1. Intressid

1.1.Liht- ja liitintressid. Investeeringu nüüdis- ja tulevikuväärtus.

Intresside arvestamisel on kasutusel kaks metoodikat:

a) **Lihtintress** (*simple interest*)
b) **Liitintress** (compound *interest*)

Lihtintresside meetodi korral tehingu põhisumma, mis teenib intresse, ei muutu kogu tehinguperioodi jooksul. Lihtintresse kasutatakse peamiselt alla aasta kestvate tehingute korral.

Liitintresside puhul ei maksta intresse arvestusperioodi lõpul välja, vaid need lisatakse tehingu põhisummale. Järgneval perioodil on intresse kandvaks summaks juba põhisumma koos eelmiste arvestusperioodide intressidega.

Lihtintresside arvutamine

Olgu
P - intressi kandva **tehingu põhisumma** (*principal*); nimetatakse ka tehingu nimiväärtuseks (*face value*) või nominaaliks (võlakirjade puhul) (*nominal*) ,
r - **intressimäär ühe aasta kohta** ehk aastaintressimäär (*annual / yearly*) *rate of interest*),
t - **tehingu kestus ehk periood aastates** (*time period in years*),
I - **teenitav intress** (*amount of interest earned*).

Siis tehingu teenitav intress lihtintresside korral leitakse vastavalt valemile

$$I = P * r * t\,. \qquad (1.1)$$

Näide 1.1. Pank andis Matile üheks aastaks laenu 5000 EUR-i intressimääraga 8%. Kui suure summa pidi Mati pangale tagasi maksma?

Vastus: Laenu intress on $I = 5000 * 0{,}08 * 1 = 400$ ning tagasimakstav summa on 5000+400=5400 EUR.

Põhimõtteliselt võib intresside arvestamise perioodiks olla ühe aasta asemel ka mingi muu ajavahemik, näiteks pool aastat, kolm kuud ehk kvartal, üks kuu jne. Samuti võib tehingu kestus olla antud päevades. Siis tuleb valemi (1.1) kasutamiseks päevad teisendada aastateks valemi

$$t = \frac{N}{K},$$

järgi, kus N on tehingu kestus päevades ja K arvestuslik päevade arv aastas. (K=360 või K=365). Eesti kommertspankades kasutatakse süsteemi 365/360, mille korral arvestatakse, et aastas on kõik kuud 30 päeva pikkused, st päevade arv aastas $K = 360$ ja N määramisel võetakse arvesse täpne tehingu päevade arv, s.t. aastas (ka lisaaasta korral) on 365 päeva.

Kui tehingu algus- ja lõppkuupäev on teada, saame leida selle täpse ajalise pikkuse päevades. Tavaliselt võetakse tehingu päevade lugemisel arvesse tehingu alguskuupäev, kuid ei võeta arvesse tehingu lõppkuupäeva.
Kui intressimäär ja tehingu kestus on antud erinevate ajaühikute korral, siis tuleb valemi (1.1) rakendamiseks eelnevalt teisendada need suurused nii, et nad vastaksid samale ajaühikule. Näiteks kui intressimäär on antud kuu kohta ning tehingu pikkus on kvartalites, siis tuleb kas a) tehingu pikkus esitada kuudes või b) intressimäär kvartali kohta.

Näide 1.2. Mati sõlmis pangas laenulepingu 3000 EUR laenu saamiseks 10.jaanuarist kuni 30.maini kuise intressimääraga 1.5 % Kui suure summa peab Mati pangale tagasi maksma (süsteem 365/360)?
Vastus. Laenulepingu päevade arv on 22 (jaanuar) +28(veebruar) +31(märts)+30(aprill)+29(mai)=140 ning intress on
$I = 3000*140*\frac{0.015}{30} = 210$ EUR ning tagasimakstav summa on 3210 EUR.

Kui tehinguperioodi vältel intressimäär muutub, tuleb kogu periood jaotada osaperioodideks, mille vältel intressimäär on konstantne, arvutada intress iga osaperioodi kohta eraldi ja tehingu intressiks on siis osaperioodide intresside summa.

<u>Liitintresside arvutamine</u>

Intressi lisamist intresside arvestamise perioodi algul olevale summale nimetame edaspidi ***kapitalisatsiooniks*** (*compounding* või *conversion*)**,** ajaperioodi, mille lõpus toimub kapitalisatsioon, nimetame ***kapitalisatsiooniperioodiks*** (*compounding period*). Liitintresse kasutatakse peamiselt keskmise kestusega ja pikaajalistes tehingutes.

Olgu
P - investeeringu põhisumma (nimiväärtus, nominaal),
i - intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta (*periodic rate of interest*),
n - kapitalisatsiooniperioodide arv (*number of compounding periods*),
S - investeeringu tulevikuväärtus ehk tähtpäevaväärtus *(future value or maturity value).*

Siis

$$S = P*(1+i)^n, \tag{1.2}$$

$$I = S - P = P*((1+i)^n - 1). \tag{1.3}$$

Periood	Põhisumma kap. perioodi algul	Kap. perioodil teenitav intress	Teenitud summa kap. perioodi lõpul
1.	P	Pi	$P(1+i)$
2.	$P(1+i)$	$P(1+i)i$	$P(1+i)^2$
3.	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2 i$	$P(1+i)^3$
4.	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^3 i$	$P(1+i)^4$

Näide 1.3. Mati pani investeeris 10000 EUR 2,5 aastaks poolaasta intressimääraga 15,5%. Milline on investeeringu tulevikuväärtus ning saadav intress?
Lahendus. $P = 10000,\ n = 5,\ i = 0{,}155.$ Kasutades valemeid (1.2), (1.3) saame
$S = 10000(1 + 0{,}155)^5 = 20554{,}64$ EUR.
$I = S - P = 10554{,}64$ EUR.

Investeeringu, tehingu **tulevikuväärtus** (tähtpäevaväärtus) **(***future value,* *maturity value)* on olevikus investeeritud rahasumma väärtus tulevikus tehingu lõppedes.

Investeeringu, tehingu **nüüdisväärtus** ehk praegune väärtus **(***present value)* on tulevikus saadava rahasumma väärtus täna (investeerimise päeval).

Kui on teada investeeringu tulevikuväärtus S, siis saame investeeringu nüüdisväärtuse P leida vastavalt valemile

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} \tag{1.4}$$

Nüüdisväärtuse leidmist valemiga (1.4) nimetatakse ***diskonteerimiseks liitintresside meetodiga*** ning suurust P nimetatakse tulevikuväärtuse S ***nüüdisväärtuseks*** ehk ***diskonteeritud väärtuseks*** *(net present value)*. Suurust $(1+i)^{-n}$ nimetatakse ***diskontoteguriks.***

Majanduses, kus raha kasutamise eest tuleb tasuda intressi, on iga rahasumma antud intressimäära suhtes vaadeldav muutuvana ajas, sest igal erineval ajahetkel on vastav intress erinev. Raha väärtust vaadeldaval kuupäeval nimetatakse ***raha ajaväärtuseks*** (*time value of money*) ehk ***dateeritud väärtuseks***.

Antud rahasumma kõiki ajaväärtusi loeme omavahel ekvivalentseteks (**finantsilise ekvivalentsuse printsiip**). Finantsilise ekvivalentsuse printsiipi kasutades on võimalik kokkulepitud maksed asendada kas ühe ekvivalentse maksega või uue ekvivalentse maksegraafikuga.

Näide 1.4. 15 kuud tagasi laenas Mari Jürilt rahasumma, mille nõustus tagasi maksma kahe osamaksega: 800 EURi 21 kuud peale laenu võtmist ja 500 EURi 30 kuud peale laenu võtmist. Täna palus Mari, et lubatud kaks makset asendatakse ühe maksega pärast 2 aasta möödumist laenu võtmisest. Millise summa peaks Mari tagasi maksma, kui turul valitsevaks nominaalintressimääraks on 14% ühe kapitalisatsiooniga igas kvartalis.

Lahendus. Kuna igas kvartalis on üks kapitalisatsioon, siis $i = 14\%/4 = 3.5\%$. Leiame kahe osamaksega ekvivalentsed maksed 9 kuu pärast (15+9 kuud = kaks aastat pärast laenu andmist). Esimese osamaksega ekvivalentne makse (24 kuud -21 kuud = 1 kvartal):
$E_1 = P(1+i)^n = 800(1+0{,}035)^1 = 828$ EUR-i. Teise osamaksega ekvivalentne makse ($$-24 kuud = 2 kvartalit)
$E_1 = \dfrac{S}{(1+i)^n} = \dfrac{500}{(1+0{,}035)^2} = 466{,}76$ EURi.
Seega Mari peaks ühekordse maksena Jürile tagasi maksma 828+466,76 = 1294,67 EUR-i

Lihtintresside meetodi korral leitakse tulevikuväärtus vastavalt valemile

$$S = P*(1 + r*t)$$

ning nüüdisväärtus vastavalt valemile

$$P = \frac{S}{1 + r*t}.$$

Nii nagu lihtintresside korral, antakse ka liitintresside korral intressimäär tavaliselt ühe aasta kohta. Aastaintressimäära nimetatakse ka ***nominaalseks intressimääraks*** ehk **nominaal-intressimääraks** (*nominal rate of internest / nominal interest rate*) ja tähistatakse edaspidi sümboliga *j*. Kui *m* on kapitalisatsioonide arv aastas, *i* intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta, siis aastane intressimäär leitakse vastavalt valemile

$$j = i*m.$$

$$S = P*\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{tm} \qquad (1.5)$$

Tulevikuväärtus S suureneb, kui üks parameetritest P, j, t, m suureneb.

Näide 1.5. Tehti investeering 1000 EUR viieks aastaks nominaalse intressimääraga 12%. Kui suur on investeeringu tulevikuväärtus, kui kapitalisatsioon toimub

a) üks kord aastas, b) kaks korda aastas, c) iga kvartal d) iga kuu .

Lahendus. $P = 1000,\ t = 5,\ j = 0{,}12$. Kasutame valemit (1.5). Saame

a) $S = 1000(1 + 0{,}12)^5 = 1762{,}34$

b) $S = 1000(1 + 0{,}12/2)^{10} = 1790{,}85$

c) $S = 1000(1 + 0{,}12/4)^{20} = 1806{,}11$

d) $S = 1000(1 + 0{,}12/12)^{60} = 1816{,}70$

Paneme tähele, et kapitalisatsiooniperioodi sageduse suurendamine toob endaga kaasa investeeringu tulevikuväärtuse suurenemise.

Valemi $S = P*\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{tm}$ saame kirjutada kujul

$$S = P*\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^{jt}.$$

Minnes piirile $m \to \infty$ saame

$$S = P*e^{jt}. \qquad (1.6)$$

Kui investeeringu tulevikuväärtust (ja intressi $I = S - P$) arvutatakse valemi (1.6) järgi, siis vastavat intressimäära nimetatakse **pidevaks annualiseeritud intressimääraks.**

Näide 1.6. Leida näites 5 antud tingimustel investeeringu tulevikuväärtus pideva intressimäära arvutusreegli kohaselt.

Lahendus. $S = 1000\exp(0{,}12 * 5) = 1822{,}12$.

Ekvivalentsed intressimäärad ja efektiivne intressimäär

Erineva sagedusega nominaalsed intressimäärad on **ekvivalentsed,** kui sama nimiväärtus teenib nende määradega sama suurt intressi.

Efektiivseks intressimääraks ehk efektiivintressi määraks (*effective interest rate*) nimetatakse nominaalset intressimäära, mille järgi arvestatud intressid lisatakse nimiväärtusele 1 kord aasta lõpus.

Efektiivset intressimäära tähistame edaspidi sümboliga *f*. Vaatleme, kuidas leida antud kapitalisatsiooniperioodi intressile *i* vastavat efektiivset intressimäära *f*.
Olgu
P - investeeringu nimiväärtus,
m - kapitalisatsiooniperioodide arv aastas,

Siis intressimääraga f investeeritud summa P tulevikuväärtus 1 aasta pärast on $P*(1+f)$
Intressimääraga *i* investeeritud summa *P* tulevikuväärtus 1 aasta pärast on aga $P*(1+i)^m$
Võrdsustame nüüd f leidmiseks saadud tulevikuväärtused ja avaldame sellest *f*: Saame

$$f = (1+i)^m - 1. \qquad (1.7)$$

Üldjuhul, kui S on investeeringu tulevikuväärtus ning t on investeeringu kestus aastates, siis efektiivne intressimäär f leitakse võrrandist

$$S = P(1+f)^t .$$

Näide 1.7. Kui suur efektiivne intressimäär vastab nominaalsele intressimäärale 18%, mille järgi arvutatud intressid lisatakse iga kuu lõpul?

Lahendus. Kuna $j = 18\%$ ja $m = 12$, siis $i = 18\%/12 = 1{,}5\%$ kuu kohta ning
$f = (1+i)^m - 1 = (1+0{,}015)^{12} - 1) \approx 0{,}1956 = 19{,}56\%$.

1.2. Annuiteet ja perpetuiteet

Annuiteediks (*annuity*) nimetatakse perioodiliste laekumiste (sisse- või väljamaksete) jada, mis koosneb võrdsete ajavahemike tagant toimuvatest võrdse suurusega rahasummade laekumistest ehk osamaksetest.

Ajavahemikku kahe järjestikuse osamakse vahel nimetame ***annuiteedi makseperioodiks*** (*payment period* / *payment interval*)**,** ajavahemikku annuiteedi esimese makseperioodi algusest kuni viimase makseperioodi lõpuni nimetatakse ***annuiteedi tähtajaks*** (*term of annuity*).

Annuiteedi osamaksed toimuvad tavaliselt makseperioodide lõpus (***tavaannuiteet, harilik annuiteet*** (*ordinary annuity*)**.** Kui aga osamaksed toimuvad makseperioodide algul, siis sellist annuiteeti nimetatakse ***avanssannuiteediks*** (*annuity due*)**.**

Olgu
n - annuiteedi makseperioodide arv (*number of payment intervals*),
R - annuiteedi osamakse suurus (*size of periodic payment*).
p - intressimäär annuiteedi makseperioodi kohta (*interest rate per payment period*),
i - intressimäära kapitalisatsiooniperioodi kohta (*interest rate per compounding* (*conversion period*)) (nagu varemgi).

Annuiteedi tulevikuväärtuseks (*amount of annuity*) nimetatakse selle kõigi osamaksetega ekvivalentsete maksete summat annuiteedi tähtaja lõpus.
Kui kapitalisatsiooniperioodide sagedus ühtib makseperioodide sagedusega (s.t. $p = i$, siis annuiteeti nimetatakse ***lihtsaks annuiteediks*** (*simple annuity*).
Lihtsa annuiteedi tulevikuväärtus leitakse vastavalt valemile

$$S = R\left(\frac{(1+p)^n - 1}{p}\right). \qquad (1.8)$$

Valemi (1.8) selgitus: Esimene osamakse (esimese perioodi lõpul) teenib intressi $n-1$ perioodi jooksul ning selle tulevikuväärtuseks on $R(1+p)^{n-1}$,
Teine osamakse teenib intressi $n-2$ perioodi jooksul ning selle tulevikuväärtuseks on $R(1+p)^{n-2}$,
($n-1$) - ne osamakse teenib intressi 1 perioodi jooksul ning selle tulevikuväärtuseks on $R(1+p)$,
viimane osamakse enam intressi ei teeni ning selle tulevikuväärtuseks on R.
Kokku saame kasutades geomeetrilise jada summa valemit

$$S = R(1+p)^{n-1} + R(1+p)^{n-2} + \ldots + R(1+p) + R = R\left(\frac{(1+p)^n - 1}{p}\right).$$

Tavaannuiteedi nüüdisväärtuse saame leida vastavalt valemile

$$P = R\left(\frac{1-(1+p)^{-n}}{p}\right).$$

Näide 1.8. Mati on maksnud kolme aasta jooksul iga kuu lõpus oma investeerimiskonto pangaarvele 300 EUR, mis teenib intressi nominaalse intressimääraga 9% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus. Milline summa on tema arvele kogunenud?

Lahendus. Et $R = 300,\ p = 9\%/12 = 0{,}75\%,\ n = 36$**,** siis

$$S = R\left(\frac{(1+p)^n - 1}{p}\right) = 300\left(\frac{(1+0{,}075)^{36} - 1}{0{,}075}\right) = 12345{,}81$$

Laenu kustutamine võrdsete osamaksetena. Kui võetakse laenu ühekordses summas P ning laenu makstakse tagasi võrdsete osamaksetena, siis annuiteedi nüüdisväärtuse valemi põhjal avaldub osamakse suurus R

$$R = P\left(\frac{p}{\left(1-(1+p)^{-n}\right)}\right).$$

Kogu laenu kustutamiseks kuluv nominaalne rahasumma on nR, ning nominaalne koguintress on $I = nR - P$.

Laenujääk L_k pärast k-ndat osamakset on

$$L_k = S_k(P) - S_k(R),$$

kus $S_k(P) = P(1+p)^k$ on laenatud summa tulevikuväärtus k-ndal perioodil ning

$$S_k(R) = R\frac{(1+p)^k - 1}{p}$$

on esimese k osamakse tulevikuväärtus peale k-ndat makset .

Saame leida ka k-nda osamakse jaotuse – milline on laenu põhiosa kustutamiseks kuluv osa ning milline on intress. Intressi maksmiseks kuluv osa on leitav valemiga

$$I_k = pL_{k-1}$$

ning laenu nimiväärtuse kustutamiseks kuluv osa on

$$d_k = R - I_k.$$

Et $L_0 = P$ ning $L_k = L_{k-1} - d_k$, siis saame neid valemeid kasutades rekursiivselt $k = 1,2,\ldots n$ korral arvutada iga perioodi jaoks põhiosa kustutamiseks ja intressi tasumiseks kulunud osa.

Perpetuiteet ehk igavene annuiteet

Mitmetel juhtudel pole annuiteedi kestus teada või see on väga pikaajaline. Sellisel juhul on mõistlik vaadelda tähtaega lõpmatuna, st eeldada, et annuiteet sisaldab lõpmata palju makseperioode. Näiteks fond, mis on loodud iga-aastase fikseeritud summaga teaduspreemia väljamaksmiseks.

Annuiteeti, mille tähtaeg on lõpmatu, st sisaldab lõpmata palju osamakseid, nimetatakse **igaveseks** (ka **tähtajatuks** või **lõputuks**) **annuiteediks** ehk **perpetuiteediks** (*perpetuity*).

Perpetuiteedi nüüdisväärtus

$$P = \frac{R}{p}. \qquad (1.9)$$

Näide 1.9. Kultuuriministeerium soovib asutada fondi, mille arvelt saaks aasta parimale näitlejatele maksta aastapreemiat. Kui suur peaks olema fondi algkapital, kui fondis paiknev raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 10% kapitalisatsiooniga iga aasta lõpus ning aastapreemia suurus on 3000 EUR?

Lahendus: $p = 10\% = 0{,}10, \quad R = 3000$. Järelikult

$$P = \frac{R}{p} = \frac{3000}{0{,}10} = 30000.$$

1.3. Inflatsioon ja reaalne tulevikuväärtus

Tehingu reaalse efektiivsuse arvutamisel tuleb arvestada raha ostujõu muutumist ajas. Kui raha ostujõud kahaneb ajas ehk kaupade hinnad tõusevad, siis on tegemist **inflatsiooniga** (*inflation*), kui aga raha ostujõud ajas kasvab ehk kaupade hinnad langevad, siis on tegu **deflatsiooniga** (*deflation*). Märkigem, et igapäevaelus on siiski peaaegu alati tegemist inflatsiooniga, deflatsiooni esineb suhteliselt harva vaid teatavat tüüpi majanduslanguse tingimustes.

Vaatleme arvulist näitajat, mis võimaldab raha ostujõu muutust ajas arvesse võtta. Selliseks arvuliseks näitajaks üldnimetusena on **hinnaindeks** I_p (*price index*) , mis näitab mitu protsenti moodustab vaadeldava ajahetke hinnatase mingi muu ajahetke hinnatasemest.

Hinnaindeks arvutatakse alati teataval ajahetkel kehtinud hinnataseme suhtes; nimetatud ajahetke (või ajaperioodi) nimetame hinnaindeksi arvutamise baashetkeks. Oletame, et 1. jaanuar 2005 on võetud hinnaindeksi arvutamise baasiks. Kui soovime teada, milline on hinnaindeks 1. jaanuaril 2007, siis arvutatakse teatava kaupade ja teenuste ostukorvi hind $V1$ 2005. aasta 1. jaanuari seisuga ning sama ostukorvi hind $V2$ 2007. aasta 1. jaanuari seisuga. Otsitav hinnaindeks on siis

$$I_p = 100\frac{V_2}{V_1} \qquad (1.10)$$

Inflatsioonimääraks (*rate of inflation / inflation rate*) nimetatakse hindade suhtelist juurdekasvu protsentides kindla ajavahemiku jooksul. Seega inflatsioonimäär h avaldub valemiga

$$h = I_p - 100 \qquad (1.11)$$

Esitatud arutluse põhjal saame kirja panna ka valemi rahasumma reaalse tulevikuväärtuse arvutamiseks. Olgu S rahasumma nimiväärtusega P nominaalne tulevikuväärtus n aasta möödudes;
C rahasumma P reaalne tulevikuväärtus (*real future value*), st tulevikuväärtus, kus inflatsioon on arvesse võetud, st rahasumma C üks ühik on ostujõult võrdne rahasumma P ühe ühikuga.

Siis võttes valemis (2.5.10) $V_1 = C,\ V_2 = S$ saame valemi

$$C = \frac{S}{I_p}100 \qquad (1.12)$$

või

$$C = S\frac{100}{(100+h)}.$$

1.4. Krediidi kulukuse määr

Krediidi kulukuse määr (*annual percentage rate*) on laenatud rahale aastas langev kõigi kulude (kaasa arvatud lepingutasu, kindlustus) koormus protsentides, eeldusel, et leping kehtib kokkulepitud tähtaja jooksul.

Lepingurikkumisega seonduvad kulud (sh sissenõude kulud jms) ei lähe krediidi kulukuse määra arvutamisel ja avaldamisel arvesse.

Esitame krediidi kulukuse määra arvutamise valemi erijuhul, kui
A - laenu suurus,
t_k - k-nda osamakse toimumise aeg aastates peale laenu saamist,
R_k - laenuga seotud maksete väärtused,
n - osamaksete arv,
l - krediidi kulukuse määr.

Siis krediidi kulukuse määr l arvutatakse valemist

$$A = \sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+l)^{t_k}}$$

Kui laenu (krediiti) antakse mitmes osas, siis

$$\sum_{k'=1}^{m}\frac{L_{k'}}{(1+l)^{v_{k'}}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+l)^{t_k}},$$

kus
$v_{k'}$ - k'-nda krediidi andmise aeg aastates peale laenu saamist, k-nda osamakse toimumise aeg aastates peale laenu saamist,
$L_{k'}$ - k'-nda krediidi suurus,
m - krediidimaksete arv.

Näide 1.10. Viieaastase laenu võtmisel summas 30000 EUR peab laenuvõtja laenu võtmisel tasuma lepingutasu 300 EUR ning igal poolaasta lõpus tasuma summa 3500 EUR. Leida antud laenu krediidi kulukuse määr. Leida krediidi kulukuse määr, kui lepingutasu puudub.

Vastus: Krediidi kulukuse määr on 6,30%. Kui lepingutasu puudub, siis on krediidi kulukuse määr 5,90%.

2. Investeeringu ja investeerimisportfelli tulumäär. Investeeringu sisemine tulumäär.

2.1 Investeeringu aastane tulumäär

Vaatleme juhtu, kus ajahetkel $t=0$ investeeritakse summa V_0 ning investeerimise tulemusel saadakse ajahetkel $t>0$ summa V_t, kus aeg t on mõõdetud aastates. Investeeringu puhastulu (kasum/kahjum) on sel juhul $V_t - V_0$. Investeeringu puhastulu iseloomustab investeeringu tulusust absoluutväärtuses. Investeeringu tulusust koguperioodil (*return %, rate of return*) protsentides saame väljendada suurusega

$$R=\frac{V_t-V_0}{V_0}.$$

Kuna erinevate investeeringute ajaline pikkus võib erinev olla, siis kasutatakse tavaliselt investeeringute tulususe (tootluse) iseloomustamiseks **aastast tulumäära** r (*rate of return, annual rate of return*), Kui perioodi vältel reinvesteerimist ei toimu, siis

$$r=\frac{R}{t}.$$

Kui aga reinvesteerimine toimub ning aastas on k reinvesteerimisperioodi, siis

$$1+R=\left(1+\frac{r}{k}\right)^{tk}$$

millest

$$r=k\left((1+R)^{1/tk}-1\right).$$

Nii nagu intresside puhul, saame ka siin vaadelda pidevat tulusust (*continuosly compounded return*)

$$R_{\ln}=\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$$

ning logaritmilist ehk **pidevat tulumäära** (*logarithmic rate of return, continuosly compounded rate of return*)

$$r_{\ln}=\frac{R_{\ln}}{t}=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$$

Märgime, et viimane võrdus on ekvivalentne võrdusega

$$V_t=V_0e^{r_{\ln}t}$$

Näide 2.1. Investeeritakse 30000 EUR, mis viie aasta pärast peaks tulu andma 45000 EUR väärtuses. Leida investeeringu aastane tulumäär a) liittulumäära korral, kui reinvesteerimisperiood on 1 aasta ning b) pideva tulumäära korral

Lahendus. a) Liittulumäära korral $R=0{,}5$ (50%) ja $k=1$ ja seega

$$r=k\left((1+R)^{1/tk}-1\right)=(1{,}5)^{1/5}-1=0{,}084472 \text{ ehk } r=8{,}45\%.$$

b) Pideva tulumäära korral $R_{\ln}=\ln\left(\dfrac{45000}{30000}\right)=0{,}405465$ (40,55%) ning

$$r_{\ln}=\frac{0{,}405465}{5}=0{,}081093 \text{ ehk } r_{\ln}=8{,}11\ \%$$

Eespool vaatlesime juhtu, kus leidsime tulumäära ühe perioodi $[0,t]$ jaoks. Kui meil on antud tulumäärad $r_1, r_2, \ldots, r_n$ n järjestikuse perioodi kohta, siis kumulatiivne ehk kogutulusus (*cumulative return, overall return*) avaldub liittulumäärade korral kujul

$$r = \prod_{i=1}^{n} (1 + r_i) - 1 .$$

ning pidevate tulumäärade korral

$$r_{\ln} = \sum_{i=1}^{n} r_i \ .$$

Kui ajaperioodid on võrdse pikkusega (näiteks üks aasta), siis saame rääkida ka **aritmeetiliselt keskmisest tulumäärast** (*arithmetic average rate of return*)

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i$$

ning **geomeetriliselt keskmisest tulumäärast** (*geometric average rate of return*)

$$\bar{r}_g = \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + r_i) \right)^{1/n} - 1 .$$

Aritmeetiliselt keskmise tulumäära puuduseks on asjaolu, et ta ei võta arvesse liitintressi mõju. Kuna aritmeetiline keskmine tulumäär ei võta arvesse liitintressi mõju, on selle väärtus alati geomeetrilise keskmisega võrdne või sellest suurem. Aritmeetiliselt ja geomeetriliselt keskmised tulumäärad on võrdsed, kui kõigi perioodide tulumäärad on võrdsed.
Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise tulumäära vahelist erinevust mõjutab ka investeeringu väärtuse muutlikkus (volatiilsus). Volatiilsuse kasvades väheneb investeeringust saadav tegelik tulu ehk keskmine kogutulu, kuigi aritmeetiliselt keskmine tulumäär jääb samaks. Eeltoodut ilmestab tõsiasi, et investeeringust 50% kaotamise korral on meil alginvesteeringu taastamiseks vaja saavutada tootluseks 100%. Ka vastupidine seos kehtib: kui volatiilsus väheneb, siis kahaneb ka aritmeetiliselt ja geomeetriliselt keskmise tulumäära vaheline lõhe.

Näide 2.2. Olgu investeeringu väärtus ning tootlus aastate lõikes järgmine

Aasta	Investeeringu väärtus eurodes	Aastane tulumäär
2008	200,00	
2009	300,00	50,0%
2010	330,00	10,0%
2011	343,20	4,0%
2012	350,18	2,0%
2013	200,00	-42,887%

Leida aritmeetiliselt ja geomeetriliselt keskmised tulumäärad.

Lahendus.
$\bar{r}$ = (50,0% + 10,0% + 4,0% + 2,0% – 42,9%) : 5 = 23,1% : 5 = 4,6%,
$\bar{r}_g = (1{,}50 * 1{,}10 * 1{,}04 * 1{,}02 * 0{,}57113)^{1/5} - 1 = 0{,}0000$ ehk 0,00%.
Näeme, et geomeetriliselt keskmine tulumäär annab meile õigema vastuse – viie aasta jooksul investeeringu väärtus ei kasvanud.

2.2. Investeerimisportfelli tulumäär

Mitu investeeringut koos moodustavad investeerimisportfelli. Vaatleme nüüd, kuidas leida investeerimisportfelli tulusust, kui on teada iga investeeringu osakaal portfellis ning iga investeeringu tulumäär.

Koosnegu portfell n investeeringust ning olgu $V_1, V_2, ..., V_n$ nende investeeringute maksumused ajahetkel $t = 0$ ning olgu $r_1, r_2, ..., r_n$ nende investeeringute annualiseeritud tulumäärad. Olgu portfelli kogumaksumus $V_{(0)} = \sum_{i=1}^{n} V_i$ ning portfellis sisalduvate investeeringute osakaalud $v_j = \frac{V_j}{V_{(0)}}$, $j = 1,2,..,n$. Portfelli tulumäära arvutamise valemid sõltuvad sellest, kas meil on antud üksikute investeeringute liht-, liit- või pidevad tulumäärad.

a) Olgu $r_1, r_2, ..., r_n$ investeeringute annualiseeritud lihttulumäärad.

Sel juhul on investeerimisportfelli väärtus ajahetkel t

$$V_{(t)} = \sum_{j=1}^{n} V_j (1 + r_j t) \tag{2.1}$$

Teiselt poolt,

$$V_{(t)} = V_{(0)}(1 + rt). \tag{2.2}$$

Seostest (2.1),(2.2) saame, et

$$r = \frac{1}{t}\left(\frac{V_{(t)}}{V_{(0)}} - 1\right) = \frac{1}{t}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{V_j}{V_{(0)}}\right)(1 + r_j t) - 1\right) = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n} v_j + \sum_{j=1}^{n} v_j r_j - \frac{1}{t} = \sum_{j=1}^{n} v_j r_j .$$

Seega investeerimisportfelli lihttulumäär on võrdne investeeringute osakaalude ja nende tulumäärade korrutiste summaga:

$$r = \sum_{j=1}^{n} v_j r_j .$$

b) Olgu $r_1, r_2, ..., r_n$ investeeringute annualiseeritud liittulumäärad ning aastas on k reinvesteerimisperioodi. Siis võrdustest

$V_{(t)} = \sum_{j=1}^{n} V_j \left(1 + \frac{r_j}{k}\right)^{kt}$ ning $V_{(t)} = V\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ saame võrrandi investeerimisportfelli liittulumäära r leidmiseks

$$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = \sum_{j=1}^{n} v_j \left(1 + \frac{r_j}{k}\right)^{kt} .$$

c) Olgu $r_1, r_2, ..., r_n$ nende investeeringute pidevad annualiseeritud tulumäärad. Siis võrdustest $V_{(t)} = \sum_{j=1}^{n} V_j e^{r_j t}$ ning $V_{(t)} = Ve^{rt}$ saame, et

$$e^{rt} = \sum_{j=1}^{n} v_j e^{r_j t} ,$$

millest

$$r = \frac{1}{t}\ln\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e^{r_j t}\right).$$

Näide 2.3. Koosnegu investeerimisportfell kolmest viieaastasest investeeringust summades 30000, 50000 ja 80000 ning olgu nende investeeringute liittulumäärad vastavalt 15%, 1% ja 6% ja reinvesteerimisperioodi pikkus 1 aasta. Leida investeerimisportfelli liittulumäär.

Lahendus:
$(1+r)^5 = (3/16)(1+0{,}15)^5 + (5/16)(1+0{,}01)^5 + (1/2)(1+0{,}06)^5 = 1{,}374683$, millest
$r = 0{,}065714$ ehk $r = 6{,}57\%$.

Näide 2.4. Koosnegu investeerimisportfell kolmest viieaastasest investeeringust summades 20000, 60000 ja 80000 ning olgu nende investeeringute pidevad tulumäärad vastavalt 12%, 4% ja 8%. Leida investeerimisportfelli pidev tulumäär.

Lahendus: $r = \frac{1}{5}\ln\left(e^{0,6}/8 + e^{0,2}(3/8) + e^{0,4}/2\right) = 0{,}071773$ ehk $r = 7{,}18\%$.

2.3. Investeeringu sisemine tulumäär

Investeeringu **puhas nüüdisväärtus NPV** (*net present value*) on investeeringu kasumlikkuse näitaja, mis leitakse nii, et investeeringuga kaasnevate sissetulevate rahavoogude nüüdisväärtusest lahutatakse maha investeeringuga seotud väljaminekute nüüdisväärtus.
Olgu i investeeringu **nõutav annualiseeritud tulumäär,** s.t sama riskitasemega investeerimisprojektide tulumäär. Olgu meil investeeringuga seotud rahavood $C_n,\ n = 0,1,2,..,N$ ning nende toimumise ajahetked $t_n,\ n = 0,1,2,..,N$ (aeg t on tavaliselt väljendatud aastates). Summa C_n negatiivne väärtus tähendab raha väljamaksmist, positiivne C_n aga laekumist. Siis investeeringu NPV leitakse valemi

$$NPV = \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}}$$

põhjal. Investeerimisprojekti on mõtet realiseerida siis, kui investeeringu nüüdispuhasväärtus on mittenegatiivne.

Näide 2.5. Olgu investeeringuga 35000 EUR ajahetkel $t = 0$ kaasnev tulu järgmine: pärast 1.5 aastat 5000 EUR, teise aasta lõpus 5000 EUR, kolmanda ja neljanda aasta lõpus 10000 EUR ning viienda aasta lõpus 15000 EUR. Leida investeerimisprojekti NPV, kui nõutav annualiseeritud tulumäär on 5%. Kas investeerimisprojekti on mõtet realiseerida?

Lahendus: Investeeringu NPV nõutav tulumäära 5% korral on

$$NPV = \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}} = -35000 + \frac{5000}{(1+0{,}05)^{3/2}} + \frac{5000}{(1+0{,}05)^2} + \frac{10000}{(1+0{,}05)^3} + \frac{10000}{(1+0{,}05)^4} + \frac{15000}{(1+0{,}05)^5} =$$

$$= -35000 + 4647{,}143 + 4535{,}147 + 8638{,}376 + 8227{,}025 + 11752{,}89 = -35000 + 37800{,}58 = 2800{,}58 EUR$$

Kuna investeerimisprojekti NPV on positiivne, siis on mõtet projekti realiseerida.

Investeeringu sisemiseks tulumääraks r_{IRR} (*internal rate of return, IRR)* me nimetame aastast tulumäära r, mille korral investeeringu puhas nüüdisväärtus NPV on null, s.t.

$$NPV = \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} = 0.$$

Kui investeeringu sisemine tulumäär on suurem või võrdne, kui nõutav tulumäär, siis on projekti mõtet realiseerida.

Näide 2.6. Leida näites 5 toodud investeerimisprojekti sisemine tulumäär r_{IRR}.
Lahendus. Investeeringu sisemine tulumäär on võrrandi

$$0 = \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}} = -35000 + \frac{5000}{(1+r)^{3/2}} + \frac{5000}{(1+r)^2} + \frac{10000}{(1+r)^3} + \frac{10000}{(1+r)^4} + \frac{15000}{(1+r)^5}$$

lahend. Kasutades Exceli Data Solver-it saame lahendiks $r_{IRR} = 7{,}32\%$.

3. Võlakirjad.

3.1. Põhimõisted. Võlakirjade liigitus

Võlakiri (*bond*) on väärtpaber, mille väljaandjal on kohustus maksta võlakirja omanikule intresse ning lunastamistähtajal tagastada ka põhisumma.

Võlakirju iseloomustavad järgmised karakteristikud:

a) **Võlakirja nimiväärtus (ka nominaal, põhisumma)** (ingl k *principal, par value, redemtion price, face value*) on summa, mille pealt võlakirja väljaandja arvestab intresse ja mis tuleb võlakirja kustutamistähtajal tagastada.

b) **Kupongi- ehk intressimaksed** (*coupon payments*) on maksed, mida võlakirja väljaandja maksab investorile tema raha kasutamise eest. Kupongi- ehk intressimäär on kas fikseeritud kogu võlakirja kestvuse ajaks või seotud mõne rahaturu indeksiga (nt Euribor).

c) **Lunastamistähtaeg** (*maturity date*) on kuupäev, millal võlakirja väljaandja peab tasuma investorile põhisumma. Kui väljaandja on ka kõik kupongi(intressi)maksed tasunud, ei ole tal peale lunastamistähtaega investorite ees enam kohustusi. Lunastamistähtaja pikkus sõltub võlakirjast ja võib olla mistahes pikkusega.

d) **Väljalaskehind, võlakirja hind** (*issue price*) on hind, millega investor emiteeritud võlakirja ostab. Väljalaskehind võib võrduda võlakirja nimiväärtusega või olla kas üle või alla nimiväärtuse. Kui võlakirja hind ületab tema nimiväärtust, siis öeldakse, et võlakiri kaupleb preemiaga. Kui võlakirja hind jääb alla nimiväärtust, öeldakse, et ta kaupleb diskontoga. Kui nimiväärtus ja kauplemishind on võrdsed, siis võib öelda, et võlakiri kaupleb nimiväärtusega (*price is at par*).

Näide 3.1: riik annab välja võlakirja nominaaliga 100 EUR tähtajaga 3 aastat ning intressimääraga 4%. Intressi makstakse kord aastas. Ostes sellise võlakirja on investori tuleviku rahavoog järgmine:

1.a lõpp – 4 EUR
2.a. lõpp – 4 EUR
3.a. lõpp – 100 + 4 EUR.

Võlakirjad sobivad investorile, kes on huvitatud madala riskiga, kindlast pidevalt laekuvast tulust, mida talle garanteerib iga-aastane intress. Võrreldes aktsiatega on edukalt toimiva ettevõtte võlakirjade risk ja tulusus väiksem, kuid isegi ettevõtte pankroti korral makstakse võlakirjaomanikele nende osa välja enne aktsionäre. Erinevalt aktsiast ei anna võlakiri selle omanikule õigust emitendi tegevuse üle otsustamiseks.

Võlakirjade liigitus:

- **Kupongvõlakiri** (*coupon bond*) – omanik saab intressi perioodiliste intressimaksete kujul (tavaliselt kord või kaks korda aastas).

- **Diskontovõlakiri** (ka **nullkupongvõlakiri**) (*discount bond, zero-coupon bond*) – intressi ei maksta, omanik saab tulu võlakirja ostuhinna ja nimiväärtuse (nominaali) vahena.

Võlakirjade väljalaskjateks võivad olla riik, omavalitsus või eraettevõte. Riigi võlakirju võib reeglina pidada riskivabadeks võlakirjadeks, sest riigi pankrotistumine ei ole tõenäoline. Ettevõtete võlakirju tuleks pidada riskantseteks võlakirjadeks, sest ettevõtte risk pankrotistuda on suurem ning investoritel seeläbi võimalus oma investeering kaotada samuti suurem.

Riskivabaduse all mõeldakse siin, et võlakirjal ei ole makseriski ehk intressid ja põhisumma makstakse kindlasti õigel ajal ja õiges summas. Muud riskid peale makseriski ohustavad ka riiklike võlakirju (nt. intressimäärarisk, valuutarisk, poliitiline risk).

Valitsuse võlakirju *(treasuries)* liigitatakse tähtaja järgi:

1. Lühiajalised (*treasury bills*) – tähtaeg on kuni 1 aasta.
2. Keskmise pikkusega (*treasury notes*) - tähtaeg kuni 7 aastat.
3. Pikaajalised (*treasury bonds*) – tähtaeg tavaliselt kuni 30 aastat.

Munitsipaalväärtpabereid annavad välja kohalikud omavalitsused. Munitsipaalvõlakirjadelt tasutavad intressimäärad on kõrgemad, kui valitsuse võlakirjadelt makstavad, sest ka nende puhul eksisteerib teoreetiline võimalus, et emitent pankrotistub ja võlakirja ostja kaotab oma raha.

Ettevõtete võlakirjad (*corporate bonds*) on tavaliselt kõrgema intressiga, kui valitsuse võlakirjad, sest nendega kaasnev risk on kõrgem. Suuremate ettevõtete võlakirjadele annavad krediidiriski suhtes reitinuid reitinguagentuurid (Moody's, S&P, Fitch).

Kommertspaber (*commercial paper e. CP*). Ettevõtte poolt välja antud lühiajaline võlakiri maksimumkestusega 270 päeva.

Konverteeritav võlakiri (*convertible bond*). Sellise väärtpaberi omanik võib teatud tingimustel oma võlakirja vahetada ettevõtte aktsiate vastu. Võlakirja vahetamise suhe aktsiate arvusse on määratud konverteerimissuhtega (*conversion ratio*). Konverteerimisaja võib kindlaks määrata näiteks alates mingist tulevasest kuupäevast.

Tagasikutsutav võlakiri (*callable bond*). Sellise võlakirja emiteerijal on õigus võlakiri ennetähtaegselt nii-öelda tagasi kutsuda (eelnevalt kindlaksmääratud hinnaga). Tagasikutsumise võimalus hakkab üldjuhul kehtima siis, kui võlakirja emiteerimisest on möödunud teatud ajavahemik *(call protection period*).

Hüpoteekvõlakiri (mortgage bond). Selline võlakiri on tagatud mingi kinnisvaraga, mis tähendab, et laen on võetud kindla kinnisvaraobjekti või kinnisvaraobjektide kogumi finantseerimiseks.

3.2. Võlakirja hind

Võlakirja hinna leidmisel lähtutakse võlakirjaga seotud tuleviku rahavoogudest, mida tuleks diskonteerida sobiva diskontomääraga. Diskontomääras peavad kajastuma kõik vastava võlakirjaga seotud riskid.
Olgu r diskonteerimisel kasutatav efektiivne tulumäär (diskontomäär) . Siis võlakirja hinna B saame leida vastavalt valemile

$$B=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{(1+r)^{t_i}}+\frac{N}{(1+r)^{t_n}},$$

kus $t_1, t_2, ..., t_n,\ t_n = T$ intressimaksete toimumise aeg (aastates) alates võlakirja \fraxväljalaskekuupäevast, T on aeg võlakirja lunastamistähtajani aastates, N - võlakirja nominaal ja $c_1, c_2, ..., c_n$ on intressimaksete suurused.

Näites 1 toodud võlakirja hind sõltuvalt diskonteerimisel kasutatavast tulumäärast r:

$$B=\frac{4}{(1+r)}+\frac{4}{(1+r)^2}+\frac{4}{(1+r)^3}+\frac{100}{(1+r)^3}.$$

Nullkupongvõlakirja hinna saame leida vastavalt valemile

$$B=\frac{N}{(1+r)^T}.$$

Juhul kui r on antud pideva tulumäärana, siis kupongvõlakirja hind

$$B=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{-rt_i}+Ne^{-rT}$$

ning nullkupongvõlakirja hind

$$B=Ne^{-rT}.$$

0-kupong võlakirja hinna leidmine on kõige lihtsam, sest nagu ka nimest võib järeldada, võlakirja omanikule kupongimakseid ei tehta. Investorile makstakse likvideerimiskuupäeval vaid põhisumma. Kuna intresse ei maksta on selliste võlakirjade hetkeväärtus alati väiksem kui nende nominaalväärtus ehk põhisumma. Seega öeldakse, et nad kauplevad diskontoga ning tihti kutsutakse neid ka diskontovõlakirjadeks

3.3. Võlakirja must ja puhas hind. Võlakirja tulusus tähtajani

Must hind (*dirty price*) on võrdne võlakirja turuväärtusega ehk see hind, millega õiglases tehingus võlakiri omanikku vahetab.
Puhas hind (*clean price*) on aga musta hinna ja tehingupäevaks kogunenud intressi vahe.

Võlakirja puhas hind avaldub kujul

$$CP=DP-AI \quad , \qquad (4.1)$$

kus
CP – puhas hind (*clean price*),
DP – must hind (*dirty price*),
AI – kogunenud intress (*accrued interest*)

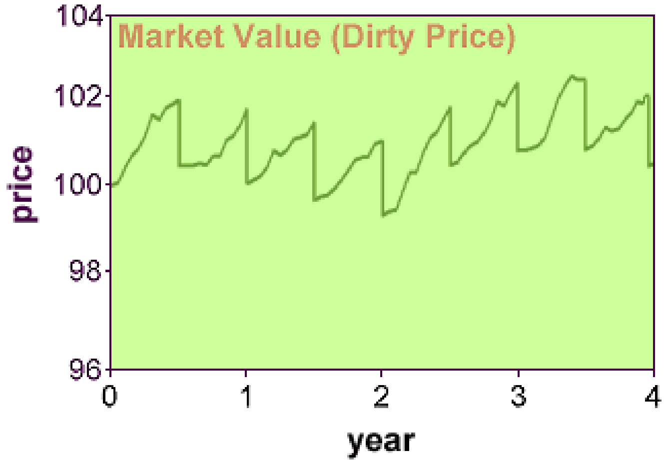
Kogunenud intressi saab leida valemiga:

$AI = tNR$,

kus
t – möödunud osa intressiarvestuse perioodist (tavaliselt kui intressi arvestatakse kord aastas, siis (möödunud päevade arv)/365),
N – Võlakirja nominaal (*par value*),
R – perioodi intressimäär

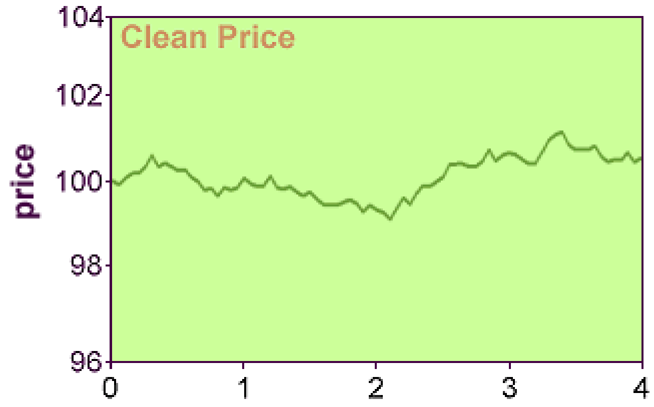
Joonisel 1 on näha 10 aastase võlakirja, mis maksab intresse (kuponge) kaks korda aastas turuhinna (must hind) liikumist esimese 4 aasta jooksul. Näeme, et võlakirja hind kukub enam-vähem võrdselt iga poole aasta tagant – see on seotud intresside väljamaksmisega; kukkumisele järgnev tõus näitab aga kogunenud intresside kasvu.

Joonis 1. Võlakirja turuhind ehk must hind esimese 4 aasta jooksul



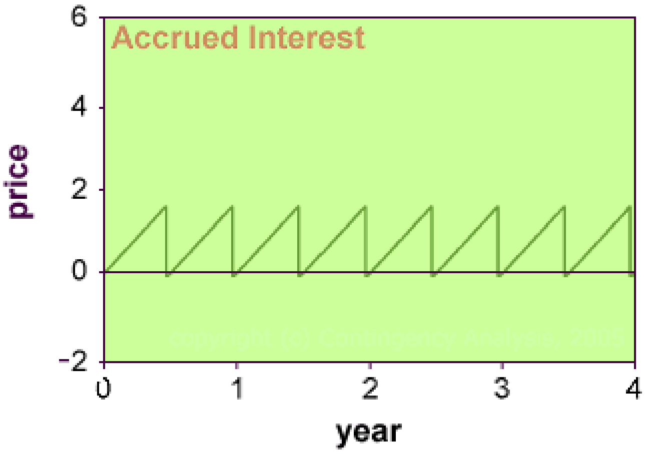
Vastavalt valemile (4.1) saame võlakirja musta hinna esitada puhta hinna (joonis 2) ja kogunenud intresside summana (joonis 3).

Joonis 2 Võlakirja puhas hind esimese 4 aasta jooksul



Võlakirja puhas hind sõltub täielikult turuolukorrast ja investorite hinnangust võlakirja riskantsusele ehk investori nõutavale tulunormile. Võlakirja puhas hind on suurem oma nominaalväärtusest, kui investori nõutav tulunorm on alla kupongimäära ja väiksem, kui investori nõutav tulunorm on suurem kupongimäärast. Joonisel 2 nähtav liikumine ongi seega tõlgendatav ka kui investori hinnangu muutus nõutavale tulunormile – kui *clean price* tõuseb, siis nõutav tulunorm kahaneb ja vastupidi.

Joonis 3 Võlakirja kogunenud intress



Näide 3.2. Leiame 1. jaanuaril 2007.a. välja lastud 2 aastase 10% intressimääraga ja 1000 € nominaaliga võlakirja musta ja puhta hinna ning kogunenud intressid 1.novembril 2007.a. Intressi makstakse 31. detsembril 2007. Lunastustähtaeg on 31. detsember 2008, mil tagastatakse põhisumma koos viimase intressimaksega. Võlakirja diskonteerimisel kasutame pidevat diskontomäära 8%.

Leiame võlakirja musta hinna:

$$DP = 100e^{-0.08\times\frac{2}{12}} + 1100e^{-0.08\times\frac{2+12}{12}} = 1100.65\text{ €}.$$

Järgmisena leiame 1-ks novembriks kogunenud intressid:

$$AI \approx \frac{30 \times 10}{365} \times 1000\ € \times 10\% = 82{,}19\ €$$

Seega võlakirja puhas hind peaks 1. novembril olema DP-AI=1100.65-82.19=1018.46€

Võlakirja tulusus tähtajani

Võlakirja tulusus tähtajani (*YTM – yield to maturity*) on selline konstantne määr, millega võlakirjast tulenevaid rahavooge diskonteerides saadakse võlakirja turuväärtus (must hind). Seega võib öelda, et YTM on võlakirja sisemine tulumäär (IRR – *internal rate of return*). YTM on mugav vahend hindamaks investeeringu tulukust kui võlakirja plaanitakse hoida kuni lunastustähtajani.

Võlakirja tulusus tähtajani y leitakse kui võrrandi

$$DP = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+y)^{t_i}} + \frac{N}{(1+y)^{t_n}}.$$

lahend.

Näide 3.3.
Põhjamaade investeerimispanga (NIB) võlakiri 15.12.2019 7,5%

Nimiväärtus (*Par*)	10000.00
Väljaandmise kuupäev (*Issue date*)	15.12.2014
Kupongimäär (*Coupon rate*)	7.5%

Võlakirja must hind 07.03.2015 oli 10044,29 . Eelmisest intressimaksest on möödunud 83 päeva.

Võlakirju tulusus tähtajani on 7,82%.

Kuupäev	15.12.2015	15.12.2016	15.12.2017	15.12.2018	15.12.2019	Summa
Rahavoog	0,77	1,77	2,77	3,77	4,77	
Aeg rahavooni	750	750	750	750	10750	
PV	707,65	656,36	608,78	564,66	7506,85	10044,29

Võlakirja puhas hind on 10044,29-170,55=9873,74.

4. Matemaatiline mudel riskivabade tuleviku rahavoogude hindamiseks.

4.1. Üldised eeldused finantsturu matemaatilistele mudelitele

Finantsmatemaatika mudeleid kasutatakse selleks, et hinnata finantseerimistegevuses tarvitatavate väärtpaberite hindu ja nendega seotud riske ning selgitada, kuidas oleks võimalik neid riske juhtida.

Finantsmatemaatika mudelite korral tuleb silmas pidada, et nad on kaugel tegelikkusest ja nende tulemused vajavad kasutamiseks tervel mõistusel ja kogemustel põhinevat korrigeerimist. Nende mudelite korral on alati väga tähtsad kaks küsimust: 1) kui vale võib tulemus olla mudelis tehtud kuid reaalselt mittetäidetud eelduste tõttu ning 2) kui kasulik võib see mudel olla sellele vaatamata

Matemaatilised mudelid on alati tegelikkuse lihtsustatud ja mingis mõttes idealiseeritud kujutised, ning reaalsete finantsturgude lähendina vaatleme selliseid turge-mudeleid, mis on järgmises mõttes **täiuslikud** e. hõõrdevabad (*frictionless*):

- Kõigile kauplejatele on kättesaadav ühesugune info, mis igal hetkel t sisaldab täieliku teadmise kõikide turul kaubeldavate varade hindadest hetkel t ja varem.
- Tehingud – ost, müük, igasugused varadega seotud maksed nagu dividendid või intressid või hoiukulud – toimuvad hetkeliselt, on tasuta ning tehingutest saadavat tulu ei maksustata.
- Iga kaupleja võib kaubeldavat vara nii osta kui müüa sama hinnaga igas soovitavas koguses (näit. 10 ühikut, 10^9 ühikut, 0.0013 ühikut, $e+\pi$ ühikut jne.), kusjuures need ostu- ja müügimahud ei mõjuta hindu (kõik kauplejad on nn. hinnavõtjad).
- Igas kaubeldavas varas on kitsendusteta võimalik võtta ka mistahes **lühikene positsioon** ning selleks ei nõuta garantiivara olemasolu.

Lühike ja pikk positsioon

Lühikeseks müümine (inglise keeles *short selling*) on laenatud väärtpaberi müümine lootuses, et selle hind langeb, mille järel saab ta odavamalt tagasi osta ning omanikule tagastada.

Lühikeseks müümine on väärtpaberi ostmisele vastupidine tehing. Lühikeseks müüja teenib kasumit siis, kui lühikeseks müüdud väärtpaberi hind langeb.

Lühikeseks müüdud väärtpabereid nimetatakse lühikeseks positsiooniks. Vastupidiselt on omatavad väärtpaberid pikk positsioon. Pika positsiooni soetamiseks tuleb väärtpaberid kõigepealt osta ning tehingu lõpetamiseks müüa. Lühikeseks müümise puhul on tegevuste järjekord vastupidine. Lühikeseks müüdud väärtpaberid ei kuulu lühikese positsiooni omanikule, mistõttu võlgneb ta nende väärtuse väärtpaberite omanikule.

Lühikeseks müümise eelis seisneb selles, et nii on kauplejail võimalik teenida ka langeval turul. Lühikeseks müümine on aga paljudel juhtudel seotud suurema riskiga. Peamine oht kauplejale seisneb selles, et kaotused ei ole piiratud. Lisaks seisneb raskus veel selles, et pikaajalise keskmisena tõusevad aktsiaturud umbes 8...12 protsenti aastas. Seega lühikeseks müümine nagu toob kasu vaid siis, kui tehing hästi ajastada. Seetõttu ei saa lühikeste positsioonide omamist lugeda investeerimiseks. Lühikeseks müümine on lühiajaline finantsspekulatsioon. Märgime ka, et kõikidel börsidel ei ole lühikeseks müümine lubatud.

Me eeldame, et turuosalised on **majanduslikult ratsionaalsed** – kui on valida, siis sama hinna eest (või odavamalt) nad alati eelistavad saada suuremat tulu või omada suurema tulu saamise võimalust tulevikus. Muuhulgas eelistavad nad alati mittekauplemisele kauplemist, kui sellega kindlasti ei kaasne kulusid, kuid kaasneb võimalus saada tulu - sellise kauplemise võimalust turul nimetatakse arbitraaživõimaluseks (*arbitrage opportunity*).

On selge, et reaalsel turul ei saa ükski arbitraaživõimalus vähegi pikemaajaliselt püsida, sest sellest tekkiv nõudlus ühtede ja pakkumine teiste kaupade osas toob kaasa kaupade hindade korrigeerimise. Arbitraaživõimaluste avastamiseks ja nende likvideerimiseks nõudluse-pakkumise teel töötavad finantsturul ka eraldi spetsialistid, arbitraažöörid (*arbitrageurs*). Kuigi arbitraaživõimaluse avastamisel selle kiire ärakasutamine toob kindla tulu (või vähemalt selle saamise võimaluse), ei saa ükski turul tegutseja loota sellele, et just temal õnnestub see tulu saada.

Väärtpaberite hindade määramiseks loodavate turumudelite korral on loomulik eeldada, et need mudelid on mõistlikud ja majanduslikult sisukad siis, kui nendes puudub arbitraaživõimalus.

Hetkeliselt toimuvate tehingute korral on loomulik eeldada, et turg on igal hetkel tasakaalus, s.o., kõigi osalejate ostu-müügi soovid on rahuldatud (sest kõik saavad oma soovid hetkeliselt rahuldada) ja seega kehtivad turul igal hetkel nn. dünaamilised **tasakaaluhinnad** (hinnad, millega ost-müük pidevalt toimub, kuid mille korral nõudlus ja pakkumine on igal hetkel tasakaalus).

Loomulikult saavad investorid aja edenedes maailmast uut infot ja see muudab nende tulevikuhinnanguid ning ostu-müügi-tarbimise eelistusi ja soove, mis viib pidevalt uute tasakaaluhindade väljakujunemisele, nii et tegemist on igas mõttes dünaamilise tasakaaluga (pidevalt toimuv ost-müük, pidevalt muutuv nõudlus-pakkumine ja sellele vastavad pidevalt muutuvad hinnad).

Kui ratsionaalsete osalistega turg on tasakaalus, siis seal ei saa olla arbitraaživõimalust, sest arbitraaživõimalus tähendaks, et kauplejate ostu-müügi soovid ei ole rahuldatud - arbitraaživõimalus tooks kaasa lõpmatu ja seega mitterahuldatava nõudluse osade kaupade ostuks ja pakkumise teiste kaupade müügiks.

4.2. Ühe hinna seadus

Finantsvarade teoreetilise väärtuse määramisel on tunnustatud põhimõte, et vara väärtus ratsionaalsele investorile on määratud sellest varast saadavate tulevaste hüvedega. Sellest põhimõttest tuleneb, et kui üks turul kaubeldav vara on tulevaste rahaliste tulemuste mõttes mitte halvem kui teine, siis ei saa esimese vara hind olla väiksem kui teisel. (Vastasel juhul ei ostaks ükski ratsionaalne investor teist vara ja sellega tegelikult turul ei kaubeldaks. Täiuslikul turul tooks esimese vara väiksem hind kohe kaasa arbitraaživõimaluse – tuleks osta esimest vara ja müüa teist.)

Sellest põhimõttest lähtudes peab kehtima ka järgmine **Ühe Hinna Seadus** (*the Law of One Price*):

kui kaks turul kaubeldavat vara on tulevaste rahaliste tulemuste mõttes samaväärsed siis peavad olema võrdsed ka nende varade praegused hinnad.

Sama põhimõte kehtib ka kauplemisstrateegiate korral: kui turul üks kauplemisstrateegia on tulevikus rahalises mõttes mitte halvem kui teine (nendega kaasnevad tulevased rahavood on esimese strateegia korral igal ajahetkel tulevikus mitte väiksemad kui teisel), siis ei saa esimese strateegia alustamiseks vajalik summa olla väiksem kui teise strateegia alustamiseks vajalik summa.

Ühe Hinna Seadus kauplemisstrateegiate korral ütleb, et **kui kaks kauplemisstrateegiat on tulevikus rahalises mõttes samaväärsed, siis peavad võrdsed olema ka nende alustamiseks vajalikud rahasummad.**

Ühe Hinna Seadus võimaldab leida tulevase (ka juhusest sõltuva) rahavooga iseloomustatud väärtpaberi hinna sel teel, et konstrueeritakse kauplemisstrateegia, millega kaasnev rahavoog igal hetkel tulevikus võrdub väärtpaberiga kaasneva rahavooga samal hetkel (väärtpaberit matkiv või imiteeriv kauplemisstrateegia). Vaadeldava väärtpaberi hind peab Ühe Hinna Seaduse järgi võrduma sellise kauplemisstrateegia alustamiseks vajaliku raha kogusega. Lisaks võimaldab sellise kauplemisstrateegia rakendamine täpselt tagada kõik väärtpaberi väljaandmisega võetavad võimalikud tulevased rahalised kohustused ehk teiste sõnadega täielikult maandada väärtpaberi väljaandmisega tekkivad riskid.

Juhul, kui väärtpaberit matkivat kauplemisstrateegiat konstrueerida ei õnnestu, võib püüda konstrueerida kauplemisstrateegiaid, mille tulevased rahavood ja portfellide väärtused pole väiksemad (või pole suuremad) kui hinnatava väärtpaberi korral ja selliselt saada ülalt (või alt) hinnanguid selle väärtpaberi õigustatud hinnale.

4.3. Riskivaba finantsturu mudel

Mudeli elemendid

1) **Lõplik arv** $T+1$ **ajahetke** $t \in \mathcal{T} = \{0,1,2,...,T\}$, $T < \infty$, millal turu mudelis saab midagi toimuda. Sealjuures: $t = 0$ - olevik, modelleeritava perioodi algushetk; $t > 0$ - tulevik $\mathcal{T}' = \{1,2,...,T\}$, $t = T$ - modelleeritava perioodi lõpphetk, ajas kaugemale me selles mudelis ei vaatle.

Kauplemine (portfelli moodustamine) toimub ainult hetkel $t = 0$. Kõik kaubeldavate varadega seotud tulevased maksed (võlakirja või laenulepingu korral intressimaksed ja võla tagasimaksed või ka täiendavad laenud) leiavad mudelis aset ainult hetkedel $t = 1,2,...,T$. Ajahetke numbrit tuleb siin mõista kui ajahetke järjekorranumbrit, mitte kui ajahetke arvväärtust (näit aastates)

2) **Lõplik arv** N **turul kaubeldavat vara** (*assets*) või **väärtpaberit** (*securities*)
Iga vara n ($1 \le n \le N$) on iseloomustatud **hetke** $t = 0$ **hinnaga** $B_n = B_n(0)$ ja vara omanikule laekuvate **tulevaste maksete vooga** (*payment stream, cash flow*) $c_n = \{c_n(1), c_n(2),...,c_n(T)\}$. Sisult olulisim on juht, kui kaubeldavateks varadeks on **võlakirjad** (*bonds*), s.o., sellised väärtpaberid, mille korral $B_n > 0$ ja $c_n(t) > 0, t \in \mathcal{T}'$ ning $c_n \ne 0$.

Me eeldame, et vara ühiku hind ei sõltu sellest, kas vara tahetakse osta või müüa, ega ka tehingu mahust. Suurused $c_n(t)$ võivad üldiselt olla suvalised arvud – nulli tõlgendame kui makse puudumist, positiivset arvu kui väärtpaberit omava investori poolt hetkel t saadavat makset ja negatiivset arvu kui tema poolt hetkel t tehtavat makset. Kuna me oma mudelis hakkame lubama ka lühikeseks müümist (negatiivse positsiooni võtmist), siis üldsust kitsendamata võib eeldada, et kõigi kaubeldavate varade korral $B_n \ge 0$.

Näide 4.1. Olgu 1. veebruaril 2011 turul kaubeldavad vaid kaks võlakirja, bond1 ja bond2. Olgu võlakiri bond1 hinnaga 3, lõpptähtajaga 1. veebruar 2014, nominaaliga 1 ja iga-aastase 1. veebruaril toimuva intressimaksega 1. Võlakiri bond2 olgu hinnaga 2, lõpptähtajaga 1. veebruar 2013, nominaaliga 1 ja iga-aastase 1. veebruaril toimuva intressimaksega 1. Sellele turule vastav mudel on kirjeldatav tabelina

	t=0		t=1	t=2	t=3
	Hind		makse	Makse	makse
Bond1	3		1	1	1+1 =2
Bond2	2		1	1+1 =2	0

Kauplemisportfell

Olulised objektid, mida turu mudelites vaadeldakse on portfell ja kauplemisstrateegia. Portfell on investori käes olev turul kaubeldavate varade (või nendes võetud positsioonide) kogum, mis võib erinevatel ajahetkedel ja erinevates olukordades olla erinev. Kauplemisstrateegia on eeskiri, mis ütleb, milline portfell tuleb sõltuvalt ajahetkest ja olukorrast moodustada. Praktiliselt võib need mõisted samastada ja siin kursuses me nii teemegi.

Kuna praegu vaadeldavas mudelis on kauplemine lubatud ainult hetkel $t=0$, siis kõik lubatavad kauplemisstrateegiad seisnevad selles, et hetkel $t=0$ moodustatakse mingi portfell ja tulevikus kogu aeg hoitakse sama portfelli, mis hetkel $t=0$ moodustati. Seetõttu selles mudelis piisab kauplemisstrateegia kirjeldamiseks näidata ära hetkel $t=0$ moodustatav portfell.

Def. Investori **portfelliks e. kauplemisstrateegiaks** vektorit $H=(H_1,H_2,...,H_N)$ kus H_n sisuline tõlgendus on vara n kogus (positsioon) hetkel $t=0$ moodustatud portfellis.

Seejuures, kui $H=(H_1,H_2,...,H_N)$ ja $H'=(H_1',H_2',...,H_N')$ on portfellid, siis

- Portfell $\alpha H=(\alpha H_1,\alpha H_2,...,\alpha H_N)$,
- portfell $H+H'=(H_1+H_1',H_2+H_2',...,H_N+H_N')$.

Suurus H_n võib omandada ka negatiivseid väärtusi, mida tõlgendatakse kui vara n katteta ettemüüki või "lühikeseks müümist". Seejuures toob vara n osas võetav positsioon H_n kaasa hetkel $t=0$ summa H_nB_n maksmise (ehk summa $-H_nB_n$ saamise) ja tulevikus igal hetkel t$\in\mathcal{T}$' summa $H_nc_n(t)$ saamise.

Olgu näiteks $B_n>0$ ja $c_n(t)\geq 0, \forall t\in\mathcal{T}'$ (vara n hind on positiivne ja vara omamisega kaasneb igal hetkel t>0 makse $c_n(t)$ saamine). Siis negatiivse positsiooni $H_n<0$ võtmise korral s.o. lühikeseks müümisega kaasneb hetkel $t=0$ summa $-H_nB_n>0$ saamine ja igal hetkel $t>0$ maksekohustus summas $H_nc_n(t)$.

Portfelli $H=(H_1,H_2,...,H_N)$ **hind (väärtus)** hetkel $t=0$ on suurus $W_H=\sum_{n=1}^{N}H_nB_n$. Nii palju on hetkel $t=0$ vaja raha, et portfell H moodustada. Portfelli H moodustamisega kaasnev tulevane maksete voog on vektor $c_H=(c_H(1),c_H(2),...,c_H(T))$, kus $c_H(t)=\sum_{n=1}^{N}H_nc_n(t)$.

Näide 4.2. Leida näites 1 vaadeldud mudeli korral portfelli $H=(2,-1)$ hind ja tulevane rahavoog. Portfelli hind on $W_H=2*3-1*2=4$ ja portfelliga kaasnev tulevane rahavoog on $c_H=(1,0,4)$ ($2*1-1*1=1,\quad 2*1-1*2=0,\quad 2*2-1*0=4$).

Arbitraažistrateegia

Def. Arbitraaživõimalus (*arbitrage opportunity*) või **arbitraažistrateegia** või a**rbitraažiportfell** on selline lubatav strateegia H, mille korral

kas a) $W_H<0, c_H\geq 0$ (e. $c_H(t)\geq 0\quad \forall t\in\mathcal{T}'$), s.o., portfelli moodustamisel saadakse raha (portfelli hind on negatiivne) ning portfelli tulevaste maksete voog on mittenegatiivne (tulevikus ei tule kindlasti kunagi midagi maksta),

või b) $W_H = 0,\ c_H \geq 0,\ c_H \neq 0$, ($c_H(t) \geq 0\ \ \forall t \in \mathcal{T}$ ja neist vähemalt üks $c_H(t) > 0$),

s.o., portfelli moodustamiseks ei vajata raha ning tulevaste maksete voog on mittenegatiivne ja nullist erinev (seega vähemalt üks tulevane makse on positiivne).

Lihtne on näidata, et arbitraaživabas mudelis kehtib Ühe Hinna Seadus. Tõepoolest, kui kaks portfelli H' ja H'' omavad sama tuleviku rahavoogu $c_{H'} = c_{H''}$, kuid näiteks esimene portfelli hind on väiksem ($W_{H'} < W_{H''}$), siis strateegia $H = H' - H''$ on arbitraažistrateegia: $W_H < 0,\ c_H = 0$.

Sellest, et Ühe Hinna Seadus kehtib, ei järeldu see, et mudel on arbitraaživaba. Näiteks mudelis

	t=0		t=1	t=2
Bond1	1		1	0
Bond2	1		1	1

strateegia $H = (-1{,}1)$ on arbitraažistrateegia: $W_H = 0,\ c_H = (0{,}1)$, kuid et Ühe Hinna Seadus kehtib (ei ole võimalik konstrueerida kaht identset tuleviku rahavoogu, millede hind oleks erinev).

Saavutatav rahavoog

Def. Saavutatavaks (*attainable, reachable, synthesizable*) **tulevaseks rahavooks** nimetame mudelis sellist tulevast rahavoogu, mis on tekitatav mõne lubatava portfelli ehk kauplemisstrateegia poolt, s.t. tulevane rahavoog $x = (x_1, x_2, \ldots, x_T)$ on saavutatav parajasti siis, kui leidub lubatav portfell H nii, et $x = c_H$; seejuures portfelli H nimetame tulevast rahavoogu x tekitavaks portfelliks.

Def. Kui tulevane rahavoog x on saavutatav portfelliga H ja mudelis kehtib Ühe Hinna Seadus, siis nimetame **tulevase rahavoo x väärtuseks** või **hinnaks** (hetkel $t = 0$) portfelli H väärtust hetkel $t = 0$. Tulevase saavutatava rahavoo x väärtust hetkel $t = 0$ tähistame tähisega W_x. Seega

$$x = c_H \Rightarrow W_x = W_H .$$

Selleks, et tulevane rahavoog $x = (x_1, x_2, \ldots, x_T)$ oleks saavutatav portfelliga $H = (H_1, H_2, \ldots, H_N)$, peavad kehtima võrdused

$$\sum_{n=1}^{N} H_n c_n(t) = x_t, \quad t = 1,2,\ldots,T \tag{4.1}$$

Tegemist on lineaarse võrrandisüsteemiga tundmatute $H_1, H_2, \ldots, H_N$ leidmiseks. Süsteem omab T võrrandit ja N tundmatut ning ei pruugi alati omada ühest lahendit. Meenutame, et kui $N < T$, siis süsteem ei pruugi olla lahenduv; kui $N > T$, siis üldjuhul süsteem on lahenduv ning lahendeid on lõpmata palju; selleks et süsteem oleks üheselt lahenduv on tarvilik (kuid mitte piisav), et $N = T$.

Näide 4.3. Leida näites 1 vaadeldud mudeli korral, kas tuleviku rahavood $x=(3,4,5)$ ja $x=(3,4,4)$ on saavutatavad või mitte ning leida saavutatavat rahavoogu genereeriv portfell. Leida saavutava rahavoo $x=(x_1,x_2,x_3)$.

	t=0		t=1	t=2	T=3
Bond1	3		1	1	2
Bond2	2		1	2	0

a) $x=(3,4,5)$ $\quad H=(H_1,H_2)$.
Võrrandisüsteem:
$H_1+H_2=3$
$H_1+2H_2=4$
$2H_1=5$
$H_1=5/2 \Rightarrow H_2=1/2$, kuid $H_1+2H_2=5/2+2*1/2=7/2\neq 4$. Võrrandisüsteemil lahend puudub, rahavoog $x=(3,4,5)$ ei ole saavutatav.
b) $x=(3,4,4)$.
$H_1+H_2=3$
$H_1+2H_2=4$
$2H_1=4$
$H_1=2 \Rightarrow H_2=1$ and $H_1+2H_2=5/2+2*1/2=4$.
Rahavoog $x=(3,4,4)$ on saavutatav ja seda genereeriv portfell on $H=(2,1)$. Rahavoo hind on $W_x=2*3+1*2=8$.
c) Saavutava rahavoo $x=(x_1,x_2,x_3)$ üldkuju.
$H_1+H_2=x_1$
$H_1+2H_2=x_2$
$2H_1=x_3$

$H_1=x_3/2 \Rightarrow H_2=x_1-x_3/2$, $\quad x_2=x_3/2+2x_1-x_3=2x_1-x_3/2$.
Suvaline tuleviku rahavoog kujul $x=(x_1,2x_1-x_3/2,x_3)$ on saavutatav.

Def. Mudel on **täielik (***complete***)**, kui mudelis on saavutatavad kõik tulevased rahavood.

Diskontotegurid

Def. **Diskontotegurite komplektiks** nimetame iga sellist komplekti $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_T)$ positiivseid arve $\lambda_t>0$, mille korral iga turul kaubeldava väärtpaberi $n=1,2,\ldots,N$ jaoks kehtib võrdus

$$B_n=\sum_{t=1}^{T}\lambda_t c_n(t) \qquad \forall n: 1\leq n\leq N; \tag{4.2}$$

arvu λ_t nimetame **hetkele t vastavaks diskontoteguriks**. Lineaarse võrrandisüsteemil (4.2) on T tundmatut ja N võrrandi. Süsteem on üldjuhul lahenduv kui $N \le T$.

Olgu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_T)$ diskontotegurite komplekt ja olgu x tulevane rahavoog, mille korral igal hetkel $t = 1,2,...,T$ saadakse vastavalt makse x_t. Siis nimetame

- hetke t makse x_t korrutamist diskontoteguriga λ_t selle makse **diskonteerimiseks** (hetkele $t = 0$),
- korrutist $\lambda_t x_t$ hetkel t toimuva makse x_t **diskonteeritud väärtuseks ehk nüüdisväärtuseks**,
- summat $\sum_{t=1}^{T} \lambda_t x_t$ tulevase **rahavoo x nüüdisväärtuseks** (diskontotegurite komplekti λ järgi).

Näide 4.4. Leida näites 1 vaadeldud mudeli jaoks kõik diskontotegurite komplektid.

	t=0		t=1	t=2	t=3
Bond1	3		1	1	2
Bond2	2		1	2	0

Võrrandisüsteem diskontotegurite leidmiseks on järgmine:

$$1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 = 3$$
$$1\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$$

Teisest võrrandist saame $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 / 2$ ning asendades λ_2 esimeses võrrandis saame $1\lambda_1 + 1 - \lambda_1 / 2 + 2\lambda_3 = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 / 4$. Seega võrrandisüsteemi üldlahend on kujul

$\lambda = (\lambda_1, 1 - \lambda_1/2, 1 - \lambda_1/4)$. Kuid kõik need vektorid λ ei ole diskontotegurite komplektid, kuna diskontotegurite jaoks peab kehtima võrratus $\lambda_t > 0$

Seega,

$$\lambda_1 > 0,\ 1 - \lambda_1/2 > 0\ (\Rightarrow \lambda_1 < 2),\ 1 - \lambda_1/4 > 0\ (\Rightarrow \lambda_1 < 4).$$

ning kõik diskontotegurite komplektid on esitavad kujul $(\lambda_1, 1 - \lambda_1 / 2, 1 - \lambda_1 / 4),\ 0 < \lambda_1 < 2$.

Kui mudelis eksisteerib vähemalt üks komplekt diskontotegureid, siis

a) portfelli hind on võrdne portfelli tulevase rahavoo diskonteeritud väärtusega (nüüdisväärtusega) mistahes diskontotegurite komplekti suhtes:

$$\sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_H(t) = \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \sum_{n=1}^{N} H_n c_n(t) = \sum_{n=1}^{N} H_n \sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_n(t) = \sum_{n=1}^{N} H_n B_n = W_H;$$

b) suvalise saavutatava rahavoo nüüdisväärtus mistahes diskontotegurite komplekti suhtes on võrdne selle rahavoo hinnaga, s.t. $W_x = \sum_{t=1}^{T} \lambda_t x_t$;

c) mudel on arbitraaživaba. Tõepoolest, kuna $W_H = \sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_H(t)$, siis ükski strateegia ei saa olla arbitraažistrateegia. Kui $c_H \geq 0$, siis $W_H \geq 0$; kui aga $c_H \geq 0,\ c_H \neq 0$, siis $W_H > 0$.

<u>**Põhitulemused riskivaba mudeli kohta**</u>

Teoreem 1. Turu mudel on arbitraaživaba parajasti siis (s.o., siis ja ainult siis)**, kui selle mudeli jaoks on olemas vähemalt üks diskontotegurite komplekt.**

Teoreem 2. Mudel on arbitraaživaba ja täielik parajasti siis, kui tema jaoks on olemas täpselt üks diskontotegurite komplekt.

Mittesaavutatava rahavoo (sel juhul on mudelis lõpmatu arv diskontotegurite komplekte) hinda ei õnnestu mudelis üheselt määrata, kuid saab anda hinnale ülalt ja alt hinnangud:

$$\overline{W}_x = \max_{\lambda_t > 0} \sum_{t=1}^{T} \lambda_t x_t , \qquad \underline{W}_x = \min_{\lambda_t > 0} \sum_{t=1}^{T} \lambda_t x_t .$$

<u>**Seos diskontotegurite ja nullkupongvõlakirjade tulususe vahel.**</u>

Vaatleme nullkupongvõlakirju nominaaliga 1. Lunastamistähtajaga τ (aeg τ on mõõdetud aastates) nullkupongvõlakirja Z^τ tuleviku rahavoog on

$$c(t_m) = \begin{cases} 1, & t_m = \tau \\ 0, & t_m \neq \tau \end{cases}.$$

Kui nullkupongvõlakiri Z^τ rahavoog on mudelis saavutatav, siis selle võlakirja hind Z_0^τ on võrdne ajahetkele τ vastava diskontoteguriga (kõikide diskontotegurite komplektide korral)

$$Z_0^\tau = \sum_{m=1}^{T} \lambda_t c(t_m) = \lambda_\tau .$$

Teiselt poolt, võlakirja tulusus tähtajani y_τ on nullkupongvõlakirja Z^τ korral leitav võrrandist

$$Z_0^\tau = \sum_{m=1}^{T} \frac{c(t_m)}{(1+y_\tau)^{t_m}} = \frac{1}{(1+y_\tau)^\tau} ,$$

millest saame seosed

$$\lambda_\tau = \frac{1}{(1+y_\tau)^\tau}, \quad y_\tau = (\lambda_\tau)^{-1/\tau} - 1 .$$

<u>**Võlakirjade turu andmete kasutamine mudeli konstrueerimiseks.**</u>

Reaalsed finantsturud ei ole täielikud ning seetõttu võib juhtuda, et turumudel reaalsete andmetega ei ole arbitraaživaba. Seetõttu konstrueeritakse arbitraaživaba mudel, kus võlakirjade hinnad on vaid ligilähedaselt samad, mis reaalsel turul. Selleks

a) leitakse diskontotegurid nii, et võlakirjade nüüdisväärtused oleks võimalikult lähedased võlakirjade tegelikele hindadele (kasutatakse võlakirjade musti hindu). Selleks minimiseeritakse võlakirjade tegelike hindade B_n ja nende nüüdisväärtuste $\sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_n(t)$ vahede ruutude summat:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_n(t) - B_n \right)^2 \to \min_{\lambda_1 > 0, \ldots \lambda_T > 0}$$

Olgu $\overline{\lambda}$ selle minimiseerimisülesande lahend.

b) Konstrueeritakse arbitraaživaba mudel, kus võlakirjade hindadeks võetakse $\overline{B}_n = \sum_{t=1}^{T} \overline{\lambda}_t c_n(t), \quad n = 1,2,\ldots,N$ ning nende tuleviku rahavoogudeks on $c_n(t)$.

Näide 4.5. Vaatleme võlakirjade turgu, kus kaubeldakse vaid kolme võlakirjaga: bond1, bond2 ja bond3. Olgu aeg t mõõdetud aastates.

	Hind, t=0		Makse t=1	Makse t=2
bond1	1.5		1	1
bond2	2.4		1	2
bond3	2.6		2	1

See mudel ei ole arbitraaživaba. Näiteks portfell H = (3; -1; -1) on arbitraažiportfell: $W_H = -0.5,\ c_H = (0,0)$.

Konstrueerime nüüd nende andmete põhjal arbitraaživaba mudeli. Selleks minimiseerime funktsiooni $F(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1.5)^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2.4)^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2 - 2.6)^2 \to \min_{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0}$.

Minimiseerimisülesande lahendiks on $\overline{\lambda} = 0.918,\ \overline{\lambda}_2 = 0.718,\ F = 0.023$. Kasutades leitud diskontotegureid leiame võlakirjade hinnad arbitraaživabas mudelis kui võlakirjade tuleviku maksete nüüdisväärtused

	Hind, t=0		Makse t=1	Makse t=2
Bond1	1.636		1	1
Bond2	2.355		1	2
Bond3	2.555		2	1

Lihtne on kontrollida, et see mudel on arbitraaživaba ja täielik (s.t. selle mudeli jaoks leidub vaid üks diskontotegurite komplekt).

Võime konstrueerida arbitraaživaba mudeli ka nii et minimiseeritakse võlakirjade tulumäärade erinevust. Olgu $y_n,\ n = 1,2,..,N$ reaalse turu võlakirjade tulumäärad. Siis

a) leitakse diskontotegurid nii, et võlakirjade tulusused tähtajani oleks võimalikult lähedased võlakirjade tegelikele tulusustele. Selleks minimiseeritakse võlakirjade tegelike tulususte ja arbitraaživaba mudeli tulususte vahede ruutude summat:

$$\sum_{n=1}^{N} (y_n - \tilde{y}_n)^2 \to \min_{\substack{\lambda_1 > 0, \ldots \lambda_T > 0, \\ \tilde{y}_1 > -1, \ldots, \tilde{y}_N > -1}},$$

tingimusel, et

$$\sum_{t>0}^{\tau}(1+\tilde{y}_n)^{-t}c_n(t)=\sum_{t>0}^{\tau}\lambda_t c_n(t),\quad n=1,2,\dots,N\ .$$

Olgu $\overline{\lambda}$ selle minimiseerimisülesande lahend.

b) Konstrueeritakse arbitraaživaba mudel, kus võlakirjade hindadeks võetakse $\overline{B}_n=\sum_{t=1}^{T}\overline{\lambda}_t c_n(t),\ \ n=1,2,\dots,N$ ning nende tuleviku rahavoogudeks on $c_n(t)$.

5. Swap-tehingud.

Swap on tuletistehing, mille korral tehingu osapooled vahetavad omavahel tuleviku rahavoogusid.

Intressimäära swap - kahe osapoole kokkulepe kus osapooled vahetavad tuleviku intressimaksete voogusid. Neid lepinguid kasutatakse tihtipeale selleks et vahetada ujuva intressimääraga maksete voog fikseeritud intressimääraga maksete voo vastu. Rahavood arvutatakse nominaali (*notional amount*) suhtes. Erinevalt võlakirjadest ei ole makset lepingu sõlmimise hetkel ning tehingu osapooled vahetavad vaid intressimakseid.
Intressimäära swapi kasutatakse selleks, et kindlustada end intressimäära riski vastu. Suur osa swappe kasutavad ujuva intressimäära saamiseks kas LIBOR-it (London Interbank Offer-Rate) või EURIBORi (mõlemad määratakse pankadevahelise kauplemise tulemusel). Ujuva intressimäära saamiseks lisatakse EURBOR-ile või LIBOR-ile mingi kogus punkte, kus üks punkt lisab 0.01% intressimäärale. Näiteks kui ujuv intressimäär on EURIBOR+60 punkti ning EURIBORi väärtuseks on 2.5%, siis ujuvaks intressimääraks on 3.1%.

Valuutaswap. Valuutaswapi korral vahetatakse nii algsumma kui intress ühes valuutas algkapitali ja intressi vastu teises valuutas.

Vaatleme nüüd, kuidas leida intressimäära swap-tehingu korral fikseeritud intressimäära ehk swap-määra . Olgu meil arbitraaživaba ja täielik riskivaba turumudel diskontoteguritega λ_t.
Vaatleme intressimäära swapi lõpptähtajaga τ ja nominaaliga 1.
Olgu $C_t,\ 0<t\le\tau$ - tuleviku intressimaksed ujuva intressimäära korral.
Olgu $c_t(w)$, $0<t\le\tau$ - - tuleviku intressimaksed fikseeritud intressimäära korral.

Swap määr $w=w_\tau$ on fikseeritud intressimäär, mille korral $\sum_{t>0}^{\tau}C_t\lambda_t=\sum_{t>0}^{\tau}c_t(w)\lambda_t$, s.t. intressimaksete voogude nüüdisväärtused on samad. Tuletame nüüd võrrandi swap-määra leidmiseks efektiivse intressimäära korral. Olgu aeg t mõõdetud aastates.

Leiame kõigepealt maksete nüüdisväärtuse ujuva intressimäära korral. Leiame intressimakse $C_{t'}$ perioodi (t,t') eest . Kui me ajahetkel t investeerime riskivabalt ühe ühiku, siis me saame ajahetkel t' tagasi summa $1+C_{t'}=\dfrac{\lambda_t}{\lambda_{t'}}$ (kuna $1*\lambda_t=(1+C_{t'})\lambda_{t'}$). Kokkuvõttes saame

$$\sum_{t'>0}^{\tau}C_{t'}\lambda_{t'}=\sum_{t'>0}^{\tau}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t'}}-1\right)\lambda_{t'}=\sum_{t'>0}^{\tau}(\lambda_t-\lambda_{t'})=1-\lambda_\tau\,,$$

kuna $\lambda_0=1$.

Leiame nüüd fikseeritud intressimääraga maksete nüüdisväärtuse. Oletame, et intressi makstakse ajamomentidel $\Delta t' + j\Delta t$, $j = 0,1,2,\ldots,k$, kus $\Delta t' + k\Delta t = \tau$ ning $\Delta t' \le \Delta t$. Fikseeritud intressimäära $w = w_\tau$ (efektiivne intressimäär) korral on intressimakse suurus ajahetkedel $\Delta t' + j\Delta t$ $j = 1,2,\ldots,k$ $c_{\Delta t} = (1+w)^{\Delta t} - 1$ ning ajahetkel $\Delta t'$ on intressimakse $c_{\Delta t'} = (1+w)^{\Delta t'} - 1'$. Et $(1+w)^{\Delta t} - 1 \approx w\Delta t$ ja $(1+w)^{\Delta t'} - 1 \approx w\Delta t'$, siis $c_{\Delta t'} \approx \dfrac{\Delta t'}{\Delta t} c_{\Delta t}$.

Kokkuvõttes saame fikseeritud intressimaksete nüüdisväärtuseks

$$\sum_{t>0}^{\tau} c_t(w)\lambda_t = \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\lambda_{\Delta t'} + \sum_{t \ge \Delta t' + \Delta t}^{\tau} \lambda_t \right) c_{\Delta t}$$

ning me saame järgmise võrrandi swap-määra leidmiseks

$$\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\lambda_{\Delta t'} + \sum_{t \ge \Delta t' + \Delta t}^{\tau} \lambda_t \right)\left((1+w_\tau)^{\Delta t} - 1 \right) = 1 - \lambda_\tau .$$

Vaatleme nüüd erijuhtu kui $\Delta t' = \Delta t = 1$ (aeg t on mõõdetud aastates). Siis

$$\left(\sum_{t=1}^{\tau} \lambda_t \right) w_\tau = 1 - \lambda_\tau$$

millest saame, et

$$w_\tau = \frac{1 - \lambda_\tau}{\sum_{t=1}^{\tau} \lambda_t} .$$

Kui meil on teada swap määrad w_t, siis saame diskontotegurid leida rekursiivselt

$$\tau = 1 : w_1 = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{1 + w_1},$$

$$\tau = 2 : w_2 = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1 - w_2\lambda_1}{1 + w_2},$$

jne. Seega, teades swap-määrasid on võimalik leida diskontotegureid ja vastupidi. Seda asjaolu saab ära kasutada arbitraaživaba mudeli konstrueerimisel reaalse turu andmete põhjal. Paljudes riikides on swap-turg enam arenenud kui võlakirjade turg ning arbitraaživaba turumudeli konstrueerimiseks kasutatakse swap-turu andmeid.

6. Aktsiad. Turgude efektiivsus.

6.1 Aktsiad. Aktsiaturu efektiivsus

Aktsia *(stock)* on väärtpaber, mis näitab omaniku (aktsionäri) õigust osale ettevõtte varast ja kasumist. Kasumiosa, mis aktsiate arvu alusel investeerijale välja makstakse, nimetatakse **dividendiks**.

Aktsiate liigitus sõltuvalt hääletusõigusest ja dividendidest

a) Eelisaktsia
Dividendide suurus on fikseeritud, üldjuhul puudub hääleõigus aktsionäride üldkoosolekul, Eelisaktsionärid on eelisseisus võrreldes lihtaktsionäridega ettevõtte pankroti korral – nende nõuded rahuldatakse esmalt

b) Lihtaktsia
Enamus kaubeldavaid aktsiaid on lihtaktsiad. Eesti turul on avalikult kaubeldavad vaid lihtaktsiad.

Turul kaubeldavad aktsiad on tundlikud kõikide põhiliste finantsturgude riskide suhtes. Aktsiate väärtuse muutus võib olla suur võrreldes teiste väärtpaberitega.

Aktsia väärtuse hindamine

Nagu enamiku finantsinvesteeringute väärtus, sõltub ka aktsiate väärtus tulevikus laekuvate rahavoogude nüüdisväärtusest. Seega aktsiate korral dividendide nüüdisväärtusest.

Eelisaktsia väärtus ehk hind P

$$P = \sum_{t>0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

kus D_t - dividendid ajahetkel t,
k - investeerija nõutav tulunorm.

Kui dividendid kõigil perioodidel võrdsed ($D_t = D$) ning $t = 1,2,...,$ on aastad, siis vastavalt geomeetrilise progressiooni summa valemile:

$$P = \frac{D}{k},$$

Kui aga dividendid kasvavad konstantses tempos, s.t. $D_t = (1+c)D_{t-1}$, $c < k,$, siis

$$P = \frac{D}{k-c}.$$

Viimast valemit nimetatakse **Gordoni kasvumudeliks.**
Lihtaktsiate korral dividende suurus ei ole kindlaksmääratud ning neid võidakse ka mitte maksta. Kui aktsionär kavatseb hoida aktsiat oma käes T aastat ning dividendide suurus aastani T on teada , siis

$$P = \sum_{t>0}^{T} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{P_T}{(1+k)^T},$$

kus P_T on aktsia turuhind ajahetkel T.

Välja on pakutud ka kaheperioodiline muutuva dividendide kasvumääraga mudel, mille korral eeldatakse, et dividendide suurus aastani T on teada ning edasi kasvavad aga dividendid konstantses tempos, s.t. $D_t = (1+c)D_{t-1}$, $c < k.$. Siis

$$P = \sum_{t>0}^{T} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{D_T}{(k-c)(1+k)^T}.$$

Praktikas on nende teoreetiliste valemite rakendamine keeruline, kuna see eeldab väga stabiilset majanduskeskkonda, et dividendide suurused tulevikus oleks ligilähedaseltki teada.

Üheks võimaluseks aktsiate hindamisel on lähtuda nende bilansilisest väärtusest. Aktsia bilansiline väärtus (**aktsia raamatupidamisväärtus** (*book value*)) – firma bilansiline omakapital ühe aktsia kohta.
Aktsia hinna ja raamatupidamisväärtuse suhe (*price-to-book-ratio*) P/B:

$$P/B = \frac{P}{BV}$$

P - aktsia turuhind
BV - aktsia raamatupidamisväärtus

Aktsia väärtuse hindamise üheks võimaluseks on ka ettevõtte kasumi prognoosimine tulevikus ning selle põhjal aktsia õiglase hinna leidmine. Selleks leitakse suhtarv P/E:

$$P/E = \frac{P}{EPS},$$

P - aktsia turuhind
EPS - puhaskasum aktsia kohta.

Aktsia hinda mõjutavad tegurid:

1) Turul valitsev hinnang ettevõtte kasumipotentsiaalile
2) Turul kehtivad intressimäärad
3) Konkreetse ettevõttega seotud muudatused
4) Tootmisharu arengupotentsiaal
5) Üldine majandusareng

Finantsturgude efektiivsus

Arbitraaži all mõistetakse reeglina kahte korraga tehtavat tehingut (ost ja müük), mille eesmärgiks on teenida hindade erinevuse pealt riskivaba kasumit.

1950-ndate aastate lõpus püstitasid majandusteadlased hüpoteesi, mille kohaselt aktsiate hinnad ekslevad, s.t. nende muudatused on ajas ettearvamatud (*Random walk hypothesis*). Selle baasil kujunes välja efektiivse turu hüpotees, mis väidab, et efektiivne turg reageerib kohe uuele infole ning seega ei õnnestu sama riskitaseme puhul ühelgi investoril teenida rohkem kui teistel. Et efektiivsel turul peegeldavad finantsvarade hinnad kogu olulist infot, siis võivad investorid olla kindlad, et nad maksavad varade eest alati õiglast hinda.

Efektiivse turu tagamiseks on vajalikud teatud eeldused:

- Turul piisav hulk investoreid, kelle eesmärk on teenida spetsiaalset ekstrakasumit;
- Piisavalt suur käive;

- Informatsioon liigub kindlaid kanaleid pidi (börsi infosüsteem);
- Investorid on ratsionaalsed;
- Täieliku konkurentsi eeldus – maksumäärade ja tehingukulude erinevuste puudumine turuosaliste vahel.

Turu nõrk efektiivsus. Aktsiaturg on nõrgalt efektiivne, kui

- Aktsiahind peegeldab kogu informatsiooni varasema aktsiahinna liikumise kohta;
- Investor ei saa prognoosida aktsiahinna muutust tulevikus varasemate hindade põhjal;
- Aktsiahind järgib juhuslikku arengutrendi, see võib sama tõenäosusega tõusta või langeda.

Turu keskmine efektiivsus – turg, kus avalikkusele kättesaadavat, sh ka ajaloolist infot (varasemad aktsiahinnad, ettevõtte aastaaruanded, ajaleheartiklid) kasutades ei saa teenida lisakasumit.

Turu tugev efektiivsus – kus kogu ettevõtte kohta kättesaadavat infot (sealhulgas ka ettevõtte siseinfo) arvesse võttes ei saa teenida lisakasumit.

Siseinfo kasutamist tehingute sooritamisel nimetatakse *insider trading'*uks; paljudes riikides on see seadusega keelatud ning firmajuhid peavad avalikult teatama oma kavatsusest sooritada tehinguid oma ettevõtte väärtpaberitega

Tavaliselt kõik arenenud turud on vähemalt nõrgalt efektiivsed.

Börsikrahhid on nähtus, mille seletamiseks ei piisa efektiivse turu teooriast. (aktsia hinnad peegeldavad alati aktsia tegelikku väärtust). Kiirete hinnaliikumiste seletamiseks sobib rohkem **mulliteooria.** Selle järgi ei väljenda väärtpaberite hinnad mitte alati nende tegelikku väärtust.

Hinnamull – olukord, kus väärtpaberite hinnad ületavad nende fundamentaalselt põhjendatud väärtuse.

Mullide põhjused:

a) Investorid võtavad soovitut tegelikkuse pähe, investorite usk mingi uudse olukorra või reaalsuse tekkesse;
b) Keskpankade ekspansiivne rahapoliitika;
c) Finantsvõimenduse (nt. pangalaen) laialdane kättesaadavus.

Ajaloos tuntuimad hinnamullid

a) Hollandi tulbisibulate maania 17.saj,
Tipp 1637, märts; 1 sibul=10 käsitöölise aastapalka; 1636.nov.- 1637.mai hinnaindeks suurenes 10-lt kuni 200-ni ja siis kukkus tagasi alla 10-ni;
b) USA börsibuum 1920-ndatel, krahh 29.oktoober 1929 (must teisipäev), kus New Yorgi aktsiabörs kukkus 11,7%. (24.oktoober – must neljapäev).

28.okt. 1929 Dow Jones indeks kukkus 12.82% ja 29.oktoobril 11.73%. Dow Jones indeksi liikumine: aastatel 1922-1929 indeks tõusis 60-lt 330-ni ja sealt kukkus nelja aastaga 30 peale; c) Kinnisvaramull USA-s 2007.a. ja sellega kaasnenud finantskriis 2007-2009. Dow Jones indeks kukkus vähem kui kahe aastaga 14000-lt kuni 6700-ni.

6.2. Aktsia tulusus. Aktsia hinna käitumine

Vaatleme aktsia hinda võrdsete ajavahemike $t = n\tau$ järel, kus $n = 1,2,\ldots$ ning τ on fikseeritud ajasamm. Tähistame aktsia hinna hetkel $n\tau$ (ehk edaspidi lühidalt ajahetkel n) suurusega $S(n)$. Oletame, et hetkel $t = 0$ on aktsia hind teada ning võrdne suurusega $S(0)$. Tuleviku aktsiahinnad ei ole teada ning need on vaadeldavad juhuslikena.

Aktsia hinna $S(n)$ käitumist on sobiv kirjeldada aktsia tulususe kaudu. Kui aktsia kohta ei maksta dividende ajaperioodil $[n,m]$, siis aktsia tulumäär (lühidalt tulusus) $R(n,m)$ defineeritakse kui juhuslik suurus

$$R(n,m) = \frac{S(m) - S(n)}{S(n)}.$$

Tulusus $R(n)$ ajaperioodil $[n-1,n]$ on seega

$$R(n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)}.$$

Kui aktsia kohta makstakse dividende ajahetkel n, siis aktsia hind pärast dividendide väljamaksmist langeb ning see mõjutab aktsiahinda $S(n)$. Sel juhul aktsia tulusus $R(n)$ ajaperioodil $[n-1,n]$ on

$$R(n) = \frac{S(n) - S(n-1) + div(n)}{S(n-1)},$$

kus $div(n)$ on ajahetkel n väljamakstud dividendid.

Kui meil on antud järjestikused üheperioodilised tulusused $R(n+1), R(n+2), \ldots, R(m)$, siis perioodi $[n,m]$ tulusus $R(n,m)$ avaldub üheperioodiliste tulususte kaudu valemiga

$$1 + R(n,m) = (1 + R(n+1))(1 + R(n+2)\ldots(1 + R(m)).$$

Näeme, et selliselt defineeritud tulususe korral ei kehti nn. aditiivsuse omadus, s.t. kogutulusus ei võrdu üksikute perioodide tulususte summaga. Viimane omadus kehtib aga juhul kui vaatleme **logaritmilist ehk pidevat tulusust.**

Kui aktsia pealt ei maksta dividende ajaperioodil $[n,m]$, siis **aktsia pidev (logaritmiline) tulumäär (**lühidalt tulusus**)** $r(n,m)$ defineeritakse kui juhuslik suurus

$$r(n,m) = \ln\left(\frac{S(m)}{S(n)}\right).$$

ning üheperioodiline pidev tulusus $r(n)$ kui

$$r(n) = \ln\left(\frac{S(n)}{S(n-1)}\right),$$

millest järeldub, et

$$S(n) = S(n-1)e^{r(n)}.$$

Kui aktsia pealt makstakse dividende ajahetkel n, siis pidev üheperioodiline tulusus leitakse valemiga

$$r(n) = \ln\left(\frac{S(n) + div(n)}{S(n-1)}\right).$$

Kui meil on antud järjestikused üheperioodilised pidevad tulusused $r(n+1), r(n+2), \ldots, r(m)$, siis perioodi $[n, m]$ pidev tulusus $r(n, m)$ avaldub üheperioodiliste tulususte kaudu valemiga

$$r(n,m) = r(n+1) + r(n+2) + \ldots + r(n+m) = \sum_{j=1}^{m} r(n+j).$$

Kui eeldada , et aktsiaturg on nõrgalt efektiivne, siis aktsiahinna pidevad üheperioodilised tulusused peaks olema sõltumatud juhuslikud suurused. Eeldus, mis aktsiahinna käitumise kohta tehakse, on järgmine

$$r(n) = c + \omega(n), \qquad (1)$$

kus c on konstant ning $\omega(n)$ on järgmiste omadustega juhuslikud suurused

a) $E(\omega(n)) = 0$, s.t. juhuslike suuruste $\omega(n)$ keskväärtused on nullid.

b) Juhuslikud suurused $\omega(n)$ on sõltumatud, millest järeldub, et $corr(n, m) = 0$ suvaliste $n, m,\ n \neq m$ korral.

Valemist (1) järeldub, et

$$\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + c + \omega(n). \qquad (2)$$

ning

$$\ln(S(n)) = \ln(S(0)) + nc + \sum_{j=1}^{n} \omega(j).$$

Aktsiahindade empiiriline uurimine on näidanud, et aktsiahinnad käituvad ligikaudselt vastavalt valemile (2), kus $\omega(n)$ on normaaljaotusega sõltumatud juhuslikud suurused keskväärtusega 0 ning konstantse dispersiooniga σ^2, s.t $\omega(n) \sim \mathrm{NID}(0, \sigma^2)$.

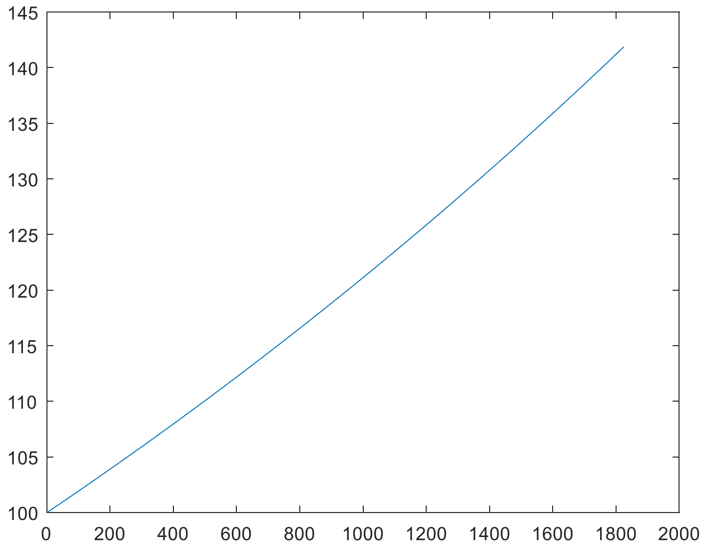
Näiteid aktsiahinna käitumise kohta.

Vaatleme päevaseid aktsiahindu viie aasta jooksul, kui päevaste aktsiahindade käitumist kirjeldab võrrand

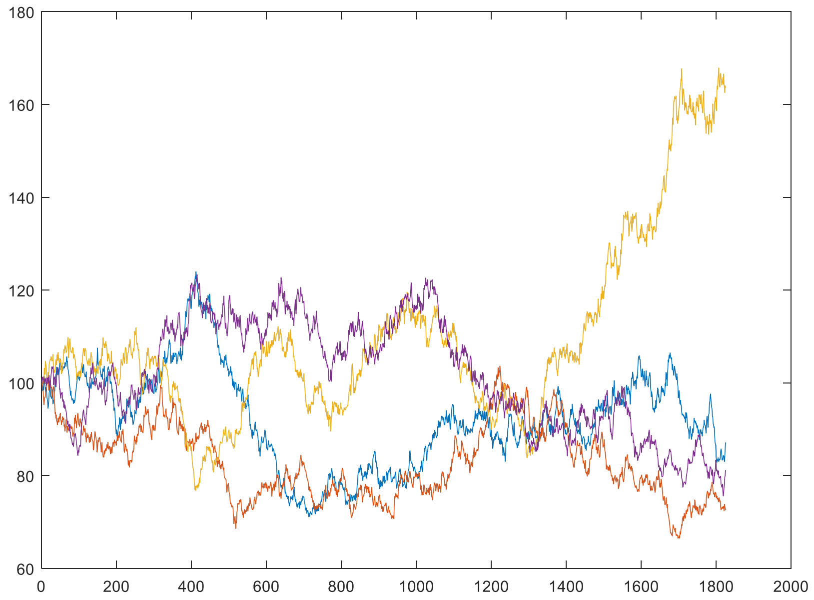
$$\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + (0.07/365) + \omega(n),\ n = 1,2,\ldots,1825,\ S(0) = 100,$$

kus $\omega(n)$ on normaaljaotusega sõltumatud juhuslikud muutujad keskväärtusega 0 ning dispersiooniga σ^2.

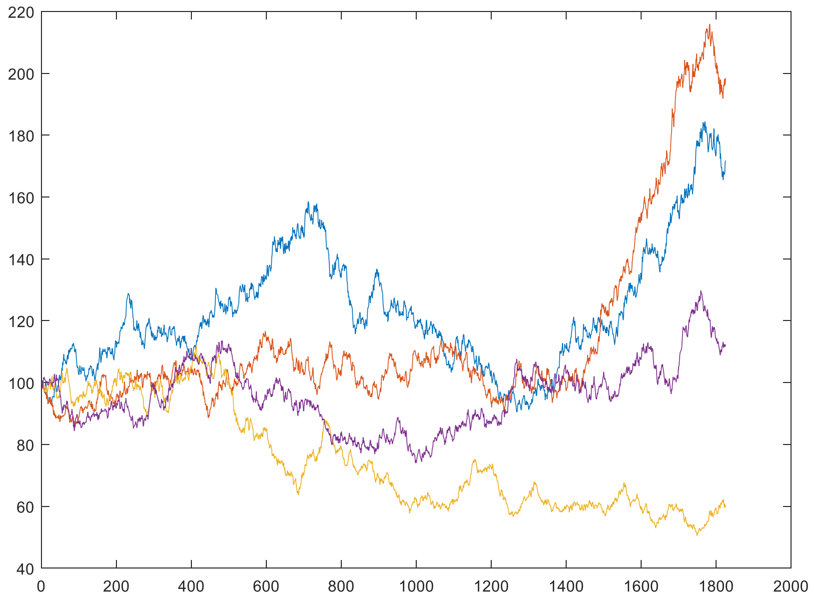
a) Kui $\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + (0.07/365),\quad n = 1,2,\ldots 1825$, siis aktsiahinna käitumine on selline



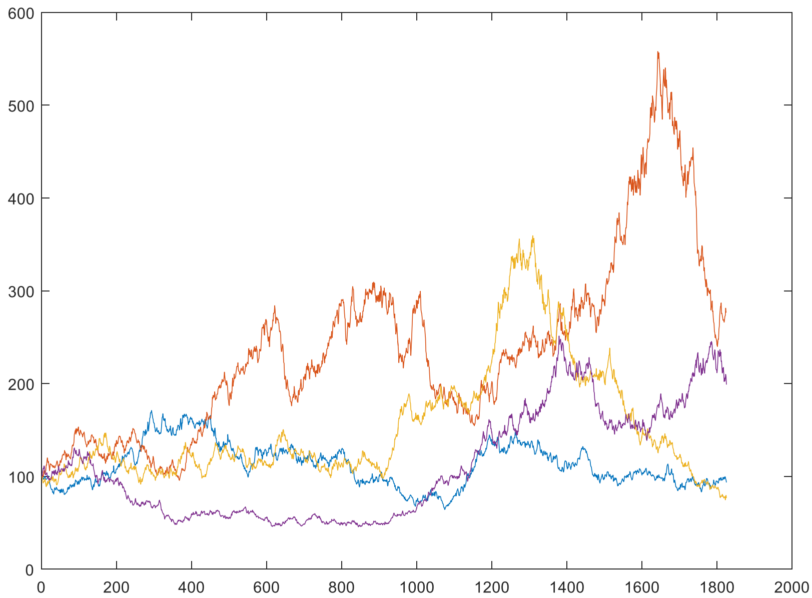
b) Kui $\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + (0.07/365) + \omega(n), \quad n = 1,2,...1825, \quad Var(w(n)) = 0.01,$ siis aktsiahinna käitumine võib olla selline (neli korda genereeritud juhuslikke suurusi):


180
160
140
120
100
80
60
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000

või selline


220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000

c) Kui aga $\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + (0.07/365) + \omega(n), \quad n = 1,2,...1825$, $Var(w(n)) = 0.02$, siis aktsiahinna käitumine võib olla selline (neli korda genereeritud juhuslikke suurusi):



Miks peavad aktsiahinna liikumist kirjeldavad juhuslikud suurused olema sõltumatud? Oletame, et juhuslikud suurused $\omega(n)$ ja $\omega(n-1)$ on samasuunaliselt korreleeritud, s.t . $corr(\omega(n), \omega(n-1)) = \rho > 0$. Siis võime välja pakkuda järgmise strateegia aktsiate ostmiseks-müümiseks: ostame aktsia siis, kui $\ln(S(n)) > \ln(S(n-1)) + (0.07/365)$ ning müüme aktsia siis, kui $\ln(S(n)) < \ln(S(n-1)) + (0.07/365)$

Kui $\rho = 0.1$, siis ühe aktsia ostmisel-müümisel on võimalik teenida puhastulu on keskmiselt 121 EUR , sealjuures keskmine tehingute arv ligikaudu 854;

Kui $\rho = 0.3$ siis puhastulu on keskmiselt 335 EUR ja keskmine tehingute arv on ligikaudu 737;

Kui $\rho = 0.0$ siis puhastulu on keskmiselt 27 EUR ja keskmine tehingute arv ligikaudu 913;

Siin ei ole arvestatud sellega, et praktikas tuleb aktsiatega kauplemisel maksta ka mingit tehingutasu. Näiteks, kui tehingutasu on 0.1 % tehingu summast, siis juhul $\rho = 0.1$ on ühe aktsia ostmisel-müümisel on võimalik teenida puhastulu on keskmiselt vaid 15 EUR (mis on madalam sellest kui ostaksime perioodi algul aktsia ning perioodi lõpus müüksime). Kui aga $\rho = 0.3$ siis puhastulu on keskmiselt 245 EUR.

6.3. Oodatav tulusus. Riskineutraalsus

Riskantsete investeeringute korral ei ole tuleviku rahavood determineeritud, vaid on juhuslikud. Kui meil on teada erinevate tulevikustsenaariumide tõenäosused, siis on võimalik rääkida investeeringu keskmisest ehk **oodatavast tulust ja tulususest** (*expexted return*). Oletame näiteks, et aktsia hind hetkel on 100 EUR ning aktsia hinnaks on majanduslanguse, stagnatsiooni ja buumi korral vastavalt 90 EUR, 104 EUR ning 110 EUR. Olgu nende stsenaariumide tõenäosused on vastavalt ¼, ½ ja ¼.

Siis oodatav tulu on leitav valemiga ¼*90+1/2*104+ ¼*110=102.

Saame leida ka tulusused iga stsenaariumi korral ning rääkida oodatavast tulususest.

Tulusused $R = \frac{S - S(0)}{S(0)}$ on erinevate stsenaariumide korral vastavalt -10%, 4% ja 10% ning oodatav tulusus on -6%*(1/4)+4%*(1/2)+10%*(1/4)=2%.

Seega, kui on teada erinevate stsenaariumite $\omega_1, \omega_2,.., \omega_K$ tõenäosused $p_1, p_2,.., p_K$ ning investeeringu tulu $S_1, S_2,.., S_K$ erinevate stsenaariumide korral , siis oodatav tulu $E(S)$ leitakse vastavalt valemile

$$E(S) = \sum_{k=1}^{K} p_k S_k \ .$$

Kui on antud investeeringu tulusused $R_1, R_2,.., R_K$ erinevate stsenaariumide korral, siis oodatav tulusus leitakse vastavalt valemile

$$E(R) = \sum_{k=1}^{K} p_k R_k = \frac{E(S) - S(0)}{S(0)}$$

Kui meil on antud järjestikused sõltumatud üheperioodilised oodatavad tulusused $E(R(n+1)), E(R(n+2)),..., E(R(m))$, siis perioodi $[n,m]$ oodatav tulusus $E(R(n,m))$ avaldub üheperioodiliste oodatavate tulususte kaudu valemiga

$$1 + E(R(n,m)) = (1 + E(R(n+1)))(1 + E(R(n+2))...(1 + E(R(m))) .$$

Kui meil on antud järjestikused üheperioodilised oodatavad pidevad tulusused $E(r(n+1)), E(r(n+2)),..., E(r(m))$ (pidev tulusus $r = \ln\left(\frac{S}{S(0)}\right))$, siis perioodi $[n,m]$ oodatav pidev tulusus $E(r(n,m))$ avaldub üheperioodiliste oodatavate pidevate tulususte kaudu valemiga

$$E(r(n,m)) = \sum_{j=1}^{m} E(r(n+j)) .$$

Viimane valem kehtib ka juhul, kui üheperioodilised tulusused ei ole sõltumatud, kuna keskväärtus juhuslike suuruste summast on alati võrdne keskväärtuste summaga.

Võrdleme riskantse investeeringu keskmist oodatavat tulu riskivaba investeeringu tuluga kasutades viimasel juhul pidevat tulumäära. Kui me investeerime riskivabalt summa $S(0)$ ajahetkel t=0 pideva tulumääraga r, siis pärast aja t=T pärast on investeeringu suurus

$$S(0)e^{rT}.$$

Tekib küsimus, et kui investor investeerib sama summa riskantsesse investeeringusse, siis milline peab olema sellise investeeringu oodatav tulusus, et ta valiks riskantse investeerimisviisi riskivabalt investeerimise asemel. See sõltub investori suhtumisest riski. Tüüpiliselt on investorid riskikartlikud ning nende jaoks peab kehtima võrratus

$$E(S) > S(0)e^{rT} \text{ ehk } e^{-rT}E(S) > S(0),$$

s.t. diskonteeritud oodatav tulu peab olema suurem investeeritud summast $S(0)$.

Riskialtide investorite korral võib kehtida ka võrratus

$$E(S) < S(0)e^{rT}$$

(riskialtid investorid on näiteks loteriil osalejad). **Riskineutraalsete investorite** korral aga

$$E(S) = S(0)e^{rT} \text{ ehk } e^{-rT}E(S) = S(0),$$

s.t. nad on valmis valima riskantse investeeringu juhul kui diskonteeritud oodatav tulusus on võrdne (või suurem) kui investeeritud summa.

Kui meil on antud stsenaariumite tõenäosused $p_1, p_2,.., p_K$, siis üldjuhul ei kehti võrdus

$$e^{-rT}E(S) = S(0).$$

Tõenäosusi $p_*(\omega_1), p_*(\omega_2),.., p_*(\omega_K)$, millede korral

$$p_*(\omega_k) > 0,\ 1 \le k \le K \text{ ja } \sum_{1\le k\le K} p_*(\omega_k) = 1$$

ning kehtib võrdus $e^{-rT}E_*(S) = e^{-rT}\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)S_k = S(0)$, nimetatakse **riskineutraalseteks tõenäosusteks.** Osutub, et tuletisväärtpaberite (optsioonid, forwardid) õiglase hinna leidmisel on riskineutraalsed tõenäosused olulisemad, kui stsenaariumide algsed tõenäosused.

7. Üldine matemaatiline mudel derivatiivide hinna leidmiseks.

Matemaatilise mudeli elemendid:

a) Lõplik arv $T+1$ ajahetke $t \in \mathcal{T} = \{0,1,2,...,T\}$, $T < \infty$, millal turu mudelis saab midagi toimuda. Sealjuures: $t = 0$ - olevik, modelleeritava perioodi algushetk; $t > 0$ - tulevik, $t = T$ - modelleeritava perioodi lõpphetk, ajas kaugemale me selles mudelis ei vaatle.

Kauplemine (portfelli moodustamine ja realiseerimine) võib mudelis toimuda kõikidel ajahetkedel. Ajahetke numbrit tuleb siin mõista kui ajahetke järjekorranumbrit, mitte kui ajahetke arvväärtust.

b) Riskivaba vara , mida iseloomustatakse vara hinnaga $S_0(t),\ t = 0,1,...,T$

c) Riskantsete varade hindade kujunemise võimalike stsenaariumide hulk $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\}$, kus K on lõplik.

d) Lõplik arv N turul kaubeldavat riskantset vara (*assets*) Iga vara n ($1 \le n \le N$) on iseloomustatud vara hinnaga kõikidel ajahetkedel ja kõigi võimalike arengustsenaariumide korral, s.t. on antud hinnad $S_n(t,\omega),\ t = 0,1,...,T, \omega \in \Omega, n = 1,2,,,N$.

Sealjuures eeldame, et vara hind hetkel t=0 (olevik) on kõigi stsenaariumide korral sama

$$S_n(0) = S_n(0,\omega),\ \omega \in \Omega, n = 1,2,...,N$$

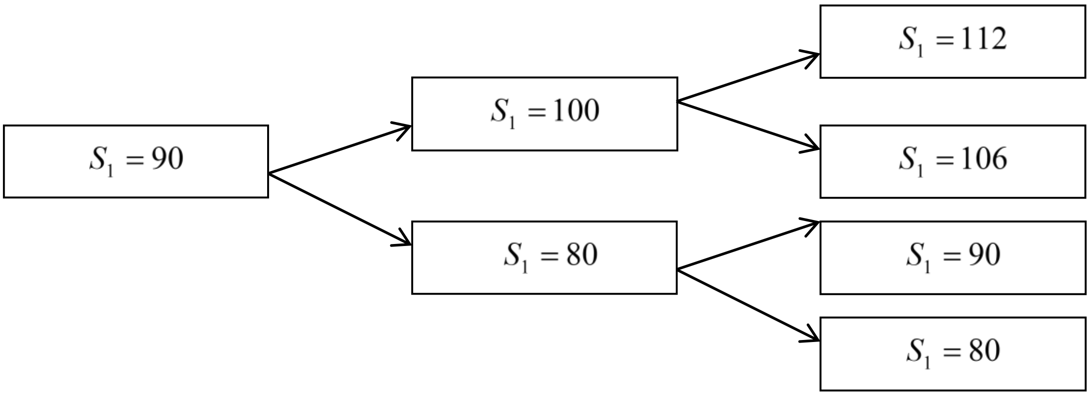
Samuti eeldame, et kõigi varade hinnad on positiivsed:

$$S_0(t) > 0,\ S_n(t,\omega) > 0,\ n = 1,2,...,N,\ t = 0,1,2,...,T\ .$$

Näide 1. Vaatleme järgmist mudelit, kus kaubeldakse ühest aktsiaga ja riskivaba varaga. Ajahetkede arv on 3 (T=2), $N = 1, K = 4$.

Vara	Stsenaarium	Hind t=0	Hind t=1	Hind t=2
Aktsia	ω_1	90	100	112
	ω_2	90	100	106
	ω_3	90	80	90
	ω_4	90	80	80
Riskivaba vara		100	110	121

Aktsia hinna võimalikud arengud saab esitada ka hinnapuuna



Def. 1. **Investori portfell** on vektor $H(t) = (H_0(t), H_1(t), H_2(t), ..., H_N(t))$, mis näitab varade hulka investori portfellis ajahetkede t-1 ja t vahel, s.t portfell moodustatakse ajahetkel t-1 ning hoitakse kuni ajahetkeni t. Erinevate arengustsenaariumide korral võib investor moodustada erineva portfelli, s.t. $H(t)$ võib olla erinevate stsenaariumide korral erinev Portfellide jada $H(1), H(2), ..., H(N)$ nimetatakse investeerimisstrateegiaks. Me eeldame, et suurused $H_n(t)$ võivad olla suvalised reaalarvud.

Portfelli väärtus ajahetkel t leitakse vastavalt valemile

$$V(t) = \sum_{n=0}^{N} H_n(t) S_n(t)$$

ja selle **portfelli** moodustamise **hind** ajahetkel t-1 on

$$W(t-1) = \sum_{n=0}^{N} H_n(t) S_n(t-1) .$$

Portfelli hind näitab rahasummat, mis portfelli moodustamiseks on vaja ning portfelli väärtus näitab rahasummat, mis me saame selle portfelli maha müümisel.

Investor võib oma portfelli muuta igal ajahetkel, müües mingeid varasid ning ostes teisi. Investor teeb oma otsused selle kohta, milliseid varasid müüa ja milliseid osta, talle tollel ajahetkel teadaoleva informatsiooni põhjal. Eeldame, et selleks informatsiooniks on varade hinnad kuni antud ajahetkeni (ja mingi muu info põhjal investorid oma otsuseid ei tee) ning info varasemate hindade kohta on kättesaadav kõigile. See tähendab seda, et kui varade hinnad kuni ajahetkeni t on kõigi varade korral kahe stsenaariumi korral samad, siis nende kahe stsenaariumi korral hetkel t moodustatud portfellid peavad ka samad olema.

Näide 2. Leiame näites 1 vaadeldud mudeli korral ajahetkel t=1 moodustatud portfelli H(2)=(2,3) hinna hetkel t=1 ja väärtuse hetkel t=2 erinevate stsenaariumide korral.

$W(1) = 3*100 + 2*110 = 520$ stsenaariumide ω_1 ja ω_2 korral

$V(2) = 3*112 + 2*121 = 578$ stsenaariumi ω_1 korral

$V(2) = 3*106 + 2*121 = 560$ stsenaariumi ω_2 korral

$W(1)=3*80+2*110=460$ stsenaariumide ω_3 ja ω_4 korral

$V(2)=3*90+2*121=512$ stsenaariumi ω_3 korral

$V(2)=3*80+2*121=482$ stsenaariumide ω_4 korral

Üldiselt ei pea me stsenaariumide ω_3 ja ω_4 korral moodustama sama portfelli, mis stsenaariumide ω_1 ja ω_2 korral. Kuna stsenaariumide ω_3 ja ω_4 korral riskantse vara hind langes ajahetkel t=1 võrreldes ajahetkega t=0, siis võime nende stsenaariumide korral moodustada 460 rahaühiku eest ka näiteks portfelli H(2)=(460/110,0), mille väärtuseks ajahetkel t=2 on 508,2 ühikut.

Def. 2. Investeerimisstrateegia nimetatakse **isefinantseerivaks**, kui ajahetkel $t,\ 0 \le t < T$ moodustatud portfelli hind on võrdne ajahetkel t -1 moodustatud portfelli väärtusega, s.t.

$$\sum_{n=0}^{N} H_n(t)S_n(t) = \sum_{n=0}^{N} H_n(t+1)S_n(t)$$

Näide 3. Näites 1 vaadeldud mudelis on isefinantseerivaks strateegiaks on näiteks strateegia $H(1)=(-2{,}3),\ H(2,\omega_1)=H(2,\omega_2)=(-13/11{,}2),\ \ H(2,\omega_3)=H(2,\omega_4)=(-6/11,\ 1).$

kuna $V_{H(1)}(1,\omega_1)=V_{H(1)}(1,\omega_2)=$-2*100+3*90=70 ja

$W_{H(2,\omega_1)}(1,\omega_1)=W_{H(2,\omega_2)}(1,\omega_2)=(-13/11)*110+2*100=70$

ning $V_{H(1)}(1,\omega_3)=V_{H(1)}(1,\omega_4)=-2*110+80*3=20$

ja $W_{H(2,\omega_3)}(1,\omega_3)=W_{H(2,\omega_4)}(1,\omega_4)=(-6/11)*110+80*1=20$.

Def. 3. Strateegia on **ennustatav** (*predictable)* kui portfellid H(t) mis moodustatakse ajahetkel t-1 sõltuvad vaid varade hindadest kuni ajani t-1

Lause 1. Etteantud algvara V(0) ning riskantsete varade portfellide $H_1(t),\ldots,H_M(t),\ \ t=1,2,..T$ korral on alati võimalik leida riskivaba vara positsioonid $H_0(t),\ \ t=1,2,..T$ nii, et strateegia $H(t),\ \ t=1,2,..T$ on ennustatav isefinantseeriv strateegia.

Tõestus: Leiame riskivaba vara positsioonid $H_0(t),\ \ t=1,2,..T$ järgmiselt

$$H_0(1)=\frac{V(0)-\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)}{S_0(0)},$$

$$V(1)=\sum_{n=0}^{N}H_n(1)S_n(1),$$

$$H_0(2)=\frac{V(1)-\sum_{n=1}^{N}H_n(2)S_n(1)}{S_0(1)},$$

$$V(2)=\sum_{n=0}^{N}H_n(2)S_n(2),$$

jne. Selline strateegia on isefinantseeriv ning samuti ennustatav, kuna positsioonid $H_0(t),\ \ t=1,2,..T$ avalduvad varade hindade kaudu ajahetkeni t-1.

Def. 4. Mudel on **arbitraaživaba**, kui mudelis ei leidu sellist isefinantseerivat ennustatavat strateegiat H, et $V_H(0)=0$ ning leidub $t,\ 1\le t\le T$, selline, et $V_H(t)\ge 0$ kõigi stsenaariumide korral ja $V_H(t)>0$ mingi stsenaariumi korral.

Näide 4. Vaatleme mudelit (võrreldes näites 1 toodud mudeliga on muudetud vaid aktsia hinda hetkel t=2 ja stsenaariumi ω_2 korral)

Vara	Stsenaarium	Hind t=0	Hind t=1	Hind t=2
Aktsia	ω_1	90	100	112
	ω_2	90	100	**120**
	ω_3	90	80	90
	ω_4	90	80	80
Riskivaba vara		100	110	121

See mudel ei ole arbitraaživaba, kuna vaadeldes investeerimisstrateegiat H(1)=(0,0), $H(2,\omega_1)=H(2,\omega_2)=(-10,\,11),\ H(2,\omega_3)=H(2,\omega_4)=(0,0)$, saame investeeringu väärtuseks sõltuvalt stsenaariumist $V(2,\omega_1)=22,\ V(2,\omega_2)=110,\ V(2,\omega_3)=0,\ V(2,\omega_4)=0$. Selline investeerimisstrateegia on isefinantseeriv ning $V(0)=0$, kuid stsenaariumide $\omega_1,\ \omega_2$ korral saame positiivse tulu.

Põhiteoreem. Mudel on arbitraaživaba siis ja ainult siis, kui leiduvad tõenäosused $p_*(\omega)$ (neid tõenäosusi nimetatakse riskineutraalseteks tõenäosusteks) nii, et

a) $p_*(\omega)>0$ iga stsenaariumi $\omega\in\Omega$ korral

b) $\sum_{\omega\in\Omega} p_*(\omega) = 1$

ning

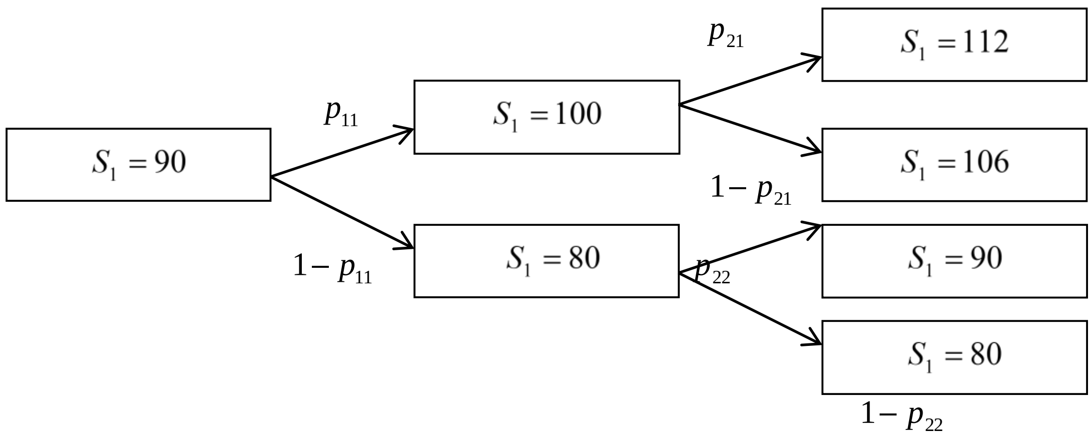
c) diskonteeritud aktsia hindade $\tilde{S}_n(t) = \frac{S_n(t)}{S_0(t)}$ korral kehtivad võrdused

$$E_*\left(\tilde{S}_n(t+1)\middle|S(t)\right) = \tilde{S}_n(t) \qquad (1)$$

iga $n = 1,2,\ldots,N$ ja $t = 0,1,2,\ldots,T-1$ korral, kus $E_*\left(.\middle|S(t)\right)$ tähistab tinglikku keskväärtust tõenäosuste $p_*(\omega)$ korral ning teadaolevate varade hindade $S(t)$ korral kuni ajahetkeni t.

Paneme tähele, et võrdus (1) on automaatselt täidetud n=0 korral, kuna $\tilde{S}_0(t) = 1$ iga t korral ning $\sum_{\omega\in\Omega} p_*(\omega) = 1$.

Näide 5. Leiame riskineutraalsed tõenäosused näites 1 toodud mudeli korral. Riskineutraalsed tõenäosused saame leida hargnemistõenäosuste (tinglike tõenäosuste) p_{11}, p_{21}, p_{22} kaudu



Võrrandid (vt. valem (1)) hargnemistõenäosuste leidmiseks on järgmised

$$\frac{100}{110} p_{11} + \frac{80}{110}(1 - p_{11}) = \frac{90}{100}$$

$$\frac{112}{121} p_{21} + \frac{106}{121}(1 - p_{21}) = \frac{100}{110}$$

$$\frac{90}{121} p_{22} + \frac{80}{121}(1 - p_{22}) = \frac{80}{110}$$

Nende võrrandite lahenditeks on vastavalt $p_{11} = \frac{19}{20}$, $p_{21} = \frac{2}{3}$, $p_{22} = \frac{4}{5}$ ning riskineutraalsed tõenäosused on vastavalt

$$p_*(\omega_1) = p_{11} * p_{21} = \frac{19}{30}$$

$$p_*(\omega_2) = p_{11} * (1 - p_{21}) = \frac{19}{60}$$

$$p_*(\omega_3) = (1 - p_{11}) * p_{22} = \frac{1}{25}$$

$$p_*(\omega_4) = (1 - p_{11}) * (1 - p_{22}) = \frac{1}{100}$$

Lihtne on veenduda, et leitud riskineutraalsete tõenäosuste summa on 1:

$$p_*(\omega_1) + p_*(\omega_2) + p_*(\omega_3) + p_*(\omega_4) = \frac{19}{30} + \frac{19}{60} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = 1.$$

Seega näites 1 vaadeldud mudel on arbitraaživaba.

Vaatleme tuleviku juhuslikku rahavoogu $X(\omega)$ hetkel t=T. Tuleviku rahavoog on saavutatav, kui leidub selline isefinantseeriv investeerimisstrateegia (rahavoogu X replikeeriv strateegia) $H = (H(1), H(2), \ldots, H(T))$, et

$$V_H(T, \omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Arbitraaživabas mudelis on saavutatava tuleviku juhusliku rahavoo $X(\omega)$ hinnaks strateegia H hind hetkel t=0, s.t. $W_X(0) = W_H(0)$. Saavutatava tuleviku rahavoo hinna saab arbitraaživabas mudelis leida ka riskineutraalsete tõenäosuste kaudu. Kehtib võrdus

$$\tilde{W}_X(0) = E_*(\tilde{X}), \tag{2}$$

s.t.

$$\frac{W_X(0)}{S_0(0)} = \sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k) \frac{X(\omega_k)}{S_0(T)},$$

kus $p_*(\omega_k)$ on riskineutraalsed tõenäosused. Viimasest võrdusest saame

$$W_X(0) = \frac{S_0(0)}{S_0(T)} \sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k) X(\omega_k).$$

Näitame võrduse (2) kehtivust juhul T=1. Sel juhul riskineutraalsed tõenäosused rahuldavad võrrandit

$$E_*(\tilde{S}_n(1) | S(0)) = \tilde{S}_n(0), n = 1, 2, \ldots, N,$$

ehk

$$\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)\frac{S_n(1,\omega_k)}{S_0(1)} = \frac{S_n(0)}{S_0(0)}, \quad n = 1,2,\ldots,N .$$

Nüüd saame saavutatava tuleviku rahavoo hinna esitada järgmiselt

$$W_X(0) = W_H(0) = \sum_{n=0}^{N} H_n(1)S_n(0) = \frac{S_0(0)}{S_0(1)}\sum_{n=0}^{N} H_n(1)\left(\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)S_n(1,\omega_k)\right) =$$
$$\frac{S_0(0)}{S_0(1)}\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)\left(\sum_{n=0}^{N} H_n(1)S_n(1,\omega_k)\right) = \frac{S_0(0)}{S_0(1)}\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)V_H(1,\omega_k) = \frac{S_0(0)}{S_0(1)}\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)X(\omega_k) =$$
$$S_0(0)\sum_{k=1}^{K} p_*(\omega_k)\tilde{X}(\omega_k) = S_0(0)E_*\left(\tilde{X}\right)$$

millest järeldub, et $\tilde{W}_X(0) = \dfrac{W_X(0)}{S_0(0)} = E_*\left(\tilde{X}\right)$.

Saab näidata, et kui riskineutraalsed tõenäosused on üheselt määratud, siis kõik tuleviku juhuslikud rahavood on saavutatavad.

Näide 6. Leiame näites 1 vaadeldud mudeli korral tuleviku juhusliku rahavoo $X(2,\omega_1) = 33/10,\ X(2,\omega_2) = 0,\ X(2,\omega_3) = 55/10, X(2,\omega_4) = 0$ hinna.

Kuna mudel 1 korral riskineutraalsed tõenäosused on üheselt määratud, siis kõik tuleviku rahavood on saavutatavad ning

$$W_X(0) = \frac{100}{121}\left(\frac{19}{30}*\frac{33}{10}+\frac{19}{60}*0+\frac{1}{25}*\frac{55}{10}+\frac{1}{100}*0\right) = \frac{21}{11} = 1\frac{10}{11} .$$

Ülesanne. Vaatleme mudelit

Vara	Stsenaarium	Hind t=0	Hind t=1	Hind t=2
Aktsia	ω_1	13.5	16	25
	ω_2	13.5	16	15
	ω_3	13.5	20	15
	ω_4	13.5	20	30
Riskivaba vara		3	4	5

1. Leida riskineutraalsed tõenäosused
2. Leida tuleviku rahavoo $X(2) = (10;\ 0;\ 0;\ 15)$ hind kasutades a) riskineutraalseid tõenäosusi b) rahavoogu replikeerivat portfelli

3. Leida tuleviku rahavoo $X(2) = (10;\ 5;\ 10;\ 5)$ hind kasutades a) riskineutraalseid tõenäosusi b) rahavoogu replikeerivat portfelli

Vastused:
1. $p_*(\omega_1) = 1/4;\quad p_*(\omega_2) = 1/4;\quad p_*(\omega_3) = 1/6;\quad p_*(\omega_4) = 1/3;$
2. $W_X = 9/2$
3. $W_X = 17/4$

8. Optsioonid. Optsiooni hind.

8.1.Optsiooni mõiste

Euroopa ostuoptsioon (*European call option*) annab optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) osta mingit vara, edaspidi alusvara (*underlying asset*) optsiooni ostmisel fikseeritud hinnaga X ning kindlaksmääratud ajal T. Fikseeritud hinda X nimetatakse **optsiooni täitmishinnaks** (*exercise price, strike price*) ning aega T nimetatakse **täitmisajaks** (realiseerimisajaks, optsiooni elueaks) (*exercise time, expiry time*).

Euroopa müügioptsioon (*European put option*) annab optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) müüa mingit vara, edaspidi alusvara optsiooni ostmisel fikseeritud hinnaga X ning kindlaksmääratud ajal T.

Ameerika ostu– ja müügioptsioon annavad optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) vastavalt osta ja müüa mingit vara optsiooni ostmisel fikseeritud hinnaga X mistahes ajal alates optsiooni ostmisest kuni kindlaksmääratud ajani T.

Alusvara võib olla erinevate optsioonide korral olla väga erinev. Alusvaraks võib olla aktsiad, mingi kaup (näiteks tooraine), välisvaluuta, kuid alusvaraks võib olla ka aktsiaturu indeks, intressimäär või isegi lumekatte paksus. Näiteks Euroopa ostuoptsioon Standard ja Poor indeksi kohta . Lepitakse kokku, et X=815 (815 indeksi väärtus täitmisajal) ning see, et ühe ühiku võrra indeksi muutust vastab näiteks 100 eurole.

Optsioone kasutatakse riskide maandamiseks ja spekulatsioonideks.

Tähistame alusvara hinna tähisega $S(t)$ ning olgu optsiooni ostmise hetk $t = 0$.

Optsiooniga seotud **väljamakse** P optsiooni omanikule optsiooni täitmisajal T:

Euroopa ostuoptsioon $P_C = \begin{cases} S(T) - X, & kui\ \ S(T) > X \\ 0, & kui\ \ S(T) \le X \end{cases},$

Euroopa müügioptsioon $P_P = \begin{cases} X - S(T), & kui\ \ X > S(T) \\ 0, & kui\ \ X \le S(T) \end{cases}.$

Tähistades $[x]_+ = \begin{cases} x, & kui\ x > 0 \\ 0, & kui\ x \le 0 \end{cases}$, saame Euroopa ostu- ja müügioptsiooni väljamaksed esitada kujul

$$P_C = [S(T) - X]_+, \qquad P_P = [X - S(T)]_+$$

Ameerika ostu- ja müügioptsiooniga seotud väljamaksed, kui optsioon realiseeritakse ajal t, $0 < t \le T$, on vastavalt

$$P_C = [S(t) - X]_+, \qquad P_P = [X - S(t)]_+.$$

Tähistame Euroopa tüüpi ostu- ja müügioptsiooni hinna vastavalt V_C ja V_P. Kui riskivaba pidev intressimäär on r, siis kasum Euroopa ostuoptsiooni realiseerimisel on

$$P_C - V_C e^{rT} = [S(T) - X]_+ - V_C e^{rT}$$

ning Euroopa müügioptsiooni korral

$$P_P - V_P e^{rT} = [X - S(T)]_+ - V_P e^{rT}.$$

Seega näiteks ostuoptsiooni omamine on kasumlikum võrreldes raha paigutamisega riskivabasse varasse juhul kui alusvara hind

$$S(T) > X + V_C e^{rT}.$$

8.2 Put-call parity

Kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende, siis sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral on Euroopa ostu- ja müügioptsioonide hinnad seotud järgmise võrdusega

$$V_C - V_P = S(0) - Xe^{-rT}. \qquad (1)$$

Tõestame selle võrduse vastuväiteliselt lähtudes arbitraaživabaduse nõudest.

1) Oletame vastuväiteliselt, et $V_C - V_P > S(0) - Xe^{-rT}$ ning näitame, et siis eksisteerib arbitraažistrateegia.
Hetkel t=0 :

a) Ostame ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$
b) Ostame ühe müügioptsiooni hinnaga V_P
c) Kirjutame välja ning müüme ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C
d) Nendeks tegevusteks vajaminev rahahulk on $V_C - V_P - S(0)$. Kui see summa on positiivne, siis paigutame raha rahaturule pideva intressimääraga r; kui negatiivne, siis laename selle rahaturult
Kokkuvõttes on nende tegevuste (tegevuste a)-d)) bilanss nullis.

Hetkel t=T :

a) Lõpetame rahaturu positsiooni, mille hind on $(V_C - V_P - S(0))e^{rT}$. Kui see on positiivne, siis saame selle raha; kui negatiivne, siis peame sellise summa maksma
b) Kui $S(T) - X \geq 0$, siis jätame müügioptsiooni realiseerimata, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$ ning maksame välja ostuoptsiooniga seotud väljamakse $S(T) - X$.
Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + S(T) - (S(T) - X) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

c) Kui $S(T) - X < 0$, siis realiseerime müügioptsiooni ning saame summa $X - S(T)$, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$; ostuoptsiooniga seotud kulud on 0.
Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + (X - S(T)) + S(T) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab taas, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

2) Oletame, nüüd et $V_C - V_P < S(0) - Xe^{-rT}$ ning näitame, et ka siis eksisteerib arbitraažistrateegia. Hetkel t=0:

a) Müüme (võtame lühikese positsiooni) ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$

b) Ostame ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C

c) Kirjutame välja ning müüme ühe müügioptsiooni hinnaga V_P

d) Nendeks tegevusteks vajaminev rahahulk on $V_P + S(0) - V_C$. Kui see summa on positiivne, siis paigutame raha rahaturule pideva intressimääraga r; kui negatiivne, siis laename selle rahaturult.
Kokkuvõttes on nende tegevuste (tegevuste a)-d)) bilanss nullis.
Hetkel t=T:

a) Lõpetame rahaturu positsiooni, mille hind on $(V_P + S(0) - V_C)e^{rT}$. Kui see on positiivne, siis saame sellisse summa raha; kui negatiivne, siis peame sellise summa maksma;
b) Kui $S(T) - X \geq 0$, siis realiseerime ostuoptsiooni ja sulgeme lühikese positsiooni, makstes alusvara aktsia eest $S(T)$; müügioptsiooniga seotud kulud puuduvad.
Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - S(T) + (S(T) - X) = (V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

c) Kui $S(T) - X < 0$, siis jätame ostuoptsiooni realiseerimata, sulgeme lühikese positsiooni, makstes alusvara aktsia eest $S(T)$ ning maksame välja müügioptsiooniga seotud kulud $X - S(T)$.

Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - S(T) - (X - S(T)) = (V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab taas, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

Märkus. Võrdus (1) ei kehti üldjuhul Ameerika optsiooni korral. Kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende, siis sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral on Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hindade vahet hinnata järgmiste võrratustega

$$S(0) - X \le V_C^A - V_P^A \le S(0) - Xe^{-rT},$$

kus V_C^A, V_P^A on vastavalt Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hinnad. Tõestada saab jällegi vastuväiteliselt.

Ameerika ja Euroopa optsioonide hindade korral kehtivad võrratused

$$V_C \le V_C^A, \quad V_P \le V_P^A.$$

Kasutades arbitraaživabaduse nõuet, saab näidata, et Euroopa ostu- ja müügioptsiooni hinnad peavad rahuldama järgmisi võrratusi:

$$\max\{0,\ S(0) - Xe^{-rT}\} \le V_C < S(0),$$

$$\max\{0,\ -S(0) + Xe^{-rT}\} \le V_P < Xe^{-rT}.$$

Optsioonide korral kasutatakse ka mõisted *in the money*, *at the money* ning *out of the money*. Hetkel t on optsioon *in the money* kui optsiooni kohesel realiseerimisel saab optsiooni omanik positiivse rahavoo (nt. ostuoptsioon on hetkel t *in the money* juhul, kui $S(t) > X$). Optsioon on *at the money* kui $S(t) = X$. Ostuoptsioon on *out the money* kui $S(t) < X$ ning müügioptsioon juhul kui $S(t) > X$.

8.2. Optsiooni hind

Optsiooni hinna leidmiseks tuletasid Fisher Black, Myron Scholes ja Robert C. Merton 1970-ndatel aastatel (esimene artikkel 1973, Black&Scholes) nn. Black-Scholesi võrrandi.

Eeldused Black-Scholesi võrrandi tuletamisel.

1. Alusvara hinna käitumine. Eeldame et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \qquad (2)$$

kus μ, σ iseloomustavad vastavalt alusvara hinna keskmist kasvu ajas ning alusvara hinna volatiilsust ning $W(t)$ on Wieneri protsess.

Wieneri protsessi $W(t)$ defineeritakse järgmiste omaduste kaudu:

a) $W(0) = 0$ tõenäosusega 1.
b) Wieneri protsessi mittelõikuvad juurdekasvud (*increments*) on sõltumatud, s.t. juhuslikud suurused $W(t+u) - W(t)$ ja $W(s+v) - W(s)$ on sõltumatud, kui $[t, t+u] \cap [s, s+v] = \varnothing$ (lõikude ühisosa on null)
c) Wieneri protsessi juurdekasvud $W(t+u) - W(t)$ on normaaljaotusega keskväärtusega 0 ning dispersiooniga u : $W(t+u) - W(t) \sim N(0, u)$.
d) Wieneri protsessi $W(t)$ on pidev aja t järgi tõenäosusega 1.

Märgime, et Wieneri protsessi $W(t)$ saab vaadelda kui juhusliku ekslemise protsessi piirprotsessina. Lihtne on näha, et alusvara hinna liikumist kirjeldava võrrandi (2) saab esitada ka kujul

$$d(\log S(t)) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t).$$

2. Lubatud on lühikese positsiooni võtmine turul (s.t on võimalus müüa laenatud aktsiat ning hiljem selle aktsia tagasiostmine ning omanikule tagasiandmine)
3. Puuduvad tehingukulud.
4. Alusvaralt ei maksta dividende optsiooni eluea jooksul.
5. Osta ja müüa võib suvalise reaalarvu väärtpabereid.
6. Arbitraaživõimaluse puudumine turul, s,t. puudub võimalus riskivabalt rohkem tulu teenida, kui riskivaba intressimääraga rahaturule paigutades.
7. Väärtpaberitega kauplemine toimub pidevalt.
8. Riskivaba intressimäär $r = r(t)$ ja alusvara volatiilsus $\sigma = \sigma(t)$ on hetkel t=0 teadaolevad ajast sõltuvad funktsioonid.

Sellistel eeldustel on võimalik tõestada, et optsiooni hind $V = V(S(t), t)$ rahuldub järgmist teist järku osatuletistega (paraboolset tüüpi) diferentsiaalvõrrandit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Selleks et sellel diferentsiaalvõrrandil oleks ühene lahend, tuleb ette anda ka lõputingimus ja rajatingimused.

Euroopa ostuoptsiooni korral teame optsiooni hinda hetkel t=T, kus optsiooni hind võrdub optsiooniga seotud maksega, s.t.

$$V_C(S(T), T) = \max(S(T) - X, 0).$$

Kui aga $S(t) = 0$ mingil ajahetkel t, $0 \le t \le T$, siis optsiooni hind on null

$$V_C(0, t) = 0.$$

Kui aga $S(t) \to \infty$, siis optsiooni hind on sama suurusjärku alusvara hinnaga:

$$V_C\big(S(t),t\big) \quad S\,, \quad \text{kui} \quad S(t) \to \infty\,.$$

Müügioptsiooni korral on rajatingimusteks

$$V_P\big(S(T),T\big) = \max\big(X - S(T),0\big)$$

$$V_P\big(0,t\big) = Xe^{-r(T-t)}.$$

$$V_P\big(S(t),t\big) \to 0\,, \quad \text{kui} \quad S(t) \to \infty\,.$$

Kui riskivaba intressimäär ja alusvara volatiilsus on ajast sõltuvad funktsioonid (või konstandid): $r = r(t),\ \sigma = \sigma(t)$, siis Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi lahendi saab Euroopa optsioonide korral analüütiliselt välja kirjutada ning ostuoptsiooni hind hetkel t=0 on leitav valemiga

$$V_C\big(0\big) = V_C\big(S(0),0\big) = S(0)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)\,,$$

kus

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{1}{2}y^2)dy$$

on standardiseeritud normaaljaotuse $N\big(0,1\big)$ jaotusfunktsioon ning

$$d_1 = \frac{\log(S(0)/X) + \big(r + \sigma^2/2\big)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log(S(0)/X) + \big(r - \sigma^2/2\big)T}{\sigma\sqrt{T}}\,.$$

Euroopa müügioptsiooni hind on leitav valemiga

$$V_P\big(0\big) = V_P\big(S(0),0\big) = Xe^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1)\,.$$

Optsiooni hinda mõjutavad tegurid.

a) Alusvara hind S. Alusvara hinna suurenemine suurendab ostuoptsiooni hinda ning vähendab müügioptsiooni hinda;

b) Täitmishind X. Kui täitmishind suureneb, siis ostuoptsiooni hind väheneb ning müügioptsiooni hind suureneb;

c) Aeg optsiooni täitmisajani T. Mida suurem see on, seda suurem on optsiooni hind;

d) Alusvara hinna volatiilsus. Kui alusvara hinna volatiilsus suureneb, siis optsiooni hind kasvab.

e) Riskivaba intressimäär. Ostuoptsiooni hind suureneb ja müügioptsiooni hind väheneb, kui intressimäär suureneb.

8.3. Eksootilised optsioonid

Lisaks Euroopa ja Ameerika optsioonidele kaubeldakse finantsturgudel ka nn. eksootiliste optsioonidega (*exotic option*), millede korral optsioonidega seotud väljamaksed defineeritakse erinevalt moodi võrreldes tavaliste optsioonidega. Eksootiliste optsioonide üheks alaliigiks on nn. **teest sõltuvad optsioonid** (*path dependent option*), millede korral optsiooniga seotud väljamakse sõltub ka alusvara hinnast optsiooni eluajal. Teest sõltuvate optsioonide hulka kuuluvad barjääriga optsioonid, Aasia optsioonid ja tagasivaatavad optsioonid.

Barjääriga optsioon (*barrier option*) .

Barjääriga optsioonide korral toimub optsiooniga seotud väljamakse alles siis, kui alusvara hind jõuab mingi väärtuseni (barjäärini) või siis muutub optsioon väärtusetuks kui jõutakse mingi barjäärini. Barjääriga optsioone võime jagada kaheks: *knock-out* ja *knock-in*.

Kui tegemist on *knock-out* optsiooniga, siis optsioon kaotab kehtivuse, kui alusvara hind jõuab etteantud hinnatasemeni enne realiseerimisaega. *Knock-in* optsioon hakkab kehtima, kui vara hind ületab etteantud hinnabarjääri enne täitmisaega. Barjääriga optsiooni korral võib ette anda alumise barjääri $L < S(0)$, ülemise barjääri $H > S(0)$ või mõlemad. Kui etteantud barjäär asub ülalpool alusvara alghinda, on meil tegemist *up*- optsiooniga. Kui aga barjäär asub alusvara alghinnast allpool, nimetame optsiooni *down*- optsiooniks. Selle põhjal võime nii *knock-out* kui ka *knock-in* optsiooni jagada omakorda kaheks:

Up-and-in optsiooni saab realiseerida vaid juhul, kui alusvara hind ületab ülemist barjääri.

Down-and-in optsiooni saab realiseerida ainult siis, kui alusvara hind langeb allapoole alumist barjääri.

Up-and-out optsioon kaotab kehtivuse, kui ülemisest barjäärist jõutakse ülespoole enne eluea lõppu.

Down-and-out optsioon kaotab kehtivuse, kui alumisest barjäärist jõutakse allapoole enne eluea lõppu.

Aasia optsioon (*Asian option*)

Aasia optsiooni puhul sõltub optsiooni väljamakse alusvara keskmisest hinnast (võib olla aritmeetiline või geomeetriline keskmine, võib olla kaalutud või kaalumata keskmine.

Tagasivaatav optsioon (*Lookback option*)

Tagasivaatavate optsioonide korral sõltub väljamakse mitte ainult alusvara hinnast täitmisajal vaid ka alusvara suurimast või vähimast hinnast optsiooni elueal.

Binaarne ehk digitaalne optsioon (*binary or digital option*). Binaarne optsioon erineb tavalisest optsioonist selle poolest, et väljamakse võib üldjuhul olla suvaline mittenegatiivne funktsioon alusvara hinnast.

cash-or-nothing call : Kui $S > X$, siis väljamakse on $B > 0$ (lepingus kokkulepitud summa); vastasel juhul 0.
asset-or-nothing call: Kui $S > X$, siis väljamakse on S ; vastasel juhul 0.

9. Binoommeetod optsiooni hinna arvutamiseks

Analüütiliselt õnnestub Black-Scholesi võrrand lahendada ning optsiooni hinda leida vaid lihtsamate optsioonide korral (Euroopa optsiooni korral, kui riskivaba intressimäär ja alusvara volatiilsus on ajast sõltuvad funktsioonid) ning üldjuhul tuleb optsiooni hinna leidmiseks kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid. Need meetodid võime jagada kolmeks:

a) Võrgumeetodid (ilmutatud ja ilmutamata diferentsmeetod), mis seisnevad Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi numbrilises lahendamises.
b) Binoom- ja trinoommeetoditel põhinevad meetodid
c) Monte-Carlo meetod. Monte-Carlo meetodi korral simuleeritakse vastavalt eeldustele alusvara hinna käitumise kohta palju erinevaid alusvara hinna liikumiseteid ning optsiooni hind leitakse kui diskonteeritud keskmine optsiooni väljamakse.

Alljärgnevalt vaatleme lähemalt binoom- ja trinoommeetodit. Binoommeetod töötati välja Cox, Ross ja Rubinsteini poolt 1979.a. ja seetõttu nimetatakse seda kirjanduses ka CRR-mudeliks. Kui optsiooniga seotud väljamakse sõltub vaid ühest alusvarast, siis on mõistlik optsiooni hinna leidmiseks vaadelda mudelit, kus kaubeldakse vaid selle alusvara ning riskivaba varaga.

9.1 Kaheperioodiline mudel. Riskineutraalne tõenäosus.

Vaatleme esmalt kaheperioodilist mudelit, kus ajahetkedeks on t ja $t+\Delta t$ ning olgu aeg t mõõdetud aastates. Olgu hetkel t alusvara hind $S = S(t)$ ning riskivaba vara hind 1. Siis riskivaba vara hind hetkel $t+\Delta t$ on $e^{r\Delta t}$, kus r on pidev annualiseeritud intressimäär.

Alusvara hinna kohta eeldame, et hetkel $t+\Delta t$ saab alusvara hind omada vaid kahte väärtust, kas alusvara hind on US või DS , kus U, D on mingit konstandid ning üldsust kitsendamata eeldame, et $U > D$.

Eespool nägime, et mudel on arbitraaživaba siis ja ainult siis, kui leiduvad riskineutraalsed tõenäosused. Uurime, millistel tingimustel meie mudelis riskineutraalsed tõenäosused eksisteerivad.

Riskineutraalsed tõenäosused leitakse tingimusest (vt valem (1), loeng 9)

$$E_*\left(\tilde{S}(t+\Delta t) \middle| S\right) = \tilde{S}(t), \tag{1}$$

kus $\tilde{S}(t)$, $\tilde{S}(t+\Delta t)$ on alusvara diskonteeritud hinnad:

$$\tilde{S}(t) = S,\ \tilde{S}(t+\Delta t) = e^{-r\Delta t} S(t+\Delta t).$$

Tähistame riskineutraalse tõenäosuse tähisega p ning olgu alusvara hind US tõenäosusega p ning DS tõenäosusega $1-p$. Siis tingimuse (1) põhjal saame võrrandi p määramiseks :

$$pUSe^{-r\Delta t} + (1-p)DSe^{-r\Delta t} = S$$

ehk

$$pU + (1-p)D = e^{r\Delta t}, \tag{2}$$

millest

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - D}{U - D} . \tag{3}$$

Selleks, et p oleks riskineutraalne tõenäosus, on vaja veel et kehtiksid võrratused $0 < p < 1$. Need tingimused on täidetud (kontrolli valemi (3) põhjal), kui

$$D < e^{r\Delta t} < U \ \text{(ehk } \log(D) < r\Delta t < \log(U)\text{)}. \tag{4}$$

Seega kui valida U, D nii, et on täidetud võrratused (4), siis mudel on arbitraaživaba . Et riskineutraalne tõenäosus on üheselt määratud, siis ka kõigi juhuslike tulevaste rahavoogude hind on üheselt määratud.

Olgu $V(t,S)$ optsiooni hind hetkel t ning alusvara hinna S korral. Siis kehtib valem

$$V(t,S) = e^{-r\Delta t}\left(pV(t+\Delta t, US) + (1-p)V(t+\Delta t, DS)\right).$$

9.2. Tingimus parameetrite U, D määramiseks.

Konstandid U, D määrame nii, et alusvara hinna volatiilsus mudelis vastaks tegelikule alusvara hinna volatiilsusele. Kui eeldada, et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile (vt. loeng 10)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{5}$$

ehk

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu\, dt + \sigma dW(t),$$

siis saab näidata et mudelis peab alusvara hinna dispersioon rahuldama järgmist tingimust:

$$Var\left(\frac{S(t+\Delta t) - S}{S}\right) = \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t),$$

kus $Var(X)$ on juhusliku suuruse X dispersioon ning $o(\Delta t)$ on lõpmata väike suurus Δt suhtes, s.t $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$, kui $\Delta t \to 0$.

Arvestades, et

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X),$$

kus a, b on konstandid ning valemit

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 ,$$

siis saame teisendada:

$$Var\left(\frac{S(t+\Delta t)-S}{S}\right)=\frac{1}{S^2}Var(S(t+\Delta t))=$$
$$\frac{1}{S^2}\left[p(US)^2+(1-p)(DS)^2-(pUS+(1-p)DS)^2\right]= \qquad ,$$
$$pU^2+(1-p)D^2-(pU+(1-p)D)^2=pU^2+(1-p)D^2-e^{-2r\Delta t}$$

s.t. parameetrid U,D tuleb mudelis valida nii, et kehtiks võrdus

$$pU^2+(1-p)D^2-e^{2r\Delta t}=\sigma^2\Delta t+o(\Delta t). \qquad (6)$$

Näitame nüüd, et kui valida parameetrid U,D vastavalt valemitele (CRR valemid)

$$U=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ D=1/U=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad (7)$$

siis võrdus (6) kehtib. Esmalt paneme tähele, et

$$pU^2+(1-p)D^2=p(U^2-D^2)+D^2=\frac{e^{r\Delta t}-D}{U-D}\left(U^2-D^2\right)+D^2= \qquad .$$
$$\left(e^{r\Delta t}-D\right)\left(U+D\right)+D^2=e^{r\Delta t}(U+D)-DU-D^2+D^2=e^{r\Delta t}(U+D)-1$$

Kasutame nüüd Taylori valemit

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)h^2}{2!}+o\left(h^2\right).$$

Siis kasutades võrdusi

$$U+D=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}+e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}=1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+o(\Delta t)+1-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+o(\Delta t)= \qquad ,$$
$$2+\sigma^2\Delta t+o(\Delta t)$$
$$e^{r\Delta t}=1+r\Delta t+o(\Delta t),\quad e^{2r\Delta t}=1+2r\Delta t+o(\Delta t)$$

ning asendades need avaldisse (6) (sealjuures arvestades, et $o(\Delta t)\pm o(\Delta t)=o(\Delta t)$), saame

$$pU^2+(1-p)D^2-e^{2r\Delta t}=e^{r\Delta t}(U+D)-1-e^{2r\Delta t}=$$
$$\left(1+r\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(2+\sigma^2\Delta t+o(\Delta t)\right)-1-(1+2r\Delta t+o(\Delta t))= \qquad ,$$
$$2+\sigma^2\Delta t+2r\Delta t+o(\Delta t)-1-1-2r\Delta t+o(\Delta t)=\sigma^2\Delta t+o(\Delta t)$$

mis näitab, et võrdus (6) kehtib. Märgime,et kui valida parameetrid U,D vastavalt valemile (6) ning kuna

$$-\sigma\sqrt{\Delta t}<r\Delta t<\sigma\sqrt{\Delta t},$$

kui Δt on piisavalt väike, siis on võrratused (4) piisavalt väikse Δt korral alati täidetud.

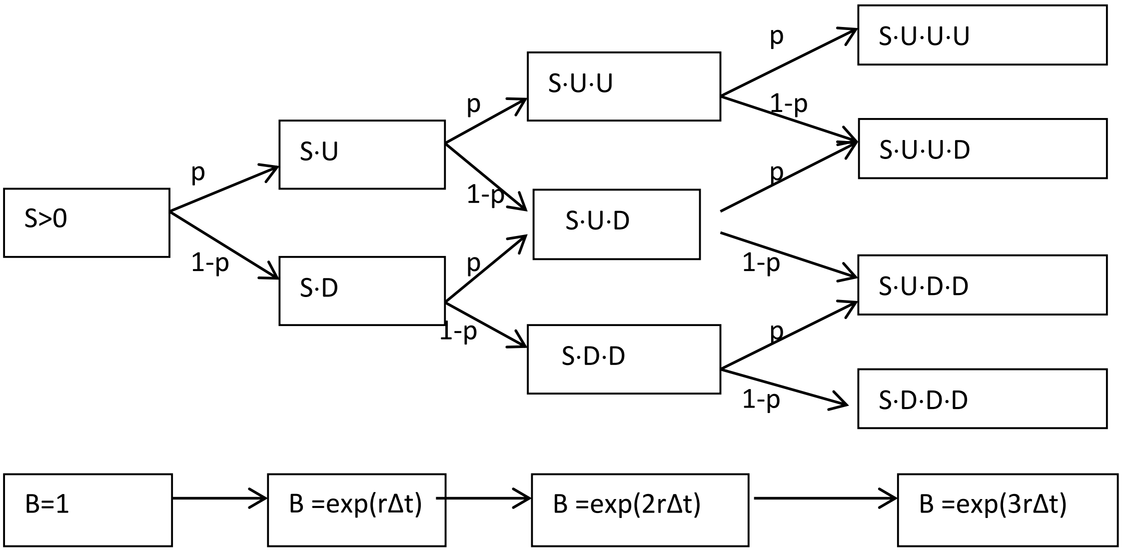
Seega kokkuvõttes saime, et kui valida parameetrid U,D vastavalt valemile (7), siis mudel on arbitraaživaba ja alusvara hinna käitumine mudelis vastab eeldusele (5).

Märgime veel, et tingimus (6) ei määra parameetreid U,D üheselt; näiteks võib U,D valida ka vastavalt valemitele (Jarrow-Rudd valemid)

$$U=e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}},\ D=e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

9.3. Binoommeetod

Binoommudel koosneb identsetest eelnevalt vaadeldud üheperioodilistest mudelitest. Olgu optsiooni eluiga $[0,T]$ ning alusvara hind hetkel $t=0$ S. Anname ette täisarvu N ning jagame optsiooni eluea N võrdseks osaks. Tähistame $\Delta t = \frac{T}{N}$.



Paneme tähele et hetkel $T = N\Delta t$ saab alusvara hind omada väärtusi $U^j D^{N-j} S$, $j = 0,1,2,\ldots,N$ ning hetkel $t = m\Delta t$ saab alusvara hind omada väärtusi $U^j D^{m-j} S$, $j = 0,1,2,\ldots,N,\ 0 \le m \le N$.

Olgu $V_{m,j}$ optsiooni hind hetkel $m\Delta t$ ning alusvara hinna $U^j D^{m-j} S$ korral. Optsiooni hind hetkel $T = N\Delta t$ on võrdne optsiooniga seotud väljamaksega, s.t.

$$V_{N,j} = P_{N,j} = \begin{cases} \max\{U^j D^{N-j} S - X, 0\} & \text{ostuoptsiooni korral} \\ \max\{X - U^j D^{N-j} S, 0\} & \text{müügioptsiooni korral} \end{cases}$$

Teades optsiooni hinda hetkel T, on võimalik leida Euroopa optsiooni hinda rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes vastavalt valemile

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}\left(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}\right),\quad 0 \le j \le m,\ m = N-1, N-2, \ldots, 0.$$

Optsiooni hind $V_{0,0}$ ongi optsiooni hind hetkel t=0.

Saab tõestada, et kui $N \to \infty$, siis binoommeetodiga leitud optsiooni hind $V_{0,0}^{(N)}$ koondub Black-Scholesi valemite põhjal (vt. loeng 10) leitud optsiooni hinnale, s.t. Euroopa ostuoptsiooni korral

$$V_{0,0}^{(N)} \to V_C(0) = S(0)N(d_1) - Xe^{-r(T)}N(d_2),\ \text{kui } N \to \infty$$

ning Euroopa müügioptsiooni korral

$$V_{0,0}^{(N)} \to V_P(0) = Xe^{-r(T)}N(-d_2) - S(0)N(-d_1), \text{ kui } N \to \infty .$$

Ameerika optsiooni hinna leidmine

Vaatleme nüüd Ameerika optsiooni hinna leidmist binoommeetodiga. Kas sel juhul leitakse optsiooni hind rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes.

Kuid Ameerika optsiooni korral on optsiooni hind $V_{m,j}$ võrdne maksimumiga kahest suurusest:

a) Optsiooni hind $W_{m,j}$ juhul, kui optsiooni hoitakse vähemalt ajahetkeni $(m+1)\Delta t$. Selle saame leida vastavalt valemile

$$W_{m,j} = e^{-r\Delta t}\left(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}\right).$$

b) Optsiooni hind $P_{m,j}$ juhul, kui realiseerime optsiooni hetkel $m\Delta t$:

$$P_{m,j} = \begin{cases} \max\{U^jD^{m-j}S - X, 0\} & \text{ostuoptsiooni korral} \\ \max\{X - U^jD^{m-j}S, 0\} & \text{müügioptsiooni korral} \end{cases}.$$

Kokkuvõttes saame Ameerika optsiooni hinna leida vastavalt valemitele:

$$V_{m,j} = \max\left\{P_{m,j}, e^{-r\Delta t}\left(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}\right)\right\}, \quad 0 \le j \le m, \; m = N-1, N-2, \ldots, 0 .$$

Trinoommeetod

Trinoommeetod koosneb samuti identsetest üheperioodilistest mudelitest, kuid alusvara hind võib igal järgmisel sammul omada kolme erinevat väärtust, kas US, S või DS. Kui valida $D = 1/U$, siis hetkel $T = N\Delta t$ saab alusvara hind omada $2N+1$ erinevat väärtust U^jS, $j = -N, -N+1, \ldots, 0, \ldots, N-1, N$ (meenutame, et binoommeetodi korral saab alusvara hind hetkel $T = N\Delta t$ omada N erinevat väärtust).

Trinoommeetodi parameetriteks saab võtta näiteks $U = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$, $D = 1/U = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$ ning sel juhul riskineutraalsed tõenäosused on kujul

$$p_U = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - \sqrt{D}}{\sqrt{U} - \sqrt{D}}\right)^2, \; p_D = \left(\frac{\sqrt{U} - e^{r\Delta t/2}}{\sqrt{U} - \sqrt{D}}\right)^2, \; p_M = 1 - p_U - p_D .$$

Siin p_U, p_D, p_M on vastavalt hinna üles- ja allaliikumise ning hinna samaks jäämise tõenäosused.

10. Forwardid ja futuurid.

10.1. Forwardlepingud

Forward (*forward contract*) on kokkuleppe ostu või müüa mingit vara fikseeritud kuupäeval, edaspidi tarneajal *(delivery time)* tulevikus kokkulepitud hinnaga (*forward price*).

Lepingu osapool, kes nõustub müüma vara, võtab nn. lühikese positsiooni (*short forward position*) ning osapool, kes ostab vara, võtab nn. pika positsiooni (*long forward position*). Forwardlepingute kasutamise mõte seisneb selles, et maandada riskantse vara ostu-müügiga seotud hinnariski. Tavaliselt on tegemist mingi toorainega või põllumajandustootega, aga samuti võib olla tegu näiteks aktsiatega või valuutaga.

Olgu forwardlepingu sõlmimise aeg $t=0$, tarneaeg $t=T$ ning tähistame forwardhinna tähisega $F(0,T)$. Olgu hetkel t alusvara hind $S(t)$. Forwardlepingu pika positsiooni omanik saab lepingust tulu juhul, kui $F(0,T)<S(T)$ ning kahju, kui $F(0,T)>S(T)$, lühikese positsiooni omanik aga saab tulu, kui $F(0,T)>S(T)$ ning kannab rahalist kahju kui $F(0,T)<S(T)$. Oletame, et forwardlepingu sõlmimise hetkel lepingu osapooled rahavoogusid ei vaheta (forwardlepingu väärtus ajal $t=0$ on null) ning uurime, milline peaks sel juhul olema forwardhind. Olgu r – pidev annualiseeritud riskivaba intressimäär. Siis juhul, kui vara pealt ei maksta dividende, on forwardhind esitatav kujul

$$F(0,T)=S(0)e^{rT} . \tag{1}$$

Üldjuhul, kui leping sõlmitakse ajahetkel $t \le T$, siis forwardhind on kujul

$$F(t,T)=S(0)e^{r(T-t)} .$$

Valemi (1) saab tõestada arbitaaživabaduse nõudest lähtuvalt. Oletame esmalt, et $F(0,T)>S(0)e^{rT}$. Siis hetkel $t=0$:

- Laename rahasumma $S(0)$ kuni ajani T
- Ostame ühe ühiku alusvara hinnaga $S(0)$
- Võtame lühikese positsiooni forwardlepingus, s.t. kohustume müüma hetkel $t=T$ alusvara hinnaga $F(0,T)$

Ajahetkel T:

- Müüme forwardlepingu kohaselt alusvara hinnaga $F(0,T)$
- Maksame tagasi laenu koos intressidega summas $S(0)e^{rT}$.

  Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas $F(0,T)-S(0)e^{rT}>0$.

Kui oletada, et $F(0,T)<S(0)e^{rT}$, siis hetkel $t=0$:

- Müüme ühiku alusvara hinnaga $S(0)$ (s.t. võtame lühikese positsiooni)
- Hoiustame müügist saadud raha $S(0)$ panka kuni ajani T
- Võtame pika positsiooni forwardlepingus, s.t. kohustume ostma hetkel $t=T$ alusvara hinnaga $F(0,T)$

Ajahetkel T:

- Saame pangast summa (koos intressidega) $S(0)e^{rT}$.

- Ostame forwardlepingu kohaselt alusvara hinnaga $F(0,T)$

Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas $S(0)e^{rT} - F(0,T) > 0$.

Märkus 1. Kui lühikeseks müümine on kitsendatud, siis võrratus $F(0,T) < S(0)e^{rT}$ ei pruugi arbitraaživõimalust tekitada.

Märkus 2. Kui pideva intressimäära asemel kasutada aastast liitintressimäära r ning kapitalisatsiooniperioodide arv on m, siis

$$F(0,T) = S(0)(1 + r/m)^{mt}.$$

Kui alusvara pealt makstakse ajahetkel t, $0 < t < T$, dividende summas D, siis arbitraaživaba forwardhind on esitatav kujul

$$F(0,T) = \left[S(0) - e^{-rt}D\right]e^{rT}.$$

Näitame, et võrratuse $F(0,T) > \left[S(0) - e^{-rt}D\right]e^{rT}$ korral saame leida arbitraažistrateegia. Siis hetkel $t = 0$:

- Laename rahasumma $S(0)$ kuni ajani T
- Ostame ühe ühiku alusvara hinnaga $S(0)$
- Võtame lühikese positsiooni forwardlepingus, s.t. kohustume müüma hetkel $t = T$ alusvara hinnaga $F(0,T)$

Ajahetkel t:

- Saame dividende summas D ning hoiustame summa panka ajani T;

Ajahetkel T:

- Müüme forwardlepingu kohaselt alusvara hinnaga $F(0,T)$
- Maksame tagasi laenu koos intressidega summas $S(0)e^{rT}$.
- Saame dividendide eest summa $De^{r(T-t)}$.

Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas

$$F(0,T) - S(0)e^{rT} + De^{r(T-t)} = F(0,T) - (S(0) - e^{rt}D)e^{rT} > 0.$$

Ülesanne 1. Konstrueerida arbitraažistrateegia juhul $F(0,T) < \left[S(0) - e^{-rt}D\right]e^{rT}$.

Kui alusvaralt makstakse pidevalt dividende määraga r_{div}, siis

$$F(0,T) = S(0)e^{(r - r_{div})T}.$$

Forwardlepingu sõlmimisel on lepingu väärtus null. Kuid aja möödudes, kui alusvara hind muutub, ei pruugi forwardlepingu (kus forwardhinnaks on $F(0,T)$) väärtus enam null olla.

Olgu $V(t)$ sellise forwardlepingu väärtus pika positsiooni võtja jaoks. Siis forwardlepingu väärtus ajahetkel t on esitatav valemiga

$$V(t) = [F(t,T) - F(0,T)]e^{-r(T-t)}.$$

Näitame , et juhul $V(t) < [F(t,T) - F(0,T)]e^{-r(T-t)}$ saame konstrueerida arbitraažistrateegia:

Ajahetkel t:

- Laename rahasumma $V(t)$ kuni ajani T
- Saadud rahaga võtame pika positsiooni forwardhinnaga $F(0,T)$
- Võtame lühikese positsiooni forwardhinnaga $F(t,T)$; selle korral kulusid ei ole

Ajahetkel T:

- Ostame alusvara hinnaga $F(0,T)$
- Müüme alusvara hinnaga $F(t,T)$
- Maksame tagasi laenu koos intressidega summas $V(t) = e^{r(T-t)}$.

Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas

$$F(t,T) - F(0,T) - V(t)e^{r(T-t)} > 0.$$

Ülesanne 2. Konstrueerida arbitraažistrateegia juhul $V(t) > [F(t,T) - F(0,T)]e^{-r(T-t)}$.

Märkus 3. Kui sõlmitakse forwardleping, kus forwardhinnaks on $F(0,T)$ asemel X, siis sellise lepingu väärtus ajal t on

$$V(t) = [F(t,T) - X]e^{-r(T-t)}$$

ja erijuhul $t = 0$ on väärtuseks $V(0) = [F(0,T) - X]e^{-rT}$.

10.2Futuurid

Üks forwardlepingu osalistest saab alati kahju ning seetõttu on võimalus, et see osapool, kes kahju kannab, ei suuda oma kohustust täita. Futuurlepingud on nn. standardiseeritud forwardlepingud, mis elimineerivad sellise riski. Vaatame ajahetki $t = n\tau,\ n = 0,1,2,...N$, tavaliselt τ on võrdne ühe päevaga. Olgu $T = N\tau$. Nii nagu forwardlepingud nii ka futuurlepingud sõlmitakse mingi vara ostmiseks-müümiseks kindlaksmääratud ajal ja kindlaksmääratud hinnaga. Olgu $f(n,T)$ futuuri hind ajahetkel $t = n\tau$. Need hinnad ei ole teada ajahetkel $t = 0$ (v.a. hind $f(0,T)$) ning me saame neid hindu käsitleda kui juhuslikku suurusi. Forwardlepingute (forwardhinnaga $F(0,T)$) puhul ei maksa nende sõlmimine midagi (lepingu osapooled ei vaheta rahavoogusid) ning rahavoogusid ei vahetata ka enne forwardtehingu lõppu. Futuurlepinguga kaasneb aga igapäevane nn. turumärkimise protseduur (*marking to market*) ning juhuslik rahavoog igal ajahetkel $t = n\tau$, $t = n\tau,\ n = 1,2,...N$. Futuurlepingu pika positsiooni omanik saab igal ajahetkel $t = n\tau$ rahasumma

$f(n,T)-f(n-1,T)$, kui see on positiivne, ning peab maksma sellise summa, kui $f(n,T)-f(n-1,T)$ on negatiivne. Sealjuures:

a) Futuuri hind tarneajal $f(T,T)$ on võrdne alusvara hinnaga $S(T)$.
b) Igal ajahetkel $t=n\tau,\ n=1,2,...N$ on futuuri väärtus null.

Selleks, et kohustused, mis on seotud futuuride omamisega, oleks täidetud, kasutatakse teatavaid regulatsioone. Iga investor, kes siseneb futuuride turule, peab maksma deposiidi (*initial margin*), mida kasutatakse summadega $f(n,T)-f(n-1,T)$ arveldamiseks igal perioodil. Pika positsiooni korral $f(n,T)-f(n-1,T)$ lisatakse deposiidile, kui $f(n,T)-f(n-1,T)>0$ ning vastasel juhul võetakse maha. Kui deposiit langeb alla mingisuguse taseme (*maintenance margin*), siis tehakse investorile nn. *margin call* ning investor peab tegema deponeerima täiendava summa. Deposiidi algtaset ületava summa võib aga investor välja võtta. Futuuriga seotud positsiooni võib investor sulgeda igal ajahetkel ning sel juhul deposiit tagastatakse investorile. Erijuhul lõpetatakse futuurleping automaatselt, kui investor ei vasta *margin call* -ile ning ei deponeeri täiendavat summat.

Näide 1. Oletame, et *initial margin* on 10% ning *maintenance margin* on 5% futuurhinnast. Järgmine tabel kujutab üht võimalikku stsenaariumi futuurhindade kujunemisest

n	f(n,T)	Rahavoog	Deposiit perioodi algul enne makset	Makse investori (pikk positsioon) seisukohalt	Deposiit perioodi lõpus
0	140	Avamine	0	-14	14
1	138	-2	12	0	12
2	130	-8	4	-9	13
3	140	+10	23	+9	14
4	150	+10	24	+9	15
		sulgemine	15	+15	0
			Kokku	+10	

Futuuride turu oluline omadus on likviidsus. See on võimalik tänu standardiseerimisele ja nn. arvelduskoja (*clearing house)* olemasolule, kes tegeleb deposiitide hoidmisega. Reeglina on võimalik sõlmida vaid kindlate tarneaegadega futuurlepinguid. Samuti arvestatakse standardiseeritult ka alusvara hoidmise ja tarnimisega seotud kulusid.

Teatavatel tingimustel on forvardi ja futuuride hinnad samad. Nimelt, kui intressimäär on ajas konstantne, siis saab tõestada, et

$$f(0,T) = F(0,T).$$

ning $f(t,T) = F(t,T) = S(t)e^{r(T-t)}$ ajahetkel $t > 0$. Turul noteeritud futuuride hinnad võivad sellest erineda, kuna investorite ootused tuleviku intressimäärade kohta muutujad ajas.

Investor, kes oletab, et alusvara hind tõuseb riskivabast intressimäärast kiiremini, peab kasumi saamiseks võtma futuuride turul pika positsiooni, kes aga panustab alusvara hinna langusele, peaks võtma lühikese positsiooni.

11. Markowitzi portfelliteooria. CAPM.

11.1 Investeeringutega seonduvad riskis

Investeerides riskantsetesse varadesse on investoril alati võimalik saada kahju ehk investeerimine on alati seotud riskiga. Märgime, et riski mõistel ei ole ühest definitsiooni, seda võib defineerida kui ohtude kombinatsiooni, kahju saamise tõenäosust või kahju suuruse ebaselgust. Selleks, et riske juhtida, on mitmeid võimalusi. Kõige lihtsam võimalus investeerimisel oleks riskist hoidumine, kuid see tähendab tavaliselt väga madala tulususega leppimist. Enamasti seisnebki nii ettevõtlus kui ka investeerimine teadlikus riskide võtmises. Riske võib jagada kaheks – **puhasteks riskideks** ehk sellisteks riskideks, mille puhul puudub kasu saamise võimalus (nt tulekahju) ning **spekulatiivseteks riskideks**, mille puhul esineb võimalus saada nii kasu kui ka kahju (nt valuutakursi muutus). Puhaste riskide juhtimisel kasutatakse enamasti riskide kindlustamist (*insurance*), kuid spekulatiivsete riskide puhul seda võimalust üldjuhul ei pakuta. Spekulatiivsete riskide juhtimisel (siia kuulub enamik finantsriskidest) kasutatakse kas **riskide maandamist** (*hedging*), mida teostatakse tavaliselt läbi erinevate tuletisinstrumentide või riskide hajutamist ehk **diversifeerimist** (*diversification*).

Riski mõõtmiseks on mitmeid võimalusi, näiteks tõenäosus kahju saada või kahju suurus 5% tõenäosusega. Üheks enamlevinud võimaluseks riski mõõta on investeeringu tulumäära standardhälbe või dispersiooni kasutamine. Näiteks kui samade tõenäosuste korral ühe investeeringu tulusus võib olla kas 11% ja 13% ning teisel 2% ja 22%, siis ilmselt on esimene investeering vähem riskantsem. Kuid risk sõltub ka stsenaariumide tõenäosusest. Näiteks kui ühel juhul on tõenäosus saada tulususeks 2% vaid 0.02 ning teisel juhul 0.5, siis on esimesel juhul risk väiksem kui teisel juhul. Investeeringu tulusus (tulumäär) $R = \dfrac{V_t - V_0}{V_0}$ on riskantse investeeringu korral juhuslik suurus ning seetõttu me saame rääkida tulususe dispersioonist

$$Var(R) = E\big(R - E(R)\big)^2$$

või standardhälbest

$$\sigma_R = \sqrt{Var(R)}.$$

Näide 1. Vaatleme kolme erinevat investeerimisprojekti. Milline neist projektidest on kõige vähem riskantne ning milline kõige rohkem riskantne?

Stsenaarium	Tõenäosus	Tulusus (projekt 1)	Tulusus (projekt 2)	Tulusus (projekt 3)
ω_1	0.25	12%	11%	2%
ω_2	0.75	12%	13%	22%
E(R)		12%	12.5%	17%
Var(R) (%)		0	0,75	75
σ_R (%)		0	0.866	8.66

Kui kasutada investeeringu tulususe hindamisel logaritmilist tulusust $R_{\ln} = \frac{V_t}{V_0}$, siis saame riski mõõta suuruste $Var(R_{\ln})$ ja $\sigma_{R\ln} = \sqrt{Var(R_{\ln})}$ abil. Kui meil on tegemist ajas järjestikuste investeeringutega, siis on logaritmilise tulususe standardhälve ja dispersioon sobivamad riski mõõtmise näitajad tänu riskide aditiivsuse omadusele. Nimelt, kui $R_{\ln}(i)$ on logaritmiline tulusus ajaperioodil $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,2,...,n$, $R_{\ln}(0,n)$ on koguperioodi $[t_0, t_n]$ tulusus ning erinevate ajaperioodide tulusused on sõltumatud juhuslikud suurused, siis

$$Var(R_{\ln}(0,n)) = \sum_{i=1}^{n} Var(R_{\ln}(i)).$$

11.2 Markowitzi portfelliteooria. Portfelli minimaalne dispersioon.

Investeeringutega seotud riskide vähendamiseks on mõistlik mitte paigutada kogu summa ühte riskantsesse investeeringusse, vaid moodustada sobiv portfell erinevatest riskantsetest investeeringutest. Riskide hajutamiseks kombineeritakse erinevaid aktivaid ehk moodustatakse investeeringute portfell. Riski hajutamise tähtsust mõisteti juba sajandeid tagasi, kuid kuna puudus matemaatiline riski mõõt, polnud võimalik välja töötada ka matemaatiliselt formuleeritud mudelit optimaalse portfelli koostamiseks. Harry Markowitz otsustas väärtpaberitega seotud riski mõõtmiseks kasutada statistikas ammutuntud näitajat – dispersiooni (esimene. artikkel 1952.a) . Ta oli kaasaegse portfelliteooria (MPT) väljatöötajaks ning sai hiljem selle teooria väljatöötamise eest Nobeli majanduspreemia. MPT eeldab, et investorid on riski vältivad, mis tähendab, et kui sama oodatava tulumääraga on võimalik moodustada kaks portfelli, siis investorid eelistavad väiksema riskiga portfelli ning investorid on nõus riski suurendama vaid siis, kui sellega kaasneb suurem oodatav tulu.

Näide 2. Vaatleme väärtpaberiportfelli kahe riskantse aktsiaga ja oletame, et aktsiate tulusused käituvad järgmiselt

Stsenaarium	Tõenäosus	Tulusus (aktsia 1)	Tulusus (aktsia 2)
ω_1	0.5	10%	-5%
ω_2	0.5	-5%	10%

Kui me jaotame oma raha võrdselt nende kahe investeeringu vahel, siis mõlema stsenaariumi korral koguinvesteeringu tulusus on 2.5% ning koguinvesteeringuga seotud risk on null. Kui me aga investeeriksime kogu raha vaid ühte aktsiasse, siis investeeringu keskmine tulusus oleks endiselt 2.5%, kuid investeeringu risk oleks $\sigma_R = 0.075$ ehk 7.5%.

Vaatleme esmalt kahest riskantsest väärtpaberist koosnevat portfelli ning vaatleme, kuidas tuleks moodustada portfell, et riski vähendada. Olgu väärtpaberite tulusused vastavalt R_1 ja R_2 ning olgu nende väärtpaberite osakaalud portfellis vastavalt x_1 ja x_2: $x_i = \frac{y_i S_i(0)}{V(0)}, \quad i = 1,2$, kus y_i on i-nda väärtpaberi kogus portfellis ning $V(0)$ on portfelli hind moodustamise hetkel $t = 0$. Kuna $V(0) = y_1 S_1(0) + y_2 S_2(0)$, siis $x_1 + x_2 = 1$.

Näitame kõigepealt, et portfelli tulumäär (tulusus) on leitav valemiga

$$R_V = x_1 R_1 + x_2 R_2. \tag{1}$$

Tõepoolest, portfelli väärtus realiseerimisel on

$$\begin{aligned} V &= y_1 S_1(0)(1+R_1) + y_2 S_2(0)(1+R_2) = \\ &V(0)(x_1(1+R_1) + x_2(1+R_2)) \end{aligned}$$

ning seega $R_V = \frac{V - V(0)}{V(0)} = x_1 R_1 + x_2 R_2$.

Portfelli oodatav (keskmine) tulusus on leitav valemiga

$$E(R_V) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2). \tag{2}$$

Kuna $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X,Y)$, siis portfelli tulumäära dispersiooni jaoks kehtib valem

$$Var(R_V) = x_1^2 Var(R_1) + x_2^2 Var(R_2) + 2x_1 x_2 Cov(R_1, R_2). \tag{3}$$

Tähistades

$$\begin{aligned} &\mu_V = E(R_V), \quad \mu_1 = E(R_1), \quad \mu_2 = E(R_2), \\ &\sigma_V = \sqrt{Var(R_V)}, \quad \sigma_1 = \sqrt{Var(R_1)}, \quad \sigma_2 = \sqrt{Var(R_2)}, \\ &\rho_{12} = \frac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \end{aligned}$$

($\sigma_V, \sigma_1, \sigma_2$ on tulususte standardhälbed ning ρ_{12} on tulususte vaheline korrelatsioonikordaja) saame valemid (2),(3) esitada kujul

$$\mu_v = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2,$$

$$\sigma_V^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2.$$

Kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis portfelli dispersiooni kohta kehtib võrratus

$$\sigma_V^2 \le \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}. \tag{4}$$

Tõestus. Üldsust kitsendamata eeldame, et $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$. Kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis $x_1, x_2 \ge 0$ ning $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \le \sigma_2$. Kuna $-1 \le \rho_{12} \le 1$, siis saame

$$\sigma_V^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \le x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 = (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2 \le \sigma_2^2 .$$

Kui lühikeseks müümine on lubatud, siis võrratus (4) ei pruugi kehtida.

Näide 3. Olgu kahe aktsia tulusused erinevate stsenaariumide korral järgmised:

Stsenaarium	Tõenäosus	Tulusus (aktsia 1)	Tulusus (aktsia 2)
ω_1	0.4	-10%	20%
ω_2	0.2	0%	20%
ω_3	0.4	20%	10%

Siis väärtpaberite tulususte standardhälbed on vastavalt $\sigma_1 = 0.1356$ ja $\sigma_2 = 0.0490$ ning nendevaheline korrelatsioonikordaja on $\rho_{12} = -0.9631$:

$$\mu_1 = 0.4*(-0.1) + 0.4*0.2 = 0.04$$
$$\sigma_1 = \sqrt{0.4(-0.1-0.04)^2 + 0.2(0-0.04)^2 + 0.4(0.2-0.04)^2} = 0.1356$$

$$\mu_2 = 0.4*0.2 + 0.2*0.2 + 0.4*0.1 = 0.16$$
$$\sigma_2 = \sqrt{0.4(0.2-0.16)^2 + 0.2(0.2-0.16)^2 + 0.4(0.1-0.16)^2} = 0.049$$

$$\rho_{12} = \frac{0.4(-0.1-0.04)(0.2-0.16) + 0.2(0-0.04)(0.2-0.16) + 0.4(0.2-0.04)(0.1-0.16)}{0.1356*0.049} = -0.9631$$

Kui portfelli kaalud on $x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.6$, siis $\sigma_V = 0.0271$ ning võrratus (4) kehtib.

Kui aga portfelli osakaalud $x_1 = -0.5, \quad x_2 = 1.5$ (s.t. lühikese positsiooni võtmine on lubatud), siis $\sigma_V = 0.14$ ning võrratus (4) ei kehti.

Järgnevalt vaatleme, kuidas leida väärtpaberite osakaale nii, et portfelli risk oleks minimaalne. Vaatleme esmalt erijuhte, kus $\rho_{12} = 1$ Siis kehtib järgmine tulemus:

kui $\rho_{12} = 1$, $\sigma_1 \ne \sigma_2$ ning portfelli kaaludeks valida

$$x_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad x_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

siis $\sigma_V = 0$.

Tõestus elementaarne:

$$\sigma_V^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 =$$
$$(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2 = \left(\frac{-\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)^2 = 0 \quad .$$

Analoogiliselt, kui $\rho_{12} = -1$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ning portfelli kaaludeks valida

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \; x_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

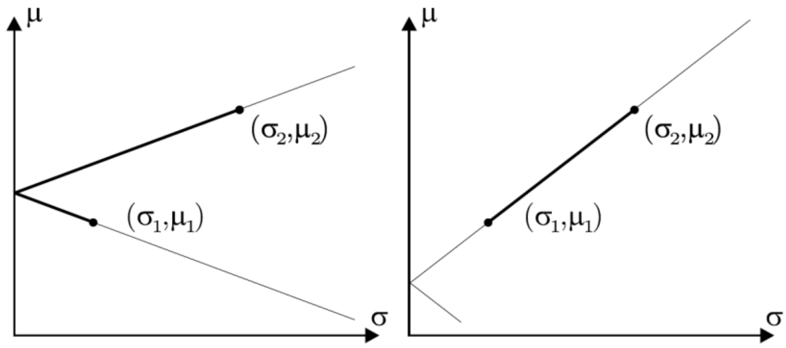
siis $\sigma_V = 0$.

Tähistame $x = x_2$, siis $x_1 = 1 - x$. Vaatleme nüüd portfelli oodatava tulumäära ja tulumäära standardhälbe vahelist seost. Kuna

$$\mu_v = (1-x)\mu_1 + x\mu_2,$$

$$\sigma_V^2 = (1-x)^2\sigma_1^2 + x^2\sigma_2^2 + 2(1-x)x\rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

siis paneme tähele, et kui $\rho_{12} = 1$, siis $\sigma_V = |(1-x)\sigma_1 + x\sigma_2|$ ning kui $\rho_{12} = -1$, siis $\sigma_V = |(1-x)\sigma_1 - x\sigma_2|$. Oodatava tulumäära ja tulumäära standardhälbe vaheline seos on esitatud joonisel 1 (rasvane joon näitab seost juhul, kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud)



Joonis 1. Portfelli oodatav tulumäär ja tulumäära standardhälve $\rho_{12} = -1$ ja $\rho_{12} = 1$ korral.

Teoreem 1. Kui $-1 < \rho_{12} < 1$, siis portfelli tulumäära dispersioon on minimaalne juhul

$$x = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

Kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis minimaalne dispersioon saavutatakse juhul

$$x_{\min} = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_0 < 0 \\ x_0, & \text{kui } 0 \le x_0 \le 1 \\ 1, & \text{kui } x_0 > 1 \end{cases}$$

Tõestus. Paneme tähele, et $\sigma_V^2 = (1-x)^2\sigma_1^2 + x^2\sigma_2^2 + 2(1-x)x\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. Võttes suurusest σ_V^2 tuletise x järgi ning võrdsustades selle nulliga, saame

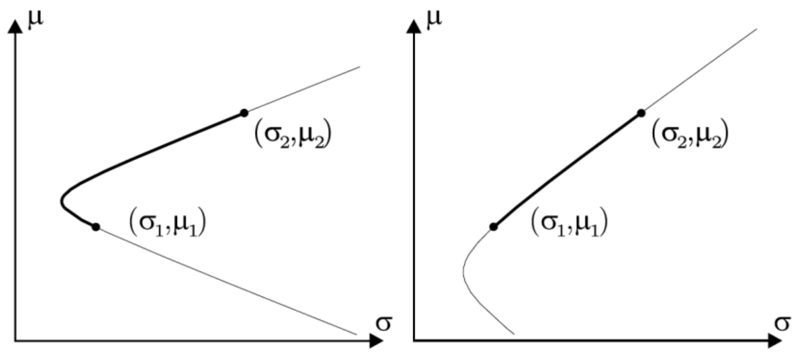
$$-2(1-x)\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 + 2(1-x)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2x\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.$$

See võrrand määrab dispersiooni miinimumi, kuna σ_V^2 teine tuletis

$$2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2 = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0$$

on mittenegatiivne.

Kui $-1 < \rho_{12} < 1$, siis oodatava tulumäära ja standardhälbe vaheline seos võib olla selline nagu on esitatud joonisel 2.



Joonis 2. Portfelli oodatav tulumäär ja tulumäära standardhälve $-1 < \rho_{12} < 1$ korral.

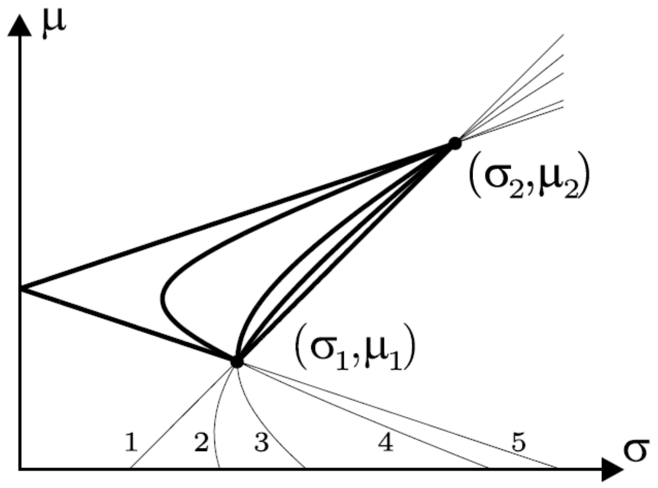
Anname nüüd tulemuse, mis näitab, millal õnnestub portfelli dispersiooni vähendada võrreldes portfellis olevate varade minimaalse dispersiooniga.

Teoreem 2. Oletame, et $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Siis on võimalikud järgmised juhud:

a) Kui $-1 < \rho_{12} < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis on võimalik moodustada ilma lühikese positsioonita selline portfell, et $\sigma_V < \sigma_1$ (jooned 4 ja 5 joonisel 3)

b) Kui $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis $\sigma_V \geq \sigma_1$ iga portfelli korral (joon 3 joonisel 3)

c) Kui $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, siis lühikest positsiooni lubades on võimalik moodustada sellist portfelli, et $\sigma_V < \sigma_1$, kuid kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis $\sigma_V \geq \sigma_1$ iga portfelli korral (jooned 1 ja 2 joonisel 3).



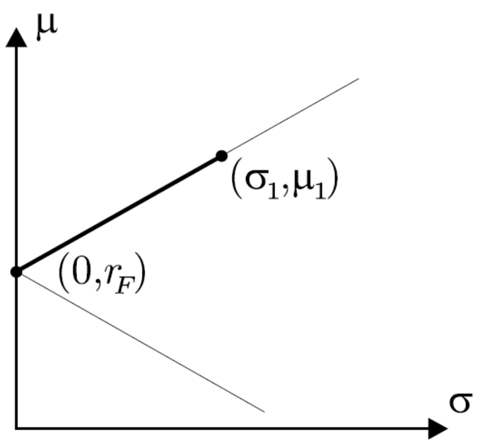
Joonis 3. Portfelli oodatav tulumäär ja tulumäära standardhälve erinevate ρ_{12} korral.

Vaatleme nüüd portfelli, mille moodustavad riskivaba vara ja mingi riskantne vara, mille oodatav tulumäär ja standardhälve on vastavalt μ_1, σ_1. Kuna riskivaba vara tulumäära dispersioon on 0 ning riskivaba vara tulusus on määratud intressimääraga $r = r_F$, siis portfelli tulumäär ja dispersioon on vastavalt

$$\mu_v = x\mu_1 + (1-x)r_F ,$$

$$\sigma_V^2 = x^2\sigma_1^2$$

ning seos portfelli oodatava tulumäära ja tulumäära standardhälbe vahel on esitatud joonisel 4.



Joonis 4. Seos portfelli oodatava tulumäära ja tulumäära standardhälbe vahel juhul, kui portfellis üks riskantne ja riskivaba vara.

Vaatleme nüüd juhtu, kui portfell on moodustatud n erinevast väärtpaberist. Olgu

$$x_i = \frac{y_i S_i(0)}{V(0)}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

kus y_i on i-nda väärtpaberi arv portfellis, $S_i(0)$ on i-nda väärtpaberi algne hind ning $V(0)$ on portfelli hind. On ilmne, et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Olgu μ_i i-nda väärtpaberi oodatav tulumäär, σ_{ii} - i-nda väärtpaberi tulumäära dispersioon ning σ_{ij}, $i \neq j$, i-nda ja j-nda väärtpaberi tulumäärade vaheline kovariatsioon: $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$. Siis portfelli tulumäär ja dispersioon on leitavad vastavalt valemitele

$$\mu_V = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i$$

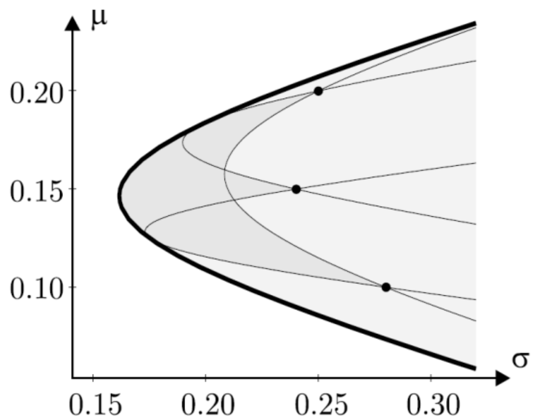
$$\sigma_V^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} .$$

Saab näidata, et kaalud x_i, mille korral portfelli dispersioon on vähim, saab leida vastavalt valemile

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{\sigma}_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_{ji}}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

kus $\tilde{\sigma}_{ij}$ on maatriksi $\Sigma = (\sigma_{ij})$ pöördmaatriksi $\Sigma^{-1} = (\tilde{\sigma}_{ij})$ elemendid. Valem (5) kehtib tingimusel, et valemis (5) nimetaja ei võrdu nulliga.

Seos portfelli oodatava tulumäära ja tulumäära standardhälbe vahel väärtpaberite erinevate osakaalude korral portfellis on esitatud joonisel 5 halli värvi piirkonnana.



Joonis 5. Seos portfelli oodatava tulumäära ja tulumäära standardhälbe vahel väärtpaberite erinevate osakaalude korral portfellis.

Näeme, et sama standardhälbe korral on võimalik moodustada erineva oodatava tulumääraga portfelle, samuti sama oodatava tulumäära korral on võimalik moodustada erineva riskitasemega portfelle.

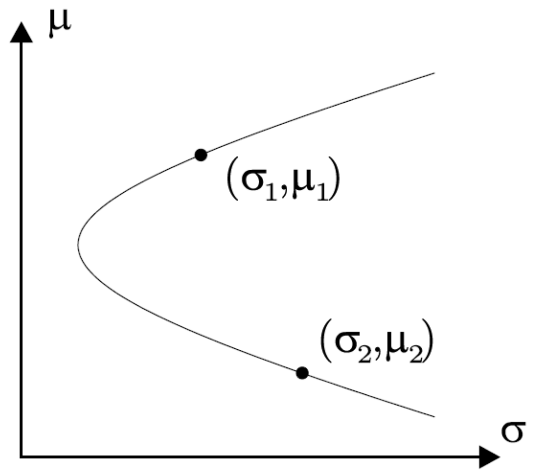
11.3. Efektiivne portfell. Süstemaatiline ja mittesüstemaatiline risk.

Kui on valida kahe väärtpaberi vahel , siis ratsionaalne investor eelistab alati investeerida suurema tulumäära ja väiksema riskiga väärtpaberisse.

Def. 1. Me ütleme, et väärtpaber oodatava tulumääraga μ_1 ja standardhälbega σ_1 **domineerib** väärtpaberi oodatava tulumääraga μ_2 ja standardhälbega σ_2 üle, kui

$$\mu_1 \geq \mu_2, \ \sigma_1 \leq \sigma_2 .$$

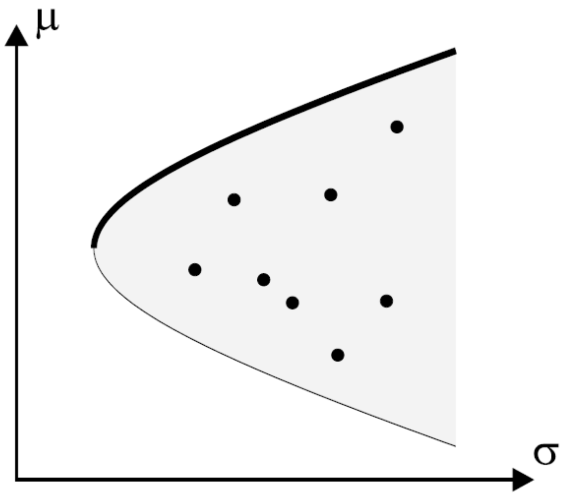
Seda definitsiooni saab vahetult laiendada ka portfellidele. Märgime, et dominantne väärtpaber ei ole investori seisukohalt siiski kasutu, kuna portfelli moodustamisel võib dominantse väärtpaberi portfelli lülitamisega vähendada portfelli riski (vt. joonis 6).



Joonis 6. Näide, kus dominantse väärtpaberi kasutamine aitab vähendada riski.

Def.2. Portfelli nimetatakse **efektiivseks** (*efficient*) , kui ei ole ühtki teist portfelli peale tema enda, mis domineeriks tema üle. Kõigi efektiivsete portfellide hulka kõigi lubatavate portfellide seas nimetatakse **efektiivsuse kõveraks või ka Markowitz i kõveraks** (*efficient frontier, Markowitz frontier*).

Iga ratsionaalne investor valib alati efektiivse portfelli. Erinevad investorid võivad valida erineva portfelli efektiivsuse kõveral sõltuvalt nende riskikartlikkusest. Riskikartlikum investor võib eelistada madalama oodatava tulumäära ja väiksema riskiga portfelli, riskialtim investor aga kõrgema oodatava tulumäära ja suurema riskiga portfelli.

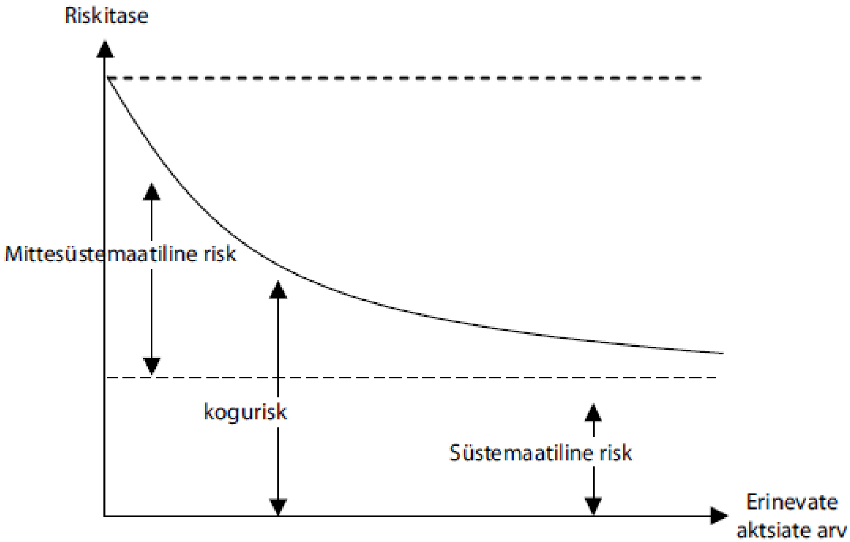


Joonis 7. Efektiivsuse kõver juhul, kui portfell koosneb paljudest väärtpaberitest .

Iga riskantse väärtpaberiga seotud riski võime jagada **süstemaatiliseks** ehk tururiskiks ning **mittesüstemaatiliseks ehk spetsiifiliseks** riskiks. Mittesüstemaatiliseks riskiks nimetame seda osa riskist, millest on võimalik vabaneda portfelli diversifitseerimise abil.
Empiirilised uurimused on näidanud, et kuna erinevate väärtpaberite (investeerimisprojektide) omavaheline korrelatsioon on väiksem ühest, on võimalik portfelli diversifitseerimise abil summaarset riski oluliselt vähendada ilma, et sellega kaasneks tulususe vähenemine. Fabozzi ja Modigliani toovad välja järgmised üldistused diversifitseerimise mõju kohta:

• USA-s koosneb keskmise aktsia risk 30% ulatuses süstemaatilisest riskist ja 70% ulatuses mittesüstemaatilisest riskist.
• Portfell, mis koosneb üle kahekümne juhuslikult valitud ettevõtte aktsiatest, sisaldab üksnes süstemaatilist riski.

Riski hajutamise edukus sõltub otseselt portfelli kuuluvate erinevate ettevõtete arvust (vt joonis 8).



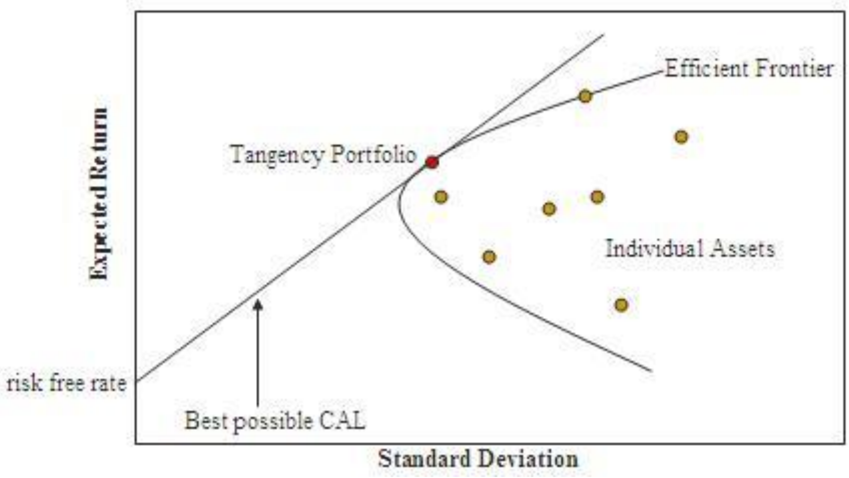
Joonis 8. Portfelli risk sõltuvalt portfelli kuuluvate erinevate väärtpaberite arvust.

Mitmete kapitaliturgusid käsitlevate teooriate kohaselt kompenseeritakse investoritele üksnes süstemaatilise riski kandmine. Juhul, kui väärtpaberiturul on palju diversifitseeritud väärtpaberiportfelle omavaid investoreid, kujuneb aktsia turuhind nii kõrgeks, et sellelt saadav oodatav tulumäär kompenseerib üksnes selle osa riskist, mida pole võimalik portfelli koostamise abil hajutada.

11.4. Finantsvarade hindamise mudel CAPM

Finantsvarade hindamise mudelit (*Capital asset pricing model*, CAPM) kasutakse selleks, et teoreetiliselt määrata vara sobivat oodatavat tulumäära selleks, et teha otsuseid tema sobivuse kohta diversifitseeritud portfellis. CAPM töötati välja 1960-ndatel aastatel (Treynor, Sharpe, Lintner, Mossin).

Joonisel 7 on toodud efektiivsuse kõver juhul kui portfell koosneb vaid riskantsetest väärtpaberitest. Kui aga lülitada portfelli ka riskivaba väärtpaber, siis efektiivsuse kõveraks on sirge (vt. joonist 9), mis on puutujaks eelnevale (ainult riskantsetest väärtpaberitest koosnevate portfellide) efektiivsuskõverale.



Joonis 9. Kapitali allokatsioonijoon CAL.

Lõik, millede otspunktideks $(0, r_F)$ ja (μ_M, σ_M) (punkt (μ_M, σ_M) on joonisel 9 *tangency portfolio*) on efektiivsuskõveraks juhul, kui lühike positsioon ei ole lubatud ning seda nimetatakse kapitali allokatsioonijooneks (*capital allocation line,* CAL). Punktis $(0, r_F)$ koosneb portfell vaid riskivabast varast ning punktis (μ_M, σ_M) vaid riskantsetest varadest. Portfellide korral, mis asuvad efektiivsuskõveral punktist (μ_M, σ_M) paremal, laenatakse raha juurde ning paigutatakse see kõik riskantsetesse väärtpaberitesse (s.t. võetakse lühike positsioon riskivaba vara suhtes). Portfelli oodatava tulumääraga μ_M ning tulumäära standardhälbega σ_M nimetatakse **turuportfelliks.**

CAL joone võrrand on esitatav kujul

$$\mu_C = r_F + \sigma_C \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M}, \tag{6}$$

kus μ_M, σ_M on riskantsete varade portfelli tulumäär ja standardhälve ning μ_C, σ_C on oodatav tulumäär ja tulumäära standardhälve riskivaba vara ja riskantse portfelli kombinatsiooni korral CAL joonel. Paneme tähele, et riskivaba vara lisamine portfelli suurendab tulumäära/riski suhet, kuna seosest (6) saame

$$\frac{\mu_C}{\sigma_C} = \frac{\mu_M}{\sigma_M} + r_F\left(\frac{1}{\sigma_C} - \frac{1}{\sigma_M}\right) > \frac{\mu_M}{\sigma_M}.$$

Kuna ratsionaalsed investorid hoiavad oma riskantseid varasid samades proportsioonides turuportfelliga ning turg on tasakaalus, siis riskantsete varade oodatavad tulumäärad on kohandatud vastavalt sellele, kuidas riskantseid varasid pakutakse turul. Seega turul väärtpaberite suhteline pakkumine on võrdne suhtelise nõudmisega. Vara oodatav tulumäär sõltub selle vara hinnast täna. Hind, mida vara eest makstakse, peab garanteerima selle, et turuportfelli riski ja oodatava tulumäära karakteristikud ei halvene, kui vara lisandub turule. CAPM mudel tuletab teoreetilise oodatava tulumäära vara jaoks tingimusel, et riskivaba intressimäär ja tururisk on teada investoritele:

$$E(R) = r_F + \beta(\mu_M - r_F). \tag{7}$$

Finantsvarade hindamise mudeli kohaselt sõltub riskantse vara nõutav oodatav tulumäär $E(R)$ riskivabast intressimäärast r_F, vara süstemaatilist riski väljendavast **beetakordajast** β ning tururiskipreemiast $\mu_M - r_F$.
Süstemaatilise riski suurust mõõdab vara **beetakordaja** (*beta*):

$$\beta = \frac{Cov(R, R_M)}{Var(R_M)},$$

kus $Var(R_M)$ on turuportfelli tulumäära dispersioon ning $Cov(R, R_M)$ on vara ja turuportfelli tulumäärade vaheline kovariatsioon. Praktikas hinnatakse beetat ajalooliste andmete põhjal vaadeldes regressioonimudelit vara tulumäärade ja turuportfelli tulumäärade vahel:

$$R_t = a + \beta R_{M,t} + \varepsilon_t.$$

Aktsiate korral võetakse turuportfelli tulumääraks sageli vastava aktsiaturu aktsiaindeks. Ühest kõrgema beetakordajaga varad on süstemaatiliste riskide suhtes tundlikumad, ühest väiksema beetaga varad aga vähemtundlikumad. Turuportfelli enda beetakordaja on alati võrdne ühega. Beetakordajat kasutatakse nii portfelli optimeerimiseks kui ka nõutava tulunormi leidmiseks.

Tururiskipreemia $\mu_M - r_F$ näitab kui palju ületab riskantsetelt varadelt saadav oodatav tulumäär optimaalselt koostatud portfelli korral riskivaba intressimäära.

Valemi (7) selgitus.

Vaatleme, kuidas muutub turuportfelli oodatav tulumäär ja tulumäära dispersioon, kui lülitame vara oodatava tulumääraga μ ja standardhälbega σ_a turuportfelli

$$\sigma_V^2 = (1 - x_a)^2 \sigma_M^2 + x_a^2 \sigma_a^2 + 2(1 - x_a) x_a \rho_{aM} \sigma_a \sigma_M.$$

Lisanduv risk seega on ligikaudselt võrdne suurusega $2(1 - x_a) x_a \rho_{aM} \sigma_a \sigma_M$, kuna $x_a^2 \sigma_a^2 << 2(1 - x_a) x_a \rho_{aM} \sigma_a \sigma_M$, kui osakaal x_a on väike. Portfelli oodatav tulumäär $\mu_V = (1 - x_a)\mu_M + x_a E(R_a)$ ning seega lisanduv oodatav tulumäär on $x_a E(R_a)$.

Kui vara on korrektselt hinnatud, siis oodatava tulususe ja riski suhte paranemine peab olema sama hea võrreldes sellega, kui paigutada selle vara ostmisele kuluv raha turuportfelli osa suurendamisele:

$$\frac{x_a (E(R_a) - r_F)}{2(1 - x_a) x_a \rho_{aM} \sigma_a \sigma_M} = \frac{x_a (\mu_M - r_F)}{2(1 - x_a) x_a \sigma_M \sigma_M}.$$

Viimasest võrdusest saame

$$E(R_a) = r_F + \left(\frac{\rho_{aM} \sigma_a \sigma_M}{\sigma_M^2} \right) (\mu_M - r_F)$$

ehk

$$E(R_a) = r_F + \beta(\mu_M - r_F).$$

Finantsvarade hindamise mudel väidab, et mingi aktiva oodatav tulumäär on leitav riskivaba tulumäära ja tururiskipreemia summana, kusjuures investorile kompenseeritakse üksnes sellise riski võtmine, mida pole võimalik diversifitseerida väärtpaberiportfelli koostamise teel (süstemaatiline risk). Finantsvarade hindamise mudeli väljatöötamine 1960-ndatel mõjutas oluliselt ka majanduspraktikat. Üheks väljundiks oli täiendava tõuke andmine indeksfondide levikule – mudel väitis, et teatud spetsiifiliste eelduste täidetuse korral peaksid kõik investorid eelistama riskantse portfellina turuportfelli. Teiseks oluliseks väljundiks oli beetakordajate ulatuslik kasutamine aktiva riskitaset iseloomustava näitajana.

11.5. Arbitraažihindade mudel

Arbitraažihindade mudel (*arbitrage pricing theory, APT*) on samuti välja töötatud varade hindamiseks. Oodatavat tulumäära vaadeldakse lineaarse funktsioonina mitmetest makroökonoomilistest faktoritest, kusjuures iga faktori mõju antud varale iseloomustab faktorile vastav beetakordaja. Mudeli baasil tuletatud tulumäära saab kasutada vara hindamiseks.

APT on mudel, kus tulumäärade erinevust erinevate varade vahel modelleeritakse mitmete faktorite abil. Faktoritena kasutatakse enamasti võlakirjaturu näitajaid, inflatsiooni, majandusprognoosidega seotud faktoreid, väärtpaberituruindeksit jne. Faktorite valikul lähtutakse empiirilisest sobivusest. Mudeli üldkuju on

$$E(R) = r_F + b_1 RP_1 + b_2 RP_2 + \ldots + b_K RP_K$$

kus RP_k on k-nda faktori riskipreemia ning b_k on k-ndale faktorile vastav beetakordaja.

12. Riskide maandamine

12.1. Optsioonide väljaandmisega seotud riskide maandamine

Euroopa ostuoptsiooni väljaandmisel (müümisel) on müüja kasum/kahjum

$$V_C e^{rT} - (S(T) - X)^+,$$

ning näeme, et kahjum võib olla kuitahes suur kui alusvara hind $S(T)$ kasvab; Euroopa müügioptsiooni väljaandja kasum/kahjum $V_P e^{rT} - (X - S(T))^+$ ei saa küll olla lõpmatu suur, kuid võib olla ikkagi väga suur võrreldes võimaliku tuluga. Seega optsioonide väljaandmisel on oluline riske maandada. Osutub, et optsioonide väljaandmisega seotud riske ei ole võimalik maandada ühe konkreetse väärtpaberiportfelliga, mida hoiame kogu optsiooni eluea, vaid portfelli on vaja muuta pidevalt, kui alusvara hind muutub.

Vaatleme portfelli, mis koosneb mingist derivatiivist, võlakirjadest (riskivaba rahapaigutus) ning aktsiast, mis on antud derivatiivi alusvara.

Üldsust kitsendamata eeldame, et võlakirja hind on 1. Siis portfelli väärtus $V(S)$ on leitav valemiga

$$V(S) = xS + y + zD(S),$$

kus $D(S)$ on derivatiivi hind, S on alusvara hind ning x, y, z on vastavalt aktsiate, võlakirjade ning derivatiivide kogus portfellis. Kui me anname ühe derivatiivi välja (võtame lühikese positsiooni), siis $z=-1$ ning

$$V(S)=xS+y-D(S). \tag{1}$$

Kokkuvõttes selle portfelli väärtus sõltub aktsia hinnast, kusjuures aktsia hinna väikeste muutuste ($S->S+\Delta S$) korral kehtib ligikaudne võrdsus

$$\Delta V(S) \approx \frac{d}{dS} V(S) * \Delta S .$$

Suurust $\frac{d}{dS} V(S)$ nimetatakse portfelli **deltaks** ning strateegiat, kus portfelli muudetakse kogu aeg nii, et $\frac{d}{dS} V(S)=0$, nimetatakse delta-maandamiseks (*delta hedging*) .

Võrdusest (1) saame

$$\frac{d}{dS} V(S)=x-\frac{d}{dS} D(S)$$

ning seega delta-maandamise korral tuleb aktsia kogus x portfellis hoida võrdsena suurusega $\frac{d}{dS} D(S)$.

Euroopa optsioonide hind on leitav Black-Scholesi valemitega ning saab näidata, et ostuoptsiooni korral

$$\frac{d}{dS} D(S)=\frac{d}{dS} V_C(S)=N(d_1)$$

ning müügioptsiooni korral

$$\frac{d}{dS} D(S)=\frac{d}{dS} V_P(S)=-N(-d_1).$$

Seega Euroopa ostuoptsiooni korral $x=N(d_1)$ ning aktsia hinna tõustes tuleb suurendada ka vastava aktsia kogust portfellis, müügioptsiooni korral aga tuleb aktsia hinna tõustes vähendada aktsia kogust portfellis.

Võlakirjade kogus portfellis võime valida nii, et portfelli hind on null, seega ostuoptsiooni korral

$$y=D(S)-xS=V_C(S)-N(d_1)S=-Xe^{-rT} N(d_2).$$

Teame, et optsiooni hind ning seega ka riski maandava portfelli hind võib sõltuda ka muudest parameetritest : üldjuhul $V=V(S,t,\sigma,r)$. Finantsmatemaatikas kasutatakse vastavate osatuletiste tähistamiseks järgnevaid tähiseid:

$$\text{Delta}=\frac{\partial V}{\partial S};$$

$$\text{Gamma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

$$\text{Theta}=\frac{\partial V}{\partial t};$$

$$\text{Vega}=\frac{\partial V}{\partial \sigma};$$

$$\text{Rho}=\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Kasutades Taylori valemit, saame :

$$\Delta V \approx delta*\Delta S + theta*\Delta t + vega*\Delta\sigma + rho*\Delta r + 0.5gamma*(\Delta S)^2.$$

Kõigi nende riskide puhul on portfell maandatud, kui muudame ajas portfelli nii, kõik vastavad osatuletised on nullid. See aga praktikas liiga keeruline, kuid võime vaadelda näiteks *delta-gamma hedging* või *delta-vega hedging*.

12.2. Spekuleerimine derivatiividega

A. Investor usub, et aktsia hind kasvab mõõdukalt. Sellisel juhul on mõistlik teha järgmised tehingud (nimetus – *bull-spread*)

a) Osta ostuoptsioon täitmishinnaga X'

b) Müüa ostuoptsioon täitmishinnaga $X''> X'$

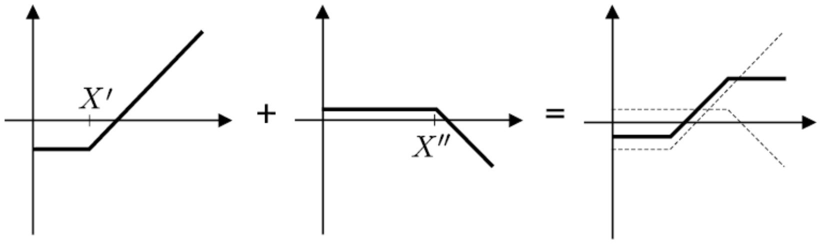


Figure 9.2 Bull spread

B. Investor usub, et aktsia hind langeb mõõdukalt. Sellisel juhul on mõistlik teha järgmised tehingud (nimetus – *bear-spread*)

a) Müüa müügioptsioon täitmishinnaga X'

b) Osta ostuoptsioon täitmishinnaga $X''> X'$

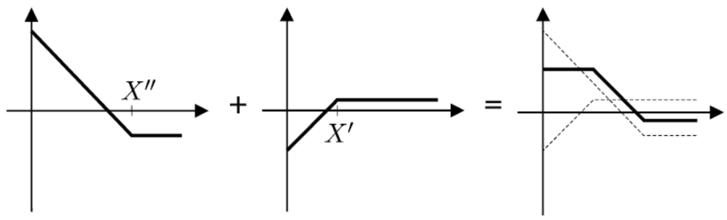


Figure 9.3 Bear spread

C. Investor usub, et aktsia hind jääb enam-vähem samaks. Sellisel juhul on mõistlik teha järgmised tehingud (nimetus – *butterfly*)

a) Osta kaks ostuoptsiooni vastavalt täitmishindadega X' ja X'''

b) Müüa kaks ostuoptsiooni täitmishinnaga X'', kusjuures $X' < X'' < X'''$.

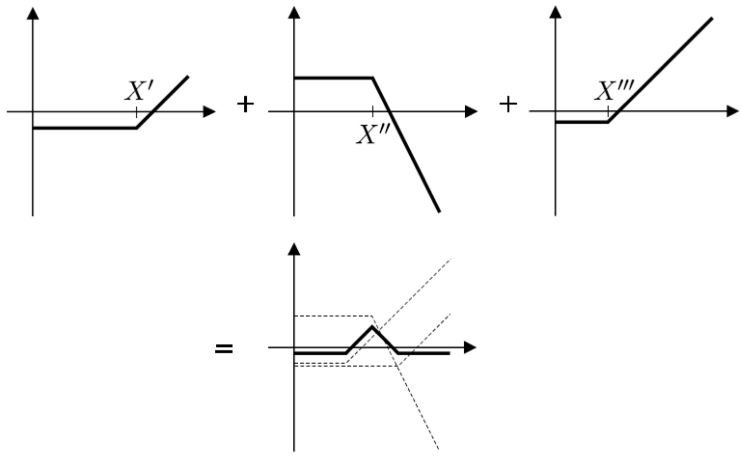


Figure 9.4 Butterfly

Reverse butterfly - saame panustada sellele, et aktsia hind ei jää enam-vähem samaks.