

MATEMAATILINE MAAILMAPILT

praktikumiülesannete kogu

2021. a. sügissemester

Sisukord

1	Lausearvutus	4
2	Valemite teisendamine	10
3	Hulga mõiste	15
4	Tehted hulkadega	18
5	Arvuteooria elemente ja matemaatiline induktsioon	24
6	Funktsioonid	30
7	Hulga võimsus	39
8	Seosed	42

1. Lausearvutus

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
t	t	v	t	t	t	t
t	v	v	v	t	v	v
v	t	t	v	t	t	v
v	v	t	v	v	t	t

Tehete järjekord: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Definitsioon. Lausearvutuse valemid on parajasti need, mida saab koostada järgmiste reeglite abil:

- iga lausemuutuja on lausearvutuse valem;
- tõeväärtused t ja v on valemid;
- kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $\neg \mathcal{F}$ on lausearvutuse valem;
- kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, siis ka $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ ja $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid;
- kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $(\mathcal{F})$ on lausearvutuse valem.

Definitsioon. Lausearvutuse valem $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt tõeseks, kui ta on igal väärtustusel tõene. Valem $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt vääraks, kui ta on igal väärtustusel väär.

Definitsioon. Lausearvutuse valem $\mathcal{F}$ nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene. Valem $\mathcal{F}$ nimetatakse kummutatavaks, kui ta on vähemalt ühe väärtustuse korral väär.

1. Kontrollige, kas järgmised laused võivad olla lausearvutuse lauseteks. Kui mõne lause puhul ei õnnestu leida ühest vastust, siis püüdke formuleerida tingimusi või lisandusi, mille rakendamisel võiks lauset lugeda lausearvutuse lauseks.

- Elu kui kunstiteos.
- Kõik luiged on valged.
- Mõisa köis, las lohiseb.
- Õppida, õppida, õppida.
- Selle lause kirjapanemiseks on kasutatud vähemalt kümmet sõna.
- 1000000000 on kõige suurem arv.
- Kõige suuremat arvu ei leidu.

2. Lugege järgmised laused (x, y, a, b ja α on reaalarvud).

- $\forall y, y^4 + 4 > 0$
- $\forall a, \forall b, a \cdot b = b \cdot a$
- $\forall \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$
- $\exists x, \log_a x = 0$
- $\exists \alpha, \tan \alpha \neq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\forall a, \forall b, |a \pm b| \leq |a| + |b|$
- $\exists x, e^x = 1$

3. Kirjutage järgmised laused sümboolite $\forall$ ja $\exists$ abil.

- a) Iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.
- b) Leidub selline nurk α , mille koosinus on võrdne arvuga 0,5.
- c) Iga taandatud ruutvõrrandi lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega.
- d) Mistahes kahe arvu korral nende summa ei sõltu liidetavate järjekorrast.
- e) Iga nelja vabalt valitud naturaalarvu hulgas leidub kaks arvu, mille vahe jagub kolme-ga.
- f) Iga täisarvu x korral leidub täisarv y nii, et $xy = 1$.
- g) Ei ole vahet millise täisarvu sa valid, alati leidub teine täisarv, mis on temast suurem.

4. Määrake järgmiste lausete tõeväärtused kui n ja m on täisarvud.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|--|
| a) $\forall n, n + 1 > n$. | e) $\forall n, n^2 \geq 0$. | i) $\forall n, \exists m, n^2 < m$. |
| b) $\exists n, 2n = 3n$. | f) $\exists n, n^2 = 2$. | j) $\exists n, \forall m, n < m^2$. |
| c) $\exists n, n = -n$. | g) $\forall n, n^2 \geq n$. | k) $\forall n, \exists m, n + m = 0$. |
| d) $\forall n, 3n \leq 4n$. | h) $\exists n, n^2 < 0$. | l) $\exists n, \forall m, nm = m$. |

5. Määrake järgmiste lausete tõeväärtused kui x ja y on reaalarvud.

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\exists x, x^3 = -1$. | e) $\exists x, x^2 = 2$. | i) $\forall x, \exists y, x^2 = y$. |
| b) $\exists x, x^4 < x^2$. | f) $\exists x, x^2 = -1$. | j) $\exists x, \forall y, xy = 0$. |
| c) $\forall x, (-x)^2 = x^2$. | g) $\forall x, x^2 + 2 \geq 1$. | |
| d) $\forall x, 2x > x$. | h) $\forall x, x^2 \neq x$. | |

Kvantoreid $\forall$ (iga) ja $\exists$ (leidub) sisaldavates lausetes väite $P(x)$ eitamine (eitustehte $\neg$ kasu-tamine):

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x)), \quad \neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x)),$$

$$\neg(\forall x \exists y P(x, y)) \equiv \exists x \forall y(\neg P(x, y)), \quad \neg(\exists x \forall y P(x, y)) \equiv \forall x \exists y(\neg P(x, y)).$$

6. Moodustage antud lausete eitused ja määrake nende tõeväärtused.

- a) 2015 jagub 3-ga.
- b) Iga algarv on paaritu arv.
- c) Pole õige, et 2 on algarv.
- d) Diameetrile toetuv piirdenurk on sirgnurk.
- e) Igal ruutvõrrandil on kaks reaalselt lahendit.
- f) Leidub positiivne arv, millest ei saa logaritmi võtta.
- g) $\exists x, x^2 + 1 > 0$.
- h) $\forall \alpha, \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$.

7. Eitage järgmisi lauseid.

- a) Leidub arv, mis on võrdne oma vastand arvuga.
- b) Iga kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.
- c) Igal kolmnurgal on ümberringjoon.

- d) Leidub kolmnurk, mille mediaanid ei lõiku ühes punktis.
- e) Iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.
- f) Leidub reaalarv x , mille jaoks $y^3 \neq x$ kõikide reaalarvude y korral.
- g) Leidub reaalarv a , mille jaoks $a + x = x$ iga reaalarvu x korral.

8. Eitage järgmisi lauseid.

- a) Kõik naised on emad.
- b) Kõikidel koertel on kurbud.
- c) Mõned tudengid on lahendanud kõik ülesanded sellest ülesannete kogust.
- d) Siin klassis on keegi, kellel ei ole hea suhtumine.
- e) Iga tudeng siit klassist on võtnud kursuse kõrgemast matemaatikast.
- f) On olemas aus poliitik.
- g) Kõik ameeriklased söövad juustuburgereid.

9. Eitage järgmisi lauseid ja määrake nende tõeväärtused.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\exists x \in \mathbb{R}, e^x < 0$. | e) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x > y$. | i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, x + y > 0$. |
| b) $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = 1$. | f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$. | j) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$. |
| c) $\exists x \in \mathbb{N}, x = x + 1$. | g) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$. | k) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = y$. |
| d) $\forall x \in \mathbb{N}, x + x = 2x$. | h) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$. | l) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$. |

10. Sõnastage järgmised laused, eeldades, et A tähendab lauset "Mulle meeldib jäätis" ja B tähendab lauset "Sulle meeldib šokolaad".

- | | | | | |
|-----------------|---------------|-----------------------|-------------------------|---------------------|
| a) $A \wedge B$ | c) $\neg B$ | e) $A \vee \neg B$ | g) $\neg A \vee \neg B$ | i) $\neg(A \vee B)$ |
| b) $\neg A$ | d) $A \vee B$ | f) $\neg(A \wedge B)$ | h) $\neg A \wedge B$ | |

11. Olgu lause $A = \text{"Hiir hüppab"}$ ja $B = \text{"Kass kargab"}$. Kirjutage sümbolkujul järgmised laused.

- | | |
|--|--|
| a) Hiir hüppab või kass kargab. | d) Hiir ei hüppa ja kass ei karga. |
| b) Kass ei karga. | e) Pole tõsi, et "Hiir hüppab ja kass kargab". |
| c) Pole tõsi, et "Hiir hüppab või kass kargab" | f) Hiir ei hüppa või kass ei karga. |

12. Olgu lause $P = \text{"Hiir hüppab"}$, lause $Q = \text{"Kass kargab"}$ ja lause $R = \text{"Vana karu lööb trummi"}$. Loe järgmised laused.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|--|
| a) $P \Rightarrow Q$ | d) $\neg(P \Rightarrow Q)$ | g) $(R \vee Q) \Rightarrow P$ |
| b) $Q \Rightarrow P$ | e) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ | h) $R \vee (Q \Rightarrow P)$ |
| c) $\neg Q \Rightarrow \neg P$ | f) $P \wedge (Q \Rightarrow R)$ | i) $(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$ |

13. Tähistagu suured ladina tähed järgmisi lauseid:

$A = \text{"On pühapäev"}$,

$B = \text{"Kristjan läheb teatrisse"}$,

$C = \text{"Kristjan läheb sõbrale külla"}$,

$D = \text{"Kristjan läheb koeraga jalutama"}$,

$E = \text{"Kristjan istub kodus"}$.

Loe järgmised laused.

- a) $A \Rightarrow B$
- b) $D \wedge A \Rightarrow \neg B$
- c) $\neg A \Rightarrow \neg(B \vee C)$
- d) $\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \Rightarrow E$
- e) $A \Rightarrow \neg E \wedge (B \vee C \vee D)$
- f) $(A \Rightarrow \neg E) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg E)$

14. Pange järgmised väited kirja valemitega, milles võrdused ja võrratused on ühendatud lausearvutuse tehete märkidega. Muutujad a , b ja c tähistavad reaalarve.

- a) $a \cdot b = 0$.
- b) $a \cdot b \neq 0$.
- c) $\frac{a}{b} = 0$.
- d) $|a| = 3$.
- e) Punkt (a, b) asub koordinaattasandi I veerandis.
- f) Punkt (a, b) asub koordinaatteljel.
- g) Reaalarvud a , b ja c on mingi kolmnurga külgede pikkused.
- h) Reaalarvud a , b ja c on mingi võrdhaarse kolmnurga külgede pikkused.

15. Pange järgmised väited kirja lausearvutuse valemiga. Andke ka teisenduse „võti“, see tähendab, tabel, kust selgub, millised tähed vastavad millistele lihtlauseatele. Iga lause puhul hinnake, millised tähendusnüansid lähevad valemiks teisendamisel kaotsi.

- a) Toas on kas isa või ema või on nad mõlemad.
- b) Anu armastab koeri, kuid Mart kasse.
- c) Kui hr. Kask on õnnelik, siis pr. Kask on õnnetu, ja kui hr. Kask on õnnetu, siis pr. Kask on õnnelik.
- d) Pole sellel tegelasel ei kaastunnet ega südametunnistust.
- e) Kui Kungla rahvas kuldsel aal kord istus maha sööma, siis Vanemuine murumaal läks kandleluse lööma.
- f) Talvel jääsevad laevad sadamast välja ainult siis, kui jäälõhkuja on neile tee rajanud.
- g) Kui õnnetusi tuleb, siis tuleb neid uksest ja aknast.
- h) Kui ma nüüd vangerdan, siis ma kaotan lipu, kui jätan vangerdamata, siis saan mati.
- i) Televiisori vea põhjus on mittekvaliteetne transistor või on kaitse läbi põlenud ja vool ei pääse toiteploki.
- j) Kommunism – see on nõukogude võim pluss kogu maa elektrifitseerimine.

16. Pange järgmised laused kirja lausearvutuse valemiga.

- a) Selleks, et päike tõuseks idast, on tarvilik, et ta loojub läänes.
- b) Selleks, et päike tõuseks idast, on piisav, et ta loojub läänes.
- c) Tarvilik tingimus, et ettevõtte oleks edukas, on see, et tema asutajatel on küllaldaselt algkapitali.
- d) Teatrite korralikuks töötamiseks piisab riigi toetusest.
- e) Ilma riigi toetuseta lakkavad teatrid korralikult töötamast.
- f) Tarvilik ja piisav tingimus, et rida koonduks absoluutselt, on see, et rea kõik ümberjärjestused koonduvad samaks summaks.

17. Leidke järgmiste lausete tõeväärtused.

- a) Kui 20 jagub 10-ga, siis 20 jagub 5-ga.
- b) Kui 20 jagub 5-ga, siis 20 jagub 10-ga.

- c) Kui 20 jagub 3-ga, siis 20 jagub 6-ga.
- d) Kui 20 jagub 4-ga, siis 20 jagub 8-ga.
- e) 20 jagub 5-ga parajasti siis, kui 20 jagub 4-ga.
- f) 10 jagub 5-ga parajasti siis, kui 10 jagub 4-ga.

18. Leidke järgmiste väidete tõeväärtused. Esmalt määrake kindlaks komponentide tõeväärtused ja nende järgi arvutage kogu lause tõeväärtus, kasutades lausearvutuse reegeleid.

- a) Vesinik on gaas ja kui elavhõbe on gaas, siis ka kuld on gaas.
- b) Pole õige, et Kuu ei ole ümmargune.
- c) Keskerakond võitis valimised ja ei võitnud ka.
- d) Narva asub Eesti loodeosas parajasti siis, kui Pärnu asub Eesti kaguosas.

19. Laual on neli kaarti. Iga kaardi ühele poole on kirjutatud täht ja teisele poole täisarv. Kaardid paistavad nagu joonisel kujutatud:

A K 7 4

Meil on vaja veenduda, kas kehtib väide „Kui kaardi ühel pool on täishäälik, siis teisel pool on paarisarv.“ Millised kaardid tuleb kindlasti ümber pöörata, et teada saada, kas see väide tõepoolest kehtib või ei?

20. Lausete A ja B tõeväärtused a ja b on kas 1 (tõene) või 0 (väär). Leidke muutujaid a ja b kasutavad aritmeetilised avaldised lausete

- a) $\neg A$, b) $A \wedge B$, c) $A \vee B$, d) $A \Rightarrow B$, e) $A \Leftrightarrow B$

tõeväärtuste arvutamiseks.

21. Järgmiste lausete kirjapanemiseks vajalikud valemid sisaldavad implikatsiooni või ekvivalentsi. Leidke nende lausete tõeväärtused, kasutades implikatsiooni ja ekvivalentsi tõeväärtuse definitsiooni.

- a) Kui $1 = 1$, siis $2 = 2$.
- b) Kui $1 = 2$, siis $2 = 3$.
- c) Kui $1 = 1$ ja $1 = 2$, siis $1 = 3$.
- d) Kui $1 = 2$ või $1 = 3$, siis $1 = 1$.
- e) $1 = 2$ parajasti siis, kui $2 = 3$.
- f) $1 = 1$ parajasti siis, kui $2 = 2$ ja $3 = 3$.
- g) Kui 1 ei võrdu 2-ga, siis $1 = 3$.
- h) 1 ei võrdu 3-ga parajasti siis, kui 1 ei võrdu 2-ga või 1 ei võrdu 1-ga.

22. Koostage valemite tõeväärtustabelid.

- a) $(X \Rightarrow \neg Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y)$
- b) $\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow (X \vee Z)$
- c) $(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$
- d) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- e) $(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$
- f) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((Y \wedge Z) \Rightarrow (X \wedge Z))$
- g) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

23. Kas järgmised valemid on kehtestatavad? Põhjendage vastust!

a) $\neg(X \Rightarrow \neg X)$

b) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

24. Näidake, et valemid on samaselt tõesed.

a) $X \vee \neg X$

c) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Y))$

b) $X \Rightarrow (X \vee Y)$

d) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

25. Määrake valemi liik (samaselt tõene, samaselt väär, kehtestatav, kummutatav).

a) $P \Rightarrow \neg P$

c) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

b) $\neg(P \Rightarrow \neg P)$

d) $P \Leftrightarrow \neg P$

26. Lausearvutuse valemite kirjanemiseks on käibel ka *poola kuju*, mille võttis 1928. aastal kasutusele poola loogik Jan Lukasiewicz. Selles ei panda tehtmärk mitte ühendatavate osavalemite vahele, vaid nende ette. Poola kuju iseärasusena pole valemities vaja kasutada sulge. Valemid $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, on poola kujul vastavalt *Na*, *Kab*, *Aab*, *Cab*, *Eab* (lausemuutujad kirjutatakse väikese tähega). Keerukamaid valemeid koostatakse analoogiliselt. Näiteks valemile $A \wedge B \vee C$ vastab valem *AKabc*, valemile $A \wedge (B \vee C)$ aga *KaAbc*. Alljärgnevatest valemities teisendage a)–c) poola kujule ning d)–f) tavakujule.

a) $((A \vee B) \wedge (B \vee C)) \wedge (A \vee C)$

d) *EcNCbKad*

b) $\neg A \wedge (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

e) *AaCKNabc*

c) $(A \vee B) \Rightarrow (C \Leftrightarrow D) \wedge A$

f) *KENAabcd*

2. Valemite teisendamine

Definitsioon. Öeldakse, et valemite $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldeb valem $\mathcal{G}$, kui igal neis valemis esinevate muutujate väärtustusel, millel $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{G}$ tõene.

Teoreem. Valemite $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldeb valem $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

Definitsioon. Vameid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse loogiliselt samaväärseteks, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemis esinevate muutujate väärtustusel.

Olgu $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ valemid.

1. Idempotentsuse omadused:

- a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

2. Kommutatiivsuse omadused:

- a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \wedge \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$.

3. Assotsiatiivsuse omadused:

- a) $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H})$,
- b) $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$.

4. Distributiivsuse omadused:

- a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$,
- b) $\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H}) \equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$.

5. Neelamisomadused:

- a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$.

6. De Morgani seadused (duaalsus):

- a) $\neg(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$,
- b) $\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$.

7. Kahekordse eituse omadus: $\neg\neg\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

8. Liikmete elimineerimise reeglid, kus t on suvaline samaselt tõene valem ja v on suvaline samaselt väär valem:

- a) $\mathcal{F} \wedge t \equiv \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee t \equiv t$,
- c) $\mathcal{F} \wedge v \equiv v$,
- d) $\mathcal{F} \vee v \equiv \mathcal{F}$.

9. Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu:

- a) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G})$,
- b) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.

10. Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu:

- a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.

11. Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu:

- a) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$,
- b) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F})$.

Definitsioon. Lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ täielikuks disjunkttiivseks normaalkujuks nimetatakse valemiga $\mathcal{F}$ samaväärset valemist, mis kujutab endast erinevate täielike lihtkonjunktsioonide disjunktsiooni.

- 27.** a) Kas valemitest A ja $\neg B$ järelneb valem $\neg(A \Rightarrow B)$?
b) Kas valemitest $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ ja A järelneb valem C ?

28.

- a) On teada, et valem $\neg A \Leftrightarrow B$ on tõene. Mida võib sellest järelendada valemi $A \Rightarrow \neg B$ tõesuse kohta?
b) On teada, et valem $\neg A \Leftrightarrow B$ on tõene. Mida võib sellest järelendada valemi $\neg(A \vee B)$ tõesuse kohta?

29. Kolme väite A , B ja C kohta on teada järgmist.

- a) Kui A on tõene, siis ka B ja C on tõesed.
b) Kui B on tõene, siis vähemalt üks väidetest A ja C on tõene.
c) Kui C on tõene, siis A on tõene ja B on väär.

Millised väidetest A , B , C on tõesed?

30. Pange järgmine arutlus kirja lausearvutuse valemitega ja tõestage, et see arutlus kehtib, st tõestage, et eeldustele vastavatest valemitest järelneb väitele vastav valem.

Õpilased on rõõmsad siis ja ainult siis, kui ei toimu kontrolltööd. Kui õpilased on rõõmsad, siis on õpetajal hea meel. Ent kui õpetajal on hea meel, siis ta ei taha pidada tundi, ning kui ta ei taha pidada tundi, siis toimub kontrolltöö. Järelikult õpilased pole rõõmsad.

31. On teada järgmised faktid.

- a) Kui Mihkel köhib ja on näost valge, siis ta kas on haige või on käinud nurga taga suitsu tegemas.
b) Kui Mihkel pole käinud suitsu tegemas ja ikkagi köhib või on näost valge, siis ta on haige.
c) Kui Mihkel on haige, siis ta köhib, aga pole näost valge.

Pärast vahetundi klassi tulles oli Mihkel näost valge. Kas sellest järelneb, et ta käis nurga taga suitsu tegemas?

32. On teada järgmised faktid.

- a) Kui Jüri vaatab korvpalli ja Eesti võidab, siis ta on õnnelik ja joob õlut.
b) Kui Jüri ei vaata korvpalli ja on ikkagi õnnelik, siis ta joob õlut.
c) Kui Eesti võidab, siis Jüri on õnnelik.

Õhtul oli Jüri õnnelik. Kas võib kindlalt väita, et ta jõi õlut? Põhjendage oma vastust.

33. Kui Siimule meeldiks šokolaad, siis ta sööks seda palju. Kui ta šokolaadi palju sööks, siis kaoks tal söögiisu. Kui tal kaoks söögiisu, siis ei meeldiks talle ka šokolaad. Järelikult šokolaad ei meeldi talle.

34. Zen-budismi guru teatas oma õpilastele: „Kui ma olen Buddha, siis ma ei ole Buddha.“ Õpilased olid seda kuulates hämmastunud. Väljendage väide valemiga, koostage tõeväärtustabel ja selgitage, millise lihtsama väitega on see väide samaväärne.

- 35.** Tõestage, et kui valemid A ja $A \Rightarrow B$ on samaselt tõesed, siis ka valem B on samaselt tõene.
- 36.** Keegi ütles, et tal on niisugused lausearvutuse valemid F ja G , et valemist F järeldeb valem G ja valemist F järeldeb valem $\neg G$. Kas selline olukord on võimalik?
- 37.** Näidake, et kehtivad samaväärsused.
- a) $(X \vee Y) \wedge Z \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z$ c) $X \Leftrightarrow Y \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$
b) $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$
- 38.** Teisendage järgmised valemid nii, et nad sisaldaksid ainult eitust ja konjunktsiooni.
- a) $\neg P \wedge Q \Rightarrow \neg Q \wedge P$ d) $\neg(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \Rightarrow \neg Q)$
b) $P \vee Q \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
c) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$ e) $(P \Leftrightarrow Q) \vee P$
- 39.** Teisendage järgmised valemid nii, et nad sisaldaksid ainult eitust ja disjunktsiooni.
- a) $(P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ d) $(P \Leftrightarrow Q) \wedge P$
b) $\neg P \wedge Q \Rightarrow \neg Q \wedge P$
c) $(P \Rightarrow Q) \wedge P$ e) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$
- 40.** Leidke loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab võimalikult vähe sümboleid.
- a) $\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge B)$ e) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
b) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \Rightarrow Q) \wedge P)$ f) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$
c) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$ g) $(P \Rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \vee Q)$
d) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$ h) $\neg(P \wedge Q \wedge (P \Rightarrow \neg Q))$
- 41.** Eitage järgmisi lauseid, viies eituse nii kaugele kui võimalik.
- a) Kui a , b ja c on kolmnurga külgede pikkused, siis kehtivad võrratused $a+b > c$, $a+c > b$ ja $b+c > a$.
b) Kui a , b ja c on täisarvud nii, et $a = bc$, siis a jagub arvuga b ja a jagub arvuga c .
c) Kui n on positiivne täisarv, siis $n^2 + n + 41$ on algarv;
d) Kõigi täisarvude a ja b korral kehtib väide, et kui $a + b$ on paarisarv, siis a ja b on mõlemad kas paarisarvud või paaritud arvud.
- 42.** Eitage järgmisi lauseid, viies eituse nii kaugele kui võimalik.
- a) Iga tudeng selles aines on käinud Soomes või Rootsis.
b) Iga e-mail, mis on suurem kui üks megabait, komprimeeritakse.
c) Kui kasutaja on aktiivne, siis on vähemalt üks võrguühendus saadaval.
d) Leidub siga, mis oskab ujuda ja kalu püüda.
e) Selles aines pole kedagi, kes oskaks prantsuse või vene keelt.

- f) Arv x on positiivne, aga arv y ei ole positiivne.
- g) Kui x on algarv, siis $\sqrt{x}$ ei ole ratsionaalarv.
- h) Kui x on paaritu arv, siis x^2 on paaritu arv.
- i) Kui x on ratsionaalarv ja $x \neq 0$, siis $\tan x$ ei ole ratsionaalarv.
- j) Kui $\sin x < 0$, siis ei kehti $0 \leq x \leq \pi$.
- k) $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$.
- l) $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$.
- m) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \Rightarrow (x - y > 0))$.
- n) $\exists x \exists y (((x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \wedge (x - y > 0)))$.
- o) $\forall x \forall y (((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Leftrightarrow (xy \neq 0)))$.

43. Teisendage järgmised valemid nii, et eituse märk esineks ainult muutujate ees.

- a) $\neg(\neg P \vee Q)$
- b) $\neg(P \wedge Q \vee \neg R)$
- c) $\neg(P \wedge Q \vee R) \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$
- d) $\neg(P \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge R)$

44. Viige täielikule disjunktivsele normaalkujule.

- a) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((Y \wedge Z) \Rightarrow (X \wedge Z))$
- b) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow (Y \wedge X))$
- c) $\neg((X \wedge Y) \Rightarrow \neg X) \wedge \neg((X \wedge Y) \Rightarrow \neg Y)$
- d) $(X \Rightarrow \neg Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y)$
- e) $\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow (X \vee Z)$
- f) $(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$
- g) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- h) $(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$

45. Konstrueerige valem, mis rahuldab tingimust.

- a) Valem on tõene parajasti siis, kui X on tõene ja Y väär.
- b) Valem on väär parajasti siis, kui X ja Y on mõlemad tõesed.
- c) Valem on tõene parajasti siis, kui vähemalt kaks lausetest X , Y ja Z on tõesed
- d) Valem on tõene parajasti siis, kui täpselt kaks lausetest X , Y ja Z on tõesed
- e) Valem on tõene parajasti siis, kui täpselt üks lausetest X , Y ja Z on tõesed

46. Leidke kolme muutuja valem, mis on tõene parajasti siis, kui täpselt kaks muutujat on väärad.

47. Leidke kolme muutuja valem, mis on sama tõeväärtusega kui enamus muutujaid.

48. Komisjon, kuhu kuuluvad liikmed A , B , C ja D , otsustab olulisemaid küsimusi hääletades. Igal liikmel on üks hää, välja arvatud komisjoni juht A , kelle häälel on kahekordne kaal. Otsus loetakse vastuvõetuks, kui otsuse poolt antakse vähemalt 3 häält. Leidke valem, mis on tõene parajasti siis, kui otsus võetakse vastu.

49. Koostage valem, mis on tõene parajasti siis, kui kahendarvude $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ summa on ülimalt kahekohaline kahendarv.

50. Leidke iga kahe muutujaga tõeväärtuste veeru jaoks lihtsaim selliste tõeväärtustega valem.

- 51.** Tehke kindlaks, kas lausearvutuses kehtib
- a) implikatsiooni assotsiatiivsus;
 - b) ekvivalentsi assotsiatiivsus;
 - c) distributiivsus konjunktsiooni ja implikatsiooni vahel.

- 52.** Avaldage ülejäänud tehted
- a) eituse ja disjunktsiooni kaudu;
 - b) eituse ja konjunktsiooni kaudu;
 - c) eituse ja implikatsiooni kaudu.

- 53.** Avaldage disjunktsioon implikatsiooni kaudu.

3. Hulga mõiste

Hulga all mõistetakse üksteisest erinevate objektide kogumit, mida vaadeldakse ühe tervikuna ja kus iga objekti korral on võimalik üheselt kindlaks määrata, kas ta kuulub antud hulka.

Hulki tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega $A, B, C, \dots$, hulga elemente väikeste ladina tähtedega $a, b, c, \dots$. Tühi hulk $\emptyset = \{\}$ ei sisalda ühtki elementi. Tähtsamad arvuhulgad on

- naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
- reaalarvude hulk $\mathbb{R}$;
- kompleksarvude hulk $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Intervallid on

- lõik $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;
- vahemik $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;
- poollõik $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;
- poollõik $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

Kahte hulka loetakse võrdseteks, kui nad koosnevad samadest elementidest.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B osahulgaks, kui kõik hulga A elemendid on hulga B elementideks (ehk hulga A iga element kuulub hulka B). Sel juhul tähistatakse $A \subset B$ või $B \supset A$.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B pärisosahulgaks ja kirjutatakse $A \subsetneq B$, kui hulk A on hulga B osahulk ja $A \neq B$.

Hulga A kõigi osahulkade hulka tähistatakse tavaliselt $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

54. Esitage hulk A kujul $\{x \mid P(x)\}$:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

c) $A = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$;

b) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$;

d) $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$;

e) $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\};$

g) $A = \{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots\};$

f) $A = \{\frac{1}{3 \cdot 6}, \frac{1}{6 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 12}, \frac{1}{12 \cdot 15}, \dots\};$

h) $A = [a, b);$

i) A on paarisarvude hulk.

55. Esitage elementide loetelu abil järgnevad hulgad:

a) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\};$

e) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 7x^2 - 8x = 0\};$

b) $\{n + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\};$

f) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1 \wedge y - x = 1\};$

c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 13n + 30 \leq 0\};$

g) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 4 = 0\};$

d) $\{\cos n\pi : n \in \mathbb{N}\};$

h) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}.$

56. Kirjutage välja antud hulkade kõik elemendid ja kõik osahulgad:

a) $\{a, b\};$

b) $\{1, \{1\}\};$

c) $\{a, b, c\}.$

57. Otsustage, kas antud väited on tõesed:

a) $3 \in \{1, 2, 3\};$

i) $\{\{3\}\} \subset \{2, 3, \{3\}\};$

b) $\{2\} \in \{1, 2, 3\};$

j) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\};$

c) $\{a, b, c\} = \{a, c, b\};$

k) $3 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\};$

d) $x \in \{x\};$

l) $\{\emptyset\} \in \emptyset;$

e) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\};$

m) $\emptyset \in \{\emptyset\};$

f) $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\};$

n) $\emptyset \subset \emptyset;$

g) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{3\}\};$

o) $\{\emptyset\} = \emptyset.$

h) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\};$

58. Kirjutage välja $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ ja $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

59. Kujutage antud hulga arvsirgel:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3 < x \leq 7\};$

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x - a| < \varepsilon\};$

b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < c\};$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 9x + 7 \geq 0\};$

- e) $\{2x^2 - 9x + 7 \mid x \in \mathbb{R}\};$ k) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x^2 - 9x + 6| = 2x^2 - 9x + 6\};$
 f) $\{x^2 + 2x + 1 \mid x \in (-2, \infty)\};$ l) $\{1 - |x| \mid x \in [-2, 1]\};$
 g) $\{x^2 + 2|x| + 1 \mid x \in (-1, 1)\};$ m) $\{|1 + x| + 1 \mid x \in [1, 2]\};$
 h) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|1 - 2x|} \geq 1 + x\};$ n) $\{y \in \mathbb{R} \mid y = -x^2 + 6x - 2 \wedge x \in (0, \infty)\};$
 i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|0.25 - x|} \geq x + 0.5\};$ o) $\{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 - 4x + 3 \wedge x \in (0, \infty)\}.$
 j) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| + 2x \geq 1\};$

60. Kujutage antud punktihulga koordinaattasandil:

- a) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 5\};$ d) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y \geq x^2\};$
 b) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b \wedge c < y \leq d\};$
 c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 4\};$ e) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge |x| + |y| = 1\};$

61. Kirjutage välja kõik antud hulga elemendid:

- a) $\{A \mid \{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3\}\};$ c) $\{A \mid A \subset \{a, b, c\} \wedge a \notin A \wedge b \in A\}.$
 b) $\{A \mid \{a, b\} \subset A \subset \{a, b, c, d\}\};$

62. (Lewis Carroll'i ülesanne) Vanal ajal toimunud lahingus sai palju sõdalasi kannatada. Lahingust osavõtjatest 70% kaotas silma, 75% - kõrva, 80% - käe ja 85% - jala. Kui palju sõdalastest (minimaalselt ja maksimaalselt) jäid ilma nii silmast, kõrvast, käest kui ka jalast?

63. Tõestage, et kui hulgas on n elementi, siis sellel hulgal on 2^n osahulka.

64. Olgu $A_1, A_2, \dots, A_n$ hulga. Tõestage, et $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_1 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

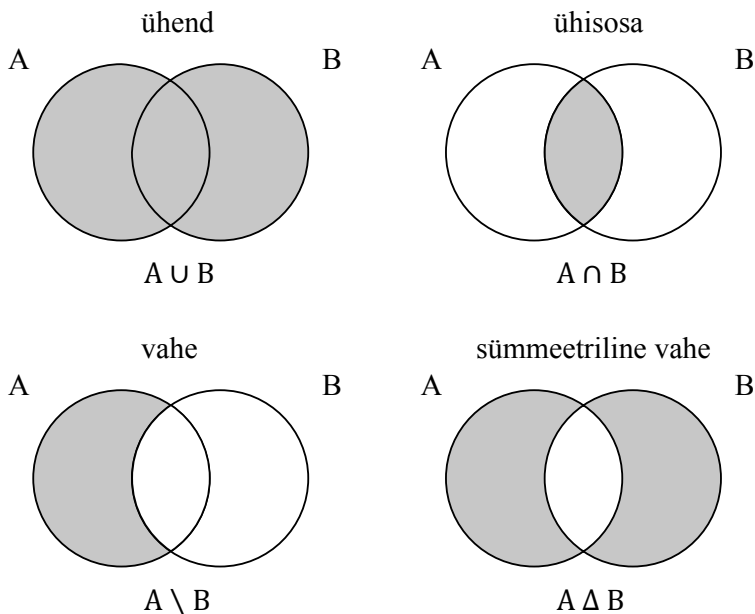
4. Tehted hulkadega

ühend $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee (\forall i) x \in B\}$	$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid \exists (\text{leidub}) \alpha \text{ nii, et } x \in A_{\alpha}\}$
ühisosa $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge (\text{ja}) x \in B\}$	$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid \forall (\text{iga}) \alpha \text{ korral } x \in A_{\alpha}\}$
vahe $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	sümmeetriline vahe $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ühendi ja ühisosa omadused.

- idempotentsus: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- kommutatiivsus: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- assotsiatiivsus: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributiivsus: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- neelduvus: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

Venni diagrammid.



Sümmeetrilise vahe omadusi.

- kommutatiivsus: $A \triangle B = B \triangle A$
- assotsiatiivsus: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
- distributiivsus ühisosaga: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Tihti on käsitluses fikseeritud teatav hulk U ja kõik vaadeldavad hulgad on selle hulga alamhulgad. Sellisel juhul nimetatakse hulka U universaalseks. Olgu fikseeritud teatav universaalne hulk U .

Definitsioon. Hulga A täiendiks A' nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik need universaalse hulga U elemendid, mis ei kuulu hulka A , s.t

$$A' = \{x \in U : x \notin A\} = U \setminus A.$$

De Morgani seadused: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Kahekordse täiendi seadus: $A'' = A$.

65. Olgu A suvaline hulk. Kirjeldage hulki

- | | | | | |
|-------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|
| a) $A \cup \emptyset$; | c) $A \setminus \emptyset$; | e) $A \setminus A$; | g) $A \cup A'$; | i) $\emptyset'$. |
| b) $A \cap \emptyset$; | d) $A \triangle \emptyset$; | f) $\emptyset \setminus A$; | h) $A \cap A'$; | |

66. Leidke hulgad $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, kui

- | | |
|--|---|
| a) $A = \{-1, 0, 3, 4\}$, $B = \{0, 4, 6\}$; | d) $A = (-\infty, 7]$, $B = [2, 4]$; |
| b) $A = [0, 2]$, $B = [1, 5]$; | e) $A = \emptyset$, $B = \{1\}$; |
| c) $A = [0, 2]$, $B = \{0, 4, 6\}$; | f) $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. |

67. Leidke hulgad A ja B , kui $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1\}$.

68. Kujutage antud hulgad arvsirgel:

- $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 1\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 3\}$;
- $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 3\}$;
- $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3 < x \leq 5\}$;
- $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x \leq 5\} \triangle \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$.

69. Leidke hulga A täiend A' universaalse hulga U suhtes:

a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 5, 7\}$; b) $U = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

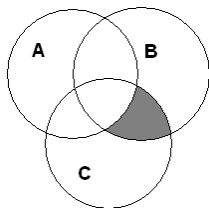
70. Millist tingimust peavad rahuldama hulgad A ja B , et kehtiks võrdus:

a) $A \cup B = A$; c) $A \cup B = A \cap B$; e) $A \setminus B = B$; g) $A \triangle B = \emptyset$.
 b) $A \cap B = A$; d) $A \setminus B = A$; f) $A \triangle B = A$;

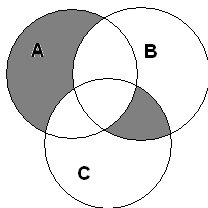
71. Kujutage Venni diagrammil järgmised hulgad:

a) $A \setminus (B \cup C)$; d) $A \cap (B \setminus C)$; g) $(A \setminus B) \triangle C$;
 b) $A \setminus (B \cap C)$; e) $(A \triangle B) \triangle C$; h) $(A \cap B) \cap (A \triangle B)$;
 c) $(A \setminus (B \cap C)) \cap B$; f) $(A \cup B) \cap C$; i) $(A \cap C) \cup (B \setminus (A \cup C))$.

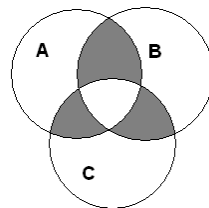
72. Kirjutage hulgateoreetiliste tehete abil järgmised Venni diagrammidel kujutatud hulgad:



a)



b)



c)

73. Klassi 30 õpilasest igaüks tegeleb vähemalt ühe hobiga. Õpilased saavad valida kolme hobi vahel: male, näitering, skautlus. Kuus õpilast tegelevad ainult skautlusega. Viis õpilast jõuavad igale poole. Kaks maletavad ja tegelevad skautlusega, aga ei näitle. Viisteist on skaudid. Kaks last tegelevad üksnes malega. Kolm last käib üksnes näitetrupis. Mitu last tegeleb male ja näitemänguga, aga ei ole skaudid? Mitu last kuulub maleringi?

74. Ühe instituudi 100 üliõpilase küsitlemisel selgus, et neist 28 õpivad inglise keelt, 30 saksa keelt, 42 prantsuse keelt, 8 inglise ja saksa keelt, 10 inglise ja prantsuse keelt, 5 saksa ja prantsuse keelt, 3 aga kõiki kolme keelt. Mitu üliõpilast ei õpi nimetatud keeli? Mitu üliõpilast õpib ainult prantsuse keelt, ainult inglise keelt, ainult saksa keelt?

75. Ühes sõjaväeosas mängivad 100-st sõdurist 80 jalgpalli, 60 võrkpalli ja 40 korvpalli. On teada, et 40 neist oskavad mängida nii jalgpalli kui ka võrkpalli, 30 jalgpalli ja korvpalli, 20

võrkpalli ja korvpalli. Kui palju neist 100-st sõdurist oskavad mängida kõiki kolme mängu, kui iga sõdur oskab mängida vähemalt ühte mängu?

76. Leidke $(\{\{\emptyset\}\} \triangle \{\emptyset\}) \setminus (\{\emptyset\} \triangle \emptyset)$.

77. Hulgad A , B ja $A \cup B$ sisaldavad vastavalt m , n ja p elementi. Mitu elementi sisaldavad hulgad $A \cap B$, $A \setminus B$ ja $A \triangle B$?

78. Tõestage järgmised võrdused.

- | | |
|--|--|
| a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | k) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ |
| b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | l) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ |
| c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | m) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ |
| d) $A \cup (A \cap B) = A$ | n) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ |
| e) $A \cap (A \cup B) = A$ | o) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ |
| f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | p) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$ |
| g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ | q) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$ |
| h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ | r) $A \triangle (A \triangle B) = B$ |
| i) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ | s) $A \triangle \emptyset = A$ |
| j) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ | t) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ |

79. Tõestage järgmised võrdused.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(A')' = A$ | c) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ |
| b) $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$ | d) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$ |

80. Leidke hulgad.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ | d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n}]$ | g) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n}]$ | j) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-2^{-n}, 2^{-n}]$ |
| b) $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ | e) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, 1]$ | h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-1, n^{-1}]$ | k) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n]$ |
| c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n}]$ | f) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n})$ | i) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-2^n, 2^n)$ | l) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n]$ |

- m) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [2^n, \infty)$ p) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$ s) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$ v) $\bigcup_{j=k}^n \{-j, j\}$
n) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, \infty)$ q) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ t) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$ w) $\bigcap_{j=k}^n \{-j, j\}$
o) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$ r) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ u) $\bigcup_{j=k}^n [2j, 2j+3]$ x) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{-2n, 0, 2n\}$

81. Tõestage, et $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

82. Tõestage, et kui $A \subset B$, siis suvalise hulga C korral kehtivad sisalduvused:

- a) $A \cup C \subset B \cup C$; c) $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$; e) $B' \subset A'$.
b) $A \cap C \subset B \cap C$; d) $(C \setminus B) \subset (C \setminus A)$;

83. Näidake, et kehtib:

- a) $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset C$; c) $C \subset A \vee C \subset B \Rightarrow C \subset A \cup B$.
b) $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A \wedge C \subset B$;

84. Avaldage

- a) $A \cup B$ tehete $\cap$ ja Δ abil; d) $A \setminus B$ tehete $\cup$ ja Δ abil;
b) $A \setminus B$ tehete $\cap$ ja Δ abil; e) $A \cup B$ tehete $\setminus$ ja Δ abil;
c) $A \cap B$ tehete $\cup$ ja Δ abil; f) $A \cap B$ tehete $\setminus$ abil.

85. Olgu antud hulkade $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jada, kusjuures $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Tõestage, et selle jada lõpliku arvu liikmete ärajätmine ei mõjuta nende hulkade ühendit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

86. Olgu antud hulkade $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jada, kusjuures $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Tõestage, et selle jada lõpliku arvu liikmete ärajätmine ei mõjuta nende hulkade ühisosa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definitsioon. Hulkade A ja B otsekorrutiseks nimetatakse kõikide paaride (a, b) hulka, kus $a \in A$ ja $b \in B$, seejuures elementide järjekord on oluline.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ A_1 \times \dots \times A_n &= \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} \\ &\quad \underbrace{A \times \dots \times A}_n = A^n \end{aligned}$$

Otsekorrutise omadusi:

- otsekorutis tühja hulga: $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$;
- distributiivsus: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
 $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

87. Leidke antud hulkade otsekorutis $A \times B$:

- a) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$; d) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$;
 b) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$; e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 5\}$,
 c) $A = \{3, 4\}, B = \{1, 2, 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$.

88. Olgu antud hulgad $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$ ja $C = \{y \in \mathbb{N} : 1 \leq y \leq 5\}$. Kujutage koordinaattasandil

- a) $A \times (B \cup C)$, c) $C \times (A \cup B)$, e) $(A \cup C) \times B$, g) $(B \cap A) \times C$, i) $(C \setminus A) \times B$,
 b) $(A \triangle B) \times C$, d) $C \times (B \triangle A)$, f) $C \times (B \setminus A)$, h) $B \times (C \cup A)$, j) $A \times (B \cap C)$.

89. Hulgad A ja B sisaldavad vastavalt m ja n elementi. Mitu elementi sisaldavad hulgad $\mathcal{P}(A)$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ja $\mathcal{P}(A \times B)$? Leidke need hulgad, kui

- a) $A = \{a, b\}, B = \{c\}$; b) $A = B = \{0, 1\}$; c) $A = \{a, b, c\}, B = \emptyset$.

90. Tõestage võrdused.

- a) $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$ c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
 b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ d) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

91. Näidake, et $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

92. Tõestage, et kui $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$, siis $A \times B = B \times A$ parajasti siis, kui $A = B$.

93. Tõestage, et kui $A_i \neq \emptyset, B_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$, siis

- a) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2, \dots, A_n \subset B_n$;
 b) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots, A_n = B_n$.

5. Arvuteooria elemente ja matemaatiline induktsioon

Definitsioon. Öeldakse, et täisarv a jagab täisarvu b (ja tähistatakse $a \mid b$), kui leidub selline täisarv c , et $ac = b$. Fakti, et $a \mid b$ võib tähistada ka kujul $b : a$ ehk arv b jagub arvuga a .

Teoreem. Olgu a täisarv ja b naturaalarv. Siis leiduvad üheselt määratud täisarvud q (jagatis) ja r (jääk) nii, et

$$a = bq + r \quad \text{ja} \quad 0 \leq r < b.$$

Definitsioon. Algarvuks nimetatakse naturaalarvu $p > 1$, mille ainsad naturaalarvulised jagajad on 1 ja p . Naturaalarvu, mis on suurem kui 1 ja mis pole algarv, nimetatakse kordarvuks.

Definitsioon. Täisruuduks nimetatakse naturaalarvu, mis võrdub mingi täisarvu ruuduga.

94. Olgu a, b, c ja d täisarvud. Tõestage järgmised omadused:

- $a \mid a$ (refleksiivsus);
- $1 \mid a$;
- $0 \mid a$ parajasti siis, kui $a = 0$;
- kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$ (transitiivsus);
- kui $a \mid b$ ja $b \neq 0$, siis $|a| \leq |b|$;
- kui $a \mid b$ ja $a \mid c$, siis $a \mid xb + yc$ suvaliste täisarvude x ja y korral;
- kui $a \mid b$ ja $a \mid (b \pm c)$, siis $a \mid c$;
- kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $|a| = |b|$;
- kui $a \mid b$ ja $b \neq 0$, siis $(b/a) \mid b$;
- kui $c \neq 0$, siis $a \mid b$ parajasti siis, kui $ac \mid bc$.
- kui $a \mid b$, siis $a \mid be$ suvalise täisarvu e korral.
- kui $a \mid b$ ja $c \mid d$, siis $ac \mid bd$;

95. Näidake, et kolmekohaline arv, mis on kirjutatud ühesuguste numbritega, jagub alati kolmega.

96. Tõestage, et suvaliste täisarvude a ja b korral vähemalt üks arvudest $a, b, a + b$ ja $a - b$ jagub kolmega.

97. Viis täisarvu a, b, c, d, j rahuldavad järgmisi tingimusi:

- $j \mid (ad - bc)$;
- $j \mid (a - b)$, ning
- arvude b ja j ühised jagajad on ± 1 .

Tõestage, et $j \mid (c - d)$.

98. Tõestage, et arvust 3 suuremate algarvude p ja q korral $p^2 - q^2$ jagub arvuga 24.

- 99.** Põhjendage, et täisarvu ruut ei saa lõppeda numbritega 2, 3, 7 või 8.
- 100.** Näidake, et kolme järjestikuse naturaalarvu ruutude summa ei jagu kolmega.
- 101.** Tõestage, et
- Kolmest järjestikusest arvust täpselt üks jagub arvuga 3;
 - Kahest järjestikusest paarisarvust täpselt üks jagub arvuga 4;
 - Viiest järjestikusest arvust täpselt üks jagub arvuga 5.
- 102.** Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $6 \mid n(n+1)(n+2)$.
- 103.** Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $6 \mid n(n^2-1)$.
- 104.** Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $30 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
- 105.** Näidake, et kui n on naturaalarv, siis n^2+1 ei jagu 11-ga.
- 106.** Tõestage, et kui $(mn+pq):(m-p)$, siis $(mq+np):(m-p)$.
- 107.** Avaldis $a+b+c$, kus a, b ja c on täisarvud, jagub arvuga 6. Näidake, et siis ka $a^3+b^3+c^3$ jagub arvuga 6.
- 108.** Tõestage, et mistahes täisarvu ruudu jagamisel
- arvuga 3 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1;
 - arvuga 4 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1;
 - arvuga 8 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1 või 4;
 - arvuga 7 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1, 2 või 4.
- 109.** Naturaalarvu a jagamisel arvuga 8 tekkis jääk 7. Milline jääk tekib arvu a^3 jagamisel arvuga 8?
- 110.** Naturaalarvu a jagamisel arvuga 5 tekkis jääk 4. Tõestage, et a^2+a^3 jagub arvuga 5.
- 111.** Tõestage, et suvalise naturaalarvu n korral arv n^3+3n^2+2n jagub 6-ga.
- 112.** Tõestage, et mis tahes algarvu $p \geq 5$ jagamisel arvuga 6 tekkiv jääk saab olla vaid 1 või 5.
- 113.** Tõestage, et mis tahes algarvu $p \geq 5$ ruudu jagamisel arvuga 24 tekkiv jääk saab olla vaid 1.
- 114.** Tõestage, et mis tahes 12 naturaalarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu nii, et nende vahe jagub arvuga 11.
- 115.** Tõestage, et kui $p, p+2$ ja $p+4$ on kõik algarvud, siis $p=3$.

Näpunäide. Vaadelda eraldi juhtusid arvu p jagamisel arvuga 3 tekkiva jäägi 0, 1 või 2 korral.

Matemaatilise induktsiooni meetod. Olgu antud mingi seeria väiteid $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Antud seerias iga väide S_n on tõene, kui

1. **Induktsiooni baas.** S_1 on tõene, s.t seerias esimene väide on tõene;
2. **Induktsiooni samm.** $S_k \Rightarrow S_{k+1}$, s.t oletusest, et suvaline väide S_k on tõene, järgneb, et järgnev väide S_{k+1} on tõene.

Tugeva matemaatilise induktsiooni meetod. Olgu antud mingi seeria väiteid $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Antud seerias iga väide S_n on tõene, kui

1. **Induktsiooni baas.** S_1 on tõene, s.t seerias esimene väide on tõene;
2. **Induktsiooni samm.** $S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_k \Rightarrow S_{k+1}$, s.t oletusest, et kõik eelnevad väited $S_1, \dots, S_k$ on tõesed, järgneb, et järgnev väide S_{k+1} on tõene.

Tähtis! Tugeva induktsiooni baasi kehtivuse kontrollimisel on mõnikord vaja tõestada lisaks esimesele väitele veel mõned järgnevad väited.

116. Tõestage võrdused, kasutades matemaatilist induktsiooni.

- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1) \cdot (2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=0}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\sum_{i=1}^n (3i^2 - i - 2) = (n-1)n(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2$
- $1 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \geq 2$
- $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

117. Tõestage võrratused, kasutades matemaatilist induktsiooni.

- $n^2 \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2$
- $2^n \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $n^n \geq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(n+1)! \geq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$
- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$g) \frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$h) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

$$i) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$j) n! > 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$$

$$k) \frac{n}{2} + 1 \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$l) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

118. Tõestage, et kui $n \in \mathbb{N}$, siis $(1+x)^n \geq 1+nx$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, kus $x > -1$.

119. Geomeetrilise jada n esimese elemendi summa valem. Tõestage matemaatilise induksiooni abil, et kehtib $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, kus $n \geq 0$ ja $x \neq 1$.

120. Tõestage matemaatilise induksiooniga, et kumera n -nurka sisenurkade summa S_n avaldub valemiga $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

121. Olgu x reaalarv, mille korral $x + \frac{1}{x}$ on täisarv. Tõestage, et siis ka $x^n + \frac{1}{x^n}$ on täisarv iga naturaalarvu n korral. *Vihje: Kasutage tugevat matemaatilist induksiooni.*

122. Korvpalliliigas on n meeskonda ($n \geq 2$). Kõik meeskonnad kohtuvad omavahel parajasti ühe korra, kusjuures viigid ei ole lubatud (igas mängus selgitatakse võitja ja kaotaja). Tõestage, et pärast liigahooaja lõppu on võimalik meeskondi sedasi vasakult paremale rivistada, et kahe kõrvuti paikneva meeskonna korral paikneb omavahelise duelli võitja kaotajast vasakul.

123. Ringmaanteel, mille pikkus on 100 km, seisab n ühesugust autot. Neil on ühtekokku nii palju kütust, et katta 101 km. Tõestage, et leidub üks auto, mis, alustades oma kütusega ja kogudes teel kütust ülejäänud autodelt, võib läbida täisringi. (Kütust tohib võtta ainult siis, kui autod on kõrvuti; autot lükata ei tohi)

124. Peol, kus viibib $2n$ inimest, tervitavad varasemalt tuttavad teineteist käepigistusega. On teada, et peol ei leidu ühtegi kolmeliikmelist alamseltskonda, mille kõik liikmed oleksid omavahel enne pidu tuttavad. Tõestage, et tervitavate käepigistuste koguarv peol on ülimalt n^2 .

125. Linnas elab n latatara, kusjuures $n \geq 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada mingi uudise. Tõestage, et on võimalik korraldada telefonikõned nii viisi, et pärast $2n-4$ kõnet teab iga latatara iga ülejäänud uudist.

126. Malelaul, mõõtmetega $2^n \times 2^n$ ruutu, värvitakse üks vabalt valitud ruut punaseks. Tõestage, et malelaua saab katta kolmeruuduliste L-kujuliste tükidega nii, et nähtavale jääb ainult punane ruut.

127. Tõestage jaguvused ($n \in \mathbb{N}$).

- a) $3 \mid n^3 + 2n$
- b) $5 \mid n^5 - n$
- c) $7 \mid n^7 - n$
- d) $12 \mid 5 \cdot 9^n + 3$
- e) $8 \mid 3^{2n} - 1$
- f) $64 \mid 3^{2n} - 8n - 1$

- g) $6 \mid n(n+1)(n+2)$
- h) $6 \mid n(n^2 - 1)$
- i) $30 \mid (n^5 - n)$
- j) $30 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$
- k) $30 \mid mn(m^4 - n^4)$

128. Tõestage, et summa $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}$ on täisarv iga täisarvu a korral.

129. Tõestage, et $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$. ($a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)

Vihje: esmalt veenduge, et $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$.

130. Tõestada, et kehtib üldistatud De Morgani valem ehk

$$\neg(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \cdots \wedge X_n) = \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee \cdots \vee \neg X_n$$

iga naturaalarvu $n \geq 2$ korral, kus $X_1, \dots, X_n$ on mingid lausearvutuse valemid. Kuidas sellest lihtsasti järeldada, et kehtib ka analoogiline valem

$$\neg(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \cdots \vee X_n) = \neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \cdots \wedge \neg X_n$$

iga naturaalarvu $n \geq 2$ korral, kus $X_1, \dots, X_n$ on mingid lausearvutuse valemid?

131. Olgu meil jada $a_0, a_1, a_2, \dots$ elemendid defineeritud järgmiselt: $a_0 = \frac{1}{4}$ ja $a_{n+1} = 2 \cdot a_n(1 - a_n)$, kus $n \geq 0$. Näidake, et kõikide $n \geq 0$ korral selle jada üldliige on esitatav valemiga $a_n = \frac{1 - 0,5^{2^n}}{2}$.

132. Rekurrentne jada on defineeritud kujul $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $n \geq 2$ korral $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. Leidke a_{300} . *Vihje: Kasutage tugevat matemaatilist induksiooni.*

Definitsioon. Arve $F_0, F_1, F_2, \dots$, kus $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$ ning iga naturaalarvu n korral $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ nimetatakse Fibonacci arvudeks.

133. Tõestage Fibonacci jada jaoks järgmised väited.

- a) Iga $n \geq 0$ korral F_{3n} on paarisarv.
- b) Iga $n \geq 0$ korral $\sum_{i=0}^n (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

- c) Iga $n \geq 1$ korral $\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1$.
- d) Iga $n \geq 1$ korral $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
- e) Iga $n \geq 0$ ja $m \geq 1$ korral $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
- f) Iga $n \geq 1$ korral $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$.
- g) Iga $n \geq 1$ korral $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
- h) Iga $n \geq 0$ korral $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

134. Leidke viga väite „Kõik linnud on ühte värvi“ tõestuses.

Baas. Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et väide kehtib k linnu korral. Vaatleme $k+1$ lindu $L_1, \dots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \dots, L_k$ on ühte värvi. Jättes välja esimese linnu, näeme, et ka linnud $L_2, \dots, L_{k+1}$ on ühte värvi. Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi nagu linnud $L_1, \dots, L_k$, seega on kõik $k+1$ lindu ühte värvi.

135. Leidke viga väite „Kõik positiivsed täisarvud on omavahel võrdsed“ tõestuses.

Märkigu tähis $\max(x, y)$ arvude x ja y seast suurimat. Tõestame väite induktsiooniga arvu $\max(x, y)$ väärtuse järgi.

Baas. Kui $\max(x, y) = 1$, siis peab olema $x = y = 1$, sest tegemist on positiivsete täisarvudega.

Samm. Eeldame, et väide kehtib arvude puhul, mille maksimum on k . Olgu nüüd arvud x ja y sellised, et $\max(x, y) = k+1$. Viimane võrdus on samaväärne võrdusega $\max(x-1, y-1) = k$. Induktsiooni eelduse põhjal $x-1 = y-1$, millest $x = y$.

136. Olgu x_1 ja x_2 ruutvõrrandi $x^2 + px - 1 = 0$ lahendid, kus p on paaritu täisarv, ning tähistagu $y_n = x_1^n + x_2^n$ iga $n = 0, 1, 2, \dots$ korral. Tõestage, et siis iga n korral y_n ja y_{n+1} on ühistegurita täisarvud.

137. Puslet pannakse kokku sammhaaval. Sammuks on kas tüki ühendamine olemasoleva plokiga, või kahe plokki ühendamine. Tõestage tugeva induktsiooni meetodil, et kuidas tahes sammusid läbi viia, on n -tükilise pusle kokkupanekuks tarvis $n-1$ sammu.

6. Funktsioonid

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Kui on antud eeskiri, mis seab hulga X igale elemendile vastavusse täpselt ühe hulga Y elemendi, siis öeldakse, et on defineeritud funktsioon f , ja kirjutatakse $f: X \rightarrow Y$. Kui elemendile $x \in X$ seatakse vastavusse $y \in Y$, siis kasutatakse kirjutist $y = f(x)$ või $y = fx$ või $f: x \mapsto y$.

Definitsioon. Funktsioone $f: X \rightarrow Y$ ja $g: Z \rightarrow W$ nimetatakse võrdseteks, kui $X = Z$, $Y = W$ ja $f(x) = g(x)$ iga $x \in X (= Z)$ korral.

Definitsioon. Vaatleme funktsiooni $f: X \rightarrow Y$. Hulka $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ nimetatakse funktsiooni f graafikuks.

Funktsiooni $I_X: X \rightarrow X$ eeskirjaga $I_X(x) = x \quad \forall x \in X$ nimetatakse samasusteisenduseks.

138. Skitseerige antud funktsioonide graafikud ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = 1 - |x|; & \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ 0, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{kui } x > 1. \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{kui } x \leq 0, \\ 1/x, & \text{kui } 0 < x < 2, \\ 1/2, & \text{kui } x \geq 2. \end{cases} & \end{array}$$

139. Olgu $f_1: X \rightarrow Y$ ja $f_2: X \rightarrow Y$. Tõestage, et $f_1 = f_2$ parajasti siis, kui $G(f_1) = G(f_2)$.

140. Olgu $f_1: X \rightarrow Y$ ja $f_2: X \rightarrow Y$. Näidake, et $G(f_1) \cup G(f_2)$ (samuti $G(f_1) \cap G(f_2)$) on mingi hulgal X määratud funktsiooni graafik parajasti siis, kui $f_1 = f_2$.

Olgu X universaalne hulk.

Definitsioon. Hulga $A \subset X$ karakteristikuks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, kus

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A, \\ 0, & \text{kui } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

141. Olgu U universaalhulk ja $A, B \subset U$. Tõestage, et iga $x, y \in U$ korral:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \chi_{\emptyset}(x) = 0, \chi_X(x) = 1; & \text{e) } \chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x); \\ \text{b) } \chi_A(x)\chi_A(x) = \chi_A(x); & \text{f) } \chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x); \\ \text{c) } \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x); & \\ \text{d) } \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x); & \text{g) } \chi_{A \times B}((x, y)) = \chi_A(x)\chi_B(y). \end{array}$$

142. Näidata, et $\chi_{\cup_{i \in I} A_i}(x) = \max_{i \in I} \chi_{A_i}(x)$, $\chi_{\cap_{i \in I} A_i}(x) = \min_{i \in I} \chi_{A_i}(x)$.

143. Avaldage $\chi_{A \triangle B}$ funktsioonide χ_A ja χ_B kaudu.

144. Hulga karakteristikliku funktsiooni abil tõestage, et kehtivad võrdused:

- a) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$; d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; e) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; f) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

145. Tõestage, et $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Definitsioon. Olgu antud funktsioon $f: X \rightarrow Y$ ja olgu $x \in X$ ning $y \in Y$. Kui $y = f(x)$, siis elementi y nimetatakse elemendi x kujutiseks ja elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks.

Definitsioon. Kui $A \subset X$, siis hulka

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{leidub } x \in A \text{ nii, et } y = f(x)\} = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

nimetatakse hulga A kujutiseks.

Definitsioon. Kui $B \subset Y$, siis hulka

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

nimetatakse hulga B originaaliks.

146. Olgu antud funktsioon f ja element x_0 . Leidke elemendi x_0 kujutis $f(x_0)$.

- a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 3$
b) $f: \{\text{Riigid}\} \rightarrow \{\text{Inimesed}\}$, $f(x)$ = riigi x riigipea, x_0 = Eesti
c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x)$ = arvu x erinevate algtegurite arv, $x_0 = 360$
d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{x^2}{4}$, kui x on paaris, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4}$, kui x on paaritu, $x_0 = -5$

147. On antud funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja element $y_0 \in \mathbb{R}$. Leidke kõik elemendi y_0 originaalid:

- a) $f(x) = 4 - x^2$, $i) y_0 = 0$; $ii) y_0 = 4$; $iii) y_0 = 2$;
b) $f(x) = 3^x$, $i) y_0 = 3$; $ii) y_0 = 1$; $iii) y_0 = 5$.

148. Leidke kõik elemendi y_0 originaalid funktsiooniga f .

- a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$, $y_0 = 2$
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x - 1)$, $y_0 = 6$
c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x \pmod{5}$ (s.t. $f(x)$ on jääk x jagamisel arvuga 5), $y_0 = 3$
d) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f((r, s)) = (r + 2)^2 + (s - 3)^2$, $y_0 = 4$

149. On antud funktsioon f ja hulk A . Leidke hulga A kujutis $f(A)$:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, A = [1, 2];$ d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x, A = [0, 3];$
 b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, A = \{2\};$ e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|, A = [0, 3];$
 c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 2)^2, A = [1, 4];$

150. Vaatleme funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 2$. Leidke järgmised hulgad.

- a) $f(\{-1, 0, 1\})$ c) $f([-2, 2])$ e) $f((-\infty, 0])$
 b) $f([-1, 1])$ d) $f([-5, -3] \cup [0, 3])$ f) $f(\mathbb{R})$

151. On antud funktsioon f ja hulk B . Leidke hulga B originaal $f^{-1}(B)$:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x, B = \{0\};$ c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, B = (0, \infty);$
 b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, B = \{1\};$ d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x, B = [0, 3].$

152. Vaatleme funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 2$. Leidke järgmised hulgad.

- a) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$ b) $f^{-1}([-2, 2])$ c) $f^{-1}([10, 50])$ d) $f^{-1}((-\infty, 0])$ e) $f^{-1}(\mathbb{R})$

153. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}$. $g(x) = \lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} | m \geq x\}$. Leidke järgmised hulgad.

- a) $f^{-1}(\{0\}), g^{-1}(\{0\})$ c) $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\}), g^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$
 b) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}), g^{-1}(\{-1, 0, 1\})$

154. Olgu $m, k \in \mathbb{Z}$. Leidke $f^{-1}(\{m\}), f^{-1}(\{m, m+1\}), f([k, k+1]), f([k, k+2])$ järgmiste funktsioonide $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jaoks:

- a) $f(x) = \lceil \lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor + \frac{1}{2} \rceil$ c) $f(x) = \lceil \frac{1}{2} - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \rceil$
 b) $f(x) = \lfloor \frac{1}{2} - \lceil x + \frac{1}{2} \rceil \rfloor$ d) $f(x) = \lfloor 2 \lceil \frac{x}{2} \rceil + \frac{1}{2} \rfloor$

155. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Tõestage, et kehtivad järgmised väited:

- a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$; d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
 b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
 c) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$; f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

156. Tõestage järgnevad võrdused:

- a) $f(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f(A_{\alpha})$; b) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$; c) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$.

157. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $B \subset Y$. Tõestage, et $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

158. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$. Leidke näide, kus $f(X \setminus A) \not\subset Y \setminus f(A)$.

159. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Tõestage järgnevad sisalduvused ja tooge näiteid, kus need sisalduvused ei ole võrdused.

- a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

160. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Tõestage, et $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse injekttiivseks ehk üksüheseks, kui iga paari $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse surjekttiivseks ehk pealekujutuseks, kui $f(X) = Y$.

Definitsioon. Funktsiooni nimetatakse bijekttiivseks, kui ta on injekttiivne ja surjekttiivne.

Definitsioon. Funktsioonide $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$ korrutiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse funktsiooni $g \circ f : X \rightarrow Z$, mis määratakse võrdusega

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

Definitsioon. Substitutsiooniks hulgal $M \neq \emptyset$ nimetatakse mistahes bijekttiivset kujutust $f : M \rightarrow M$.

Kui funktsioon $f : X \rightarrow Y$ on bijekttiivne, siis saab defineerida pöördfunktsiooni $f^{-1} : Y \rightarrow X$, mis igale elemendile $y \in Y$ seab vastavusse tema originaali $x \in X$ funktsiooniga f teisendamisel, st

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

161. Otsustage, kas järgmised funktsioonid on sürjektiivsed.

a) $q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, q(x) = x + 2$

b) $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, p(x) = x + 2$

162. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus. Põhjendage (tähistame $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$):

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2;$

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x;$

h) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x;$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^2;$

i) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x;$

d) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^2;$

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x;$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3;$

k) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cot x;$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x;$

163. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus. Põhjendage.

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 1 + n + 3|n|;$

c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = (-1)^x x$

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^n n.$

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 1 + \frac{x+3|x|}{2}$

164. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus. Põhjendage.

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x + y, x - y)$

c) $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g((m, n)) = (2m, m - n)$

b) $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, g((m, n)) = m^2 - n$

165. Tähistame tähega E paarisarvude hulga. Iga järgmise funktsiooni $f: \mathbb{Z} \rightarrow E$ korral otsustage, kas f on injektiivne või sürjektiivne. Põhjendage oma vastust

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 4 - x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 2x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}$

166. Olgu funktsioon $f: [0, 1] \times \{1, 2, 3\} \rightarrow [1, 4]$ antud kujul $f((x, y)) = x + y$. Näidake, et f on sürjektiivne, aga ei ole injektiivne.

167. Olgu funktsioon $g: [1, 4] \rightarrow [0, 1]$ antud kujul $g(x) = \frac{x}{4}$. Näidake, et g on injektiivne, aga ei ole surjektiivne.

168. Olgu $X = \mathbb{N} \cup \{-1, 3, 5\}$ ja $Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Leidke funktsioon $f: X \rightarrow Y$, mis on injektiivne ja surjektiivne ning $f(2) = 3$.

169. Olgu antud kahe muutuja funktsioon $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nii, et $g((m, n)) = m^2 - n$.

- Kas funktsioon g on üksühene? Kas funktsioon g on pealekujutus?
- Arvuta funktsiooni väärtused $g((0, 3))$, $g((3, -2))$, $g((-3, -2))$ ja $g((7, -1))$.
- Leia funktsiooni g väärtusele 0 vastav originaalide hulk. (Kasuta hulgasümboolikat!)
- Leia funktsiooni g väärtusele 5 vastav originaalide hulk.

170. Olgu $\varphi: A \rightarrow B$ bijektsioon. Tõestage, et

- φ^{-1} on bijektsioon,
- $\varphi^{-1}\varphi = I_A$,
- $\varphi\varphi^{-1} = I_B$.

171. Tõestage, et funktsioon $f: X \rightarrow Y$ rahuldab tingimust

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$$

ning võrdus $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ kehtib parajasti siis, kui f on injektiivne.

172. Tõestage, et $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \subset \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$. Tooge näide funktsioonist f ja hulkadest A_{α} , kus $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \neq \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$. Näpunäide: vaadelda projekteerimisteisendust.

173. Hulga X iga osahulga A korral tõestage, et $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ parajasti siis, kui f on injektsioon.

174. Hulga X iga osahulga A korral tõestage, et $f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A)$ parajasti siis, kui f on surjektsioon.

175. Tooge näide funktsioonist f täisarvude hulgast positiivsete täisarvude hulka, mis

- On injektiivne, aga ei ole surjektiivne.
- On surjektiivne, aga ei ole injektiivne.
- On injektiivne ja surjektiivne.
- Ei ole injektiivne ega surjektiivne.

176. Hinnake järgmist tõestust hindegas A, C või F, kus hinne A antakse korrektse tõestuse eest, hinne C saab osaliselt õige tõestuse eest ja hinne F tähendab, et tõestus on vale. Põhjendage oma hinne panemist.

Väide: Funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kujul $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 2x^2 - \sqrt{2}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ on injekttiivne.

Tõestus: Olgu $x \neq y$. Siis $2x^2 - \sqrt{2} \neq 2y^2 - \sqrt{2}$ ja $-x \neq -y$. Seega $f(x) \neq f(y)$, mis tõestab, et f on injekttiivne.

177. Olgu A ja B mittetühjad hulgad. Defineerime funktsiooni

$$p_1: A \times B \rightarrow A, \quad p_1(a, b) = a,$$

iga $(a, b) \in A \times B$ korral. See on **esimene projektsiooni funktsioon**.

- Kas funktsioon p_1 on surjektatsioon? Põhjendage oma vastust.
- Kui $B = \{b\}$, kas funktsioon p_1 on siis injektatsioon? Põhjendage oma vastust.
- Millis(t)e tingimus(t)e korral ei ole funktsioon p_1 injektatsioon? Koostage vastav väide ja tõestage see.

178. Olgu C kõikide lõigus $[0, 1]$ pidevate funktsioonide hulk. Defineerime funktsiooni $A: C \rightarrow \mathbb{R}$ järgnevalt: iga $f \in C$ korral

$$A(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Kas funktsioon A on injektatsioon? On see surjektatsioon? Põhjendage oma vastuseid.

179. Olgu $A = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\}$. Defineerime funktsiooni $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$ järgnevalt:

$$\text{iga } (m, n) \in A \text{ korral } f(m, n) = \frac{m+n}{n}.$$

- Kas funktsioon f on injektatsioon? Põhjendage oma vastust.
- Kas funktsioon f on surjektatsioon? Põhjendage oma vastust.

Tähistame $A^B = \{f: B \rightarrow A \mid f \text{ on funktsioon}\}$.

180. Olgu hulkade A ja A_1 vahel ning B ja B_1 vahel üksühesed vastavused (e. bijektioonid). Tõestage, et siis on üksüheses vastavuses ka hulgad

- $A \times B$ ja $A_1 \times B_1$,
- A^B ja $A_1^{B_1}$,
- $A \cup B$ ja $A_1 \cup B_1$, kui $A \cap B = \emptyset$ ja $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

181. Korraldage üksühene vastavus järgmiste hulkade vahel:

- a) $A \times B$ ja $B \times A$,
- b) $A \times (B \times C)$ ja $(A \times B) \times C$,
- c) $(A \times B)^C$ ja $A^C \times B^C$,
- d) $(A^B)^C$ ja $A^{B \times C}$,
- e) $A^{B \cup C}$ ja $A^B \times A^C$, kui $B \cap C = \emptyset$.

182. Olgu A ja B hulgad, $B \neq \emptyset$. Defineerime funktsioonid $f : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, $g : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ valemitega $f(X) = X \cup A$ ja $g(X) = X \cap A$. Mis tingimusel on f või g injektiivne funktsioon? Mis tingimusel on f või g surjektiivne funktsioon?

183. Olgu $C \neq \emptyset$ ja $A, B \subset C$ ning $f, g : \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}(C)$ funktsioonid, kus $f(X) = (X \cup A, X \cup B)$, $g(X) = (X \cap A, X \cap B)$ iga $X \in \mathcal{P}(C)$. Mis tingimustel on f või g injektiivne funktsioon?

184. Olgu $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ ja $h(x) = x^2 + 2$. Leidke

- a) $(fg)(3)$; c) $(gf)(x)$; e) $(fh)(x)$; g) $(gh)(x)$;
- b) $(fg)(-6)$; d) $(fh)(2)$; f) $(hf)(x)$; h) $(hg)(x)$.

185. Olgu $f(x) = x^2 - 1$ ning $g(x) = 3 - x$. Leidke

- a) $(gf)(1)$; b) $(fg)(-4)$; c) $(fg)(x+1)$; d) $(fg)(x+2)$.

186. Olgu $f(x) = x^3 + 3$ ning $g(x) = x - 4$. Leidke $(fg)(x)$ ja $(gf)(x)$ ning lahendage võrrand $(fg)(x) = (gf)(x)$.

187. Leidke gf , fg , g^2 , f^3 , kui

- a) $f(x) = 2x + 1$ ja $g(x) = 3x - 1$; b) $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2^x$.

188. Leidke f^{-1} , kui

- a) $f(x) = 3x - 1$; c) $f(x) = \frac{1}{4}x + 5$; e) $f(x) = 2x^3 + 3$;
- b) $f(x) = x^3 - 3$; d) $f(x) = \sqrt{3x - 3}$; f) $f(x) = \frac{2x}{5 - x}$, $x \neq 5$.

189. Leidke gf , fg , g^5 , f^6 , kui f ja g on substituutsioonid hulgal X :

- a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- c) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

190. Leidke f^{-1} , g^{-1} , $g^{-2}f^3$, f^3g^2 , kui f ja g on substituutsioonid hulgal X :

a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

191. Tõestage, et kui $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow X$ korral $gf = I_X$, siis f on injektiivne ja g on sürjektiivne.

192. Tõestage, et kui $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_2 : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $gf_1 = gf_2$ ja g on injektiivne, siis $f_1 = f_2$.

193. Tõestage, et kui $f : X \rightarrow Y$, $g_1 : Y \rightarrow Z$, $g_2 : Y \rightarrow Z$, $g_1f = g_2f$ ja f on sürjektiivne, siis $g_1 = g_2$.

194. Olgu $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$. Olgu $h = gf$. Tõestage või lükake ümber järgmised väited.

- a) Kui f ja g on injektiivsed, siis ka h on injektiivne.
- b) Kui f ja g on sürjektiivsed, siis ka h on sürjektiivne.
- c) Kui f ja g on bijektiivsed, siis ka h on bijektiivne.
- d) Kui h on injektiivne, siis ka f on injektiivne.
- e) Kui h on injektiivne, siis ka g on injektiivne.
- f) Kui h on sürjektiivne, siis ka f on sürjektiivne.
- g) Kui h on sürjektiivne, siis ka g on sürjektiivne.

195. Olgu X, Y ja Z mittetühjad hulgad ja $f : X \rightarrow Y$ ning $g : Y \rightarrow Z$ funktsioonid. Tõestada väited:

- a) Kui f on sürjektiivne ja gf on injektiivne, siis g on injektiivne.
- b) Kui g on injektiivne ja gf on sürjektiivne, siis f on sürjektiivne.

7. Hulga võimsus

Definitsioon.

1. Öeldakse et hulgad X ja Y on sama võimsusega ehk ekvivalentsed ja kirjutatakse $|X| = |Y|$ või $X \sim Y$, kui leidub bijektiivne kujutus $f: X \rightarrow Y$. Kui hulgad X ja Y ei ole sama võimsusega, siis kirjutatakse $|X| \neq |Y|$ või $X \not\sim Y$.
2. Öeldakse, et hulga X võimsus ei ületa hulga Y võimsust ja kirjutatakse $|X| \leq |Y|$, kui leidub injektiivne kujutus hulgast X hulka Y .
3. Öeldakse, et hulga X võimsus on väiksem kui hulga Y võimsus ja kirjutatakse $|X| < |Y|$, kui $|X| \leq |Y|$ ja $|X| \neq |Y|$.

Definitsioon.

1. Öeldakse, et hulk X on lõplik, kui $X = \emptyset$ või leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $|X| = |\{1, \dots, n\}|$.
2. Öeldakse, et hulk X on lõpmatu, kui ta ei ole lõplik.
3. Öeldakse, et hulk X on loenduv, kui $X \sim \mathbb{N}$.
4. Öeldakse, et hulk X on ülimalt loenduv, kui $|X| \leq |\mathbb{N}|$.
5. Öeldakse, et hulk X on kontiinumi võimsusega, kui $|X| = |\mathbb{R}|$.

Teoreem. Kui hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust ja hulga B võimsus ei ületa hulga A võimsust, siis hulgad A ja B on sama võimsusega.

196. Otsustage, kas hulk on lõplik või lõpmatu. Kui hulk on lõpmatu, otsustage kas on loenduv või mitte. Põhjendage.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $X = \{-10, -9, -8, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 5, 6\}$; | c) $X = \emptyset$; |
| b) $X = \{10^x : x \in \mathbb{N}\}$; | d) $X = (1, 2)$. |

197. Esitage bijektsioonid $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ ja $g: M \rightarrow \mathbb{N}$ järgmiste hulkade M korral (siin $k \in \mathbb{N}$)

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $M = \mathbb{Z}$; | d) $M = \mathbb{N} \cup \{-k, 1 - k, \dots, 0\}$; |
| b) M on paarisarvude hulk; | e) $M = \mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$; |
| c) M on paaritute arvude hulk; | f) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. |

198. Hilberti hotellis on loenduv arv tube, kõigis külalised. Kuidas paigutada uued külalised, kui:

- a) saabub rong miljoni külalisega;
- b) saabub rong loenduva arvu külalistega;
- c) saabub loenduv arv ronge, igas rongis loenduv arv külalisi.

- 199.** Kas hulk $\mathbb{N}$ on ekvivalentne enda mingi pärisalamhulgaga?
- 200.** Tõestage, et iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva alamhulga.
- 201.** Tõestage, et hulk on lõpmatu parajasti siis, kui ta on ekvivalentne enda mingi pärisalamhulgaga.
- 202.** Olgu A ja B loenduvad hulgad. Tõestage, et $A \cup B$ on loenduv.
- 203.** Olgu A loenduv hulk ja B lõplik hulk. Tõestage, et $A \cup B$ ja $A \setminus B$ on loenduvad ja $A \cap B$ on lõplik.
- 204.** Tõestage, et naturaalarvude hulga kõigi lõplike alamhulkade hulk on loenduv.
- 205.** Esitage kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ kujul $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kus hulgad $A_1, A_2, \dots$ on lõpmatud ja paarikaupa lõikumatud.
- 206.** Olgu A mittetühi lõplik hulk. Nimetame teda tähestikuks, tema elemente tähtedeks ja iga lõplikku tähtede järjestikust kirjutist sõnaks. Kui $a, b, c \in A$, siis sõnad on näiteks a ja $bacaa$. Tõestage, et kõigi sõnade hulk on loenduv.
- 207.** Tõestage, et kõigi lõplike binaarjärjendite hulk on loenduv. Tõestage, et kõigi binaarjadade hulk on kontinuumi võimsusega.
- 208.** Tõestage, et kõikide ratsionaalarvuliste otspunktidega reaalarvude vahemike hulk on loenduv.
- 209.** Tõestage, et hulkade A, B ja C korral kehtib: kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis $A \sim C$.
- 210.** Olgu A ja B hulgad. Tõestage, et kui $A \setminus B \sim B \setminus A$, siis $A \sim B$. Tuua näide hulkadest A ja B , mille korral vastupidine implikatsioon ei kehti.
- 211.** Tooge näide hulkadest A, B, C ja D , mille korral $A \sim C$ ja $B \sim D$, kuid $A \cup B \not\sim C \cup D$ ja $A \cap B \not\sim C \cap D$.
- 212.** Olgu A, B, C ja D hulgad. Tõestage, et kui $A \sim C$ ja $B \sim D$, siis $A \times B \sim C \times D$.
- 213.** Olgu X ja Y hulgad.
- Tõestage, et kui $X \subset Y$, siis $|X| \leq |Y|$.
 - Tõestage, et kui $X \subsetneq Y$ ja Y on lõplik hulk, siis $|X| < |Y|$.
- 214.** Olgu X, Y ja Z hulgad. Tõestage, et kui $|X| \leq |Y|$ ja $|Y| \leq |Z|$, siis $|X| \leq |Z|$.
- 215.** Olgu A ja B lõplikud hulgad. Tõestage, et kui $|B| < |A|$, siis ükski kujutus $A \rightarrow B$ ei ole injektiivne.

216. Tõestage, et reaalarvude vahemik $(0, 1)$ ei ole loenduv.

217. Esitage konkreetsed bijektiivsed kujutused $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ hulkade A ja B vahel (siin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$):

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| a) $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ | e) $A = (-\infty, b)$, $B = (c, \infty)$ | i) $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ |
| b) $A = (a, b)$, $B = (-\infty, d)$ | f) $A = (-\infty, b)$, $B = \mathbb{R}$ | j) $A = [a, b]$, $B = (c, d)$ |
| c) $A = (a, b)$, $B = (c, \infty)$ | g) $A = (a, \infty)$, $B = \mathbb{R}$ | |
| d) $A = (a, b)$, $B = \mathbb{R}$ | h) $A = [a, b]$, $B = (c, d)$ | k) $A = [a, \infty)$, $B = (c, \infty)$. |

218. Olgu X lõpmatu hulk ja Y ülimalt loenduv hulk.

- a) Tõestage, et $X \cup Y \sim X$.
b) Tõestage, et kui hulk $X \setminus Y$ on lõpmatu, siis $X \setminus Y \sim X$.

219. Mis on kõigi irratsionaalarvude hulga võimsus?

220. Leidke kõigi naturaalarvuliste liikmetega jadade hulga võimsus.

221. Leidke kõigi naturaalarvuliste liikmetega kasvavate jadade hulga võimsus.

222. Olgu X kõigi selliste reaalarvude hulk, mis kuuluvad vahemikku $(0, 1)$ ja mille küm-
nendesituses leidub number viis. Tõestage, et $X \sim (0, 1)$. Tõestage veel, et iga vahemiku
 $(a, b) \subset (0, 1)$ korral leidub vahemik $(c, d) \subset (a, b)$ nii, et $(c, d) \subset X$. Näidake, et täiendhulk
 $(0, 1) \setminus X$ on lõpmatu.

223. Olgu A_n , $n = 1, 2, \dots$, hulgad. Tõestage, et kui iga hulk A_n , $n = 1, 2, \dots$, on kontiinumi
võimsusega, siis ka hulk $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ on kontiinumi võimsusega.

224. Tuua näide kontiinumi võimsusega hulkadest A ja B nii, et a) $A \cap B$ on (i) lõplik, (ii)
loenduv, (iii) kontiinumi võimsusega. Ülesanne b) sisaldab samu alamülesandeid (i)-(iii) na-
gu a), kuid hulga $A \cap B$ asemel on hulk $A \setminus B$.

Vihje: uurige algebraliste reaalarvude hulga võimsust.

8. Seosed

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Seoseks ehk relatsiooniks hulkade X ja Y vahel nimetatakse otsekorruptise $X \times Y$ mis tahes osahulka.

Kui $R \subset X \times X$, siis räägitakse seosest hulgas X . Paari $(x, y) \in R$ korral öeldakse, et elemendid x ja y on seoses R ning tähistatakse ka xRy .

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Seost $R \subset X \times Y$ nimetatakse funktsiooniks, kui

- a) iga $x \in X$ korral leidub $y \in Y$ nii, et $(x, y) \in R$
- b) kui $x \in X$ ja $y, z \in Y$ on sellised, et $(x, y) \in R$ ja $(x, z) \in R$, siis $y = z$.

225. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Milliseid järjestatud paare sisaldab seos $R = \{(a, b) : a|b\}$, mis on määratud hulgal A ?

226. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esitage nooldiagrammi abil järgmine seos

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ on paarisarv}\}.$$

227. Esitage järgmised hulgal $X = \{1, 2, 3, 4\}$ määratud seosed maatrikskujul ja graafina.

- a) $R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 1)\}$;
- b) $R = \emptyset$;
- c) $R = \{(x, y) \mid x > y\}$;
- d) $R = \{(x, y) \mid \neg(x = y)\}$.

228. Esitage järgmiste maatriksitega antud seosed paaride loeteluna hulgal $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

c) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

b) $M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

d) $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

229. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $Y = \{a, b, c\}$. Esitage seos R hulga $X \times Y$ alamhulgana (ehk paaride loeteluna), kui tema maatriksesitus on

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

230. Esitage antud seosed visuaalselt tasandi punktipaaride hulkana. Eeldame, et $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- a) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\};$ d) $R = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 16\};$
 b) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$ e) $R = \{(x, y) \mid |x| = |y|\};$
 c) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\};$ f) $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}.$

231. Tehke kindlaks, kas antud seos kehtib antud elementide vahel. Põhjendage iga vastust.

- a) Hulgal $\mathbb{Z}$ on antud seos $R = \{(m, n) \mid m \text{ ja } n \text{ jaguvad sama algarvuga}\}$. Kas kehtib $22 R 45$?
 b) Hulgal $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ (st hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kõigi alamhulkade hulk) on antud seos $R = \{(A, B) \mid A \text{ ja } B \text{ elementide arv on sama}\}$. Kas kehtib $\{2, 3, 4\} R \{3, 4, 5\}$?
 c) Hulgal $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on antud seos $R = \{((a, b), (c, d)) \mid \text{sirge läbi punktide } (a, b) \text{ ja } (c, d) \text{ läbib koordinaatide alguspunkti}\}$. Kas kehtib $(-6, 9) R (8, -12)$?
 d) Kõigi tähtedest a ja b moodustatud lõplike sõnade hulgal on antud seos $R = \{(s, t) \mid s \text{ ja } t \text{ algavad või lõpevad sama tähega}\}$. Kas kehtib $abbab R bbaba$?
 e) Kõigi lausearvutusvalemite hulgal on antud seos $R = \{(F, G) \mid F \text{ ja } G \text{ on mingil samal väärtustusel tõesed}\}$. Kas kehtib $\neg C \wedge (B \Rightarrow A) R B \vee C \Rightarrow \neg A \wedge B$?

232. Olgu $R = \{(a, b) \mid |a - b| \leq 2\}$ seos täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$.

- a) Too näiteid elementide paaridest, mis kuuluvad seosesse R .
 b) Leia kõik täisarvud x nii, et $xR5$ ja leia kõik täisarvud x nii, et $5Rx$.
 c) Kui võimalik, leia arvud x ja y nii, et $xR8$ ja $8Ry$, aga arv x ei ole seoses R arvuga y .
 d) Kui $a \in \mathbb{Z}$, leia kõik täisarvud x nii, et xRa .

233. Leidke arvupaarid, mis kuuluvad seosesse

- a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = xy\};$ b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \frac{y}{x} + 2x = 0\}.$

234. Kujutage graafiliselt seost $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x alumist täisosa, s.t. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ nii, et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

235. Otsustage, kas järgmised seosed $R \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \mathbb{N}$ on funktsioonid:

- a) $R = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (3, 4), (1, 5)\},$
 b) $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\},$
 c) $R = \{(3, 4), (5, 9), (1, 9), (2, 3)\},$
 d) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 1)\}.$

236. Otsustage, kas järgmised maatriksiga antud seosed R on funktsioonid:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

237. Otsustage, kas järgmised seosed $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on funktsioonid:

- | | |
|--|---|
| a) $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, | e) $R = \{(t^3, t) : t \in \mathbb{R}\}$, |
| b) $R = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, | f) $R = \{(t, 2^t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(t, -t) : t \leq 0\}$, |
| c) $R = \mathbb{R} \times \{1\}$, | g) $R = \{(t, 2^t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(t, -t) : t < 0\}$, |
| d) $R = \{1\} \times \mathbb{R}$, | h) $R = \{(\tan t, t), t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$. |

Definitsioon. Seost $R \subset X \times X$ nimetatakse

- refleksiivseks, kui $xRx \forall x \in X$;
- irrefleksiivseks, kui $x \not R x \forall x \in X$;
- sümmeetriliseks, kui $xRy \Rightarrow yRx \forall x, y \in X$;
- antisümmeetriliseks, kui $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \forall x, y \in X$;
- transitiivseks, kui $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \forall x, y, z \in X$.

Definitsioon. Seose $R \subset A \times B$ pöördseoseks nimetatakse seost $R^{-1} \subset B \times A$, mis määratakse samaväärsusega $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$ ehk $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

Definitsioon. Seost $\triangle X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ nimetatakse diagonaalsiks hulgas X .

238. Leidke kõik seosed hulgas $\{a, b\}$, mis on:

- a) refleksiivsed; b) sümmeetrilised; c) transitiivsed; d) antisümmeetrilised.

239. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Milliseid omadusi (refleksiivsus, irrefleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) rahuldab seos $R = \{(a, b) : a|b\}$ hulgal A ?

240. Olgu $A = \{1, 2, 3\}$ ja vaatame kolme seost hulgal A .

- a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
 b) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$;
 c) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Milliseid omadusi rahuldavad need seosed?

241. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Tooge näide seosest R hulgal A , mis

- a) on refleksiivne, aga ei ole antisümmeetriline ega transitiivne;

- b) ei ole refleksiivne sümmeetriline ega transitiivne;
- c) on sümmeetriline ja transitiivne;
- d) ei ole sümmeetriline ega antisümmeetriline;
- e) on nii sümmeetriline kui ka antisümmeetriline.

242. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Selgitage, kas seos R hulgal X on refleksiivne, sümmeetriline või antisümmeetriline ning esitage R hulga $X \times X$ alamhulgana (ehk paaride loeteluna), kui tema maatriksesitus on

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

243. Selgitage, kas seos on transitiivne, kui tema maatriksesitus on

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

244. Kas reaalarvude hulgal antud seos $xRy \Leftrightarrow x + y = 0$ on refleksiivne? Irrefleksiivne?

245. Uurige, milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) rahuldavad järgmised seosed R hulgas $\mathbb{Z}$:

- | | | |
|----------------------------------|--|---|
| a) $xRy \Leftrightarrow x = y$; | c) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$; | e) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$; |
| b) $xRy \Leftrightarrow x < y$; | d) $xRy \Leftrightarrow x - y > 1$; | f) $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$. |

246. Milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, transitiivsus, antisümmeetrilisus) rahuldavad järgmised seosed R hulgas $\mathbb{R}$:

- | | | |
|--------------------------------------|---|---|
| a) $xRy \Leftrightarrow x = y^2$; | c) $xRy \Leftrightarrow x - y \geq 2$; | e) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$; |
| b) $xRy \Leftrightarrow x = y $; | d) $xRy \Leftrightarrow x = -y$; | f) $xRy \Leftrightarrow y \leq x^2$. |

247. Olgu $X \neq \emptyset$. Milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) omavad järgmised seosed hulga X kõigi osahulkade hulgas $\mathcal{P}(X)$:

- a) $(A, B) \in R \Leftrightarrow$ hulgad A ja B on lõplikud ning neil on ühepalju elemente;
- b) $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
- c) $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$;
- d) $(A, B) \in R \Leftrightarrow$ hulkadel A ja B on täpselt kaks ühist elementi.

248. Olgu $X \neq \emptyset$. Vaatleme seost $\subset$ hulga X kõikide alamhulkade hulgas $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$. Milliseid omadusi rahuldab seos $\subset$ hulgas $\mathcal{P}(X)$?

249. Vaatleme seost $R = \{(a, d), (b, b), (d, a), (d, c)\}$ hulgal $A = \{a, b, c, d\}$. Leidke vähim seos, mis sisaldab seost R ja on

- a) refleksiivne ja sümmeetriline;
- b) sümmeetriline ja transitiivne;
- c) refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

250. Selgitage, millised omadused (refleksiivus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) on seostel R hulgas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- a) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow (m \leq k \wedge n \leq l)$;
- b) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow (m \leq k \vee n \leq l)$;
- c) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m \leq k$;
- d) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m + n \geq k + l$;
- e) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m + l = n + k$.

251. Tõestage, et kui seos on sümmeetriline ja antisümmeetriline, siis on ta ka transitiivne.

252. Tõestage, et seos on refleksiivne, sümmeetriline ja antisümmeetriline parajasti siis, kui ta on diagonaal mingis hulgas X .

253. Leidke R^{-1} ning uurige seose ja tema pöördseose omadusi, kui

- a) $R = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$;
- b) $R = \{(5, 4), (1, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 3)\}$;
- c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -y\}$;
- d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y - x = 2\}$.

254. Olgu $R \subset X \times X$ seos. Tõestage, et

- a) R on refleksiivne parajasti siis, kui $\Delta X \subset R$;
- b) R on sümmeetriline parajasti siis, kui $R = R^{-1}$.

255. Leidke järgmiste seoste pöördseosed.

- a) $(\{0, 1, 2\}, \leq)$
- b) $(\mathbb{N}, |)$
- c) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subset)$

Definitsioon. Olgu $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times Z$ seosed. Seoste R ja S korrutiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse seost $T \subset X \times Z$, kus $T = \{(x, z) \mid \exists y \in Y \text{ nii, et } (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$. Tähistatakse $S \circ R$.

256. Olgu $X = \{1, 2, 3\}$ ning $R = \{(x, y) \in X \times X \mid x + y = 3\}$ ja $S = \{(x, y) \in X \times X \mid x - y = 1\}$ seosed hulgas X . Leidke $R \circ S$ ja $S \circ R$.

257. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ ja $S = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Leidke R^{-1} , $S \circ R$, $R \circ S$ ja R^2 .

258. Olgu $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ seos hulgast $A = \{1, 3, 5, 7\}$ hulka $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Olgu $S = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$ seos hulgast B hulka A . Leidke $S \circ R$ ja $R \circ S$. Mida märkate?

259. Tooge näide seostest R ja S mingis mittetühjas hulgas X , mille korral $R \circ S = S \circ R$.

260. Olgu R ja S seosed mingis hulgas X . Tõestage või leidke kontranäide:

- kui seosed R ja S on refleksiivsed, siis on refleksiivne ka kompositsioon $R \circ S$;
- kui seosed R ja S on sümmeetrilised, siis on sümmeetriline ka kompositsioon $R \circ S$;
- kui seosed R ja S on antisümmeetrilised, siis on antisümmeetriline ka kompositsioon $R \circ S$;
- kui seosed R ja S on transitiivsed, siis on transitiivne ka kompositsioon $R \circ S$.

261. Olgu R ja S seosed hulgas X . Tõestage, et $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

262. Olgu $R \subseteq X \times X$ seos. Tõestage, et

- R on refleksiivne parajasti siis, kui $\Delta X \subseteq R$;
- R on antisümmeetriline parajasti siis, kui $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta X$;
- R on sümmeetriline parajasti siis, kui $R = R^{-1}$;
- R on transitiivne parajasti siis, kui $R \circ R \subseteq R$.

263. Olgu R refleksiivne ja transitiivne seos hulgas X . Tõestage, et $R \circ R = R$.

264. Olgu seos $R \subseteq X \times Y$ funktsioon hulgast X hulka Y ning seos $S \subseteq Y \times Z$ funktsioon hulgast Y hulka Z . Tõestage, et seos $S \circ R \subseteq X \times Z$ on funktsioon hulgast X hulka Z .

265. Olgu seos $R \subseteq X \times Y$ funktsioon hulgast X hulka Y ning seos $S \subseteq Y \times Z$ funktsioon hulgast Y hulka Z . Millistel tingimustel

- pöörduvus $R^{-1} \subseteq Y \times X$ on funktsioon (hulgast Y hulka X),
- seos $S \circ R \subseteq X \times Z$ on üksühene funktsioon (hulgast X hulka Z)?

266. Olgu R, S ja T seosed hulgas X . Tõestage sisalduvus $(R \circ S) \setminus (R \circ T) \subseteq R \circ (S \setminus T)$.

Definitsioon. Seost nimetatakse ekvivalentsusseoseks, kui ta on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

267. Millised järgmistest seostest on ekvivalentsusseosed?

- $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b \text{ on paarisarv}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| \geq 2\}$
- Hulk on $\mathbb{R}^2$ ja $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow (m \leq k) \wedge (n \leq l)$.
- Hulk on $\mathbb{R}^2$ ja $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow (m \leq k) \vee (n \leq l)$.
- Hulk on $\mathbb{R}^2$ ja $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow |m - l| = |k - n|$.
- X on Tartu elanike hulk ja xRy tähendab, et inimesed on omavahel tuttavad.

268. Millised järgnevatest seostest R hulgas $\mathbb{R}$ on ekvivalentsusseosed?

$$\text{a) } xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

269. Millised järgnevatest seostest R hulgas $\mathbb{R}^2$ on ekvivalentsusseosed?

$$\text{a) } (m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m \leq k$$

$$\text{b) } (m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m + l = n + k$$

270. Selgitage, millised järgmistest seostest R hulgas X on ekvivalentsusseosed:

- a) X on ruumi kõigi tasandite hulk ja xRy tähendab, et tasandid x ja y on paralleelsed või ühtivad;
- b) X on ruumi kõigi tasandite hulk ja xRy tähendab, et tasandid x ja y on risti;
- c) $X = \mathbb{R}$ ja $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$;
- d) X on Tallinna elanike hulk ja xRy tähendab, et inimesed on omavahel tuttavad.

271. Tõestage, et R on ekvivalentsusseos parajasti siis, kui R^{-1} on ekvivalentsusseos.

272. Leidke näide seosest, mis on refleksiivne ja sümmeetriline, aga ei ole transitiivne.

273. Tõestage, et lausearvutuse valemite samaväärsus on ekvivalentsusseos, st refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Definitsioon. Klassijaotuseks mittetühjas hulgas X nimetatakse hulkade süsteemi $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- iga $\alpha \in A$ korral $X_\alpha \neq \emptyset$;
- $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$;
- $X_\alpha \neq X_\beta \Rightarrow X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$.

Kui R on ekvivalentsusseos hulgas X , siis hulki $X_x = \{y \in X \mid (y, x) \in R\}$, $x \in X$, nimetatakse ekvivalentsiklassideks.

Definitsioon. Hulga X faktorhulgaks temas antud ekvivalentsusseose R järgi nimetatakse kõigi ekvivalentsiklasside hulka $X/R = \{X_x \mid x \in X\}$.

274. Pange kirja kõikvõimalikud klassijaotused hulgal $A = \{a, b, c\}$.

275. Antud hulkadest $A_1, \dots, A_8$ moodustada sellised hulkade süsteemid, mis moodustaksid klassijaotusi hulgal $\mathbb{Z}$ kui $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_4 = \{-1, -2, -3, \dots\}$, $A_5 = \{2, 4, 6, \dots\}$, $A_6 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, A_7 on kõigi algarvude hulk ja A_8 on kõigi naturaalarvuliste kordarvude hulk.

276. Kas poollõikude süsteem $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, on klassijaotus arvsirgel $\mathbb{R}$?

277. Leidke hulga $\mathbb{R}$ klassijaotusele $\{[k, k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ loomulikult vastav ekvivalentsusseos.

278. Leidke hulgal $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ määratud ekvivalentsusseose R ekvivalentsiklassid, kui $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 5), (5, 1)\}$.

279. Leidke ekvivalentsusseos R hulgas $X = \{1, 2, 3\}$, kui vastavad ekvivalentsiklassid on $\{1, 3\}$ ja $\{2\}$.

280. Leidke ekvivalentsusseos R hulgal $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kui ekvivalentsiklassid on $\{1\}$, $\{2, 3\}$ ja $\{4, 5, 6\}$.

281. Olgu $A = \{a, b, c, d, e\}$. Olgu R ekvivalentsusseos hulgal A . Eeldame, et seosel R on kaks ekvivalentsiklassi. On teada, et aRd , bRc ja eRd . Kirjutage seos R hulvana.

282. Olgu R seos hulgal $\mathbb{N}$, mis on defineeritud nii, et mRn parajasti siis, kui m ja n annavad ühe ja sama jäägi jagamisel arvuga 3. Leidke faktorhulk $\mathbb{N}/R$.

283. Olgu hulgas $X = \{a, b, c, d\}$ antud seos $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\}$. Veenduge, et R on ekvivalentsusseos ja leidke X/R .

284. Leidke $\mathbb{R}/R$, kui hulgas $\mathbb{R}$ on defineeritud seos R järgnevalt:

a) $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| = |y|;$

b) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$

Definitsioon. Seost nimetatakse osalise järjestuse seoseks, kui ta on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

Definitsioon. Hulka, millel on antud osalise järjestuse seos, nimetatakse osaliselt järjestatud hulgaks.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulka nimetatakse lineaarselt järjestatud hulgaks, kui iga elementide paari a ja b korral $a \leq b$ või $b \leq a$, s.t kaks suvalist elementi on omavahel võrreldavad.

285. Vaatleme seost R hulgas $\mathbb{N}$, kus suvaliste $a, b \in \mathbb{N}$ korral $aRb \Leftrightarrow a \mid b$ (see tähendab, et aRb parajasti siis kui a jagab arvu b). Milliseid omadusi rahuldab seos R hulgas $\mathbb{N}$? Kas tegu on osalise järjestuse seosega hulgas $\mathbb{N}$?

286. Millised järgmistest seostest hulgal $\{0, 1, 2, 3\}$ on osalise järjestuse seosed?

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

b) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

e) $\{(0, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

f) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

g) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3)\}$

287. Kas hulk (H, R) on osaliselt järjestatud hulk, kui H on kõigi Maal elavate inimeste hulk ning inimesed a ja b on seoses R , kui

- a) a on pikem kui b ; e) inimestel a ja b ei ole ühist sõpra;
 b) a ei ole pikem kui b ; f) a kaalub rohkem kui b ;
 c) a ei ole lühem, kui b ; g) $a = b$ või a on b vanem;
 d) inimestel a ja b on ühine sõber; h) $a = b$ või a on b järglane.

288. Millised järgmistest on osaliselt järjestatud hulgad?

- a) $(\mathbb{Z}, =)$; b) $(\mathbb{Z}, \neq)$; c) $(\mathbb{Z}, \geq)$; d) $(\mathbb{Z}, +)$; e) $(\mathbb{R}, <)$; f) $(\mathbb{R}, \leq)$.

289. Otsustage, millised maatriksiga antud seosed on osalisele järjestuse seosed:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

290. Tooge näiteid võrreldavatest ja mitte võrreldavatest elementidest osaliselt järjestatud hulgas $(\mathbb{N}, |)$.

291. Leidke kaks mitte võrreldavat elementi järgmistest osaliselt järjestatud hulkades:

- a) $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subset)$; b) $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$.

292. Olgu $<^X$ ja $<^Y$ osalise järjestuse seosed vastavalt hulkades X ja Y . Defineerime seose $<$ hulgas $X \times Y$ selliselt, et $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 <^X x_2 \wedge y_1 <^Y y_2$. Tõestage, et seos $<$ on osalise järjestuse seos hulgas $X \times Y$.

293. Tõestage, et kui R on osalise järjestuse seos, siis $xRy \wedge yRx \Leftrightarrow x = y$.

294. Tõestage, et seos $(m, n) \in R \Leftrightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ on osalise järjestuse seos hulgal $\mathbb{N}$.

295. Tõestage, et R on osalise järjestuse seos parajasti siis, kui R^{-1} on osalise järjestuse seos.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse vähimaks, kui $x_0 \leq x$ iga $x \in X$ korral. Analoogiliselt, elementi $x_0 \in X$ nimetatakse suurimaks, kui $x \leq x_0$ iga $x \in X$ korral.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse minimaalseks, kui sellest, et $x \leq x_0$ ja $x \in X$ korral järeldub, et $x = x_0$. Analoogiliselt, elementi x_0 nimetatakse maksimaalseks, kui sellest, et $x_0 \leq x$ ja $x \in X$ korral järeldub, et $x = x_0$.

- 296.** Olgu $H = \{1, 2, 3, 4\}$ ja vaatleme leksikograafilist järjestust selles hulgas. Leida
- kõik paarid hulgas $H \times H$, mis on väiksemad kui $(2, 3)$;
 - kõik paarid hulgas $H \times H$, mis on suuremad kui $(3, 1)$.
- 297.** Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$
- kõik minimaalsed elemendid;
 - kõik maksimaalsed elemendid;
 - vähim element, kui see on olemas;
 - suurim element, kui see on olemas.
- 298.** Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$
- kõik minimaalsed elemendid;
 - kõik maksimaalsed elemendid;
 - vähim element, kui see on olemas;
 - suurim element, kui see on olemas.
- 299.** Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subset)$
- kõik minimaalsed elemendid;
 - kõik maksimaalsed elemendid;
 - vähim element, kui see on olemas;
 - suurim element, kui see on olemas.
- 300.** Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c, b, d, a\}, \{b, d, e\}\}, \subset)$
- kõik minimaalsed elemendid;
 - kõik maksimaalsed elemendid;
 - vähim element, kui see on olemas;
 - suurim element, kui see on olemas.
- 301.** Tooge näide osaliselt järjestatud hulgast, millel
- on minimaalne element, kuid maksimaalset elementi pole;
 - on maksimaalne element, kuid minimaalset elementi pole;
 - ei ole minimaalset ega ka maksimaalset elementi.

Vastused ja lahendused

Lausearvutus

1. a) ei ole, aga näiteks „Iga elu on kunstiteos“ on küll; b) on küll; c) ei ole, aga näiteks „Kui kõis on mõisa oma, siis ta lohiseb“ on küll; d) ei ole, aga näiteks „Tudengi töö on õppimine“ on küll; e) on küll; f) on küll; g) on küll.

2. a) Iga y korral kehtib $y^4 + 4 > 0$. b) Iga a ja b korral kehtib $a \cdot b = b \cdot a$. c) Iga α korral kehtib $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. d) Leidub selline x , et $\log_a x = 0$. e) Leidub selline α , et $\tan \alpha \neq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. f) Iga a ja b korral kehtib $|a \pm b| \leq |a| + |b|$. g) Leidub selline x , et $e^x = 1$.

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. b) $\exists \alpha, \cos \alpha = 0,5$. c) $\forall p, \forall q, (x^2 + px + q = 0, y^2 + py + q = 0, x + y = -p \Rightarrow xy = q)$ d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$. e) $\forall n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}, \exists i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j, 3 \mid (n_i - n_j)$. f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1$. g) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x$.

4. a) Tõene b) Tõene c) Tõene d) Väär e) Tõene f) Väär (täisarvudes) g) Tõene h) Väär i) Tõene j) Tõene k) Tõene l) Tõene

5. a) Tõene b) Tõene c) Tõene d) Väär e) Tõene f) Väär g) Tõene h) Väär i) Tõene j) Tõene

6. a) 2015 ei jagu 3-ga (tõene). b) Leidub paaris algarv (tõene). c) 2 on algarv (tõene). d) Diameetrile toetuv piirdenurk ei ole sirgnurk (tõene). e) Leidub ruutvõrrand, millel ei ole kahte reaalselt lahendit (tõene). f) Igast positiivsest arvust saab võtta logaritmi (tõene). g) $\forall x, x^2 + 1 \leq 0$ (väär). h) $\exists \alpha, \cos^2 \alpha \neq \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ (tõene).

7. a) Ükski arv pole võrdne oma vastandarvuga. b) Leidub kolmnurk, mille küljed ei ole võrdelised vastasnurkade siinustega. c) Leidub kolmnurk, millel ei ole ümberringjoont. d) Iga kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis. e) Leidub reaalarv mille ruut on negatiivne. f) Iga x korral leidub y , nii et $y^3 = x$. g) Iga reaalarvu a korral leidub reaalarv x , nii et $a + x \neq x$

8. a) Leidub naine, kes ei ole ema. b) Leidub koer, kellel ei ole kirpe. c) Mitte ükski tudeng ei ole lahendanud kõiki ülesandeid sellest ülesannete kogust. d) Kõikidel selles klassis on hea suhtumine. e) Leidub tudeng, kes ei ole võtnud kursust kõrgemast matemaatikast f) Iga poliitik on ebaaus. g) On olemas ameeriklane, kes ei söö juustuburgereid.

9. a) $\forall x, e^x \geq 0$. b) $\exists a, \exists b, a + b \neq 1$. c) $\forall x \in \mathbb{N}, x \neq x + 1$. d) $\exists x \in \mathbb{N}, x + x \neq 2x$. e) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x \leq y$. f) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x + y \neq 0$. g) $\exists x, x^2 \leq x$. h) $\forall x, x^2 \neq 2$. i) $\exists x, \exists y, x + y \leq 0$. j) $\exists x, \forall y, x * y \neq 1$. k) $\forall x, \exists y, x * y \neq y$. l) $\exists x, \forall y, x \neq y^2$.

10. Sõnastage järgmised laused, eeldades, et A tähendab lauset "Mulle meeldib jäätis" ja B tähendab lauset "Sulle meeldib šokolaad". a) Mulle meeldib jäätis ja sulle meeldib šokolaad. b) Mulle ei meeldi

jäätis. c) Sulle ei meeldi šokolaad. d) Mulle meeldib jäätis või sulle meeldib šokolaad. e) Mulle meeldib jäätis või sulle ei meeldi šokolaad. f) Ei ole nii, et mulle meeldib jäätis ja sulle meeldib šokolaad. g) Mulle ei meeldi jäätis või sulle ei meeldi šokolaad. h) Mulle ei meeldi jäätis ja sulle meeldib šokolaad. i) Ei ole nii, et mulle meeldib jäätis või sulle meeldib šokolaad.

11 a) $A \vee B$. b) $\neg B$ c) $\neg(A \vee B)$ d) $\neg A \wedge \neg B$ e) $\neg(A \wedge B)$ f) $\neg A \vee \neg B$

12 a) Kui hiir hüppab, siis kass kargab. b) Kui kass kargab, siis hiir hüppab. c) Kui kass ei karga, siis hiir ei hüppa. d) Ei ole nii, et kui hiir hüppab, siis kass kargab. e) Kui hiir hüppab ja kass kargab, siis vana karu lööb trummi. f) Hiir hüppab ja kui kass kargab, siis vana karu lööb trummi. g) Kui vana karu lööb trummi või kass kargab, siis hiir hüppab. h) Vana karu lööb trummi või kui kass kargab, siis hiir hüppab. i) Kui hiir ei hüppa ja kass ei karga, siis vana karu ei löö trummi.

13. a) Kui on pühapäev, siis Kristjan läheb teatrisse. b) Kui on pühapäev ja Kristjan läheb koeraga jalutama, siis Kristjan ei lähe teatrisse. c) Kui ei ole pühapäev, siis Kristjan ei lähe teatrisse ega sõbrale külla. d) Kui Kristjan ei lähe teatrisse ega sõbrale külla ega koeraga jalutama, siis Kristjan istub kodus. e) Kui on pühapäev, siis Kristjan ei istu kodus ning Kristjan läheb teatrisse või sõbrale külla või koeraga jalutama. f) Kui on pühapäev, siis Kristjan ei istu kodus, ning kui ei ole pühapäev, siis Kristjan ei istu kodus.

14. a) $a = 0 \vee b = 0$; b) $\neg(a = 0) \wedge \neg(b = 0)$; c) $a = 0 \wedge \neg(b = 0)$; d) $a = 3 \vee a = -3$; e) $a \geq 0 \wedge b \geq 0$; f) $a = 0 \vee b = 0$; g) $a + b > c \wedge b + c > a \wedge c + a > b$; h) $a = b \wedge 2a > c \vee a = c \wedge 2a > b \vee b = c \wedge 2b > a$.

15. a) $A =$ „Toas on isa“, $B =$ „Toas on ema“; $A \vee B$.

b) $A =$ „Anu armastab koeri“, $B =$ „Mart armastab kasse“; $A \wedge B$. Kaduma läheb osalauseste vastandamine („kuid“)

c) $A =$ „Hr. Kask on õnnelik“, $B =$ „Pr. Kask on õnnelik“; $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$. Tegelikult pole „õnnelik“ ja „õnnetu“ tingimata üksteise eitused.

d) $A =$ „Sellel tegelasel on kaastunnet“, $B =$ „Sellel tegelasel on südametunnistus“; $\neg A \wedge \neg B$. Kaduma läheb seda tegelast halvustav alatoon.

e) $A =$ „Kungla rahvas istus maha sööma“, $B =$ „Vanemuine läks murumaal kandlelugu lööma“; $A \Rightarrow B$. Kaduma läheb tekstirea poeesia ja kultuurilooline taust.

f) $A =$ „Talvel pääsevad laevad sadamast välja“, $B =$ „Jäälõhkuja on laevadele tee rajanud“; $A \Rightarrow B$.

g) $A =$ „Tuleb õnnetusi“, $B =$ „Tuleb palju õnnetusi“; $A \Rightarrow B$. Kaduma läheb tekstirea poeesia. (Tegemist on vanasõnaga.)

h) $A =$ „Järgmisel käigul vangerdan“, $B =$ „Kaotan lipu“, $C =$ „Saamati“; $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$.

i) $A =$ „Televiisor on rikkis“, $B =$ „Televiisoris on mittevaliteetne transistor“, $C =$ „Televiisori kaitse on läbi põlenud“; $D =$ „Vool ei pääse televiisori toiteplokki“; $B \vee C \wedge D \Rightarrow A$.

j) $A =$ „Riigikord on kommunism“, $B =$ „Kehtib nõukogude võim“, $C =$ „Toimub kogu maa elektrifitseerimine“; $A \Leftrightarrow B \wedge C$. Kaduma läheb tsitaadi autentne sõnastus.

16. a) $A =$ „Päike tõuseb idast“, $B =$ „Päike loojub läänes“; $A \Rightarrow B$. b) $B \Rightarrow A$. c) $A =$ „Ettevõtte on edukas“, $B =$ „Ettevõtte asutajatel on küllaldaselt algkapitali“; $A \Rightarrow B$. d) $A =$ „Teatrid töötavad korralikult“, $B =$ „Teatritele on ette nähtud riigi toetus“; $B \Rightarrow A$. e) $A \Rightarrow B$. f) $A =$ „Rida R koondub absoluutselt“, $B =$ „Rea R kõik ümberjärjestused koonduvad samaks summaks“; $A \Leftrightarrow B$.

17. a) tõene; b) tõene; c) tõene; d) väär; e) tõene; f) väär.

18. a) tõene; b) tõene; c) väär; d) tõene.

19. A ja 7.

20. a) $1 - a$; b) $a \cdot b$; c) $1 - (1 - a)(1 - b)$; d) $1 - a(1 - b)$; e) $(1 - a(1 - b))(1 - b(1 - a))$.

21. a) tõene; b) tõene; c) tõene; d) tõene; e) tõene; f) tõene; g) väär; h) väär.

	X	Y	$X \Rightarrow \neg Y$	$X \Rightarrow X \wedge Y$	$(X \Rightarrow \neg Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y)$
	v	v	t	t	t
22. a)	v	t	t	t	t
	t	v	t	v	t
	t	t	v	t	t

	X	Y	Z	$\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X))$	$X \vee Z$	$\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow (X \vee Z)$
	v	v	v	v	v	t
	v	v	t	v	t	t
	v	t	v	v	v	t
b)	v	t	t	v	t	t
	t	v	v	v	t	t
	t	v	t	v	t	t
	t	t	v	t	t	t
	t	t	t	t	t	t

	X	Y	$X \wedge (Y \Rightarrow X)$	$(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$
	v	v	v	t
c)	v	t	v	t
	t	v	t	v
	t	t	t	v

	X	Y	$(X \vee \neg Y) \Rightarrow Y$	$X \Rightarrow Y$	$((X \vee \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
	v	v	t	t	t
d)	v	t	t	t	t
	t	v	v	v	t
	t	t	t	t	t

	X	Y	Z	$X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$	$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$	$(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$
	v	v	v	t	t	t
	v	v	t	t	t	t
	v	t	v	t	t	t
g)	v	t	t	t	t	t
	t	v	v	t	t	t
	t	v	t	t	t	t
	t	t	v	v	v	t
	t	t	t	t	t	t

	X	Y	$X \wedge (Y \vee \neg X)$	$(\neg Y \Rightarrow X) \vee Y$	$(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$
	v	v	v	v	v
e)	v	t	v	t	v
	t	v	v	t	v
	t	t	t	t	t

23. a) jah; b) jah.

24. a) kasutage tõeväärtustabelit; b) kasutage tõeväärtustabelit või lihtsustage: $X \Rightarrow (X \vee Y) \equiv \neg X \vee X \vee Y \equiv t \vee Y \equiv t$; c) kasutage tõeväärtustabelit või lihtsustage: $X \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Y)) \equiv \neg X \vee (\neg Y \vee (X \wedge Y)) \equiv \neg X \vee (\neg Y \vee X \wedge \neg Y \vee Y \equiv \neg X \vee \neg Y \vee X \equiv t$; d) kasutage tõeväärtustabelit või lihtsustage: $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)) \equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg(\neg Y \vee Z) \vee (\neg X \vee Z)) \equiv X \wedge \neg Y \vee Y \wedge \neg Z \vee \neg X \vee Z \equiv t$.

25. a) kehtestatav, kummutatav; b) kehtestatav, kummutatav; c) samaselt tõene, kehtestatav; d) samaselt väär, kummutatav.

26. a) $KKAabAbcAac$; b) $CKNaCNabb$; c) $CAabKEcda$; d) $C \Leftrightarrow \neg(B \Rightarrow A \wedge D)$; e) $A \vee (\neg A \wedge B \Rightarrow C)$; f) $(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow C) \wedge D$.

Valemite teisendamine

27. a) Järeldumine kehtib. b) Järeldumine kehtib.

28. a) Valemi $\neg A \Leftrightarrow B$ tõesuse korral on tõene ka valem $A \Rightarrow \neg B$.

b) Valemi $\neg A \Leftrightarrow B$ tõesuse korral on $\neg(A \vee B)$ väär.

29. C on väär, A on väär, B on väär.

30. $A =$ „Õpilased on rõõmsad“, $B =$ „Toimub kontrolltöö“, $C =$ „Õpetajal on hea meel“, $D =$ „Õpetaja ei taha pidada tundi“. Arutlus on: $A \Leftrightarrow \neg B$, $A \Rightarrow C$, $C \Rightarrow D$, $D \Rightarrow B$.

Kui kehtiks A , siis oleks samal ajal $\neg B$ ja B , mis on võimatu. Seega kehtib $\neg A$.

31. $A =$ „Mihkel kõhib“, $B =$ „Mihkel on näost valge“, $C =$ „Mihkel on haige“, $D =$ „Mihkel on käinud nurga taga suitsu tegemas“. $A \wedge B \Rightarrow C \vee D$, $\neg D \wedge (A \vee B) \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A \wedge \neg B$. Kuna B kehtib, siis $\neg D$ annab, et C , mistõttu $\neg B$, vastuolu. Seega kehtib D .

32. $A =$ „Jüri vaatab korvpalli“, $B =$ „Eesti võidab“, $C =$ „Jüri on õnnelik“, $D =$ „Jüri joob õlut“. Ei või kindlalt väita, et Jüri jõi õlut, sest valem $((A \wedge B \Rightarrow C \wedge D) \wedge (\neg A \wedge C \Rightarrow D) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge C) \Rightarrow D$ ei ole samaselt tõene.

33. $A =$ „Siimule meeldib šokolaad“, $B =$ „Siim sööb palju šokolaadi“, $C =$ „Siimul kaob söögiisu“. Järeldumine kehtib, sest valem $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg A$ on samaselt tõene.

34. $A \Rightarrow \neg A \equiv \neg A$.

35. Vaatleme valemi B suvalist väärtustust $\mathbf{x}$. Kuna $A(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}$ ja $A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}$, siis $B(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}$. Et väärtustus oli suvaline, siis B on samaselt tõene.

36. Jah, see leiab aset olukorras, kui F on samaselt väär.

38. a) $\neg(\neg P \wedge Q)$; b) $\neg(P \wedge \neg P)$; c) $\neg(A \wedge \neg A)$; d) $\neg(\neg P \wedge Q)$; e) $\neg(\neg P \wedge Q)$.

39. a) $P \vee \neg Q \vee R$; b) $P \vee \neg Q$; c) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$; d) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$; e) $A \vee \neg A$.

40. a) $\neg A \vee B$; b) $P \vee Q$; c) $A \wedge B$; d) $C \Rightarrow A$; e) $P \Leftrightarrow Q$; f) A ; g) $\neg(P \wedge Q)$; h) $\mathbf{t}$.

41. a) Arvud a, b, c on kolmnurga külgede pikkused ja kehtib võrratus $a + b \leq c$, $a + c \leq b$ või $b + c \leq a$. b) Täisarvude a, b ja c korral kehtib $a = bc$ ja a ei jagu arvuga b või a ei jagu arvuga c . c) Arv n on naturaalarv ja $n^2 + n + 41$ ei ole algarv. d) Leiduvad täisarvud a ja b , nii, et $a + b$ on paarisarv ning a ja b on erineva paarsusega.

42. a) Selles aines leidub tudeng, kes pole käinud ei Soomes ega Rootsis. b) Leidub e-mail, mis on suurem kui üks megabait ja mida ei komprimeerita. c) Kasutaja on aktiivne ja ühtegi võrguühendust pole saadaval. d) Ükski siga ei oska ujuda või kalu püüda. e) Selles aines leidub keegi, kes oskab prantsuse ja vene keelt. f) $x \leq 0 \vee y > 0$. g) Arv x on algarv ja $\sqrt{x}$ on ratsionaalarv. h) Arv x on paaritu ja x^2 on

paaris arv. i) Arv x on ratsionaalarv ja $x \neq 0$ ning $\tan x$ on ratsionaalarv. j) $(\sin x < 0) \wedge (0 \leq x \leq \pi)$. k) $\forall x \forall y (x + 2y \neq 2 \vee 2x + 4y \neq 5)$. l) $\exists x \forall y (x + y \neq 2 \vee 2x - y \neq 1)$. m) $\exists x \exists y ((x \geq 0) \wedge (y < 0) \wedge (x - y \leq 0))$. n) $\forall x \forall y ((x > 0) \vee (y > 0) \vee (x - y \leq 0))$. o) $\exists x \exists y (((x = 0) \vee (y = 0) \vee (xy = 0)) \wedge ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \vee (xy \neq 0)))$.

43. a) $P \wedge \neg Q$; b) $(\neg P \vee \neg Q) \wedge R$; c) $(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$; d) $\neg P \vee Q \wedge R \vee \neg R$.

44. a) $X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$. b) $X \wedge Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$. c) $X \wedge Y$. a) $X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$. b) $X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$. c) $\neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$. d) $X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$. e) $X \wedge Y$.

45. a) $X \wedge \neg Y$; b) $\neg X \vee \neg Y$; c) $X \wedge Y \vee X \wedge Z \vee Y \wedge Z$; d) $X \wedge Y \wedge \neg Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z$; e) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge Z$.

46. $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge Z$.

47. $X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z$.

48. $A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \vee A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D \vee \neg A \wedge B \wedge C \wedge D \vee A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \vee A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \vee A \wedge B \wedge \neg C \wedge D \vee A \wedge B \wedge C \wedge D$.

50. Lausemuutujad X ja Y omandavad väärtusi järgnevalt:

X	Y
v	v
v	t
t	v
t	t

Vastuste veeru tõeväärtused kirjutame lühiduse huvides vasakult paremale. Saame järgmised valemid.

veerg	valem
vvvv	v
vvvt	$X \wedge Y$
vvtv	$X \wedge \neg Y$
vvtt	X
vtvv	$\neg X \wedge Y$
vtvt	Y
vttv	$\neg(X \Leftrightarrow Y)$
vttt	$X \vee Y$
tvvv	$\neg(X \vee Y)$
tvvt	$X \Leftrightarrow Y$
tvtt	$\neg Y$
ttvt	$Y \Rightarrow X$
ttvv	$\neg X$
ttvt	$X \Rightarrow Y$
tttv	$\neg(X \wedge Y)$
tttt	t

51. Kuna $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z \equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee Z \equiv X \wedge \neg Y \vee Z$, aga $X \Rightarrow (Y \Rightarrow W) \equiv \neg X \vee \neg Y \vee Z$, siis implikatsioon ei ole assotsiatiivne (kontranäite saamiseks piisab valida väärtustus (v, t, v)).

Ekvivalentsi assotsiatiivsuse uurimiseks koostame tõeväärtustabeli:

X	Y	Z	$(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow Z$	$X \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)$
v	v	v	v	v
v	v	t	t	t
v	t	v	t	t
v	t	t	v	v
t	v	v	t	t
t	v	t	v	v
t	t	v	v	v
t	t	t	t	t

Seega ekvivalents on assotsiatiivne.

Saame, et $(X \wedge Y) \Rightarrow Z \equiv \neg(X \wedge Y) \vee Z \equiv \neg X \vee \neg Y \vee Z$ aga $(X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow Z) \equiv (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z)$. Need valemid pole samaväärsed (vt. väärtustust (v, t, v)).

Saame, et $X \Rightarrow Y \wedge Z \equiv \neg X \vee Y \wedge Z$ ning $(X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z) \equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \equiv \neg X \vee \neg X \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \vee Y \wedge Z \equiv \neg X \vee Y \wedge Z$. Need valemid on samaväärsed.

Saame, et $(X \Rightarrow Y) \wedge Z \equiv (\neg X \vee Y) \wedge Z \equiv \neg X \wedge Z \vee Y \wedge Z$ ning $X \wedge Z \Rightarrow Y \wedge Z \equiv \neg(X \wedge Z) \vee Y \wedge Z \equiv \neg X \vee \neg Z \vee Y \wedge Z$. Need valemid ei ole samaväärsed (vt. väärtustust (t, t, v)).

Ka $X \wedge (Y \Rightarrow Z) \neq X \wedge Y \Rightarrow X \wedge Z$, sest konjunktsioon on kommutatiivne.

52. a) $X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y)$; $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$; $X \Leftrightarrow Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y) \vee \neg(X \vee Y)$.

b) $X \vee Y \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$; $X \Rightarrow Y \equiv \neg(X \wedge \neg Y)$; $X \Leftrightarrow Y \equiv \neg(\neg(X \wedge Y) \wedge (\neg X \wedge \neg Y))$.

c) $X \wedge Y \equiv \neg(X \Rightarrow \neg Y)$; $X \vee Y \equiv \neg X \Rightarrow Y$; $X \Leftrightarrow Y \equiv \neg((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow X))$.

53. $X \vee Y \equiv (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y$.

Hulga mōiste

54. a) $\{x \mid x = 0 \vee (x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 9)\}$; b) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; c) $\{n/2 \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$; d) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$; e) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$; f) $\{1/(3n * 3(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$; g) $\{n^{((-1)^{n-1})} \mid n \in \mathbb{N}\}$; h) $\{x \mid a \leq x < b\}$; i) $\{x \mid x = 2k, n \in \mathbb{Z}\}$.

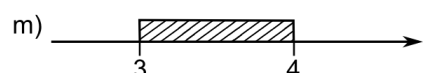
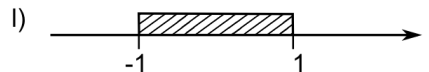
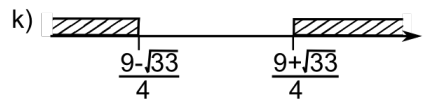
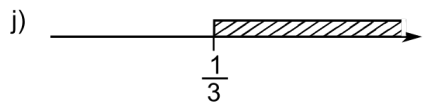
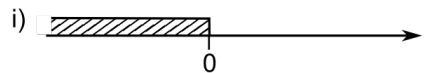
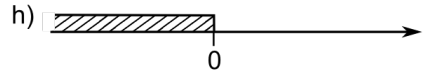
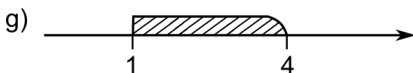
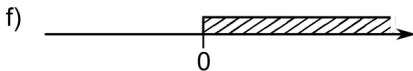
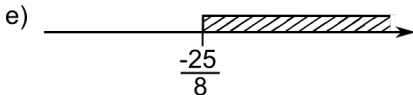
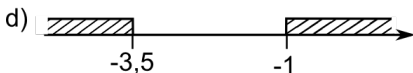
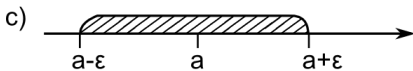
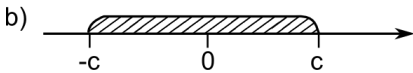
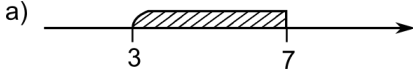
55. a) $\{-1, 1\}$; b) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$; c) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; d) $\{-1, 1\}$; e) $\{0, 8/7\}$; f) $\{(0, 1), (-1, 0)\}$; g) $\emptyset$; h) $\{2, 3\}$.

56. a) elemendid: a, b ; alamhulgad: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; b) elemendid: $1, \{1\}$; alamhulgad: $\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$; c) elemendid: a, b, c ; alamhulgad: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

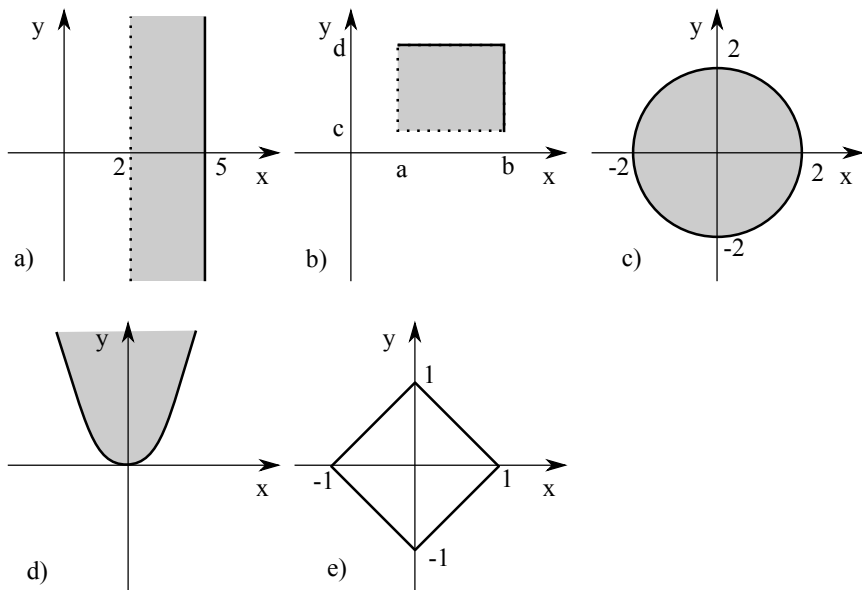
57. a) jah; b) ei; c) jah; d) jah; e) jah; f) jah; g) jah; h) ei; i) jah; j) jah; k) ei; l) ei; m) jah; n) jah; o) ei.

58. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ja $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

59.



60.



61. a) $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$; b) $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$; c) $\{\{b\}, \{b, c\}\}$.

62. Nii silmast, kõrvast, käest kui ka jalast ilmajäänud sõdalaste maksimaalne hulk on 70% (silma kaotanud sõdalaste hulk). Silmad säilitas $100\% - 70\% = 30\%$ sõdalastest, kõrvad $100\% - 75\% = 25\%$, käed $100\% - 80\% = 20\%$ ja jalad $100\% - 85\% = 15\%$ neist. Neid arve liites saame sõdalaste maksimaalse hulga, kes ei kaotanud kõiki neid 4 organit: $30\% + 25\% + 20\% + 15\% = 90\%$. Seega kõik need 4 organit kaotas vähemalt $100\% - 90\% = 10\%$ sõdalastest.

63. Tõestus matemaatilise induktsiooni abil. Väide kehtib $n = 0$ korral: hulgal $\emptyset$ on $2^0 = 1$ osahulk: $\emptyset$. Väite kehtivusest $n = m$ korral järeldub kehtivus $n = m + 1$ korral, sest ühe elemendi lisandudes kahekordistub osahulkade arv (igale senisele osahulgale uut elementi lisades tekib uus osahulk).

64. Väide kehtib suunas $\Leftarrow$, sest $A \subset A$ iga hulga A korral. Suunas $\Rightarrow$ väite saamiseks kasutame korduvalt osahulga transitiivsuse omadust: Kui $A \subset B$ ja $B \subset C$, siis $A \subset C$. Selle põhjal võime ahelast $A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset A_1$ vahepealseid liikmeid kõrvaldada: $A_2 \subset A_3 \subset A_4 \Rightarrow A_2 \subset A_4$, $A_2 \subset A_4 \subset A_5 \Rightarrow A_2 \subset A_5$ ja nii edasi, kuni jäävad järgi vaid äärmised liikmed: $A_2 \subset A_1$. Osahulga antisümmeetrisuse omadus annab nüüd $A_1 \subset A_2 \wedge A_2 \subset A_1 \Rightarrow A_1 = A_2$. Teisedki võrdused $A_{i-1} = A_i$, $i = 3, \dots, n$ saame samal viisil.

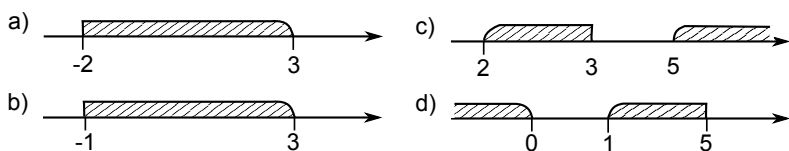
Tehted hulkadega

65. Vastustes g) ja i) tähistab U universaalhulka. a) $A \cup \emptyset = A$; b) $A \cap \emptyset = \emptyset$; c) $A \setminus \emptyset = A$; d) $A \Delta \emptyset = A$; e) $A \setminus A = \emptyset$; f) $\emptyset \setminus A = \emptyset$; g) $A \cup A' = U$; h) $A \cap A' = \emptyset$; i) $\emptyset' = U$

	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$A \Delta B$
a)	$\{-1, 0, 3, 4, 6\}$	$\{0, 4\}$	$\{-1, 3\}$	$\{6\}$	$\{-1, 3, 6\}$
b)	$[0, 5]$	$[1, 2]$	$[0, 1]$	$(2, 5]$	$[0, 1) \cup (2, 5]$
66. c)	$[0, 2] \cup \{4, 6\}$	$\{0\}$	$(0, 2]$	$\{4, 6\}$	$(0, 2] \cup \{4, 6\}$
d)	$(-\infty, 7]$	$[2, 4]$	$(-\infty, 2) \cup (4, 7]$	$\emptyset$	$(-\infty, 2) \cup (4, 7]$
e)	$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$
f)	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\emptyset\}\}$

67. $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$,
 $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4\}$.

68. a) $[-2, 3]$; b) $[-1, 3]$; c) $(2, 3] \cup (5, \infty)$; d) $(-\infty, 0) \cup (1, 5]$.



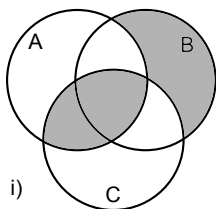
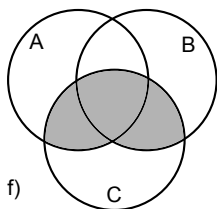
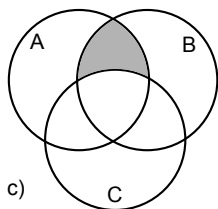
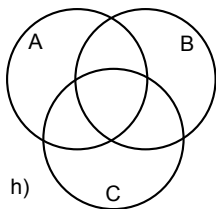
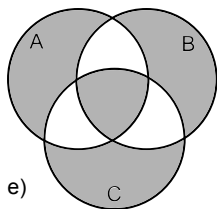
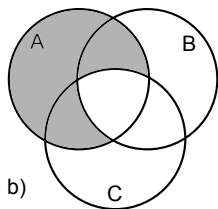
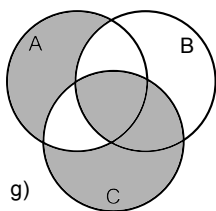
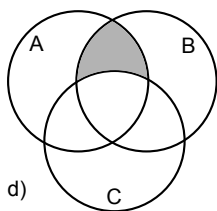
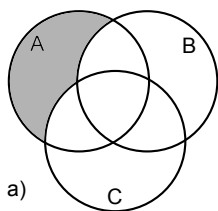
69. a) $A' = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ b) $A' = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$

Hulkade X ja Y võrdsuse tõestamiseks kasutame sageli etappe $(\subset) X \subset Y$ ja $(\supset) X \supset Y$.

70.

- a) $B \subset A$; c) $A = B$; e) $A = B = \emptyset$; g) $A = B$.
b) $A \subset B$; d) $A \cap B = \emptyset$; f) $B = \emptyset$;

71.



72. a) $(B \cap C) \setminus A$; b) $(A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cap C) \setminus A)$ või $((A \setminus B) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A)$; c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \Delta B \Delta C)$ või $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$.

73. 10 last tegelevad male ja näitlemisega, aga ei ole skaudid. Maleringis on 19 last.

74. 13 tudengit õpib ainult inglise keelt, 20 ainult saksa keelt, 30 ainult prantsuse keelt. 20 tudengit ei õpi nimetatud keeli.

76. Kehtivad võrdused $\{\{\emptyset\}\} \Delta \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ (sest $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, kuna $\{\emptyset\}$ pole tühi) ja $\{\emptyset\} \Delta \emptyset = \{\emptyset\}$ (sest $A \Delta \emptyset = A$ iga hulga A korral). Seega $(\{\{\emptyset\}\} \Delta \{\emptyset\}) \setminus (\{\emptyset\} \Delta \emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$.

77. Tähistame hulkade $A \setminus B$, $B \setminus A$ ja $A \cap B$ elementide arvu vastavalt a , b ja c . Ülesande tingimustest saame võrdused $a + c = m$, $b + c = n$ ja $a + b + c = p$. Elementide arv hulgas $A \setminus B$ on $a = (a + b + c) - (b + c) = p - n$, hulgas $A \cap B$ aga $c = (a + c) + (b + c) - (a + b + c) = m + n - p$. Hulgas $A \Delta B$ on elementide arv $a + b = 2(a + b + c) - (a + c) - (b + c) = 2p - n - m$.

78. a) Näitame, et suvaline element x kuulub hulka $(A \cup B) \cup C$ parajasti siis, kui see element kuulub hulka $A \cup (B \cup C)$. See tähendabki, et need hulgad koosnevad samadest elementidest ehk need hulgad

on võrdsed.

$$\underbrace{x \in (A \cup B) \cup C}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } (A \cup B) \cup C} \Leftrightarrow \underbrace{x \in A \cup B}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } A \cup B} \vee \underbrace{x \in C}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } C}$$

ühendi def.

$$\Leftrightarrow (\underbrace{x \in A}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } A} \vee \underbrace{x \in B}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } B}) \vee \underbrace{x \in C}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } C}$$

loogika

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

ühendi def.

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C$$

ühendi def.

$$\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

Järelikult $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

See tõestus lühemalt: $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

b) (⊂) Näitame, et $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Olgu $x \in A \cup (B \cap C)$. Siis kas $x \in A$ või $x \in B \cap C$. Kui $x \in A$, siis $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, seega ka $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Kui $x \in B \cap C$, kehtib samuti $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (⊃) Näitame, et $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Kui $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, siis $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, seega $x \in A$ või $x \in B \cap C$, seega $x \in A \cup (B \cap C)$.

$$\text{c) } x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C);$$

$$\text{d) } x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A;$$

$$\text{e) } x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A.$$

$$\text{f) } x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

g) (⊂) Olgu $x \in A \setminus (B \cup C)$. Siis $x \in A$ ja $x \notin (B \cup C)$. See mittekuuluvus tähendab, et $x \notin B$ ja $x \notin C$, kust koos kuuluvusega $x \in A$ saame $x \in A \setminus B$ ja $x \in A \setminus C$, seega $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. (⊃) Olgu $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Siis $x \in A \setminus B$ ja $x \in A \setminus C$. Seega $x \in A$, kuid $x \notin B$ ja $x \notin C$. Viimased mittekuuluvused koos kuuluvusega $x \in A$ annavad $x \in A \setminus (B \cup C)$.

h) (⊂) Olgu $x \in A \setminus (B \cap C)$. Siis $x \in A$ ja $x \notin B \cap C$. See mittekuuluvus tähendab, et $x \notin B$ või $x \notin C$, kust koos kuuluvusega $x \in A$ saame $x \in A \setminus B$ või $x \in A \setminus C$, seega $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. (⊃) Olgu $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Siis $x \in A \setminus B$ või $x \in A \setminus C$. Seega $x \in A$, kuid $x \notin B$ või $x \notin C$. Viimased mittekuuluvused annavad $x \notin B \cap C$, mis koos kuuluvusega $x \in A$ annab $x \in A \setminus (B \cap C)$.

$$\text{i) } x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cap B.$$

j) Võrdus kehtib, sest hulga A elementidele hulkade $B \setminus A$ ja B elementide lisamine on samaväärne (hulga $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$ elemendid on hulgas A juba olemas).

$$\text{k) } x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \setminus B.$$

l) $x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in (A \wedge x \in C)) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

m) $x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \wedge x \notin (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

o) Näitame, et väide $x \in A \cap (B \setminus A)$ on väär mistahes x korral.

$$\begin{aligned} \underbrace{x \in A \cap (B \setminus A)}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } A \cap (B \setminus A)} &\Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } A} \wedge \underbrace{x \in B \setminus A}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } B \setminus A} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{\text{el. } x \text{ kuulub hulka } A} \wedge \underbrace{x \in B}_{\text{ja}} \wedge \underbrace{x \notin A}_{\text{ja el. } x \text{ ei kuulu hulka } A} \end{aligned}$$

Oleme jõudnud väära väiteni: olukord $x \in A \wedge x \notin A$ on võimatu. Kuna (mistahes) elemendi kuulumine hulka $A \cap (B \setminus A)$ on väär väide, siis järelikult on see hulk tühi.

Esimese samaväärsuse juures kasutame ühisosa definitsiooni, teise samaväärsuse juures hulkade vahe definitsiooni ja kolmanda samaväärsuse juures asjaolu, et $P \wedge (Q \wedge R)$ ja $(P \wedge Q) \wedge R$ on samaväärsed (seega ei ole vaja sulge kirjutada, kuna tehete järjekorrast midagi ei sõltu).

t)

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) && \text{sümmeetrilise vahe def.} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A) && \text{ühendi def.} \\ &\Leftrightarrow (x \in A, x \notin B) \vee (x \in B, x \notin A) && \text{vahe def.} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \underbrace{(x \in A \vee x \notin A)}_{\text{alati tõene}} \wedge \underbrace{(x \notin B \vee x \in B)}_{\text{alati tõene}} \wedge (x \notin B \vee x \in A) && \text{loogika 1} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) && \text{loogika 2, ühendi def.} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{loogika 3} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B) && \text{ühisosa def.} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) && \text{vahe def.} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

Loogika 1 seletus. $P \wedge Q$ loetakse tõeseks parajasti siis, kui P ja Q on tõesed. Sisuliselt võib märki $\wedge$ lugeda "ja". $P \vee Q$ loetakse tõeseks parajasti siis, kui P või Q (või mõlemad) on tõesed. Sisuliselt võib märki

$\vee$ lugeda "või". Väited $(P \wedge Q) \vee R$ ja $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ on samaväärsed, sest nad on alati samasugused tõeväärtused, sõltumata komponentide P , Q ja R tõeväärtustest:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	v	t	t	t	t	t
t	v	t	v	t	t	t	t
v	t	t	v	t	t	t	t
t	v	v	v	v	t	v	v
v	t	v	v	v	v	t	v
v	t	t	v	t	t	t	t
v	v	v	v	v	v	v	v

Kui paneme R asemele $(R \wedge S)$ ja rakendame ülaltoodud samaväärsust kolm korda, saame, et väited $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$ ja $(P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \vee S)$ on samaväärsed.

Loogika 2 seletus. Väited P ja $P \wedge t$ on samaväärsed, sest neil on alati samasugused tõeväärtused (üks on tõene parajasti siis, kui teine on tõene):

P	$P \wedge t$
t	t
v	v

Järelikult $P \wedge t \wedge t \wedge Q$ ja $(P \wedge t) \wedge (t \wedge Q)$ ja $P \wedge Q$ on samaväärsed.

Loogika 3 seletus. $\neg P$ loetakse tõeseks parajasti siis, kui P on väär. Sisuliselt on tegu eitusega. Väited $(\neg P) \vee (\neg Q)$ ja $\neg(P \wedge Q)$ on samaväärsed, sest neil on alati samasugused tõeväärtused:

P	Q	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg(P \wedge Q)$
t	t	v	v
t	v	t	t
v	t	t	t
v	v	t	t

79. Kehtigu $x \in U$, kus U universaalne hulk. Tõestustes kasutame ülesande 65 tulemusi. a) $x \in (A')' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$. b) $x \in (A' \cup B) \cap A \Leftrightarrow (x \in A' \vee x \in B) \wedge x \in A \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge x \in A \Leftrightarrow (x \in A' \wedge x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$. Alternatiivne lahendus on kasutada hulkade kommutatiivsust ja distributiivsust ning teadmisi, et $A \cap A' = \emptyset$ ja $\emptyset \cup C = C$ iga hulga C korral; siis saame $(A' \cup B) \cap A = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = A \cap B$. c) Hulkade distributiivsuse omadus annab $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap X = A$. d) Hulkade distributiivsus annab $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$.

80. a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$; c) $[0, \frac{3}{2}]$; d) $[0, \infty)$; e) $[\frac{1}{2}, 1]$; f) $[0, 1]$; g) $[0, 3]$; h) $[-1, 0]$; i) $(-2, 2)$; j) $\{0\}$; k) $[0, \infty)$; l) $\emptyset$; m) $\emptyset$; n) $[\frac{1}{2}, \infty)$; o) $[1, \infty)$; p) $\emptyset$; q) $\{0, 1, 2, \dots\}$; r) $\{0, 1, 2\}$; s) $\{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$; t) $\emptyset$; u) $[2k, 2n+3]$;

v) $\{-k, 1-k, \dots, 1, 0, 1, \dots, k-1, k\}; x\} \{0\}$.

81. 4 väite samaväärsuse näitamiseks näitame 1. väite samaväärsust ülejäänutega.

a) Näitame kõigepealt, et väited $A \subset B$ ja $A \cup B = B$ on samaväärsed. Selleks näitame, et esimesest väitest järeldub teine ja teisest väitest järeldub esimene.

a1) $(\Rightarrow)$ Eeldame, et kehtib $A \subset B$ ja näitame, et siis kehtib $A \cup B = B$. Paneme tähele, et alati kehtib $A \subset A \cup B$, sest ühendisse $A \cup B$ kuuluvad definitsiooni järgi kõik hulga A ja hulga B elemendid. Järelikult võrduse $A \cup B = B$ tõestamiseks piisab näidata, et $A \cup B \subset B$.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B && \text{ühendi def.} \\ &\Rightarrow x \in B \vee x \in B && \text{eeldasime, et } A \subset B \\ &\Leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

a2) $(\Leftarrow)$ Eeldame, et kehtib $A \cup B = B$. Näitame, et siis kehtib $A \subset B$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \vee x \in B && \text{loogika} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B && \text{ühendi def.} \\ &\Leftrightarrow x \in B && \text{eeldasime, et } A \cup B = B \end{aligned}$$

Kuna elemendi kuulumisest hulka A järeldub tema kuulumine hulka B , siis järelikult A ongi B osahulk. Seletus esimese järeldumise juurde: kui element x on hulgas A , siis kehtib väide " x on hulgas A või x on hulgas B ".

b1) Veendume, et $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$. Sisalduvus $A \cap B \subset A$ kehtib suvaliste hulkade A ja B korral. Jääb näidata, et juhul $A \subset B$ kehtib ka vastupidine sisalduvus $A \subset A \cap B$. Saame $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$.

b2) Veendume, et $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$. Kuna võrdsed hulgad on teineteise alamhulgad, saame võrduse $A \cap B = A$ korral $A \subset A \cap B$, seega $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$.

c1) Veendume, et $A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$. Kasutame selleks vastuväitelist tõestust. Kui $A \setminus B \neq \emptyset$, siis $\exists x \in A \setminus B \Rightarrow \exists x: x \in A \wedge x \notin B$, mis on vastuolus eeldusega $A \subset B$.

c2) Veendume, et $A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A \subset B$. Kui $A \setminus B = \emptyset$, siis ei leidu hulka A kuuluvaid ja hulka B mittekuuluvaid elemente, mis tähendabki, et kõik hulka A kuuluvad elemendid kuuluvad ka hulka B ehk $A \subset B$.

82. Kehtigu $A \subset B$. a) $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in C \Rightarrow x \in B \vee x \in C \Rightarrow x \in B \cup C$.

b) $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$.

c) $x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in B \setminus C$.

d) $x \in C \setminus B \Rightarrow x \in C \wedge x \notin B \Rightarrow x \in C \wedge x \notin A \Rightarrow x \in C \setminus A$.

e) Olgu X universaalne hulk. $x \in B' \Rightarrow x \in X \wedge x \notin B \Rightarrow x \in X \wedge x \notin A \Rightarrow x \in A'$.

83. a) Mõlemad väited tähendavad, et hulkade A ja B kõik elemendid on ka hulga C elemendid. b) Mõlemad väited tähendavad, et hulga C kõik elemendid on ka hulkade A ja B elemendid. c) Kui $C \subset A \vee C \subset B$, siis $x \in C \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$.

84. a) $A \cup B = ((A \Delta B) \cap A) \Delta B$, $A \cup B = (A \cap B) \Delta (A \Delta B)$; b) $A \setminus B = (A \Delta B) \cap A$, $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$; c) $A \cap B = (A \cup B) \Delta A \Delta B$; d) $A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$; e) $A \cup B = (A \setminus B) \Delta B$. f) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

85. Lõpliku arvu hulkade $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ ärajätmisel antud ühendist jäävad ühendisse alles hulgad indeksitega $m > \max\{i_1, \dots, i_n\}$, mis sisaldavad kõiki ärajäetud hulki.

86. Lõpliku arvu hulkade $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ ärajätmisel antud ühisosast jäävad ühisosasse alles hulgad indeksitega $m > \max\{i_1, \dots, i_n\}$, mis sisalduvad kõigis ärajäetud hulkades.

87. a) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$;

b) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;

c) $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$; d) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$; e) $\{(5, 2), (5, 3)\}$.

89. Elementide arv hulkades $\mathcal{P}(A)$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ja $\mathcal{P}(A \times B)$ on vastavalt 2^m , $m \cdot n$, 2^{m+n} ja $2^{m \cdot n}$.

a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $A \times B = \{(a, c), (b, c)\}$, $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{c\}), (\{a\}, \emptyset), (\{a\}, \{c\}), (\{b\}, \emptyset), (\{b\}, \{c\}), (\{a, b\}, \emptyset), (\{a, b\}, \{c\})\}$,
 $\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset, \{(a, c)\}, \{(b, c)\}, \{(a, c), (b, c)\}\}$.

b) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, $A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$,

$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{0, 1\}), (\{0\}, \emptyset), (\{0\}, \{0\}), (\{0\}, \{1\}), (\{0\}, \{0, 1\}),$

$(\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{0\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{0, 1\}), (\{0, 1\}, \emptyset), (\{0, 1\}, \{0\}), (\{0, 1\}, \{1\}), (\{0, 1\}, \{0, 1\})\}$,

$\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset, \{(0, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 0)\}, \{(1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\},$

$\{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\},$

$\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}\}$.

c) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$, $A \times B = \emptyset$,
 $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \{(\emptyset, \emptyset), (\{a\}, \emptyset), (\{b\}, \emptyset), (\{c\}, \emptyset), (\{a, b\}, \emptyset),$

$(\{a, c\}, \emptyset), (\{b, c\}, \emptyset), (\{a, b, c\}, \emptyset)\}$, $\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset\}$.

90. a) Võrdused $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$ on ilmsed: otsekorrutist ei saa moodustada, kui mõni komponent-hulk on tühi.

b) $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \vee (x, y) \in (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

c) $(x, y) \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

d) $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in D \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \in (B \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

91. Võimalus 1 Olgu $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Siis $(x, y) \in A \times B$ või $(x, y) \in C \times D$. Juhul $(x, y) \in A \times B$ kehtib $x \in A$ ja $y \in B$, seega $x \in A \cup C$ ja $y \in B \cup D$, seega $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. Juhul $(x, y) \in C \times D$ kehtib $x \in C$ ja $y \in D$, seega jälle $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Võimalus 2

$$(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in C \times D$$

ühendi def.

$$\Leftrightarrow (x \in A, y \in B) \vee (x \in C, y \in D)$$

otsekorrutise def.

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee y \in D)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee y \in D)$$

$(P \wedge Q) \Rightarrow P$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup C) \wedge (y \in B \cup D)$$

ühendi def.

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

otsekorrutise def.

Võimalus 3

$$\begin{aligned}
 (A \cup C) \times (B \cup D) &= \{(x, y) \mid x \in A \cup C, y \in B \cup D\} && \text{otsekorrutise def.} \\
 &= \{(x, y) \mid (x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee y \in D)\} && \text{ühendi def.} \\
 &= \{(x, y) \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in D) \\
 &\quad \vee (x \in C \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D)\} && \text{lausearvutus} \\
 &\supset \{(x, y) \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D)\} \\
 &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in C \times D\} \\
 &= (A \times B) \cup (C \times D)
 \end{aligned}$$

92. Mittetühjad kõikvõimalike paaride hulgad on võrdsed parajasti siis, kui komponenthulgad on võrdsed.

93. a) Kui $A_i \subset B_i$ iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral, siis $x_i \in A_i \wedge A_i \subset B_i \Rightarrow x_i \in B_i$, seega $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$. Kui mingi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral sisalduvus $A_i \subset B_i$ ei kehti, siis vektorid $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinaadiga $x_i \in B_i \setminus A_i$ ja muude koordinaatidega $x_j \in B_j, j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ kuuluvad hulka $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, aga mitte hulka $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, seega need hulgad pole võrdsed.

b) Kui $A_i = B_i, i = 1, 2, \dots, n$, kehtib $A_i \subset B_i, i = 1, 2, \dots, n$, garanteerides a) põhjal $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, aga kehtib ka $B_i \subset A_i, i = 1, 2, \dots, n$ ning tulemuses a) hulkade A_i ja B_i rolle vahetades saame $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ning seega need otsekorrutised võrduvad. Kui mingi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral võrdus $A_i = B_i$ ei kehti, ei kehti kas $A_i \subset B_i$ või $B_i \subset A_i$ ning tulemuse a) põhjal otsekorrutised $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ja $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ pole korraga teineteise alamhulgad ja pole seega võrdsed.

Arvuteooria elemente ja matemaatiline induktsioon

94. a) Jaguvuse definitsioonis olevaks konstandiks c sobib arv 1. b) Selleks, et tingimus $1 \mid a$ kehtiks, peab leiduma täisarv c nii, et $a = 1 \cdot c$. Selleks täisarvuks c sobib täisarv a . c) *Tarvilikkus* Tingimusest $0 \mid a$ teame, et leidub täisarv c nii, et $a = 0 \cdot c$, seega $a = 0$. *Piisavus* Tuleneb jaguvusseose refleksiivsusest. d) Kirjutades tingimused $a \mid b$ ja $b \mid c$ definitsiooni järgi lahti saame, et leiduvad täisarvud d ja e nii, et $b = ad$ ja $c = be$. Mistõttu $c = a(de)$. e) Jaguvuse definitsiooni kasutades saame, et leidub täisarv c nii, et $|b| = |a| \cdot |c|$. f) Kasutades jaguvuse definitsiooni saame, et leiduvad täisarvud d ja e nii, et $b = da$ ja $c = ea$. Siis $xb + yc = a(xd + ye)$. g) Kasutades jaguvuse definitsiooni saame, et leiduvad täisarvud d ja e nii, et $b = da$ ja $b \pm c = ea$. Siit saame, et $\pm c = ea - b = ea - da$. Seega $c = \pm a(e - d)$. h) Kasutades jaguvuse definitsiooni saame, et leiduvad täisarvud d ja e nii, et $b = ad$ ja $a = eb$. Siit $d = \frac{b}{a}$ ja $e = \frac{a}{b}$. Seega $d = \frac{1}{e}$, ainsad täisarvud, mis rahuldavad viimast võrrandit on 1 ja -1 . Seega $|a| = |eb| = |\pm 1| \cdot |b| = |b|$. i) Jaguvuse definitsiooni abil teame, et leidub täisarv c nii, et $b = ac$. Eelnevast võrdusest teame, et $c = \frac{b}{a}$, mis on täisarv. Nüüd võime kirjutada ka, et $b = a \cdot \frac{b}{a}$. j) *Tarvilikkus*. Jaguvuse definitsiooni abil teame, et leidub täisarv d nii, et $b = da$. Nüüd korrutades saadud võrduse täisarvuga $c \neq 0$ saame, et $cb = cda$. *Piisavus*. Jaguvuse definitsiooni järgi saame, et leidub täisarv e nii, et $cb = eca$. Kuna $c \neq 0$, siis võime taandada c ja saame $b = ea$. k) Tingimusest $a \mid b$ saame, et leidub täisarv c nii, et $b = ac$. Korrutame viimase võrduse täisarvuga e . l) Tingimustest $a \mid b$ ja $c \mid d$ saame, et leiduvad täisarvud e ja f nii, et $b = ae$ ja $d = fc$. Kokkuvõttes $bd = ef(ac)$.

95. Kui a on arvus esinev number, esitub arv kujul $111a = 3 \cdot 37a$.

97. Kui arv j jagab arvu $ad - bc$, siis leidub täisarv s , et $ad - bc = js$, sarnasel põhjusel leidub teine täisarv t , et $a - b = jt$. Lahutame esimesest arvuga d korrutatud teise võrduse $(ad - bc) - (ad - bd) = (js - jt d)$. Pärast lihtsustamist saame uuele võrdusele kuju $b(d - c) = j(s - td)$. Seega vasakpoolne arv jagub arvuga j . Kuna kolmanda eelduse (c) kohaselt olid arvud b ja j ühistegurita, siis peab $j \mid (d - c)$.

98. Eeldame, et p ja q on arvust 3 suuremad algarvud. Märkame, et korrutis $(p - 1)(p + 1)$ jagub 3-ga, sest nende vahel olev arv p eelduse kohaselt ei jagu 3-ga, kuid kolmest järjestikusest naturaalarvust täpselt üks jagub 3-ga. Samuti jagub see korrutis arvuga 8, sest kahest järjestikusest paarisarvust üks jagub 2-ga ja teine 4-ga. Järelikult korrutis $24 \mid (p - 1)(p + 1)$. Teisendame antud ruutude vahet $p^2 - q^2 = p^2 - 1 - q^2 + 1 = (p - 1)(p + 1) - (q - 1)(q + 1)$. Siin nii vähendatav kui ka vähendaja jaguvad 24-ga, seega ka vahe.

99. Kirjutatakse täisarv kujul $A = 10x + y$, kus y on number ja x on täisarv. Järgnevalt uuritakse Arvu A ruutu. On selge, et arvu ruudul ja üheliste numbri ruudul (y^2) on sama üheliste number. Nüüd kontrollitakse numbrite 0, 1, ..., 9 ruutude üheliste numbrid.

100. Vaatleme kolme järjestikuse arvu $n - 1$, n ja $n + 1$ ruutude summat $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 3n^2 + 2$. See summa ei jagu kolmega.

101. a) Kuna kolm järjestikust arvu on kujul n , $n + 1$ ja $n + 2$, siis annavad nad arvuga 3 jagamisel erinevad jäägid 0, 1 või 2. Seetõttu jagub täpselt üks neist 3-ga. b) Kuna kaks järjestikust paarisarvu on kujul $2n$ ja $2n + 2$, siis annavad nad arvuga 4 jagamisel erinevad jäägid (0 või 2). Seetõttu täpselt üks neist jagub 4-ga. c) Kuna viis järjestikust arvu on kujul n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, siis nad annavad arvuga 5 jagamisel erinevad jäägid. Seetõttu täpselt üks neist jagub arvuga 5.

- 102.** Kolmest järjestikusest täisarvust n , $n + 1$ ja $n + 2$ vähemalt üks jagub arvuga 3 ning vähemalt üks jagub ka arvuga 2. Seega korrutis $n(n + 1)(n + 2)$ jagub arvuga $2 \cdot 3 = 6$.
- 103.** Tõestamiseks võib kasutada matemaatilist induktsiooni. Induktsiooni baasiks võtame juhu $n = 1$, siis $6 \mid 1(1^2 - 1) = 0$. Nüüd eeldame, et väide on tõestatud juhul $n = k$. Näitame nüüd, et sellest järelneb antud tingimuse kehtivus juhul $n = k + 1$. Vastavalt sellele teisendame $(k + 1)((k + 1)^2 - 1) = (k + 1)(k + 2)k$. See jagub arvuga 6 ülesane 102 põhjal.
- 104.** Kuna kahest järjestikusest arvust üks on paarisarv (s.t. jagub arvuga 2), üks kolmest järjestikusest arvust jagub arvuga 3 ning üks viiest järjestikusest arvust jagub arvuga 5. Seega arv $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ jagub arvuga $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
- 106.** Vaatleme korrutist $(m - p)(n - q) = mn - mq - pn + pq$. Avaldame siit $mq + pn = (m - p)(n - q) - (mn + pq)$. Eelduse kohaselt $mn + pq = (m + p)t$. Asendamise ja lihtsustamise järel jõuame võrdseni $mq + pn = (m - p)(n - q - t)$, mis näitabki, et $(mq + pn) \mid (m - p)$.
- 107.** Valemist $(6k + r)^3 = 6^3 k^3 + 3 \cdot 6^2 k^2 r + 3 \cdot 6kr^2 + r^3$ on näha, et arvu enda kuubi jääk on sama kui jäägi r kuubi jääk. Võrdustest $1^3 = 1$, $2^3 = 6 + 2$, $3^3 = 6 \cdot 4 + 3$, $4^3 = 6 \cdot 19 + 4$ ja $5^3 = 6 \cdot 20 + 5$ näeme, et naturaalarvul ja selle kuubil on sama jääk 6-ga jagamisel. Seetõttu kuupide summa jagub 6-ga parajasti siis, kui arvude enesete summa jagub 6-ga.
- 116. a)** $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.
- 117 a)** Kui $k \geq 2$, siis $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 3k + 1 > 2k + 2 = 2(k + 1)$.
- 122.** Juhul $n = 2$ on väite kehtivus ilmne (ainsa mängu võitja vasakule, kaotaja paremale). Oletame nüüd, et väide kehtib mingi $k \geq 2$ korral. $k + 1$ meeskonna korral valime esmalt suvalised k meeskonda ning järjestame nad vastavalt nõuetele (saab järjestada tänu induktiivsele eeldusele). Kui ainus järjestamata jäänud meeskond kaotas kõik oma mängud, asetame ta rivis kõige paremale. Kui järjestamata meeskond võitis mõnda juba järjestatud meeskondadest, siis asetame ta kõige vasakpoolsemast, keda võitis, vasakule.
- 123.** Juhul $n = 1$ on väite kehtivus ilmne. Oletame et väide kehtib mingi $k > 1$ korral. $k + 1$ auto korral fikseerime kaks autot, millest ühega saab teiseni olemasoleva kütusega sõita (selline paar leidub alati, kuna eelduse kohaselt jagub kütust kokku 101 km läbimiseks). Kui autoga A saab sõita autoni B , siis eemaldame auto B ning anname tema kütuse autole A . Alles jääb k autot ning induktiivse eelduse kohaselt leidub auto, millega saab täisringi läbida. Selle sama autoga õnnestub sihile jõuda ka lisades auto B tagasi rajale.
- 124.** Juhul $n = 1$ on väite kehtivus ilmne. Oletame, et väide kehtib mingi $k \geq 1$ korral. Kui peol viibib $2k + 2$ inimest, siis fikseerime neist kaks suvalist, kes on omavahel varasemalt tuttavad (kui selliseid ei leidu, on käepigistusi 0 ning väide kehtib). Induktiivse eelduse kohaselt on ülejäänud $2k$ inimese vahel ülimalt k^2 käepigistust. Kuna fikseeritud inimesed olid eelnevalt tuttavad, ei leidu allesjäänud inimeste seas selliseid, kes oleksid enne pidu tuttavad mõlemaga neist (ülesande tingimus). Seega teistega jagasid fikseeritud inimesed ülimalt $2k$ käepigistust. Juurde tuleb arvestada ka fikseeritud inimeste omavaheline käepigistust. seega on käepigistuste koguarv ülimalt $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

127. a) Esiteks märkame, et väide kehtib, kui $n = 1$. Tõepoolest — siis $n^3 + 2n = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ ning $3 \mid 3$.

Näitame nüüd, et kui väide kehtib n jaoks, siis väide kehtib ka $n + 1$ jaoks. Oletame, et väide n jaoks kehtib, s.t. $3 \mid n^3 + 2n$ ja seame eesmärgiks näidata, et $3 \mid (n + 1)^3 + 2(n + 1)$. Paneme tähele, et

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) - (n^3 + 2n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 - n^3 - 2n = 3n^2 + 3n + 3 = 3(n^2 + n + 1).$$

On ilmne, et iga n korral $3 \mid 3(n^2 + n + 1)$. Niisiis, et $3 \mid (n + 1)^3 + 2(n + 1) - (n^3 + 2n)$ ja et $3 \mid n^3 + 2n$, siis ka $3 \mid (n + 1)^3 + 2(n + 1)$.

128. Esmalt veendume, et väide kehtib $a = 0$ korral. Tõepoolest, siis

$$\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} = \frac{0}{3} + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{6} = 0.$$

Nüüd näitame, et kui väide kehtib mingi täisarvu a korral, siis ta kehtib ka täisarvu $a + 1$ korral. Eeldame, et $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}$ on täisarv. Siis, paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{3} + \frac{(a+1)^2}{2} + \frac{(a+1)^3}{6} - \left(\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} \right) &= \frac{a+1}{3} + \frac{a^2+2a+1}{2} + \frac{a^3+3a^2+3a+1}{6} - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6} = \\ &= \frac{2a+2}{6} + \frac{3a^2+6a+3}{6} + \frac{a^3+3a^2+3a+1}{6} - \frac{2a}{6} - \frac{3a^2}{6} - \frac{a^3}{6} = \\ &= \frac{2a+2+3a^2+6a+3+a^3+3a^2+3a+1-2a-3a^2-a^3}{6} = \\ &= \frac{6+3a^2+9a}{6} = 1 + \frac{a^2+3a}{2}. \end{aligned}$$

Veendume, et $1 + \frac{a^2+3a}{2}$ on iga täisarvulise a korral täisarv. Tõepoolest, kui a on paaris, siis nii a^2 kui $3a$ on paaris, seega $a^2 + 3a$ jagub kahega. Teisalt, kui a on paaritu, siis nii a^2 kui $3a$ on paaritud ja nende summa $a^2 + 3a$ on paaris, seega jagub kahega. Niisiis, oleme näidanud, et kui $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}$ on täisarv, siis ka $\frac{a+1}{3} + \frac{(a+1)^2}{2} + \frac{(a+1)^3}{6} - \left(\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} \right)$ on täisarv. Seega on täisarv ka nende summa $\frac{a+1}{3} + \frac{(a+1)^2}{2} + \frac{(a+1)^3}{6}$.

Nüüd oleme induksiooniga näidanud, et väide kehtib kõigi mittenegatiivsete arvude a jaoks. Selleks, et näidata induksiooniga väidet ka negatiivsete arvude jaoks, peaksime lisaks näitama, et kui väide kehtib mingi täisarvu $a + 1$ jaoks, siis kehtib ta ka a jaoks. Seda saab teha eelmisega täiesti analoogiliselt.

129. Veendume esmalt, et $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!(n-i+1)} + \frac{n!}{(i-1)!i(n-i)!} = \\
 &= \frac{n!i}{(i-1)!i(n-i)!(n-i+1)} + \frac{n!(n-i+1)}{(i-1)!i(n-i)!(n-i+1)} = \\
 &= \frac{n!i + n!(n-i+1)}{(i-1)!i(n-i)!(n-i+1)} = \frac{n!(i+n-i+1)}{i!(n-i+1)!} = \\
 &= \frac{n!(n+1)}{i!(n+1-i)!} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}.
 \end{aligned}$$

Näitame nüüd, et $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$. Fikseerime reaalarvud a ja b ning kasutame induktiooni n järgi. Induktsiooni baasiks märkame, et

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \cdot a^{1-i} \cdot b^i = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = (a+b)^1.$$

Olgu $n \geq 1$, eeldame, et $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$. Näitame, et $(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot a^{n+1-i} \cdot b^i$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i \right) = \\
 &= a \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i \right) + b \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i \right) = \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^{i+1} = \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i = \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i + \binom{n}{i-1} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i \right) + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} = \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot a^{n+1-i} \cdot b^i
 \end{aligned}$$

131. Näitame esmalt, et $a_0 = \frac{1-0,5^{2^0}}{2}$. Tõepoolest,

$$\frac{1-0,5^{2^0}}{2} = \frac{1-0,5}{2} = \frac{1}{4} = a_0.$$

Nüüd näitame, et kui mingi n jaoks $a_n = \frac{1-0,5^{2^n}}{2}$, siis ka $a_{n+1} = \frac{1-0,5^{2^{n+1}}}{2}$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n(1-a_n) = \\ &= 2 \cdot \frac{1-0,5^{2^n}}{2} \left(1 - \frac{1-0,5^{2^n}}{2} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{1-0,5^{2^n}}{2} - 2 \cdot \frac{1-0,5^{2^n}}{2} \cdot \frac{1-0,5^{2^n}}{2} = \\ &= \frac{2(1-0,5^{2^n})}{2} - \frac{(1-0,5^{2^n})(1-0,5^{2^n})}{2} = \\ &= \frac{2(1-0,5^{2^n}) - (1-0,5^{2^n})(1-0,5^{2^n})}{2} = \\ &= \frac{2 - 2 \cdot 0,5^{2^n} - (1 - 2 \cdot 0,5^{2^n} + (0,5^{2^n})^2)}{2} = \\ &= \frac{2 - 2 \cdot 0,5^{2^n} - 1 + 2 \cdot 0,5^{2^n} - 0,5^{2^n \cdot 2}}{2} = \\ &= \frac{1-0,5^{2^{n+1}}}{2}. \end{aligned}$$

Nii on väide matemaatilise induksiooniga tõestatud.

132. Hakates jada liikmeid järjest välja kirjutama:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = a_2 + 2a_1 = 4 \quad a_4 = a_3 + 2a_2 = 8 \quad \dots,$$

võib tekkida mulje, et tegemist on kahe astmetega. Täpsemalt, tekib hüpotees, et $a_n = 2^{n-1}$. Tõestame selle väite tugeva matemaatilise induksiooniga.

Esmalt märkame, et $a_1 = 2^{1-1} = 1$ ning $a_2 = 2^{2-1} = 2$. Seega a_1 ja a_2 puhul väide kehtib.

Nüüd, oletame, et $a_{n-2} = 2^{n-3}$ ja $a_{n-1} = 2^{n-2}$. Näitame, et siis $a_n = 2^{n-1}$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-3} = \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Nii on väide tugeva matemaatilise induksiooniga tõestatud.

133. a) Näitame, et iga $n \geq 0$ korral F_{3n} on paarisarv. Kasutame matemaatilist induksiooni. Induktsiooni baasiks märkame, et väide kehtib $n = 0$ korral. Tõepoolest, $F_{3 \cdot 0} = F_0 = 0$, mis on paarisarv.

Olgu $n \geq 1$; oletame, et F_{3n-3} on paarisarv ja näitame, et F_{3n} on paarisarv. Paneme tähele, et:

$$F_{3n} = F_{3n-1} + F_{3n-2} = F_{3n-2} + F_{3n-3} + F_{3n-2} = 2F_{3n-2} + F_{3n-3}.$$

Et F_{3n} avaldub kahe paarisarvu summana, on ta ise ka paarisarv. Nii on väide induksiooniga tõestatud.

b) Tõestame väite induksiooniga. Induksiooni baasiks näitame, et väide kehtib $n = 0$ puhul. Tõepoolest,

$$\sum_{i=0}^0 (F_i)^2 = (F_0)^2 = 0^2 = 0 = F_0 \cdot F_1.$$

Nüüd võtame $n \geq 1$ ja oletame, et väide kehtib $n - 1$ korral. Näitame, et väide kehtib ka n korral. Tõepoolest,

$$\sum_{i=0}^n (F_i)^2 = (F_n)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (F_i)^2 = (F_n)^2 + F_{n-1} \cdot F_n = F_n(F_n + F_{n-1}) = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Nii on väide matemaatilise induksiooniga tõestatud.

c) Tõestame väite induksiooniga. Baasiks näitame, et väide kehtib $n = 1$ korral. Tõepoolest,

$$\sum_{i=0}^{1-1} F_i = F_0 = 0 = F_2 - 1.$$

Nüüd võtame $n \geq 2$ ja oletame, et väide kehtib $n - 1$ korral. Näitame, et väide siis kehtib ka n korral. Tõepoolest,

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} F_i = F_{n-1} + F_{n-1} + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Nii on väide matemaatilise induksiooniga tõestatud.

d) Tõestame väite induksiooniga. Baasiks näitame, et väide kehtib $n = 1$ korral. Tõepoolest, $F_1 = F_2$. Võtame nüüd $n \geq 2$ ja oletame, et väide kehtib $n - 1$ korral. Näitame, et siis väide kehtib ka n korral. Tõepoolest,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n-2} + F_{2n-1} = F_2 n.$$

Nii on väide matemaatilise induksiooniga tõestatud.

f) Tõestame väite induksiooniga. Baasiks näitame, et väide kehtib $n = 1$ korral. Tõepoolest, $F_0 - F_1 + F_2 = 0 - 1 + 1 = 0 = F_1 - 1$. Nüüd võtame $n \geq 2$ ja oletame, et väide kehtib $n - 1$ korral; näitame, et väide kehtib n korral. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} F_0 - F_1 + F_2 + \dots + F_{2n-2} - F_{2n-1} + F_{2n} &= F_{2n-3} - 1 - F_{2n-1} + F_{2n} \\ &= F_{2n-3} - 1 - F_{2n-3} - F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-1} = F_{2n-1} - 1. \end{aligned}$$

Nii on väide matemaatilise induksiooniga tõestatud.

g) Tõestame väite induksiooniga. Baasiks näitame, et väide kehtib $n = 1$ korral. Tõepoolest, $F_0 F_2 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$. Nüüd võtame $n \geq 2$ ning oletame, et väide kehtib $n - 1$ korral; näitame, et ta kehtib n korral.

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) - F_n(F_{n-1}F_{n-2}) = \\ &= F_{n-1}F_n + F_{n-1}^2 - F_{n-1}F_n - F_nF_{n-2} = -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) = \\ &= -(-1)^{n-1} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Nii on väide matemaatilise induktsiooniga tõestatud.

h) Tõestame väite tugeva induktsiooniga. Baasiks näitame, et väide kehtib $n = 0$ ja $n = 1$ korral. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right] &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = F_0; \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = F_1. \end{aligned}$$

Lisaks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Nüüd võtame $n \geq 2$ ja oletame, et väide kehtib $n-1$ ja $n-2$ jaoks. Siis,

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

134. Viga on tehtud induktsiooni sammus, täpsemalt lause “Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi, nagu linnud $L_1, \dots, L_k$.” juures. Vaatame, kuidas see “järeldumine” välja näeb, kui $k = 1$. Seekord saame induktsiooni eeldusega, et $L_1, \dots, L_k = L_1$ on kõik ühte värvi, ning et $L_2, \dots, L_{k+1} = L_2$ on kõik ühte

värvi. Need hulgad on aga antud juhul täiesti ühisosata, niisiis ei saa järeldada, et L_2 oleks eelnevate lindudega sama värvi.

135. Viga on induktsiooni sammus, nimelt lause “Induktsiooni eelduse põhjal $x - 1 = y - 1$ ” juures. Induktsiooni eeldus ütleb küll, et kui u ja v on positiivsed täisarvud ja $\max(u, v) = k$, siis $u = v$. Aga $x - 1$ ja $y - 1$ ei pruugi positiivsed täisarvud olla! Kui võtta $x = 1$, siis $x - 1$ ei ole positiivne täisarv.

137. Vaatleme puslet n -tükise plokina ja üht tükki 1-tükise plokina. Tõestame tugeva induktsiooniga, et pusle kokkupanekuks läheb $n - 1$ sammu. Selleks tõestame, et mistahes k -tükise ploki kokkupanekuks kokku on vaja $k - 1$ sammu.

Induktsiooni aluseks märgime, et 1-tükise ploki kokkupanekuks ühtki sammu vaja ei lähe. Olgu nüüd $k \geq 2$. Oletame, et iga $m < k$ korral läheb m -tükis ploki kokkupanekuks vaja $m - 1$ sammu. Näitame, et k -tükise ploki kokkupanekuks läheb $k - 1$ sammu. Et panna kokku k -tükine plokk, tuleb võtta kaks plokki, suurustega u ja v , kusjuures $u < k$ ja $v < k$ ning $u + v = k$. Vastavalt induktsiooni eeldusele kulub nende kahe ploki kokkupanekuks vastavalt $u - 1$ ja $v - 1$ sammu. Kui paneme need kaks kokku, kulub selle ploki kokkupanekuks kokku $u - 1 + v - 1 + 1 = k - 2 + 1 = k - 1$ sammu.

Terve pusle kokkupanekuks kulub niisiis $n - 1$ sammu.

Funktsioonid

143. $\chi_{A \triangle B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

146. a) $f(x_0) = 13$; b) $f(x_0) = \text{Kersti Kaljulaid (praegune president)}$; c) $f(x_0) = 3$; d) $f(x_0) = 6$.

147. a) i) $x = \pm 2$, ii) $x = 0$ ja iii) $x = \pm\sqrt{2}$; b) i) $x = 1$, ii) $x = 0$ ja iii) $x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$.

148. a) Originaal on 2. b) Originaalid on -2 ja 3 . c) Originaalide hulk on $\{x \mid x = 3 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$. d) Originaalide hulk on ringjoon $\{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid (r+2)^2 + (s-3)^2 = 4\}$.

149. a) $f(A) = [1, 2]$; b) $f(A) = \{1\}$; c) $f(A) = \{1\}$; d) $f(A) = [-9, 0]$; e) $f(A) = [0, 2]$; f) $f(A) = [0, 4]$.

150. a) $f(\{-1, 0, 1\}) = \{1, 2, 5\}$; b) $f([-1, 1]) = [1, 5]$; c) $f([-2, 2]) = [1, 10]$; d) $f([-5, -3] \cup [0, 3]) = [2, 17]$; e) $f((-\infty, 0]) = [1, \infty)$; f) $f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$.

151. a) $f^{-1}(B) = \{\pi/2 + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$; b) $f^{-1}(B) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; c) $f^{-1}(B) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; d) $f^{-1}(B) = [-1, 0]$.

152. a) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = \{-1\}$; b) $f^{-1}([-2, 2]) = [-2, 0]$; c) $f^{-1}([10, 50]) = [-8, -4] \cup [2, 6]$; d) $f^{-1}((-\infty, 0]) = \emptyset$; e) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

153. a) $f^{-1}(\{0\}) = [0, 1]$, $g^{-1}(\{0\}) = (-1, 0]$; b) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = [-1, 2]$, $g^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = (-2, 1]$; c) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\}) = \emptyset$, $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\}) = \emptyset$.

154. a) $f^{-1}(\{m\}) = [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$, $f^{-1}(\{m, m+1\}) = [m - \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2})$, $f([k, k+1]) = \{k, k+1\}$, $f([k, k+2]) = \{k, k+1, k+2\}$; b) $f^{-1}(\{m\}) = (-m - \frac{3}{2}, -m - \frac{1}{2}]$, $f^{-1}(\{m, m+1\}) = (-m - \frac{5}{2}, -m - \frac{1}{2}]$, $f([k, k+1]) = \{-k-2, -k-1\}$, $f([k, k+2]) = \{-k-3, -k-2, -k-1\}$; c) $f^{-1}(\{m\}) = \emptyset$, kui m on paaris ja $f^{-1}(\{m\}) = [-m+1, -m+3)$, kui m on paaritu, $f^{-1}(\{m, m+1\}) = [-m, -m+2)$, kui m on paaris ja $f^{-1}(\{m, m+1\}) = [-m+1, -m+3)$, kui m on paaritu, $f([k, k+1]) = \{1-k\}$, kui k on paaris ja $f([k, k+1]) = \{-k, 2-k\}$, kui k on paaritu, $f([k, k+2]) = \{-1-k, 1-k\}$, kui k on paaris ja $f([k, k+2]) = \{-k, 2-k\}$, kui k on paaritu; d) $f^{-1}(\{m\}) = (m-2, m]$, kui m on paaris ja $f^{-1}(\{m\}) = \emptyset$, kui m on paaritu, $f^{-1}(\{m, m+1\}) = (m-2, m+2]$, kui m on paaris ja $f^{-1}(\{m\}) = (m-1, m+1]$, kui m on paaritu, $f([k, k+1]) = \{k, k+2\}$, kui k on paaris ja $f([k, k+1]) = \{k+1\}$, kui k on paaritu, $f([k, k+2]) = \{k, k+2\}$, kui k on paaris ja $f([k, k+2]) = \{k+1, k+3\}$, kui k on paaritu.

155. a) $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1, f(x) = y \Rightarrow \exists x \in A_2, f(x) = y \Rightarrow y \in f(A_2)$.

158. Näiteks $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [0, \infty)$. Siis $f(X \setminus A) = f((-\infty, 0)) = (0, \infty)$, aga $Y \setminus f(A) = (-\infty, 0)$.

159. a) Näiteks, kui $f(x) = x^2$ ja $A = [1, 2]$; b) Näiteks, kui $f(x) = 1$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral ja $B = \mathbb{R}$.

161. a) Ei ole sürjektiivne (naturaalarv 1 ei kuulu muutumispiirkonda). b) On sürjektiivne.

162. a) bijektiivne, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$; b) injektiivne, aga ei ole sürjektiivne; c) sürjektiivne, aga ei ole injek-

tiivne; d) bijektiivne, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$; e) bijektiivne, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; f) ei ole injektiivne ega surjektiivne; g) surjektiivne, aga ei ole injektiivne; h) bijektiivne, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$; i) bijektiivne, $f^{-1}(x) = \arctan(x)$; j) ei ole injektiivne ega surjektiivne; k) bijektiivne, $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$;

163. a) Ei ole injektiivne ega surjektiivne. b) Injektiivne, aga ei ole surjektiivne. c) Bijektiivne. d) Injektiivne, aga ei ole surjektiivne.

164. a) Bijektiivne. b) Surjektiivne, aga ei ole injektiivne. c) Injektiivne, ei ole surjektiivne.

165. a) Surjektiivne, ei ole injektiivne. b) Bijektiivne.

166. Antud funktsioon ei ole injektiivne, kuna näiteks arvu 2 võib saada nii viisil $1 + 1$, kui ka $2 + 0$.

167. Antud funktsioon ei ole surjektiivne, kuna näiteks punkti 0 ei ole võimalik selle funktsiooniga saada.

$$\mathbf{168.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ 1, & x = 3, 5 \\ x + 1, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

169. a) On pealekujutus, ei ole üksühene. b) $g(0, 3) = -3$, $g(3, -2) = 11$, $g(-3, -2) = 11$, $g(7, -1) = 50$ c) $g^{-1}(\{0\}) = \{(m, n) \mid m^2 = n\}$ d) $g^{-1}(\{5\}) = \{(m, n) \mid m^2 = n + 5\}$

172. Näiteks, kui $f(x) = x^2$, $A_1 = [-1, 0]$ ja $A_2 = [0, 1]$.

177. a) Jah. b) Jah. c) Kui hulgas B on vähemalt kaks elementi.

178. See funktsioon ei ole injeksioon. On surjektsioon.

179. a) Ei ole injektiivne. b) On surjektsioon.

187. a) $gf(x) = 6x + 2$, $fg(x) = 6x - 1$, $g^2(x) = 9x - 4$ ja $f^3(x) = 8x + 7$; b) $gf(x) = 2^{x^2}$, $fg(x) = 2^{2x}$, $g^2(x) = 2^{2^x}$ ja $f^3(x) = x^8$.

$$\mathbf{189.} \quad a) \quad gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, g^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ja } f^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$b) \quad gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, g^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{ja } f^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$c) \quad gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, g^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ja } f^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

Hulga võimsus

196. a) Lõplik. b) Lõpmatu, loenduv. c) Lõplik. d) Lõpmatu, ei ole loenduv.

197. See on nn. Hilberti hotelli ülesanne ja sissejuhatav ülesanne mitmele järgnevale. Näiteks $n \mapsto n-1$ on bijektsioon hulgast $\{1, 2, 3, \dots\}$ hulka $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Hotelli ülesannet silmas pidades oleks ehk parem anda selle pöördkujutus.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{kui } x \text{ on paaris} \\ -\frac{(x+1)}{2}, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } x > 0 \\ -2x+1, & \text{kui } x \leq 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \\ 1-x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x > 0 \\ 1-x, & \text{kui } x \leq 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 1-x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kui } x > 0 \\ -x, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$$

199. Jah, näiteks kõigi positiivsete paarisarvude hulgaga.

200. Olgu A mingi lõpmatu hulk. Fikseerime vabalt mingi elemendi $a_1 \in A$. Kuna A on lõpmatu, siis leidub element $a_2 \in A$ nii, et $a_1 \neq a_2$. Edasi saame valida $a_3 \in A$ nii, et $a_3 \neq a_1$ ja $a_3 \neq a_2$. Jne. Saame A alamhulga $\{a_1, a_2, \dots\}$, mis on ekvivalentne hulgaga $\mathbb{N}$. Siin kasutame muidugi mingit valikuaktsiooni vormi.

202. Olgu A ja B loenduvad hulgad. Alati $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, kusjuures $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Kui $B \setminus A = \emptyset$, siis $A \cup B = A$ on loenduv.

Kui $B \setminus A = \{c_1, \dots, c_m\}$ ja $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$, siis $A \cup B = \{c_1, \dots, c_m, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ on loenduv.

Kui $B \setminus A = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$, siis võime kirjutada $A \cup (B \setminus A) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}$, kus on esindatud ühendi $A \cup B$ kõik elemendid, igaüks parajasti üks kord.

204. Kasutame fakti, et algarvude hulk on lõpmatu ja naturaalarvude esitus algarvude korrutisena on (tegurite järjekorra täpsuseni) ühene. Olgu A naturaalarvude lõplike alamhulkade hulk. Tekitame esmalt injektsiooni $A \rightarrow \mathbb{N}$. Kui meil on naturaalarvude lõplik alamhulk $\{a_1, \dots, a_n\}$, kus võime eeldada, et $a_1 < \dots < a_n$, siis seame sellele hulgale vastavusse naturaalarvu $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$; tühjale hulgale (ka ju lõplik hulk) võime vastavusse seada arvu 1. Niiviisi saame injektsiooni $A \rightarrow \mathbb{N}$. Hulga $\mathbb{N}$ võimsus ei ole suurem kui hulga A võimsus, selleks anda injektiivne kujutus hulgast $\mathbb{N} \rightarrow A$.

205. Erinevaid esitusi on siin palju. Näiteks võib võtta kõigi arvust 1 erinevate algarvude 2, 3, 5, 7, ... järgi $A_2 = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$, $A_3 = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$, $A_4 = \{5^n : n \in \mathbb{N}\}$, jne. Ning hulka A_1 kuuluvad parajasti ülejäänud naturaalarvud.

206. Kõigi sõnade hulk X on ilmselt samastatav hulgaga $\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$. Viimane hulk on loenduv (lõplike hulkade loenduv ühend). Võib arutleda selle üle, mis juhtub siis, kui hulk A on loenduv või lubame sõnadeks ka tähtede (lõpmatuid) jadasid.

207. Esimene osa on eelmise ülesande põhjal. Teine osa. Kasutame fakti, et $\mathbb{N}$ kõigi alamhulkade hulk on kontiinumi võimsusega. Ülesande võib ümber sõnastada: tõestada, et kõigi funktsioonide $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ hulk on kontiinumi võimsusega. Olgu $\mathcal{F}$ kõigi selliste funktsioonide hulk. Näitame, et leidub bijektsioon $\phi: \mathcal{F} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Edasi peaks olema selge. Üks hea rakendus siia: Lõpmatul kahendpuul on lõpmata palju harusid. Teisisõnu Cantori hulk on kontiinumi võimsusega. Võib kasutada ka Cantori diagonaaltrikki: (Ühelt poolt on selge, et kõikide binaarjadade hulga võimsus ei ole suurem kui reaarrvude hulga võimsus; näiteks võib iga binaarjada samastada reaalarvuga $0, \dots$, kus $\dots$ asemel on binaarjadas olevad arvud) Oletame vastuväiteliselt, et kõigi binaarjadade hulk on loenduv, järjestame ta ära ja diagonaaltrikki abil tekitame uue binaarjada, mis vaadedavas loetelus ei esine (vastuolu).

208. Ülesande mõtte osas ei ole oluline, kas vaatleme ainult vahemikke või intervalle. (Võib ka vaadelda nõ tühju vahemikke: kui (a, b) ja $a > b$, siis $(a, b) = \emptyset$.) Võib muidugi eeldada, et vaatleme ainult vahemikke kujul (a, b) , kus $a < b$. Ilmselt on vaadeldavate vahemike hulk X loenduva hulga $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ alamhulk. Seega on X ülimalt loenduv. Kujutus $\mathbb{N} \rightarrow X$, $n \mapsto (n, n+1)$ on injektiiвне. Kokkuvõttes on hulk X loenduv. Sarnaselt võib ülesandeks seada: Tõestada, et kõikide reaalarvuliste otspunktidega reaalarvude vahemike hulk on kontiinumi võimsusega.

209. Kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis leiduvad vastavalt bijektsioonid $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$. Jääb näidata, et kujutus $gf: A \rightarrow C$ on bijektsioon.

210. Esitada hulgad A ja B lõikumatu ühendina $A = A \setminus B \cup (A \cap B)$ ja $B = B \setminus A \cup (A \cap B)$. Kui $f: A \setminus B \rightarrow B \setminus A$ on bijektsioon, siis hulkade A ja B esitusi arvestades laiendada bijektsioon f bijektsiooniks $A \rightarrow B$. Näite osas võib võtta $A = \mathbb{N}$ ja $B = \mathbb{Z}$.

211. Vaadelda näiteks $\mathbb{N}$ alamhulki $A = B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3\}$, $D = \{3, 4\}$.

212. Bijektsioonide $f: A \rightarrow C$ ja $g: B \rightarrow D$ abil tekib loomulikul viisil bijektsioon $A \times B$ ja $C \times D$ vahel, $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$. Siin võib küsida vastupidise implikatsiooni kehtivuse kohta, mis muidugi üldiselt ei kehti.

213. a) Otsime injektiiвset kujutust $X \rightarrow Y$. Selleks sobib loomulik sisestus $f(x) = x$. b) Esimese osa põhjal on $|X| \leq |Y|$. Vaja on veel mõista, et $X \approx Y$. Vastuväiteliselt. Ülesande 201 põhjal, kui $X \subset Y$ ja $X \sim Y$, siis on tegu lõpmatu hulgaga. Vastuolu, järelikult $|X| < |Y|$.

214. Olgu $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ vastavad injektioonid, siis $gf: X \rightarrow Z$ on samuti injektiiвне, kuna injektioonide kompositsioon on injektioon. Järelikult $|X| \leq |Z|$.

215. See on nn. tuvipuuri printsiip. Oletame vastuväiteliselt, et kujutus $f: A \rightarrow B$ on injektiiвне. Sel juhul on kujutus $g: A \rightarrow f(A)$, $a \mapsto f(a)$, bijektiiвне. Järelikult on $A \sim f(A)$. Muidugi on $|f(A)| \leq |B|$. Kokkuvõttes saame $|A| \leq |B|$, mis vastuolus eeldusega $|A| < |B|$.

216. Kujutus $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, $x \mapsto \tan x$, on bijektsioon. Selle abil saame sobiva bijektsiooni. Teine võimalus on kasutada Cantori diagonaaltrikki.

217.

a)

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c, \quad g(x) = \frac{x-c}{d-c}(b-a) + a$$

b)

$$f(x) = \frac{x-b}{x-a} + d, \quad g(x) = \frac{a(x-d)-b}{x-d-1}$$

c)

$$f(x) = \frac{x-a}{b-x} + c, \quad g(x) = \frac{b(x-c)+a}{x-c+1}$$

d)

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) = \frac{b-a}{\pi} \tan^{-1}(x) + a - \frac{\pi}{2}$$

e)

$$f(x) = -x + c + b, \quad g(x) = -x + c + b$$

f)

$$f(x) = \ln(-x-b), \quad g(x) = -b - e^x$$

g)

$$f(x) = \ln(x-a), \quad g(x) = a + e^x$$

h) Olgu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi $[a, b]$ loenduv osahulk, kusjuures $x_1 = a$, ning $Y = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi (c, d) loenduv osahulk.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c, & \text{kui } x \notin X \\ \frac{x_{k+1}-a}{b-a}(d-c) + c, & \text{kui } x = x_k \in X \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{d-c}(b-a) + a, & \text{kui } x \notin Y \\ a, & \text{kui } x = x_1 \in Y \\ \frac{x_{k-1}-c}{d-c}(b-a) + a, & \text{kui } x = x_k \in Y, k > 1 \end{cases}$$

i) Olgu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi $[a, b]$ loenduv osahulk, kusjuures $x_1 = b$, ning $Y = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi $[c, d)$ loenduv osahulk.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c, & \text{kui } x \notin X \\ \frac{x_{k+1}-a}{b-a}(d-c) + c, & \text{kui } x = x_k \in X \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{d-c}(b-a) + a, & \text{kui } x \notin Y \\ b, & \text{kui } x = x_1 \\ \frac{x_{k-1}-c}{d-c}(b-a) + a, & \text{kui } x = x_k \in Y, k > 1 \end{cases}$$

j) Olgu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi $[a, b]$ loenduv osahulk, kusjuures $x_1 = a$ ja $x_2 = b$, ning $Y = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi (c, d) loenduv osahulk.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c, & \text{kui } x \notin X \\ \frac{x_{k+2}-a}{b-a}(d-c) + c, & \text{kui } x = x_k \in X \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{d-c}(b-a) + a, & \text{kui } x \notin Y \\ a, & \text{kui } x = x_1 \\ b, & \text{kui } x = x_2 \\ \frac{x_{k-2}-c}{d-c}(b-a) + a, & \text{kui } x = x_k \in Y, k > 2 \end{cases}$$

k) Olgu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi $[a, \infty)$ loenduv osahulk, kusjuures $x_1 = a$, ning $Y = \{x_1, x_2, \dots\}$ mingi (c, ∞) loenduv osahulk.

$$f(x) = \begin{cases} x + c - a, & \text{kui } x \notin X \\ x_{k+1} + c - 1, & \text{kui } x = x_k \in X \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x - c + a, & \text{kui } x \notin Y \\ a, & \text{kui } x = x_1 \in Y \\ x_{k-1} - c + a, & \text{kui } x = x_k \in Y, k > 1 \end{cases}$$

218. See üldistab paari eelmist ülesannet. Esimene osa. Olgu A hulga X loenduv alamhulk. Esitame hulga $X \cup Y$ lõikumatu ühendina, $X \cup Y = X \setminus A \cup A \cup Y \setminus X$. Ilmselt on $A \cup Y \setminus X$ loenduv. Seega leidub bijektiivne kujutus $A \cup Y \setminus X \rightarrow A$. Jätkame selle bijektiivseks kujutuseks $X \cup Y \rightarrow X$ ($X \setminus A$ elementidel samasusteisendus). Teine osa. Rakendame esimest osa hulgale $X \setminus Y$ ja peame silmas, et $X = X \setminus Y \cup (Y \cap X)$.

219. Kõigi irratsionaalarvude hulk on kontiinumi võimsusega. Saame kasutada eelmise ülesande esimest osa, kus võtame $X = \mathbb{R}$ ja $Y = \mathbb{Q}$.

220. Vaadeldav hulk on kontiinumi võimsusega. Seda, et ei ole loenduv saab näidata näiteks Cantori diagonaaltrikiga.

221. Vaadeldav hulk on kontiinumi võimsusega. Iga naturaalarvude jada on samastatav enda osasummade jadaga (s.o naturaalarvude kasvava jadaga). Seega on vaadeldav hulk ekvivalentne kõigi naturaalarvuliste liikmetega jadade hulgaga.

222. Esimene osa. Ilmselt on $(0.5, 0.6) \subset X$, seega on X vähemalt kontiinumi võimsusega. Samuti $X \subset (0, 1)$, seega $|X| \leq |(0, 1)|$. Järelikult on X kontiinumi võimsusega. Teine osa. Olgu $k \in \mathbb{N}$ vähim selline arv, et $a < a + 10^{-k-1} < a + 10^{-k} < b$. Lõigus $[a + 10^{-k-1}, a + 10^{-k}]$ peab leiduma element, mille $k-1$ -e kümnendkoht algab viiega. Võtame arvaks c vähima sellise elemendi. Võtame arvaks $d = c + 0,5 \cdot 10^{k-1}$. Kolmas osa. Saab tõestada, konstrueerides diagonaliseerimise meetodil lõpmatu hulga, kus ühegi elemendi kümnendesituses pole ühtegi viit.

223. Ilmselt saab anda mitmeid lahendusi. Ilmselt on vaadeldav hulk vähemalt kontiinumi võimsusega. Tekitame injektiivse kujutuse $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \mathbb{R}$. Iga naturaalarvu n korral olgu $f_n: A_n \rightarrow (n, n+1)$ bijektiivne. Kui $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, siis defineerime $f(x) = f_n(x)$, kus n on vähim selline, et $x \in A_n$.

224. Olgu tehe $A \cap B$. Kui $A = [0, 1)$, $B = (-1, 0]$, siis on lõplik, kui $A = (1, \infty)$, $B = (-\infty, 0) \cup \mathbb{N}$, siis on loenduv, kui $A = B = \mathbb{R}$, siis on kontiinumi võimsusega. Olgu nüüd tehe $A \setminus B$. Kui $A = [0, 1)$, $B = (0, 1)$, siis on lõplik, kui $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, siis on loenduv ja kui $A = \mathbb{R}$, $B = (0, 1)$, siis on kontiinumi võimsusega.

Seosed

225. $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

227. Maatrikskujul

$$\text{a) } M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

228. a) $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 4)\}$ b) $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

c) $T = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

d) $P = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

229. a) $R = \{(1, c), (2, a), (2, b), (3, a), (4, a), (4, b)\}$. b) $R = \{(1, b), (2, b), (3, b), (4, a), (4, b), (4, c)\}$.

231. a) Ei, kuna $22 = 2 \cdot 11$, $45 = 3^2 \cdot 5$. b) Kehtib, mõlemas on kolm elementi. c) Kehtib, vastava sirge võrrand on $y = -\frac{3}{2}x$. d) Ei, kuna üks algab a -ga, teine b -ga ning üks lõpeb b -ga, teine a -ga. e) Kehtib, on tõene nt väärtustusel (v, v, v) .

232. a) Nt $(0, 0)$, $(1, 3)$. b) $xR5$, kui $3 \leq x \leq 7$; $5Rx$, kui $3 \leq x \leq 7$. c) Nt $x = 6$, $y = 10$. d) xRa , kui $a - 2 \leq x \leq a + 2$.

233. a) $R = \{(0, 0), (2, 2)\}$ / Võrrandi $x + y = xy$ üheks lahendiks sobib $(0, 0)$. Kuna $(0, a)$ ega $(a, 0)$ pole lahenditeks ühegi $a \in \mathbb{Z}$ korral, saame võrrandi pooli $\frac{1}{xy}$ -ga läbi korrutada. Võrrandil $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ on parajasti üks lahend: $(2, 2)$. b) $R = \{(x, -2x^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ / Paneme tähele, et kuna $x \neq 0$, siis ka $y \neq 0$. Korrutades võrrandi pooli $\frac{x}{y}$ -ga, saame $\frac{2x^2}{y} = -1$, millest $y = -2x^2$ ($x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

235. a) Ei ole, kuna element 2 pole ühegi elemendiga seoses. b) On. c) Ei ole, kuna element 4 pole ühegi elemendiga seoses. d) Ei ole, kuna element 4 on kahe elemendiga seoses.

235. a) On. b) Ei ole, kuna nt element 2 on mitme elemendiga seoses. c) Ei ole, kuna nt element 2 on mitme elemendiga seoses. d) On. e) Ei ole, kuna nt element 2 pole ühegi elemendiga seoses. f) On. g) Ei ole, kuna nt element 2 pole ühegi elemendiga seoses. h) On.

237. a) Ei ole. b) Ei ole. c) On. d) Ei ole. e) On. f) Ei ole, arv 0 on kahe arvuga seoses. g) On. h) On.

238. a) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}, \{(a, a), (b, a), (b, b)\}, \{(a, a), (a, b), (b, b)\}, \{(a, a), (b, b)\};$ b) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}, \{(a, b), (b, a), (b, b)\}, \{(a, a), (a, b), (b, a)\}, \{(a, b), (b, a)\}, \{(a, a), (b, b)\}, \{(a, a)\}, \emptyset, \{(b, b)\};$

239. Refleksiivsus, antisümmeetrilisus, transitiivsus.

240. a) Refleksiivsus, sümmeetrilisus, transitiivsus. b) Antisümmeetrilisus. c) Irrefleksiivsus, antisümmeetrilisus, transitiivsus.

241. a) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3)\}$; b) $R = \{(1,2), (2,3)\}$; c) $R = \emptyset$;
d) $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$; e) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

242. a) $R = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1), (4,4)\}$; pole refleksiivne, kuna $(1,1) \notin R$; pole sümmeetriline, kuna $(1,2) \in R$, aga $(2,1) \notin R$; pole transitiivne, kuna $(1,2) \in R$ ja $(2,3) \in R$, aga $(1,3) \notin R$. b) $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$; pole refleksiivne, kuna $(1,1) \notin R$; pole sümmeetriline, kuna $(1,2) \in R$, aga $(2,1) \notin R$; on transitiivne. c) $R = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$; pole refleksiivne, kuna $(1,1) \notin R$; on sümmeetriline; on transitiivne.

244. Ei ole refleksiivne, kuna $1+1=2 \neq 0$, st $(1,1) \notin R$. Pole ka irrefleksiivne, kuna $0+0=0$, st $(0,0) \in R$.

245. R-refleksiivne S-sümmeetriline A-antisümmeetriline T-transitiivne a) R, S, A, T / kusjuures on diagonaal hulgas $\mathbb{Z}$ b) A, T c) R, A, T / seega on järjestusseos d) S / kontranäide, et ei ole T : $x = z$, $|y - x| \geq 2$ f) A, T / $R = \{(2,0), (-2,0)\}$

246. b) Refleksiivsus, sümmeetrilisus, transitiivsus. c) Sümmeetrilisus. e) Refleksiivsus, sümmeetrilisus, transitiivsus.

247. b) Sümmeetrilisus. d) Sümmeetrilisus.

248. refleksiivne, antisümmeetriline, transitiivne ; on järjestusseos

249. a) $R \cup \{(c,d)\}$ b) ja c) $R \cup \{(a,a), (a,c), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (d,d)\}$

250. a) refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne b) refleksiivne c) refleksiivne ja transitiivne
d) refleksiivne ja transitiivne e) refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne

251. Olgu R sümmeetriline ja antisümmeetriline seos hulgal X ning olgu $(x,y) \in R$ ja $(y,z) \in R$. Näitame, et $(x,z) \in R$. Et seos R on sümmeetriline, siis $(y,x) \in R$ ja $(z,y) \in R$. Seose R antisümmeetrilisuse tõttu saame, et $x = y = z$. Seega $(x,z) = (x,y) \in R$.

252. Ilmselt on diagonaal hulgal X refleksiivne, sümmeetriline ja antisümmeetriline. Näitame, et kehtib ka vastupidine implikatsioon. Olgu R refleksiivne, sümmeetriline ja antisümmeetriline seos hulgal X . Seose R refleksiivsusest saame, et suvalise $x \in X$ korral $(x,x) \in R$. Olgu nüüd $(x,y) \in R$ suvaline. Väite tõestuseks piisab näidata, et $x = y$. Et R on sümmeetriline, siis ka $(y,x) \in R$. Seose R antisümmeetrilisust kasutades saame, et $x = y$, seega $R = \Delta X$.

253. a) $R = R^{-1}$ sümmeetriline b) seostel $R^{-1} = \{(4,5), (2,1), (3,1), (1,2), (3,4)\}$ ja R pole ühtegi oma-
dust c) $R = R^{-1}$ sümmeetriline d) $R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2\}$, R ja R^{-1} antisümmeetrilised

254. a) kui R on refleksiivne, siis ilmselt $\Delta X \subset R$. Teisalt, kuna iga $x \in X$ korral $(x,x) \in R$, siis R on refleksiivne.

b) kehtigu $R = R^{-1}$. Iga $(x,y) \in R$ korral $(y,x) \in R^{-1} = R$, seega R on sümmeetriline. Teisalt, kui R

on sümmeetriline, siis iga paari (x, y) korral kehtib $(x, y) \in R$ parajasti siis, kui $(y, x) \in R$. Järelikult, $R \subset R^{-1} \subset R$ ehk $R = R^{-1}$.

255. a) $R^{-1} = \{0, 1, 2\}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$; b) $R^{-1} = \{(n, m) \mid m \mid n\}$, kus $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
c) $R^{-1} = \{(Y, X) \mid X \subset Y\}$, kus $(Y, X) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

267. a) on; b) on; c) ei ole; d) ei ole; e) ei ole; f) ei ole; g) ei ole

268. a) on; b) on;

269. a) ei ole; b) on;

270. a) ekvivalentsusseose nõuded on rahuldatud; b) tasand ei ole iseendaga risti, seega seos ei ole refleksiivne; c) seos ei ole transitiivne, sest näiteks $(-1, 0) \in R$ ja $(0, 1) \in R$, aga $(-1, 1) \notin R$; d) seos ei ole transitiivne

274. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}; \{\{a, b\}, \{c\}\}; \{\{a\}, \{b, c\}\}; \{\{a, c\}, \{b\}\}$ ja $\{A\}$.

275. $\{A_4, A_1, A_3\}; \{A_4, A_1, A_5, A_6\}; \{A_4, A_1, A_2, A_7, A_8\}$.

276. Ei, sest $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) \neq \mathbb{R}$.

277. Seos $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mis on defineeritud $(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x, y \in [k, k+1)$, on ekvivalentsusseos, mis tekitab ülesandes antud klassijaotuse.

278. $X/R = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4\}\}$

279. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$.

280. $R = \Delta X \cup \{(2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5), (4, 6), (6, 4)\}$

281. $R = \Delta X \cup \{(a, d), (d, a), (a, e), (e, a), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d)\}$.

282. $\mathbb{N}/R = \{\{n \in \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{N} : n = 3q\}, \{n \in \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{N} : n = 3q+1\}, \{n \in \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{N} : n = 3q+2\}\}$.

283. $X/R = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$.

284. a) $\mathbb{R}/R = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$; b) $\mathbb{R}/R = \{\{x \in \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\} \mid y \in \mathbb{R}\}$.

285. refleksiivne, antisümmeetriline, transitiivne ; on järjestusseos.

293. 1) Kui $x = y$, siis seose R refleksiivsusest saame, et $(x, y) = (y, x) = (x, x) \in R$.

2) Kui $xRy \wedge yRx$, siis seose R antisümmeetrisusest järeldub, et $x = y$.