (y^0 + \varepsilon x^j) = b_i$, $i \in I_G$, ja $a^i \cdot (y^0 + \varepsilon x^j) \leq b_i$, $i \in I \setminus I_G$, mis tähendab, et $y^0 + \varepsilon x^j \in G$. Oletame, et hulk G sisaldub mingis affiinses ruumis $x^0 + Y$. Lause 1 põhjal $x^0 + Y = \bigcap_{i \in \bar{I}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{a}^i \cdot x = \bar{b}_i\}$, kus $\bar{a}_i$, $i \in \bar{I}$, on lineaarselt sõltumatud. Hulka $x^0 + Y$ kuuluvad y^0 ja $y^0 + \varepsilon x^j$, $j \in \{1, \ldots, n-p\}$, sest nad kuuluvad hulka G. Nüüd

$$\bar{a}^i \cdot x^j = \frac{1}{\varepsilon}\left(\bar{a} \cdot (y^0 + \varepsilon x^j) - \bar{a}^i \cdot y^0\right) = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{b}_i - \bar{b}_i) = 0, \; j \in \{1, \ldots, n-p\},$$

mis tähendab, et homogeensel süsteemil $\bar{a}^i \cdot x = 0$, $i \in \bar{I}$, on $n-p$ lineaarselt sõltumatut lahendit x^j, $j \in \{1, \ldots, n-p\}$. Seepärast $\dim Y \geq n-p$. Hulk G on q-dimensionaalne ja võime valida hulga $x^0 + Y$, milles G sisaldub, samuti q-dimensionaalse, s.t. $\dim Y = q$. Seega $q \geq n-p$ ja eelnevas saadud üldiselt kehtivat $q \leq n-p$ arvestades $q = n-p$ ehk $p = n-q$, mis tähendab, et vektorite $a^i, i \in I_G$, hulgas on $n-q$ lineaarselt sõltumatut.

2. Olgu G kirjeldatud kui hulk $\{x \in X \mid a^i \cdot x = b_i, i \in I_G\}$, kus $I_G \subset I$, $I_0 \subset I_G$, $|I_0| = n-q$ ja vektorid $a^i, i \in I_0$, on lineaarselt sõltumatud (sellest tuleneb, et G dimensioon ei ületa arvu q, sest ta sisaldub q-dimensionaalses afiinses $\underbrace{\text{muumis}}_{}$ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i, i \in I_0\}$, kuid järgnenes arutelus ei ole G dimensioon oluline). Vaatleme elementi $x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in G$, kus $\lambda \in (0,1)$, $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$. Siis $a^i \cdot x^1 \leq b_i$ ja $a^i \cdot x^2 \leq b_i$ iga $i \in I$ korral. Olgu $i \in I_G$. Siis $a^i \cdot x = \lambda a^i \cdot x^1 + (1-\lambda) a^i \cdot x^2 = b_i$, millest

$$a^i \cdot x^1 = \frac{1}{\lambda}\left(a^i \cdot x - (1-\lambda) a^i \cdot x^2\right) \geq \frac{1}{\lambda}\left(b_i - (1-\lambda) b_i\right) = b_i,$$

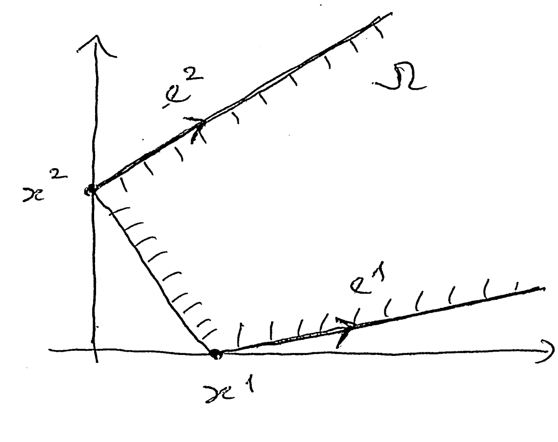
kus kasutasime võrratust $a^i \cdot x^2 \leq b_i$. Seega $a^i \cdot x^1 = b_i$. Samal ajal $a^i \cdot x^1 \leq b_i$, $i \in I \setminus I_G$, mistõttu $x^1 \in G$. Analoogiliselt saame $x^2 \in G$. Järelikult on hulk G hulga X rajahulk, millelt me eeldasime q-dimensionaalsust.

Lause 3 on tõestatud.

Märkustame, et ülesande *7 väide sisaldub Lauses 3 juhul $q = 0$, kus on tegemist polüeedrilise hulga tipuga.

Lause 3 elementaarne järeldus on, et polüeedrilise hulga iga rajahulk on ise polüeedriline hulk, sest ta on poolruumide ja hüpertasandite ühisosa, kuid iga hüpertasand on kahe poolruumi ühisosa.

Sirge S ruumis $\mathbb{R}^n$ on määratud kahe punktiga $x^1, x^2 \in S$, $x^1 \neq x^2$, kusjuures iga $x \in S$ on esitatav kujul $x = x^1 + \lambda(x^2 - x^1) = \lambda x^2 + (1-\lambda)x^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Kui vaatleme polüeedrilist hulka $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, siis sirge ühedimensionaalne ühisosa hulgaga Ω saab olla lõik või kiir. Tõkestamata serv on ühedimensionaalne osahulk $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^0 + \lambda e, \lambda \geq 0\} \subset \Omega$, kus x^0 on hulga Ω tipp ja $e \neq 0$, mida nimetatakse tõkestamata serva E sihivektoriks. Näiteks juba tuttaval joonisel juhul $n = 2$, kus viirutusega on näidatud hulk Ω, on kujutatud kahte tippu, kahte tõkestamata serva ja nende sihivektoreid.



<u>Lause 4.</u> Kui e on hulga $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ tõkestamata serva sihivektor, siis $Ae \leq 0$ ja $e \geq 0$.

<u>Tõestus</u>. Olgu $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x^0 + \lambda e, \lambda \geq 0\} \subset \Omega$ tõkestamata serv. Siis iga $x \in E$ korral $x \in \Omega$, s.t. $Ax \leq b$ ja $x \geq 0$. Seepärast $Ax^0 + \lambda Ae \leq b$ iga $\lambda \geq 0$

korral. Kui oletada vastuväiteliselt, et ei kehti $Ae \leq 0$, siis mingi i korral $a^i \cdot e > 0$. Siin aga $a^i \cdot x^0 + \lambda a^i \cdot e \leq b_i$ on vastuolu, kui $\lambda \geq 0$ on küllalt suur. Kui veel oletada, et ei kehti $e \geq 0$, siis mingi i korral $e_i < 0$. Kuid $x_i^0 + \lambda e_i \geq 0$ on vastuolu, kui $\lambda \geq 0$ on küllalt suur.

<u>Esituslemma tõestus</u>. <u>Piisavus</u>. Olgu $x \in \mathbb{R}^n$ esitatud kujul (1), soovime näidata, et $x \in \Omega$. Arvestades, et iga x^i on hulga Ω tipp, seetõttu $x^i \in \Omega$, ja Lause 4 põhjal $Ae^j \leq 0$ iga j korral, saame

$$Ax = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j A e^j \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b = b.$$

Lisaks kehtib $x^i \geq 0$ ja Lause 4 põhjal $e^j \geq 0$ iga i ja j korral, mistõttu $x \geq 0$.

<u>Tarvilikkus</u>. Tõestame väite induktsiooniga hulga Ω dimensiooni järgi. Kui Ω dimensioon on 1, siis Ω on lõik või kiir. Esimesel juhul $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \lambda \in [0,1]\}$, kus x^1 ja x^2 on lõigu otspunktid ehk Ω tipud. Teisel juhul $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x^1 + \lambda e^1, \lambda \geq 0\}$, kus x^1 on kiire otspunkt ehk Ω tipp ja e^1 tõkestamata serva sihivektor.

Vaatleme nüüd hulka Ω, mille dimensioon olgu q. Võib lugeda, et $q \geq 2$, sest $q = 1$ korral on vajalik esitus saadud. Kõiki Ω kitsendusi vaatleme komplektina kujul $a^i \cdot x \leq b_i$, $i \in I$. Hulk Ω on iseenda q-dimensionaalne rajahulk. Vaatleme suvalist elementi $x^0 \in \Omega$, loeme ta fikseerituks. Lause 3 põhjal on võrratustest $a^i \cdot x^0 \le b_i$, $i \in I$, $n-q$ täidetud võrdustena $a^i \cdot x^0 = b_i$, $i \in I_0 \subset I$, kus a^i, $i \in I_0$, on lineaarselt sõltumatud. Vaadeldava hulga Ω korral on vektorite a^i, $i \in I$, hulgas olemas n lineaarselt sõltumatut, seepärast on olemas vektorid a^{i_1}, a^{i_2} nii, et süsteem a^i, $i \in I_0 \cup \{i_1, i_2\}$, on lineaarselt sõltumatu.

Paneme tähele, et kui näiteks $a^{i_1} \cdot x^0 = b_{i_1}$, siis x^0 rahuldab $n-q+1 = n-(q-1)$ võrdust $a^i \cdot x^0 = b_i$, $i \in I_0 \cup \{i_1\}$, ning on seepärast Lause 3 põhjal hulga Ω $(q-1)$-dimensionaalse rajahulga punkt. See $(q-1)$-dimensionaalne rajahulk on ühtlasi polüeedriline hulk, mille dimensioon on $q-1$. Järelikult on sel juhul x^0 esitatav induktsioonieelduse põhjal kujul (1), kusjuures tugineme veel Lausele 2, et esituses olevad Ω tipud ja Ω tõkestamata servade sihivektorid.

Jääb analüüsida juhtu, kus $a^{i_1} \cdot x^0 < b_{i_1}$ ja $a^{i_2} \cdot x^0 < b_{i_2}$. Võtame e nii, et $a^{i_1} \cdot e = -1$, $a^{i_2} \cdot e = 1$, $a^i \cdot e = 0$, $i \in I_0$. Olgu $x(\lambda) = x^0 + \lambda e$. Näitame, et $x(\lambda)$ rahuldab võrratusi $a^i \cdot x(\lambda) \le b_i$, $i \in I$, parajasti siis, kui $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$ mingite $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \ne \lambda_2$, korral.

Kui $i \in I_0$, siis $a^i \cdot x^0 = b_i$ ja $a^i \cdot e = 0$ tõttu

$a^i \cdot x(\lambda) = a^i \cdot x^0 + \lambda a^i \cdot e = b_i$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral. Analüüsime juhte $i \in I \setminus I_0$. Kui mingi $i \in I \setminus I_0$ korral $a^i \cdot e = 0$, siis muidugi $a^i \cdot x(\lambda) \le b_i$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral. Kui $a^i \cdot e < 0$, siis

$$a^i \cdot x(\lambda) = a^i \cdot x^0 + \lambda a^i \cdot e \le b_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda a^i \cdot e \le b_i - a^i \cdot x^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{b_i - a^i \cdot x^0}{a^i \cdot e}.$$

Me võime siin piirduda juhtudega, kus $a^i \cdot x^0 < b_i$, sest kui on olemas $i_1 \in I \setminus I_0$ nii, et $a^{i_1} \cdot e < 0$, siis vektorid a^i, $i \in I_0 \cup \{i_1\}$, on lineaarselt sõltumatud (just seepärast, et $a^i \cdot e = 0, i \in I_0$, ja $a^{i_1} \cdot e < 0$), ja kui sellega kaasneb $a^{i_1} \cdot x^0 = b_{i_1}$, siis eespool toodud arutelu annab x^0 esituse kujul (1).

Seega kõigil juhtudel, kus $a^i \cdot e < 0$ ja $a^i \cdot x^0 < b_i$, on $a^i \cdot x(\lambda) \le b_i$ täidetud parajasti siis, kui

$$\lambda \geq \max_{\substack{a^i \cdot e < 0 \\ a^i \cdot x^0 < b_i}} \frac{b^i - a^i \cdot x^0}{a^i \cdot e} = \lambda_1,$$

kus võtsime kasutusele λ_1. Seejuures $\lambda_1 < 0$.

Analoogiliselt $a^i \cdot e > 0$ korral

$$a^i \cdot x(\lambda) \le b_i \Leftrightarrow \lambda \le \frac{b_i - a^i \cdot x^0}{a^i \cdot e}$$

ning kõigil juhtudel, kus $a^i \cdot e > 0$ ja $a^i \cdot x^0 < b_i$, on $a^i \cdot x(\lambda) \le b_i$ täidetud parajasti siis, kui

$$\lambda \leq \min_{\substack{a^i \cdot e > 0 \\ a^i \cdot x^0 < b_i}} \frac{b_i - a^i \cdot x^0}{a^i \cdot e} = \lambda_2 > 0.$$

Olgu $x^1 = x(\lambda_1)$, $x^2 = x(\lambda_2)$, $\mu_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $\mu_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Siis $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ja

$$\mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(x^0 + \lambda_1 e) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(x^0 + \lambda_2 e) = x^0.$$

Arvude λ_1 ja λ_2 defineerimisel toodud maksimum ja miinimum saavutatakse, seepärast on olemas $k_1, k_2 \in I \setminus I_0$ nii, et

$$\lambda_1 = \frac{b_{k_1} - a^{k_1} \cdot x^0}{a^{k_1} \cdot e}, \quad \lambda_2 = \frac{b_{k_2} - a^{k_2} \cdot x^0}{a^{k_2} \cdot e}.$$

Selle põhjal $\lambda_1 a^{k_1} \cdot e + a^{k_1} \cdot x^0 = b_{k_1}$ ja $a^{k_1} \cdot x^1 = a^{k_1} \cdot x^0 + \lambda_1 a^{k} \cdot e = b_{k_1}$. Analoogiliselt $a^{k_2} \cdot x^2 = b_{k_2}$. Samal ajal $a^{k_1} \cdot e \neq 0$, $a^{k_2} \cdot e \neq 0$, seepärast on a^i, $i \in I_0 \cup \{k_1\}$, lineaarselt sõltumatu süsteem, samuti on lineaarselt sõltumatud vektorid a^i, $i \in I_0 \cup \{k_2\}$. Arvestades veel, et $a^i \cdot x^1 = b_i$ ja $a^i \cdot x^2 = b_i$, $i \in I_0$ (iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral oli $a^i \cdot x(\lambda) = b_i$, $i \in I_0$), võib Lausele 3 tuginedes väita, et x^1 ja x^2 kuuluvad vastavalt rajahulkadesse Ω_1 ja Ω_2 mis on ülimalt $q-1$ dimensionaalsed. Induktsioonieelduse põhjal saame esitused

$$x^1 = \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{1i} x^{1i} + \sum_{j=1}^{q_1} \mu_{1j} e^{1j},$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{2i} x^{2i} + \sum_{j=1}^{q_2} \mu_{2j} e^{2j}$$

koos vastavate tingimustega $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \mu_{1j}, \mu_{2j}$ kohta. Lause 2 põhjal on kõik x^{1i}, x^{2i} hulga Ω tipud, samuti kõik e^{1j}, e^{2j} hulga Ω tõkestamata servade sihivektorid, sest hulkades Ω_1 ja Ω_2 olevad tõkestamata servad (ühedimensionaalsed rajahulgad) on ühtlasi tõkestamata servad (ühedimensionaalsed rajahulgad) hulges Ω. Seega

$$x^0 = \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 = \sum_{i=1}^{p_1} \mu_1 \alpha_{1i} x^{1i} + \sum_{i=1}^{p_2} \mu_2 \alpha_{2i} x^{2i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q_1} \mu_1 \mu_{1j} e^{1j} + \sum_{j=1}^{q_2} \mu_2 \mu_{2j} e^{2j},$$

kus $\mu_1 \alpha_{1i} \geq 0$, $\mu_2 \alpha_{2i} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p_1} \mu_1 \alpha_{1i} + \sum_{i=1}^{p_2} \mu_2 \alpha_{2i} = 1$,

$\mu_1 \mu_{1j} \geq 0$, $\mu_2 \mu_{2j} \geq 0$.

Lemma on tõestatud.

20*. Kunstliku baasi meetodist

Punktis 16 jäi tõestamata Teoreem 2, mis väitis, et kui algülesandel on lahend olemas, siis iga küllalt suure arvu M korral on laiendatud ülesanne lahenduv ja iga optimaalse lahendi lisakomponendid võrduvad nulliga. Selles punktis esitame mainitud teoreemi tõestuse.

Vaatleme ülesannet

$$\max\{c\cdot x \mid Ax=b, x\geq 0\}, \qquad (1)$$

kus eeldame, et A on $m\times n$ maatriks ja A astak on m, lisaks $b\geq 0$. Laiendatud ülesanne on

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m,\\ &x_i\geq 0,\ i=1,\dots,n+m,\\ &c_M\cdot\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i-M\sum_{j=1}^{m}x_{n+j}\to\max. \end{aligned} \qquad (2)$$

<u>Lemma 1</u>. Kui ülesandel (1) on lahend olemas, siis on olemas $M_1>0$ nii, et iga $M>M_1$ korral on ülesandel (2) lahend olemas.

<u>Tõestus</u>. Teame, et kui põhikujul oleval ülesandel on lahend olemas, siis on lahend olemas ka temaga duaalsel ülesandel. Samuti teame, et põhikujul oleval ülesandel on lahend olemas parajasti siis, kui tema ja duaalse

ülesande lubatavad hulgad on mittetühjad.
Ülesanne (1) põhikujul on

$$\max\{c\cdot x \mid Ax\le b, (-A)x\le -b, x\ge 0\} =$$

$$= \max\{c\cdot x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b}, x\ge 0\}, \text{ kus } \tilde{A}=\begin{pmatrix}A\\-A\end{pmatrix}, \tilde{b}=\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}.$$

Selle duaalne ülesanne on

$$\min\{\tilde{b}\cdot y \mid \tilde{A}^T y\ge c, y\ge 0\}, \qquad (3)$$

kus $y\in\mathbb{R}^{2m}$, $\tilde{A}^T=(A^T\ -A^T)$. Eelduse kohaselt on ülesandel (1) ja seega ka ülesandel (3) lahend olemas. Ülesanne (2) põhikujul on

$$\max\{c_M\cdot \bar{x} \mid \tilde{\tilde{A}}\bar{x}\le \tilde{b}, \bar{x}\ge 0\},$$

kus $\bar{x}\in\mathbb{R}^{n+m}$, $\tilde{\tilde{A}}=\begin{pmatrix}A & I_m\\ -A & -I_m\end{pmatrix}$. Selle duaalses ülesandes huvitab meid eelkõige lubatav hulk

$$\{y\in\mathbb{R}^{2m} \mid \tilde{\tilde{A}}^T y\ge c_M, y\ge 0\}. \qquad (4)$$

Siin $\tilde{\tilde{A}}^T=\begin{pmatrix}A^T & -A^T\\ I_m & -I_m\end{pmatrix}$ ja tingimus $\tilde{\tilde{A}}^T y\ge c_M$ tähendab, et $\tilde{A}^T y\ge c$ ja $y_i - y_{m+i}\ge -M, i=1,\dots,m,$ kusjuures $y_1,\dots,y_{2m}\ge 0$. Teame, et ülesandel (3) on lahend (tähistame $\tilde{y}$) olemas, $\tilde{y}$ kuulub ülesande (3) lubatavasse hulka $\{y\in\mathbb{R}^{2m} \mid \tilde{A}^T y\ge c, y\ge 0\}$.

Sama $\tilde{y}$ kuulub ka hulka (4), kui $M = M_1 > 0$ valida küllalt suur. Muidugi kuulub $\tilde{y}$ hulka (4) ka arvust M_1 suuremate arvude M korral. Oleme näidanud, et ülesande (2) duaalse ülesande lubatav hulk on mittetühi (küllalt suure M korral), ülesandel (2) endal on aga lubatav lahend (tõime isegi lubatava baasilahendi) olemas.

Lemma 1 on tõestatud.

Lemma 2. Kui ülesande (1) lubatav hulk on mittetühi, siis on olemas $M_2 \geq 0$ nii, et iga $M > M_2$ korral on ülesande (2) iga lubatava hulga tipuks olev lahend $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ selline, et $x_{n+i}^* = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Tõestus. Olgu $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$. Siis hulgal Ω on olemas tipp ehk ülesande (1) lubatav baasilahend $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (lisame, et x^0 ei sõltu sihifunktsioonist ehk on sama kõikvõimalike sihifunktsioonide korral).

Oletame vastuväiteliselt, et eksisteerib jada $\tilde{M}_k \to \infty$ nii, et iga $\tilde{M}_k$ korral on ülesandel (2) olemas lubatava hulga tipuks olev lahend $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ (sõltub arvust $\tilde{M}_k$) nii, et mingi $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral $x_{n+i}^* \neq 0$ (i võib sõltuda arvust $\tilde{M}_k$). Juhime tähelepanu sellele, et Lemma 2 sõnastus ei eelda ülesande (2) lahendi olemasolu, kuid iseloomustada tipuks olevat lahendit, kui ülesanne (2) on lahenduv. Defineerime

$$\underline{M} = \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \mid \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m}) \text{ on ülesande (2) lubatav baasilahend, milles } \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \neq 0 \text{ (tegelikult} > 0) \right\}.$$

Paneme tähele, et ülesande (2) lubatavate baasilahendite hulk ei sõltu arvust M. Vastuväite kohaselt on $\underline{M}$ korrektselt defineeritud, seejuures $\underline{M} > 0$. Olgu

$$\bar{M} = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m}) \text{ on ülesande (2) lubatav baasilahend} \right\}.$$

Arv $\bar{M}$ ei sõltu samuti arvust M ülesandes (2). Ilmselt $\bar{M} \geq c \cdot x^0$, sest $\bar{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, 0, \ldots, 0)$ on ülesande (2) lubatav baasilahend. Määrame

$$M_2 = \frac{\bar{M} - c \cdot x^0}{\underline{M}}.$$

Võtame $M \in \{\tilde{M}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $M > M_2$, ja vaatame arvule M vastavat vastuväites toodud ülesande (2) tipulahendit $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$, kus $x_{n+i}^* \neq 0$ mingi i korral. Siis $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^* \geq \underline{M}$.

Samal ajal $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \bar{M}$. Nüüd

$$c_M \cdot \bar{x}^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^* \leq \bar{M} - M \underline{M}.$$

Et $\bar{x}^*$ on ülesande (2) lahend, siis

$$c \cdot x^0 = c_M \cdot \bar{x}^0 \leq c_M \cdot \bar{x}^* \leq \bar{M} - M\underline{M},$$

millest

$$M \leq \frac{\bar{M} - c \cdot x^0}{\underline{M}} = M_2,$$

mis on vastuolu.

Lemma 2 on tõestatud.

Lemmade 1 ja 2 alusel saab väita, et kui ülesandel (1) on lahend olemas, siis võttes $M > \max\{M_1, M_2\}$, saab laiendatud ülesande (2) lahendamisel simpleksmeetodiga lahendi, mille n esimest komponenti on ülesande (1) lahend. Järgnev tulemus väidab enamat.

<u>Teoreem.</u> Kui ülesandel (1) on lahend olemas, siis eksisteerib $M_0 > 0$ nii, et iga $M \geq M_0$ korral on laiendatud ülesanne (2) lahenduv ja tema iga optimaalne lahend $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ on selline, et $x_{n+1}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$.

<u>Tõestus.</u> Eeldame, et ülesandel (1) on lahend olemas. Olgu $\bar{M}_0 > \max\{M_1, M_2\}$, kus M_1 ja M_2 on pärit Lemmadest 1 ja 2. Valime $M \geq \bar{M}_0$. Lemma 1 põhjal on ülesandel (2) lahend olemas. Teame varasemast, et ülesandel (2) on olemas tipulahend, s.o. selline optimaalne lahend, mis on lubatava hulga tipp. Lemma 2

alusel on kõik ülesande (2) tipulahendid sellised, et nende m viimast komponenti on nullid. Vaatleme ülesande (2) suvalist optimaalset lahendit $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{n+m}^*)$. Ta on optimaalne lahend ka ülesandes (2) põhikujul

$$\max\{c_M \cdot \bar{x} \mid \tilde{A}\bar{x} \leq \tilde{b}, \bar{x} \geq 0\}, \qquad (5)$$

mis esines Lemma 1 tõestuses. Esitame $\bar{x}^*$ kujul

$$\bar{x}^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \bar{x}^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \bar{e}^j, \qquad (6)$$

kus $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^p$ on ülesande (5) lubatava hulga tipud ja $\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^q$ tõkestamata servade sihivektorid. Võime eeldada, et $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, p$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, ja $\mu_j > 0, j = 1, \dots, q$, sest vastasel juhul jätame nulliga võrduvad liidetavad ära.

Punktis 17.3 näitasime, et $c_M \cdot \bar{e}^j \leq 0$ ja $\bar{e}^j \geq 0$ kõikide tõkestamata servade sihivektorite korral, kusjuures kasutasime sihifunktsiooni ülalt tõkestatust lubatavas hulgas, mis praegu leiab aset ülesande (2) lahenduvuse tõttu.

Võrdusest (6) saame

$$c_M \cdot \bar{x}^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_M \cdot \bar{x}^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j c_M \cdot \bar{e}^j \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_M \cdot \bar{x}^i \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) c_M \cdot \bar{x}^* = c_M \cdot \bar{x}^*,$$

millest järeldub, et $c_M \cdot \bar{x}^i = c_M \cdot \bar{x}^*$, $i = 1, \dots, p$, ehk lahendi $\bar{x}^*$ esituses (6) olevad tipud $\bar{x}^i$ on samuti ülesande (5) lahendid. Lisaks saame sellest võrratuste ahelast, et $c_M \cdot \bar{e}^j = 0$ nende sihivektorite $\bar{e}^j$ korral, mis on esituses (6). Kui $\bar{e}^j = (e_1^j, \ldots, e_{n+m}^j)$, siis $c_M \cdot \bar{e}^j = 0$ tähendab, et

$$c \cdot (e_1^j, \ldots, e_n^j) - M(e_{n+1}^j + \ldots + e_{n+m}^j) = 0. \quad (7)$$

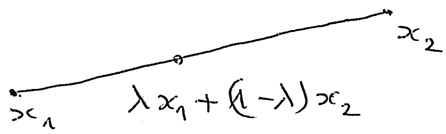
Vaatleme ülesande (5) lubatava hulga kõikide tõkestamata servade sihivektorite hulka $\{\bar{e}^j, j \in J\}$, see ei sõltu arvust M. Kui $\bar{e}^j$ esineb kahe erineva $M \geq \bar{M}_0$ korral ülesande (5) lahendi esituses (6), siis (7) põhjal $e_{n+1}^j = \ldots = e_{n+m}^j = 0$ ja loeme indeksi $j \in J$ kuuluvaks hulka J_0. Kui aga $\bar{e}^j$ esineb vaid ühe $M = \bar{M}_j \geq \bar{M}_0$ korral ülesande (5) lahendi esituses (6) või ei esine ühegi $M \geq \bar{M}_0$ korral ühegi lahendi esituses (sel juhul olgu $\bar{M}_j = \bar{M}_0$), siis loeme j kuuluvaks hulka J_1. Niisiis $J = J_0 \cup J_1$, $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Muidugi võib olla, et $J_0 = \emptyset$ või $J_1 = \emptyset$ ja isegi $J = \emptyset$ (siis ülesande (5) lubatav hulk on tõkestatud).

Määrame $M_0 = \max\{\bar{M}_j, j \in J_1\} + 1$ ja juhul $J_1 = \emptyset$ olgu $M_0 = \bar{M}_0$. Siis $M \geq M_0$ korral saavad ülesande (5) iga lahendi $\bar{x}^*$ esituses olla vaid sihivektorid $\bar{e}^j, j \in J_0$. Esituses (6) on kõikide $\bar{x}^i$ ja $\bar{e}^j$ viimased m komponenti nullid ja seepärast $x_{n+1}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$.

Teoreem on tõestatud.

§ 7. Kumer planeerimine

Olgu E vektorruum. Meenutame, et hulka $X \subset E$ nimetatakse kumeraks, kui $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$. Hulga kumerus tähendab, et iga temasse kuuluva kahe punkti korral kuuluvad hulka ka vahepealsed punktid neid kahte punkti ühendaval sirgel. Olukorda illustreerib järgmine joonis:



1. Kumerad funktsioonid

Olgu E vektorruum, $X \subset E$ kumer hulk.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \to \mathbb{R}$ nimetatakse kumeraks, kui iga $x, y \in X$, $x \neq y$, ja iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Kumera funktsiooni mõiste oli meil esitatud varem juhul $X = \mathbb{R}^n$.

Lause 1. Kui $f, g : X \to \mathbb{R}$ on kumerad, siis $f+g$ ja cf, $c \geq 0$, on kumerad.

Ülesanne 34. Tõestada Lause 1.

<u>Lause 2.</u> Funktsioon $f: X \to \mathbb{R}$ on kumer parajasti siis, kui iga $x, y \in X$, $x \neq y$, korral funktsioon $g(t) = f(tx + (1-t)y)$, $t \in [0,1]$, on kumer.

<u>Tõestus.</u> 1) Olgu $f: X \to \mathbb{R}$ kumer. Võtame $x, y \in X$, $x \neq y$, ja moodustame funktsiooni $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ võrdusega $g(t) = f(tx + (1-t)y)$. Olgu $t, s \in [0,1]$, $t \neq s$. Iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$g(\lambda t + (1-\lambda)s) = f((\lambda t + (1-\lambda)s)x + (1 - (\lambda t + (1-\lambda)s))y) =$$

/ühendame liikmed kordajaga λ, samuti kordajaga $1-\lambda$/

$$= f(\lambda(tx - ty) + (1-\lambda)(sx - sy) + y) =$$

/kirjutame viimase liidetava $y = \lambda y + (1-\lambda)y$/

$$= f(\lambda(tx + (1-t)y) + (1-\lambda)(sx + (1-s)y)) \leq$$

/kasutame funktsiooni f kumerust/

$$\leq \lambda f(tx + (1-t)y) + (1-\lambda) f(sx + (1-s)y) = \lambda g(t) + (1-\lambda) g(s),$$

millega on tõestatud funktsiooni g kumerus.

2) Olgu $x, y \in X$, $x \neq y$, ja funktsioon $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega $g(t) = f(tx + (1-t)y)$, kumer. Siis iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = g(\lambda) = g(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0) \leq$$

/kasutame funktsiooni g kumerust/

$$\leq \lambda g(1) + (1-\lambda) g(0) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

mis tähendab funktsiooni f kumerust.

Lause 2 on tõestatud.

Lause 3. Kui $X \subset \mathbb{R}^n$ on kumer hulk, siis diferentseeruv funktsioon $f: X \to \mathbb{R}$ on kumer parajasti siis, kui iga $x, y \in X$, $x \neq y$, korral

$$f'(y) \cdot (x-y) \leq f(x) - f(y). \qquad (1)$$

Tõestus. Olgu X kumer ja $f: X \to \mathbb{R}$ diferentseeruv. Märgime, et varjatult tähendab see eeldus, et $X \subset X_1$, $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk ja $f: X_1 \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv igas punktis $x \in X$.

1) Eeldame, et f on kumer. Võtame $x, y \in X$, $x \neq y$, loeme nad fikseerituks. Siis iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) =$$

$$= \lambda (f(x) - f(y)) + f(y),$$

millest võrdust $\lambda x + (1-\lambda) y = y + \lambda(x-y)$ ja λ positiivsust kasutades saame

$$\frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y).$$

Võtame selles võrratuses vasakul piirväärtuse $\lambda \to 0+$. Et f on diferentseeruv (Fréchet' mõttes diferentseeruv), siis on ta diferentseeruv igas suunas (Gâteaux' mõttes diferentseeruv), seepärast saame piiril

$$f'(y)\cdot(x-y)\le f(x)-f(y).$$

2) Eeldame, et igasuguste $x, y\in X$, $x\ne y$, korral kehtib võrdus (1). Võtame suvaliselt $x, y\in X$, $x\ne y$, $\lambda\in(0,1)$, olgu $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. Siis hulga X kumeruse tõttu $z\in X$ ning $z\ne x$, $z\ne y$ (kuigi need mittevõrdumised ei ole olulised). Kasutades võrratust (1), saame

$$f'(z)\cdot(x-z)\le f(x)-f(z),$$

$$f'(z)\cdot(y-z)\le f(y)-f(z).$$

Korrutame need võrratused vastavalt (positiivsete) arvudega λ ja $1-\lambda$ ning liidame, tulemusena

$$f'(z)\cdot(\lambda(x-z)+(1-\lambda)(y-z))\le$$

$$\le\lambda(f(x)-f(z))+(1-\lambda)(f(y)-f(z))=$$

$$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(z).$$

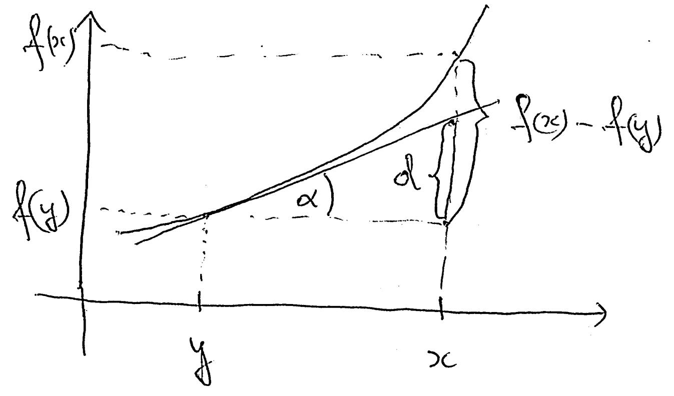
Selle võrratuse vasakul pool on skalaarkorrutise teine tegur $\lambda x+(1-\lambda)y-z=0$. Pidades veel silmas võrdust $f(z)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)$, saame võrratuse

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

mis tähendab, et f on kumer.

Lause 3 on tõestatud.

Illustreerime võrratust (1) järgmise joonisega juhul $n=1$:



$$f'(y) = \tan\alpha = \frac{d}{x-y}, \text{ sellest } d = f'(y)(x-y) \le f(x) - f(y).$$

<u>Ülesanne* 10</u>. Tõestada, et kui $X \subset \mathbb{R}^n$ on kumer, siis diferentseeruv funktsioon $f: X \to \mathbb{R}$ on kumer parajasti siis, kui iga $x, y \in X$, $x \neq y$, korral

$$(f'(x) - f'(y)) \cdot (x-y) \ge 0.$$

Lisame kõrvalmärkusena, et taolist võrratust rahuldavat funktsiooni $f': X \to \mathbb{R}^n$ nimetatakse monotoonseks. Seega ülesande põhjal on diferentseeruv funktsioon kumer parajasti siis, kui tema tuletis on monotoonne.

<u>Lause 4.</u> Kui $X \subset \mathbb{R}^n$ on kumer, lahtine ja $f: X \to \mathbb{R}$ on 2 korda diferentseeruv, siis f on kumer parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral $f''(x)$ on positiivne, s.t. $(f''(x)h, h) \ge 0$ iga $h \in \mathbb{R}^n$ korral.

Tõestus. 1) Olgu iga $x \in X$ korral $f''(x)$ positiivne. Iga $x \in X$ ja iga $h \in \mathbb{R}^n$ korral, kus $x+h \in X$, kehtib Taylori valem

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x+\lambda h)}{2!} h^2, \ \lambda \in (0,1),$$

kus λ sõltub elementidest x ja h. Jääkliikme kui kirjutise tähendust seletab $f''(x)h^2 = f''(x)h \cdot h = (f''(x)h, h)$. Võtame suvalised $x, y \in X$, $x \neq y$, ja seejärel $h = y - x$, millega $y = x + h \in X$. Toodud Taylori valem võtab kuju

$$f(y) = f(x) + f'(x) \cdot (y-x) + \frac{f''(x+\lambda(y-x))}{2} h^2.$$

Seejuures näeme, et $x + \lambda(y-x) = \lambda y + (1-\lambda)x \in X$ hulga X kumeruse tõttu. Tegelikult juba eespool kasutasime Taylori valemis seda, et f'' argument $x + \lambda h = \lambda x + (1-\lambda)x + \lambda h = \lambda(x+h) + (1-\lambda)x \in X$. Et $f''(x+\lambda(y-x))h^2 \geq 0$, siis

$$f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y-x)$$

ehk

$$f'(x) \cdot (y-x) \leq f(y) - f(x),$$

mis Lause 3 põhjal tõestab funktsiooni f kumeruse.

2) Eeldame, et funktsioon f on kumer. Kasutame seekord juhul $x, x+h \in X$ Taylori arendist kujul

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \alpha(x; h),$$

kus $\alpha(x;h) = o(\|h\|^2)$. Oletame vastuväiteliselt, et f'' ei ole positiivne, s.t. leiduvad $x \in X$ ja $h \in \mathbb{R}^n$ nii, et $f''(x)h^2 < 0$. Siin $h \neq 0$. Küllalt väikese $t \neq 0$ korral $x + th \in X$, sest hulk X on lahtine, ja Taylori arendises saame

$$f(x+th) = f(x) + f'(x)\cdot(th) + \frac{f''(x)(th)^2}{2} + \alpha(x;th).$$

Küllalt väikese $t \neq 0$ korral

$$\frac{f''(x)(th)^2}{2} + \alpha(x;th) = t^2\left(\frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{\alpha(x;th)}{t^2}\right) < 0,$$

sest

$$\frac{\alpha(x;th)}{t^2} = \|h\|^2\,\frac{\alpha(x;th)}{t^2\|h\|^2} \to 0, \text{ kui } t \to 0,\ t \neq 0.$$

Siis

$$f(x+th) - f(x) - f'(x)\cdot(th) < 0$$

ehk

$$f(x+th) - f(x) < f'(x)\cdot(th),$$

mis on vastuolus funktsiooni f kumerusega, sest tarvitseb võtta $y = x + th \in X$ ja panna tähele, et $th = y - x$ ja võrratus (1) annab

$$f'(x)\cdot(th) \le f(x+th) - f(x).$$

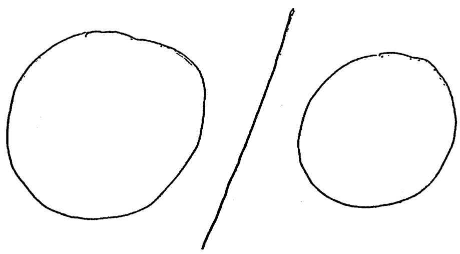
Lause 4 on tõestatud.

<u>Ülesanne 35.</u> Teha kindlaks, kas funktsioon $f(x,y) = e^x + e^y + x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x + 3y - 8$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on kumer. Soovitus: kasutada Lauset 4.

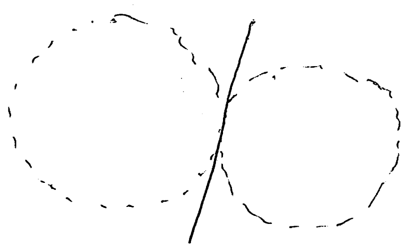
<u>Ülesanne 36.</u> Milliste arvude $a, b, c \in \mathbb{R}$ korral on funktsioon $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, kumer?

2. Kumerate hulkade eraldamine

Vaatleme tasandil kahte kumerat kinnist hulka, mis ei lõiku. Siis saab nad eraldada sirgega nii, et üks hulk jääb ühele poole sirget, teine teisele poole:



Kui hulgad on kumerad, ei ole kinnised, aga ei lõiku, siis on pilt järgmine:



Niisugune idee ongi aluseks selle punkti põhilistele tulemustele.

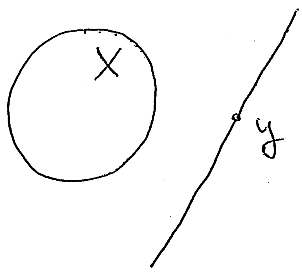
Lause. Normeeritud ruumi kumera osahulga sulund on kumer.

Ülesanne 37. Tõestada Lause.

Teoreem 1. Olgu $X \subset \mathbb{R}^n$ kumer ning $y \notin \bar{X}$ ($\bar{X}$ tähistab hulga X sulundit). Siis leidub $a \in \mathbb{R}^n$ nii, et

$$\inf_{x \in X} a \cdot x > a \cdot y.$$

Paneme tähele, et ei saa olla $a=0$. Meenutame, et $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ja $c \in \mathbb{R}$ korral on hulk $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = c\}$ hüpertasand ja $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x > c\}$ poolruum. Teoreem 1 väidab, et hulk X asub hüpertasandist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = a \cdot y\}$ rangelt ühel pool. Illustreeriv joonis juhul $n=2$ on



Teoreemi tõestus. Võib eeldada, et $X \neq \emptyset$, sest $X = \emptyset$ korral sobib iga $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, kuna $\inf \emptyset = +\infty$. Vaatleme funktsiooni $f(x) = \|x-y\|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Näitame, et leidub $x^* \in \overline{X}$ nii, et $f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)$ (siis $\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in \overline{X}} f(x) = \min_{x \in \overline{X}} f(x)$). Võtame minimiseeriva jada $x_k \in X$ nii, et $f(x_k) \to \inf_{x \in X} f(x) = f_*$ (kasutame sellist tähistust; seejuures $f_* \geq 0$, sest $f(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral). Siis $\|x_k - y\| \to f_*$. Nüüd $\|x_k\| = \|x_k - y + y\| \leq \|x_k - y\| + \|y\| \leq \text{const}$, mis tähendab, et x_k on tõkestatud jada ruumis $\mathbb{R}^n$ ja seetõttu kompaktne. Eraldame koonduva osajada x_k, $k \in N' \subset \mathbb{N}$, $x_k \to x^*$ kui $k \in N'$. Et $x_k \in X$, siis $x^* \in \overline{X}$. Funktsiooni f pidevuse tõttu

$f(x_k) \to f(x^*)$, $k \in N'$, seega $f(x^*) = f_*$. Eeldasime, et $y \notin \bar{X}$, seepärast $y \neq x^*$ ja $\|y - x^*\| > 0$.

Olgu $x \in X$, fikseerime selle punkti ja vaatleme arve $\lambda \in (0,1)$. Siis $\lambda x + (1-\lambda)x^* = x^* + \lambda(x - x^*) \in \bar{X}$, sest Lause põhjal on kumera hulga X sulund $\bar{X}$ kumer. Seega

$$\| x^* + \lambda(x - x^*) - y \| \geq \|x^* - y\|$$

ehk

$$\| x^* - y + \lambda(x - x^*)\|^2 \geq \|x^* - y\|^2.$$

Senini võis antud norm ruumis $\mathbb{R}^n$ olla suvaline, edaspidi vaatleme eukleidilist ehk 2-normi, siis $\|x\|^2 = x \cdot x$ iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral. Seda silmas pidades teisendame viimati saadud võrratuse vasakut poolt ja saame

$$\| x^* - y\|^2 + 2\lambda(x^* - y)\cdot(x - x^*) + \lambda^2 \|x - x^*\|^2 \geq \|x^* - y\|^2$$

ehk

$$2(x^* - y)\cdot(x - x^*) + \lambda \|x - x^*\|^2 \geq 0$$

iga $\lambda \in (0,1)$ korral. Seepärast

$$(x^* - y)\cdot(x - x^*) \geq 0$$

(vastasel juhul oleks küllalt väikese $\lambda > 0$ korral eelneva võrratuse vasak pool negatiivne; võib ka vaadelda piirprotsessi $\lambda \to 0_+$). Saadud võrratuse kirjutame

$$(x^* - y)\cdot x \geq (x^* - y)\cdot x^*.$$

Olgu $a = x^* - y$, siis $a \neq 0$. Paneme tähele, et a ei sõltu elemendist x. Viimane võrratus on

$$a \cdot x \geq a \cdot x^*,$$

millest järeldub ühtlasi

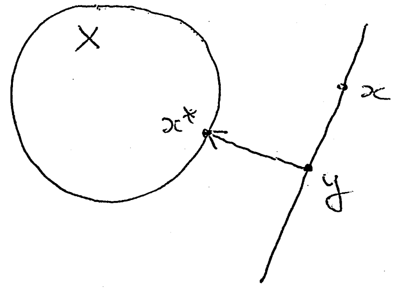
$$\inf_{x \in X} a \cdot x \geq a \cdot x^*.$$

Lisaks $\| x^* - y \|^2 > 0$ tähendab, et $(x^* - y) \cdot (x^* - y) > 0$ ehk $a \cdot (x^* - y) > 0$ ehk $a \cdot x^* > a \cdot y$, mis lõpuks annab

$$\inf_{x \in X} a \cdot x > a \cdot y.$$

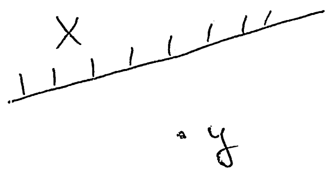
Teoreem 1 on tõestatud.

Hüpertasandis $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = a \cdot y\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot (x - y) = 0\}$ tähendab vektor $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hüpertasandi normaali. Tasandil $\mathbb{R}^2$ on pilt järgmine ($a = x^* - y$ on ristsirge):



Märgime, et vektor a Teoreemis 1 ei ole üheselt määratud, sest kui sobib a, siis sobib ka μa, kus $\mu > 0$ on valitav. Teoreemi 1 tõestuse käigus leidsime vektori $a = x^* - y$, mis on ortogonaalne hüpertasandiga. Kasvõi viimast joonist vaadates võib näha, et võime elementi

y läbivat hüpertasandit (joonisel sirget) natuke pöörata (see tähendab normaalvektori pööramist), ikkagi hüpertasand võib kumerat hulka X mitte lõigata. Mõningatel juhtudel on küll a kordaja täpsuseni määratud, näiteks toome joonise

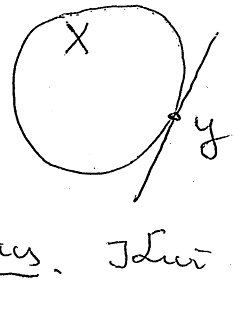


Ülesanne* 11. Tõestada, et kui $X \subset \mathbb{R}^n$ on kumer ja $y \in \partial X$ (∂X on hulga X raja), siis $y \in \partial \bar{X}$. Leida näide, kus mittekumera hulga X korral väide ei kehti.

Järeldus. Kui $X \subset \mathbb{R}^n$ on kumer ning $y \notin X^o$ (X^o on hulga X sisepunktide hulk), siis eksisteerib $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, nii, et

$$\inf_{x \in X} a \cdot x \geq a \cdot y .$$

Illustreeriv joonis juhul $n=2$ on järgmine:



Tõestus. Kui $y \notin X^o$, siis y on kas hulga X rajapunkt ($y \in \partial X$) või $y \notin \bar{X}$. Viimasel juhul on väide toodud Teoreemis 1. Kui $y \in \partial X$, siis hulga X kumeruse tõttu $y \in \partial \bar{X}$ ja saab leida jada $y_k \notin \bar{X}$ nii, et $y_k \to y$ (rajapunkti mõiste kohaselt on elemendi y igas ümbruses temast erinevaid hulga täiendi punkte). Teoreemile 1 tuginedes leiame jada $a_k \in \mathbb{R}^n$, $a_k \neq 0$, nii, et iga $x \in X$ korral

$$a_k \cdot x \geq a_k \cdot y_k.$$

Võime eeldada, et $\|a_k\| = 1$. Siis leidub osajada a_k, $k \in N' \subset \mathbb{N}$, nii, et $a_k \to a$, $k \in N'$. Seejuures $\|a\| = 1$. Nüüd $k \in N'$, $k \to \infty$ puhul saame skalaarkorrutise pidevust kasutades iga $x \in X$ korral

$$a \cdot x \geq a \cdot y,$$

mis annab

$$\inf_{x \in X} a \cdot x \geq a \cdot y.$$

Teoreem 2. Olgu hulgad $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ kumerad, $X^\circ \neq \emptyset$, $Y^\circ \neq \emptyset$, $X^\circ \cap Y^\circ = \emptyset$. Siis eksisteerib $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, nii, et

$$a \cdot x \geq a \cdot y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Tõestus. Moodustame hulga

$$Z = X - Y = \{x - y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Näitame, et Z on kumer. Olgu $z_1, z_2 \in Z$, $z_1 \neq z_2$. Siis $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$, $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$. Nüüd $\lambda \in (0,1)$ korral

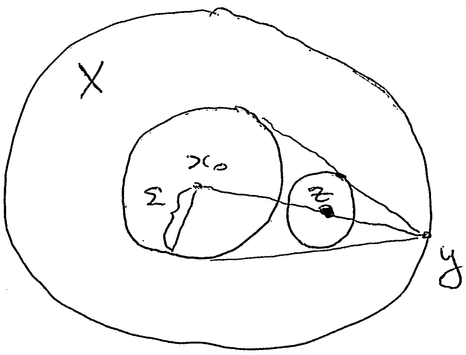
$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = \lambda (x_1 - y_1) + (1-\lambda)(x_2 - y_2) =$$
$$= \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \in Z,$$

sest $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$ ja $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in Y$.

Näitame, et $0 \notin Z^\circ$. Kui $0 \notin Z$, siis muidugi $0 \notin Z^\circ$, sest $Z^\circ \subset Z$. Olgu $0 \in Z$, s.t. $0 = x - y \in X - Y$, $x \in X$, $y \in Y$, seega $x = y$. Tõestame vahetulemusena

<u>Lemma</u>. Kui X on kumer, $x_0 \in X^\circ$, $y \in X$, siis iga $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda x_0 + (1-\lambda) y \in X^\circ$.

<u>Tõestus</u>. Valime suvaliselt $\lambda \in (0,1)$ ja olgu $z = \lambda x_0 + (1-\lambda) y$. Et $x_0 \in X^\circ$, siis leidub $B(x_0, \varepsilon) \subset X$ (siin $B(a,r) = \{x \mid \|x - a\| < r\}$). Näitame, et $B(z, \lambda\varepsilon) \subset X$. Illustreeriv joonis $n = 2$ korral on järgmine



Võtame $x \in B(z, \lambda\varepsilon)$, s.t. $\|x - z\| < \lambda\varepsilon$. Tahame näidata, et $x \in X$. Selleks piisab leida $x' \in X$ nii, et $x = \lambda x' + (1-\lambda) y$. Defineerime x' võrdusega $x' = \frac{1}{\lambda}(x - (1-\lambda) y)$. Siis

$$\|x' - x_0\| = \left\| \frac{1}{\lambda}(x - (1-\lambda) y) - x_0 \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{\lambda}(x - (1-\lambda) y - \lambda x_0) \right\| = \frac{1}{\lambda} \|x - z\| < \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\varepsilon = \varepsilon,$$

mis tähendab, et $x' \in B(x_0, \varepsilon) \subset X$. Sellega on näidatud, et $x \in X$, ühtlasi on saadud, et

$B(z, \lambda\varepsilon) \subset X$ ehk $z \in X^\circ$.

Lemma on tõestatud.

Valime suvaliselt $\delta > 0$. Kuna $X^\circ \neq \emptyset$, siis leidub $x_0 \in X^\circ$. Lemmale tuginedes saame iga $\lambda \in (0,1)$ korral, et $x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda)x \in X^\circ$. Kui $\lambda \to 0$, siis $x_1 - x = \lambda(x_0 - x) \to 0$ ja küllalt väikese λ korral $\|x_1 - x\| < \frac{\delta}{2}$. Analoogiliselt leiame $y_1 \in Y^\circ$ nii, et $\|y_1 - y\| < \frac{\delta}{2}$. Siis $x = y$ tõttu $\|y_1 - x_1\| = \|y_1 - y - (x_1 - x)\| < \delta$ ehk $y_1 - x_1 \in B(0, \delta)$.

Näitame järgnevalt, et $y_1 - x_1 \notin Z = X - Y$. Kui oleks $y_1 - x_1 \in X - Y$, siis $y_1 - x_1 = x_2 - y_2$, $x_2 \in X$, $y_2 \in Y$ ning $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$, seega $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Kasutades veel Lemmat, saame $x_1 \in X^\circ$, $x_2 \in X$ tõttu $\frac{x_1 + x_2}{2} \in X^\circ$, analoogiliselt $\frac{y_1 + y_2}{2} \in Y^\circ$, mis on vastuolus sellega, et $X^\circ \cap Y^\circ = \emptyset$. Niisiis on tõestatud, et $y_1 - x_1 \notin Z$ ja $y_1 - x_1 \in B(0, \delta)$. Me oleme tõestanud, et kui $0 \in Z$, siis leidub elemendile 0 kuitahes lähedal punkt $y_1 - x_1 \notin Z$. Seepärast ei saa 0 olla hulga Z sisepunkt, sest kui $0 \in Z^\circ$, siis mingi $\delta_0 > 0$ korral $B(0, \delta_0) \subset Z$ ning $\delta \leq \delta_0$ korral saame $y_1 - x_1 \in B(0,\delta) \subset B(0,\delta_0) \subset Z$ ja $y_1 - x_1 \notin Z$, mis on vastuolu.

Teoreemi 2 tõestuse lõpetamiseks kasutame järeldust Teoreemist 1. Et $0 \notin Z^\circ$, siis eksisteerib $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, nii, et $a \cdot z \geq a \cdot 0 = 0$ iga $z \in Z$ korral ehk $a \cdot (x-y) \geq 0$, s.t. $a \cdot x \geq a \cdot y$ iga $x \in X$ ja iga $y \in Y$ korral.

Järeldus. Teoreemi 2 eeldustel kehtib

$$a \cdot x \geq a \cdot y \quad \forall x \in \bar{X}, \forall y \in \bar{Y}$$

või

$$\inf_{x \in \bar{X}} a \cdot x \geq \sup_{y \in \bar{Y}} a \cdot y,$$

mis tähendab, et eraldatakse (mitterangelt) hulkade X ja Y sulundid.

Märgime, et Teoreemi 2 väide ei kehti, kui vähemalt ühel hulkadest lubada sisepunktide puudumist. Näiteks olgu $X = \mathbb{R}^n$ ja Y on hüpertasand, siis $Y^\circ = \emptyset$.

3. Kumera planeerimise põhiteoreem

Olgu X hulk, antud on funktsioonid $f, f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$, siis tekib $\Omega = \{x \in X \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ ning vaatleme ülesannet

$$\min_{x \in \Omega} f(x). \tag{1}$$

Siin $f : X \to \mathbb{R}$ on sihifunktsioon, $f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ tõkkefunktsioonid. Ülesannet (1) nimetame üldülesandeks (see ei ole üldlevinud terminoloogia).

Võime vaadelda funktsiooni $F : X \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, siis $\Omega = \{x \in X \mid F(x) \leq 0\}$.

Kui on antud $f, f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja defineerida $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq 0, x \geq 0\}$, siis ülesannet

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \qquad (2)$$

nimetame põhiülesandeks. Põhiülesanne on erijuht üldülesandest, kui võtta $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^n_+$. Teine võimalus vaadata põhiülesannet üldülesandena on kirjutada $x \geq 0$ samaväärselt $-x_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$, ja võtta $f_i(x) = -x_{i-m} \leq 0$, $i = m+1, \ldots, m+n$, aga me eelistame esimest võimalust.

Näiteks ülesanne, kus $f(x) = -c \cdot x$, $F(x) = Ax - b$, on põhikujul olev lineaarse planeerimise ülesanne ja see on erijuht põhiülesandest.

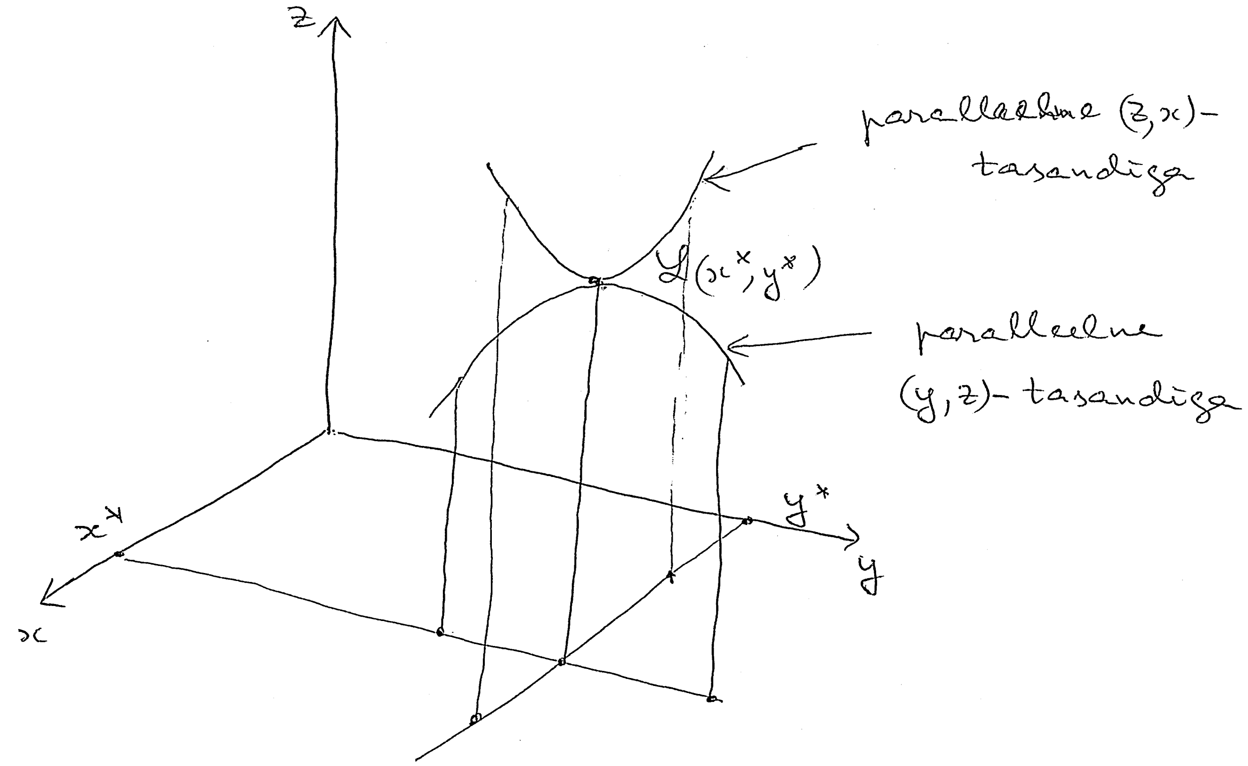
Järgnevas esitame paljud tulemused üldülesande jaoks. Üldülesande (1) Lagrange'i funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\mathcal{L} : X \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x) = f(x) + y \cdot F(x), x \in X, y \in \mathbb{R}^m_+.$$

<u>Definitsioon.</u> Punkti $(x^*, y^*) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ nimetatakse funktsiooni $\mathcal{L}$ sadulpunktiks, kui

$$\mathcal{L}(x^*, y) \leq \mathcal{L}(x^*, y^*) \leq \mathcal{L}(x, y^*) \quad \forall x \in X, \forall y \in \mathbb{R}^m_+.$$

Illustreerime sadulpunktiga funktsiooni $\mathcal{L}$ käitumist, kus $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_+$:



Sadulpunkti tingimus nõuab funktsioonilt teatud käitumist ristsirgetel (x^*, y) ja (x, y^*), mujal mingeid piiranguid funktsiooni väärtustele ei ole.

<u>Teoreem.</u> Kui (x^*, y^*) on üldülesande (1) Lagrange'i funktsiooni sadulpunkt, siis x^* on ülesande (1) lahend.

<u>Tõestus.</u> Olgu $(x^*, y^*) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ Lagrange'i funktsiooni sadulpunkt, mis tähendab, et

$$f(x^*) + y \cdot F(x^*) \le f(x^*) + y^* \cdot F(x^*) \le f(x) + y^* \cdot F(x) \quad \forall x \in X, \forall y \in \mathbb{R}^m_+ .$$

Vasakpoolsest võrratusest saame

$$y \cdot F(x^*) \le y^* \cdot F(x^*) \quad \forall y \in \mathbb{R}^m_+ \text{ (ehk } y \ge 0). \qquad (3)$$

Võttes selles $y = ce^i$, $c \to \infty$, $e^i = (0, \dots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m_+$, saame

$$ce^i \cdot F(x^*) = c f_i(x^*) \leq y^* \cdot F(x^*) = \text{const},$$

mis on võimalik vaid siis, kui $f_i(x^*) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$ (ehk $F(x^*) \leq 0$). Sellega oleme saanud, et $x^* \in \Omega$. Et $y^* \geq 0$ ja $F(x^*) \leq 0$, siis $y^* \cdot F(x^*) \leq 0$. Teiselt poolt, võttes võrratuses (3) $y = 0$, saame $y^* \cdot F(x^*) \geq 0$ ja kokkuvõttes $y^* \cdot F(x^*) = 0$.

Võtame suvalise $x \in \Omega$, siis $F(x) \leq 0$. Kuna $y^* \geq 0$, siis $y^* \cdot F(x) \leq 0$. Nüüd saame sadulpunkti parempoolset võrratust kasutades

$$f(x^*) = f(x^*) + y^* \cdot F(x^*) \leq f(x) + y^* \cdot F(x) \leq f(x),$$

mis tähendab, et x^* on ülesande (1) optimaalne lahend.

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi põhjal võib öelda, et kui Lagrange'i funktsiooni sadulpunkt on leitud, siis on minimiseerimisülesanne lahendatud. Loomulik on küsida, kas igat ülesannet (1) saab taandada tema Lagrange'i funktsiooni sadulpunkti leidmisele ehk kui ülesandel (1) on olemas lahend x^*, kas siis leidub $y^* \geq 0$ nii, et (x^*, y^*) on ülesande (1) Lagrange'i funktsiooni sadulpunkt? Vastus on siin eitav ja seda juba põhiülesandes.

<u>Näide.</u> Vaatleme ülesannet

$$\min\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 0,\ x \geq 0\right\}.$$

Siin $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i$, $m = 1$, $f_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, tegemist on põhiülesandega. Näeme, et $\Omega = \{0\}$, $x^* = 0$ on ainus optimaalne lahend. Ülesande Lagrange'i funktsioon on

$$\mathcal{L}(x, y) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + y \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \mathbb{R}_+.$$

Näitame, et ei leidu sadulpunkti $(0, y^*)$, kus $y^* \geq 0$. Oletame vastuväiteliselt, et see siiski on olemas. Vasakpoolne sadulpunkti võrratus kehtib isegi iga $y, y^* \in \mathbb{R}$ korral, sest $f(x^*) = f(0) = 0$ ja $F(x^*) = F(0) = 0$, seega $\mathcal{L}(x^*, y) = \mathcal{L}(x^*, y^*) = 0$. Parempoolne sadulpunkti võrratus tähendab, et

$$\mathcal{L}(x, y^*) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + y^* \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \qquad (4)$$

iga $x \geq 0$ korral. Kui $y^* = 0$, siis $x \geq 0$, $x \neq 0$ korral $-\sum_{i=1}^{n} x_i < 0$ ning (4) ei leia aset. Kui $y^* > 0$ (praegu $y^* \in \mathbb{R}_+$), siis võtame ε nii, et $0 < \varepsilon < \frac{1}{y^*}$ ja $x = \left(\frac{1}{y^*} - \varepsilon, 0, \ldots, 0\right)$. Siis $x \geq 0$ ja

$$\mathcal{L}(x, y^*) = -\left(\frac{1}{y^*} - \varepsilon\right) + y^*\left(\frac{1}{y^*} - \varepsilon\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{y^*} - \varepsilon\right)\left(-1 + 1 - \varepsilon y^*\right) = \left(\frac{1}{y^*} - \varepsilon\right)\left(-\varepsilon y^*\right) < 0$$

ning jälle ei kehti (4).

*Ülesanne** 12. Tõestada, et kui x^* on põhikujul oleva lineaarse planeerimise ülesande

$$\max\{c\cdot x \mid Ax\le b,\ x\ge 0\}$$

ehk

$$\min\{(-c)\cdot x \mid Ax-b\le 0,\ x\ge 0\}$$

lahend, siis on olemas $y^*\in\mathbb{R}^m_+$ (A on $m\times n$ maatriks) nii, et (x^*,y^*) on Lagrange'i funktsiooni

$$\mathcal{L}(x,y)=(-c)\cdot x+y\cdot(Ax-y),\ x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in\mathbb{R}^m_+,$$

sadulpunkt.

Lause. Kui funktsioonid f_i on kumerad ($X\subset E$ kumer, E vektorruum), siis ülesande (1) lubatav hulk Ω on kumer; kui funktsioonid f_i on pidevad ($X\subset E$, E normeeritud ruum), siis Ω on kinnine.

Ülesanne 38. Tõestada Lause.

Teoreem (Kuhn–Tuckeri teoreem, kumera planeerimise põhiteoreem, 1951). Olgu üldülesandes (1) funktsioonid $f, f_1, \dots, f_m$ kumerad (seega on hulk $X\subset E$ kumer, E vektorruum) ning eksisteerigu $\bar{x}\in X$ nii, et $F(\bar{x})<0$ (s.t. $f_i(\bar{x})<0,\ i=1,\dots,m$). Kui x^* on ülesande (1) lahend, siis on olemas $y^*\in\mathbb{R}^m_+$ nii, et (x^*,y^*) on ülesande (1) Lagrange'i funktsiooni sadulpunkt.

Tingimust $F(\bar{x})<0$ mingi $\bar{x}\in X$ korral nimetatakse Slateri ehk regulaarsuse tingimuseks. Eespool toodud näide on ülesandest, mis ei rahulda regulaarsuse tingimust.

<u>Teoreemi tõestus.</u> Olgu x^* ülesande (1) lahend. Moodustame hulgad

$$U = \{u = (u_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists x \in X \text{ nii, et } u \geq (f(x), F(x))\},$$

$$V = \{v = (v_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1} \mid v_0 < f(x^*), (v_i)_{i=1}^m \leq 0\}.$$

Märgime, et iga $x \in X$ korral $(f(x), F(x)) \in U$; kui võtta $\delta > 0$, siis $(f(x^*) - \delta, 0, \dots, 0) \in V$.

Näitame hulkade U ja V kumerust. Olgu $u^1, u^2 \in U$, $u^1 \neq u^2$, siis leiduvad $x^1, x^2 \in X$ nii, et $u^1 \geq (f(x^1), F(x^1))$, $u^2 \geq (f(x^2), F(x^2))$. Võtame $\lambda \in (0,1)$. Kasutades f ja F komponentfunktsioonide kumerust, saame

$$\lambda u^1 + (1-\lambda) u^2 \geq \lambda(f(x^1), F(x^1)) + (1-\lambda)(f(x^2), F(x^2)) =$$

$$= (\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2), \lambda F(x^1) + (1-\lambda) F(x^2)) \geq$$

$$\geq (f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2), F(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2)),$$

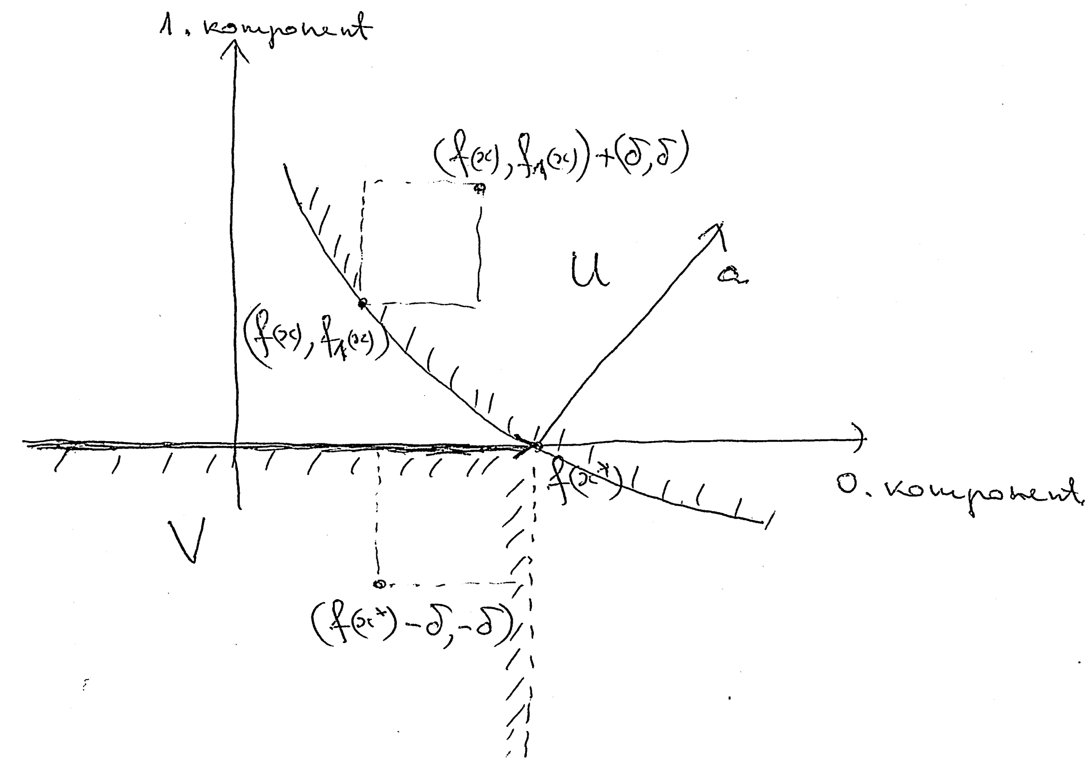
seejuures $\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in X$ ja seepärast $\lambda u^1 + (1-\lambda) u^2 \in U$. Olgu $v^1, v^2 \in V$, $v^1 \neq v^2$, $\lambda \in (0,1)$. Kirjutame $v^1 = (v_0^1, \bar{v}^1)$, $v^2 = (v_0^2, \bar{v}^2)$. Kuna $v_0^1 < f(x^*)$ ja $v_0^2 < f(x^*)$, siis $\lambda v_0^1 + (1-\lambda) v_0^2 < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^*) = f(x^*)$. Lisaks, $\bar{v}^1 \leq 0$, $\bar{v}^2 \leq 0$ annavad $\lambda \bar{v}^1 + (1-\lambda)\bar{v}^2 \leq 0$, millega oleme näidanud, et $\lambda v^1 + (1-\lambda) v^2 \in V$.

Hulga U sisepunktiks on iga $x \in X$ korral $(f(x), F(x)) + (\delta, \dots, \delta) \in \mathbb{R}^{m+1}$, kus $\delta > 0$. Seepärast $U^\circ \neq \emptyset$.

Hulga V sisepunktiks on $\delta>0$ korral $(f(x^*)-\delta, -\delta, \ldots, -\delta) = (f(x^*), 0) - (\delta, \ldots, \delta) \in \mathbb{R}^{m+1}$, seega $V^\circ \neq \emptyset$.

Näitame, et $U \cap V = \emptyset$ (sellest järeldub, et $U^\circ \cap V^\circ = \emptyset$). Kui $u \in U \cap V$, siis $u \in U$ tõttu eksisteerib $x \in X$ nii, et $f(x) \leq u_0$, aga $u \in V$ tõttu $u_0 < f(x^*)$, mis koos tähendab, et $f(x) < f(x^*)$. Lisaks annab $u \in U$, et $F(x) \leq (u_i)_{i=1}^m$, aga $u \in V$ tingib selle, et $(u_i)_{i=1}^m \leq 0$, seega $F(x) \leq 0$ ja $x \in \Omega$. Kuid $x \in \Omega$ ja $f(x) < f(x^*)$ on vastuolus lahendi x^* tähendusega.

Illustreerime hulkade U ja V paiknemist joonisega juhul $m=1$ (üldiselt $f_1(x^*) \leq 0$, joonisel $f_1(x^*) = 0$)



Oleme näidanud, et hulgad U ja V rahuldavad kõiki eelmise punkti Teoreemi 2 eeldusi. Selle teoreemi järelduse põhjal on olemas

$a \in \mathbb{R}^{m+1}$, $a \neq 0$, nii, et

$$a \cdot u \geq a \cdot v \quad \forall u \in \bar{U}, \forall v \in \bar{V}. \tag{5}$$

Näitame, et $a \geq 0$. Kui leiduks $a_i < 0$, siis fikseerime $u \in U$, võtame $v_0 < f(x^*)$, $v_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$, ning $v_i \to -\infty$ (kui $i = 0$, võtame $v_0 \to -\infty$, $v_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, m\}$). Siis $a \cdot v \to \infty$, sest $a_i v_i \to \infty$, mis annab vastuolu võrratusega (5). Tähistades $a = (a_0, \bar{a})$, $u = (u_0, \bar{u})$, $v = (v_0, \bar{v})$, kirjutame (5) kujul

$$a_0 u_0 + \bar{a} \cdot \bar{u} \geq a_0 v_0 + \bar{a} \cdot \bar{v} \quad \forall u \in \bar{U}, \forall v \in \bar{V}. \tag{5'}$$

Iga $x \in X$ korral $u = (f(x), F(x)) \in U$ ning $v = (f(x^*), 0) \in \bar{V}$, seega järeldub võrratusest (5')

$$a_0 f(x) + \bar{a} \cdot F(x) \geq a_0 f(x^*) \quad \forall x \in X. \tag{6}$$

Kui oleks $a_0 = 0$, siis (6) annaks, et $\bar{a} \cdot F(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral. Slateri tingimuse täidetuse tõttu eksisteerib $\bar{x} \in X$ nii, et $F(\bar{x}) < 0$, aga $\bar{a} \geq 0$, $\bar{a} \neq 0$, tõttu $\bar{a} \cdot F(\bar{x}) < 0$. Seepärast tegelikult $a_0 > 0$. Tähistame $y^* = \frac{1}{a_0} \bar{a}$, siis $y^* \geq 0$. Võrratus (6) on peale jagamist arvuga a_0

$$f(x) + y^* \cdot F(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in X. \tag{7}$$

Kui siin võtta $x = x^*$, siis $y^* \cdot F(x^*) \geq 0$. Kuid $y^* \geq 0$ ja $F(x^*) \leq 0$ annavad $y^* \cdot F(x^*) \leq 0$. Seega $y^* \cdot F(x^*) = 0$. Asume näitama sadulpunkti võrratuste täidetust. Võrratust (7) kasutades saame iga $x \in X$ korral

$$\mathcal{L}(x, y^*) = f(x) + y^* \cdot F(x) \geq f(x^*) =$$

$$= f(x^*) + y^* \cdot F(x^*) = \mathcal{L}(x^*, y^*).$$

Teiseks, kui $y \in \mathbb{R}^m_+$ (ehk $y \geq 0$), siis $F(x^*) \leq 0$ tõttu $y \cdot F(x^*) \leq 0$ ja

$$\mathcal{L}(x^*, y^*) = f(x^*) \geq f(x^*) + y \cdot F(x^*) = \mathcal{L}(x^*, y).$$

Teoreem on tõestatud.

Ülesanne 37. Teha lukki U ja V kujutav joonis koos vektoriga a juhul $m=1$, kui $f_1(x^*) < 0$.

Elementaarse järeldusena märgime Kuhn-Tuckeri teoreemi kehtivust põhiülesande jaoks.

Sadulpunkti võrratused ei ole lokaalsed tingimused, sest nad seavad piirangud Lagrange'i funktsiooni käitumisele punktides, mis ei piirdu sadulpunkti ümbrusega. Põhiülesandes saab diferentseeruvate kumerate funktsioonide juhul anda lokaalsed tingimused sadulpunkti iseloomustamiseks. Eeldades funktsioonide $f, f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vastavate osatuletiste olemasolu, olgu $\mathcal{L}_x(x,y) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x,y), \ldots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x,y)\right)$, samuti $\mathcal{L}_y(x,y) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1}(x,y), \ldots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_m}(x,y)\right)$, seejuures $\mathcal{L}_y$ defineerimisel ei vajata eeldusi funktsioonide f, f_i kohta.

Teoreem. Olgu $f, f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, kumerad ja diferentseeruvad. Siis $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}_+$ on põhiülesande (2) Lagrange'i funktsiooni sadulpunkt parajasti siis, kui

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_x(x^*, y^*) \geq 0, \ \mathcal{L}_y(x^*, y^*) \leq 0, \\ x^* \cdot \mathcal{L}_x(x^*, y^*) = 0, \ y^* \cdot \mathcal{L}_y(x^*, y^*) = 0. \end{gathered} \qquad (8)$$

Tõestus. Tingimuste (8) tarvilikkus. Olgu (x^*, y^*) Lagrange'i funktsiooni $\mathcal{L}$ sadulpunkt hulgas $\mathbb{R}^{n+m}_+$. Vahetu arvutamisega saame, et $\mathcal{L}_y(x, y) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = F(x)$. Punkti 3 esimese teoreemi tõestamisel nägime, et sadulpunkti (x^*, y^*) korral $F(x^*) \leq 0$ ja $y^* \cdot F(x^*) = 0$. Nende saamisel kasutasime sadulpunkti vasakpoolset võrratust.

Võtame suvaliselt $i \in \{1, \dots, n\}$ ja defineerime funktsiooni $\varphi(t) = \mathcal{L}(x^* + te^i, y^*)$, $t \in \mathbb{R}$. Et $x^* \geq 0$, siis $x^* + te^i \geq 0$ iga $t \geq 0$ korral. Siis sadulpunkti parempoolne võrratus

$$\mathcal{L}(x^*, y^*) \leq \mathcal{L}(x, y^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

annab, et $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, kui $t \geq 0$. Funktsioon φ on diferentseeruv, sest funktsioonid f, f_i, $i = 1, \dots, m$, on diferentseeruvad. Veendume selles, et $\varphi'(0) \geq 0$. Arvutame

$$\varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0,$$

kus esimene piirväärtus märgib tuletise definitsiooni ja teine piirväärtus on üks võimalus selle leidmiseks, milles kasutame veel võrratust $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, $t \geq 0$ korral. Teiselt poolt, arvutades liitfunktsiooni tuletist, saame $\varphi'(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^* + te^i, y^*)$, millest $\varphi'(0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*, y^*) \geq 0$. Et $i \in \{1, \ldots, n\}$ oli suvaline, siis oleme saanud, et $\mathcal{L}_x(x^*, y^*) \geq 0$.

Defineerime veel funktsiooni $\varphi(t) = \mathcal{L}((1+t)x^*, y^*) = \mathcal{L}((1+t)x_1^*, \ldots, (1+t)x_n^*, y^*)$, $t \in \mathbb{R}$. Siis $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, kui $t \geq -1$, ikka sadulpunkti parempoolse võrratuse tõttu. Ka siin on funktsioon φ diferentseeruv. Leiame $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, kasutades

$$\varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0$$

ja

$$\varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq 0,$$

mistõttu $\varphi'(0) = 0$. Praegusel juhul $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}((1+t)x^*, y^*) x_i^* = x^* \cdot \mathcal{L}_x((1+t)x^*, y^*)$ ja $\varphi'(0) = x^* \cdot \mathcal{L}_x(x^*, y^*) = 0$, millega on saadud kõik tingimused (8).

<u>Tingimuste (8) piisavus.</u> Eeldame, et tingimused (8) on rahuldatud. Vaatleme funktsiooni $g(x) = \mathcal{L}(x, y^*) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i(x)$, mis on kumer, sest $y^* \geq 0$ ja funktsioonid f, f_i on kumerad.

Lisaks saame $g'(x) = \mathcal{L}_x(x,y^*)$. Punktis 1) tõestatud Lause 3 põhjal

$$g'(x^*)\cdot(x-x^*) \le g(x) - g(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+. \qquad (9)$$

Iga $x \in \mathbb{R}^n_+$ korral, kasutades võrratust (9) ja tingimusi (8), saame

$$\mathcal{L}(x^*,y^*) = g(x^*) \le g(x) + g'(x^*)\cdot(x^*-x) =$$

$$= g(x) + x^*\cdot g'(x^*) - x\cdot g'(x^*) \le g(x) = \mathcal{L}(x,y^*),$$

sest $x^*\cdot g'(x^*) = x^*\cdot \mathcal{L}_x(x^*,y^*) = 0$, $x \ge 0$ ja $g'(x^*) = \mathcal{L}_x(x^*,y^*) \ge 0$ tõttu aga $x\cdot g'(x^*) \ge 0$. Peale selle, iga $y \in \mathbb{R}^m_+$ korral, kasutades tingimustest (8) ülejäänud osa, saame

$$\mathcal{L}(x^*,y) = f(x^*) + y\cdot F(x^*) \le f(x^*) =$$

$$= f(x^*) + y^*\cdot F(x^*) = \mathcal{L}(x^*,y^*),$$

sest $y \ge 0$ ja $F(x^*) = \mathcal{L}_y(x^*,y^*) \le 0$ annavad $y\cdot F(x^*) \le 0$, aga $y^*\cdot F(x^*) = y^*\cdot \mathcal{L}_y(x^*,y^*) = 0$.

Teoreem on tõestatud.

<u>Märkus</u>. Tingimuste (8) tarvilikkuse tõestamisel ei kasutata funktsioonide f, f_i kumerust. Piisavuse tõestamisel võib piirduda funktsioonide f, f_i kumeruse nõudega hulgas $\mathbb{R}^n_+$, eeldades küll diferentseeruvust näiteks hulgas $\mathbb{R}^n$.

Selgitame viimatitõestatud teoreemi kasutamist. Kui funktsioonid f, f_i on diferentseeruvad ja kumerad ning tingimused (8) on täidetud, siis (x^*, y^*) on Lagrange'i funktsiooni L sadulpunkt ja x^* on ülesande (2) lahend. Teisipidi, kui kumerate diferentseeruvate funktsioonide f, f_i korral $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ on selline, et ei leidu elementi $y^* \in \mathbb{R}_+^m$ nii, et (8) oleks täidetud, siis ei ole (x^*, y^*) ühegi $y^* \in \mathbb{R}_+^m$ korral funktsiooni L sadulpunkt ning Kuhn–Tuckeri teoreemi põhjal, kui ülesandes (2) on regulaarsuse tingimus täidetud, ei ole x^* ülesande (2) lahend. Seega tingimuste (8) mittetäidetuse korral (mitte ühegi $y^* \in \mathbb{R}_+^m$ puhul) tuleb väiteks, et x^* ei ole lahend, näidata ülesandes (2) regulaarsuse tingimuse täidetust.

<u>Ülesanne 40</u>. Teha kindlaks, kas $(0, 1, 1)$ on ülesande

$$\min\{x + y^4 + 4z^2 \mid x + y - z \geq -2,$$

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 7,\ x, y, z \geq 0\}$$

lahend. Funktsioonide kumerust ja diferentseeruvust tõestada ei ole vaja.

<u>Ülesanne* 13</u>. Olgu üldülesandes (1) funktsioonid f, f_i kumerad ja diferentseeruvad Fréchet' mõttes, hulk X lahtine ($X \subset E$, E normeeritud ruum), kehtigu regulaarsuse tingimus. Tões-

teada, et $x^* \in \Omega = \{x \in X \mid F(x) \leq 0\}$ on ülesande (1) lahend parajasti siis, kui eksisteerib $y^* \in \mathbb{R}^m_+$ nii, et

$$\mathcal{L}_x(x^*, y^*) = 0, \; y^* \cdot F(x^*) = 0$$

(siin $\mathcal{L}_x(x, y) = f'(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i'(x)$).

Selles ülesandes toodud väite kasutamisel on peamine puudus eeldus, et hulk X on lahtine. Kuid lahtises hulgas on toodud tingimustele tuginemine efektiivne.

Analüüsime põhiülesannet puudutavaid tingimusi (8). Ülesandes (2) oli lubatav hulk $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq 0, x \geq 0\}$. Olgu $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^m_+$. Esitame

$$\mathcal{L}_x(x, y) = f'(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i'(x) = z = \sum_{j=1}^{n} z_j e^j, \tag{10}$$

kus e^j on ühikvektorid nagu eelnevates aruteludes. Siis $\mathcal{L}_x(x, y) \geq 0$ on samaväärne tingimusega

$$z_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n. \tag{11a}$$

Tingimus $\mathcal{L}_y(x, y) = F(x) \leq 0$ on täidetud $x \in \Omega$ tõttu. Olgu $M = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid f_i(x) = 0\}$ ja $N = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid x_j = 0\}$, vastavate indeksitega kitsendusi nimetame aktiivseteks. Tingimus $y \cdot \mathcal{L}_y(x, y) = 0$ on samaväärne tingimusega $y \cdot F(x) = 0$ ja $y \geq 0$ ning $F(x) \leq 0$ tõttu veel samaväärne sellega, et $y_i f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Seega

$y \cdot \mathcal{L}_y(x,y) = 0$ on samaväärne sellega, et

$$y_i = 0, \quad i \notin M. \tag{11b}$$

Analoogiliselt, $x \cdot \mathcal{L}_x(x,y) = 0$ on eeldusel $\mathcal{L}_x(x,y) \geq 0$ samaväärne sellega, et $x_j z_j = 0, j = 1, \ldots, n$, ehk

$$z_j = 0, \quad j \notin N. \tag{11c}$$

Oleme näidanud, et kehtib

<u>Lause</u>. Tingimused (8) on rahuldatud $x \in \Omega$ ja $y \geq 0$ korral parajasti siis, kui kehtivad (11a, b, c) ehk

$$z \geq 0, \; y_i = 0 \; i \notin M \text{ korral}, \; z_j = 0 \; j \notin N \text{ korral}. \tag{11}$$

Kirjutame võrdusest (10) tulenevalt $-f'(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i'(x) + \sum_{j=1}^{n} z_j(-e^j)$, mille saame esitada parajasti tingimuste (8) või (11) täidetuse korral kujul

$$-f'(x) = \sum_{i \in M} y_i f_i'(x) + \sum_{j \in N} z_j (-e^j).$$

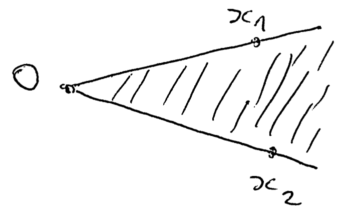
Arvestades veel eelnevaid arutelusid, oleme tõestanud järgmise tulemuse.

<u>Teoreem</u> (koonuse kriteerium). Regulaarse kumerate diferentseeruvate funktsioonidega ülesande (2) lubatav lahend x on optimaalne parajasti siis, kui mingite $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ korral

$$-f'(x) = \sum_{i \in M} \lambda_i f_i'(x) + \sum_{j \in N} \mu_j (-e^j).$$

Märgime, et tingimuste (8) kontrollimisel on vaja leida vektor y^*, mis oleks sadulpunkti teine komponent, koonuse kriteeriumi kasutamisel seevastu määrata, kas eksisteerivad koonuse moodustajate kordajad λ ja μ.

Lisame selgituseks, et vektorruumis E nimetatakse koonuseks hulka $C \subset E$, mille puhul iga $x_1, x_2 \in C$ ja iga $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ korral $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$. Näiteks joonisel



kuulub viirutatud osa koonusesse. Hulka $C(x_1, \dots, x_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \mid \mu_i \geq 0, i = 1, \dots, m \right\}$ nimetatakse vektorite $x_1, \dots, x_m \in E$ poolt moodustatud (polüeedriliseks) koonuseks. Näiteks $\mathbb{R}^n_+ = C(e^1, \dots, e^n)$.

Paneme tähele, et kui $M = \emptyset$ ja $N = \emptyset$, siis x on lubatava hulga Ω sisepunkt ($x \in \Omega^\circ$), sest siis $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, m$, ja $x_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, ja iga punkt küllalt väikesest punkti x ümbrusest kuulub samuti hulka Ω (piisab eeldada funktsioonide f_i pidevust, see järeldub näiteks nende diferentseeruvusest, aga ka ainult kumerusest).

On selge, et kui $x \in \Omega^\circ$, siis $N = \emptyset$.

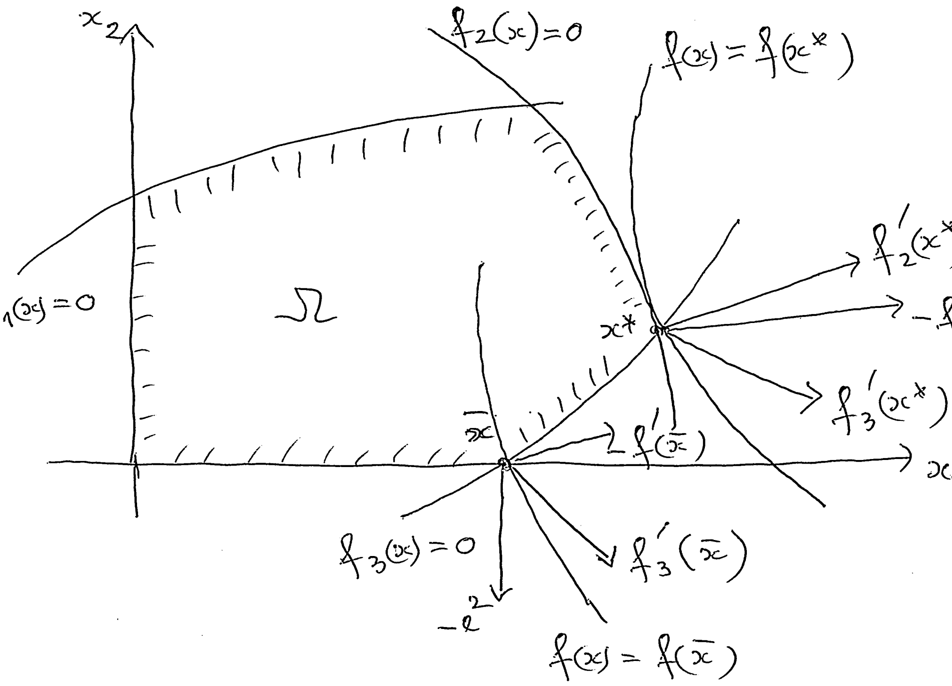
<u>Ülesanne 41</u>. Tõestada, et kui kumeras regulaarses ülesandes (2) $x \in \Omega^{\circ}$, siis $M=\{i\in\{1,\dots,m\} \mid f_i(x)=0\} = \emptyset$.

Eelneva aruteluga oleme tõestanud järgmise tulemuse.

<u>Lause</u>. Kui kumeras ülesandes (2) $x^* \in \Omega$ korral $f_i(x^*)<0$, $i=1,\dots,m$, ja $x_j^*>0$, $j=1,\dots,n$, siis x^* on optimaalne lahend parajasti siis, kui $f'(x^*)=0$.

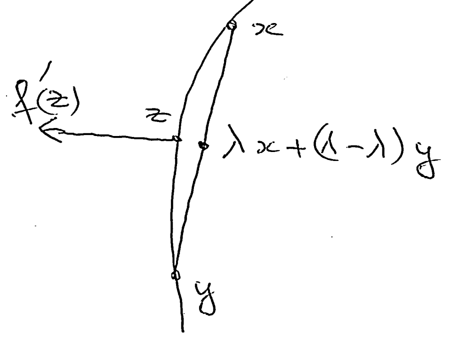
Märgime, et eeldused x^* kohta tähendavad, et ülesanne on regulaarne.

Esitame illustreeriva joonise koonuse kriteeriumi kohta juhul $n=2$.



Lisame järgmised selgitused joonise kohta. Lubatav hulk on määratud kitsendustega $f_i(x)\le 0$, $i=1,2,3$, $x_j \ge 0$, $j=1,2$. Joonisel on kujutatud kumerate funktsioonidega f_i määratud kõveraid $\{x\in \mathbb{R}^2 \mid f_i(x)=0\}$, $i=1,2,3$. Et näha aru, kus asuvad tingimust $f(x) \le 0$ rahuldavad punktid kumera funktsiooni f korral, vaatleme joonist

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = f(z)\}$$



milles $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = f(z)$. Tuletis $f'(z)$ on kõvera välisnormaali suunaline, sest see näitab funktsiooni kiireima kasvu suunda.

Jätkame selgitustega optimiseerimisülesannet illustreeriva joonise kohta. Punktis x^* on $M=\{2,3\}$ ja $N=\emptyset$, $-f'(x^*)$ kuulub vektorite $f_2'(x^*)$ ja $f_3'(x^*)$ poolt määratud koonusesse ja x^* on seepärast optimaalne lahend. Punktis $\bar{x}$ on $M=\{3\}$ ja $N=\{2\}$, kuid $-f'(\bar{x}) \notin C(f_3'(\bar{x}), -e^2)$, seega ei ole $\bar{x}$ optimaalne lahend.

Ülesanne 42. On vaja minimiseerida $f(x) = x_3$ kitsendustel

$$f_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0,$$

$$f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 + x_2 - x_3 \le 0,$$

$$f_3(x) = x_1^2 + x_1 - 4x_2 - x_3 + 6 \le 0,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Tõestada, et see on kumer planeerimisülesanne, kitsendused rahuldavad regulaarsuse tingimust ja tema optimaalne lahend on $x^* = (0,1,2)$. Kasutada x^* optimaalsuse kindlakstegemisel koonuse kriteeriumit.