TOPOLOOGILISED VEKTORRUUMID

MTMM.00.074 Loengukursus
Tartu Ülikooli
matemaatika-informaatikateaduskonna
üliõpilastele

Toivo Leiger

Sissejuhatus

Kaasaegne matemaatika baseerub ***hulga*** mõistel. Hulk on mingite objektide kogum, milles iga objekt (element) on teistest erinev. Kui antud hulga elementide või alamhulkade vahel on määratud mingid seosed, siis öeldakse, et hulgas on määratud vastav *struktuur.* Struktuuriga hulki nimetatakse ka *ruumideks.*

Kõige üldisem hulki käsitlev õpetus on hulgateooria, mis üldjuhul ei eelda hulgas mingisuguse struktuuri olemasolu. Sisukamate ja rakenduste suhtes väärtuslikumate teooriate saamiseks vaadeldakse hulki, milles on defineeritud üks või enam struktuure.

N. Bourbaki järgi eraldatakse matemaatiliste struktuuride hulgast välja kolm struktuuride liiki, mida nimetatakse ***matemaatika põhistruktuurideks*:**
1) *algebralised struktuurid*, mida määravad seosed on antud algebraliste operatsioonide (tehete) abil ja seovad omavahel lõpliku arvu elemente,
2) *topoloogilised struktuurid*, milles (Bourbaki sõnul) "...leiavad matemaatilise formuleeringu intuitiivsed mõisted *ümbrus, piirväärtus ja pidevus,* mille juurde viib meid meie ettekujutus ruumist",
3) *järjestusstruktuurid*, mis määratakse sel viisil, et hulga mõnigate elementide järjestatud paaride (x, y) korral on fikseeritud komponentide järgnevus (tavaliselt väljendame seda sõnadega "x on väiksem kui y").
Käesoleva kursuse pealkiri – ***topoloogilised vektorruumid*** – viitab selgelt sellele, milliste struktuuridega me allpool tegemist teeme. Need on vektorruumid, mis samal ajal on ka topoloogilised ruumid, lisaks sellele eeldatakse nende kahe struktuuri teatavat loomulikku kooskõla. See kooskõla saavutatakse nõudega vektorruumi tehete pidevusest. Niisuguste struktuuride käsitlemist (ja seega käesoleva aine õppimist) hõlbustab kogemus, mis on saadud funktsionaalanalüüsi põhikursustest. Asjaolu, et normeeritud ruum on topoloogilise vektorruumi üks erijuhte, on oluliselt määranud topoloogiliste vektorruumide teooria arengut. Normeeritud ruumide teooriast on genereeritud mitte ainult mitmed probleemiasetused, vaid ka siinvaadeldava teooria sisemine loogika.

Kuigi **järjestusstruktuure** me käesolevas kursuses spetsiaalselt ei käsitle, vajame me sellise struktuuriga hulki konkreetsete probleemide uurimisel. Topoloogilise koonduvuse kirjeldamisel kasutame me käesolevas kursuses suunatud peresid. Suunatud pere on selline "jada", mille indeksid moodustavad mingi suunatud hulga (suunatud pere korrektne definitsioon on antud artiklis 1.2). Seejuures nimetatakse hulka X *suunatud hulgaks*, kui tema elementide mõningate järjestatud paaride (x, y) korral on defineeritud (järjestus)suhe $x \leqslant y$, mis rahuldab tingimusi
(a) $x \leqslant x$ iga $x \in X$ korral,
(b) kui $x \leqslant y$ ja $y \leqslant z$, siis $x \leqslant z$ $(x, y, z \in X)$,
(c) kui $x, y \in X$, siis leidub $z \in X$ omadusega $x \leqslant z$, $y \leqslant z$.
Kui lisaks tingimustele (a) ja (b) rahuldab vaadeldav seos veel tingimust
(d) kui $x \leqslant y$ ja $y \leqslant x$, siis $x = y$ $(x, y \in X)$,
siis nimetatakse hulka X *järjestatud hulgaks.* Järjestatud hulkade üldisest teooriast rakendame me allpool Zorni lemmat, mille formuleerimiseks vajame veel selle teooria mõningaid põhimõisteid. Järjestatud hulka nimetatakse *täielikult järjestatuks* (ehk *lineaarselt järjestatuks*), kui iga paari $x, y \in X$ puhul kehtib kas $x \leqslant y$ või $y \leqslant x$. Alamhulka E järjestatud hulgas X nimetatakse *ülalt tõkestatuks*, kui leidub selline element $z \in X$, et $x \leqslant z$ iga $x \in E$ korral.

Element $x_0 \in E$ omadusega

$$[x \in E,\ x \geqslant x_0] \Rightarrow x = x_0,$$

nimetatakse alamhulga E *maksimaalseks elemendiks.*

Zorni lemma. *Kui järjestatud hulga X iga täielikult järjestatud alamhulk on ülalt tõkestatud, siis hulgas X leidub (vähemalt üks) maksimaalne element.*

Topoloogiliste struktuuride põhimõistetest ja meile vajalikest põhitulemustest anname ülevaate esimeses peatükis. Lühidalt meenutame siinkohal **vektorruumide teooria** mõisteid ja lepime kokku põhiliste tähistuste osas.

Vektorruum. Teatavasti nimetatakse hulka X *vektorruumiks* (ka *lineaarseks ruumiks*) üle korpuse $\mathbb{K}$ kui iga elementide paari $x, y \in X$ korral on defineeritud nende summa $x+y \in X$ ja suvaliste $x \in X$ ning $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (kõigi kompleksarvude korpus) või $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (kõigi reaalarvude korpus)) korral on defineeritud korrutis $\lambda x \in X$, kusjuures neilt tehetelt nõutakse järgmisi omadusi:
$x + (y + z) = (x + y) + z$,
$x + y = y + x$,
eksisteerib *nullelement* $0 \in X$, et $x + 0 = x$ iga $x \in X$ korral,
iga $x \in X$ korral leidub *vastandelement* $-x \in X$ omadusega $x + (-x) = 0$,
$(\lambda\mu)\, x = \lambda\, (\mu x)$,
$(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$,
$\lambda\, (x + y) = \lambda x + \lambda y$,
$1x = x$.
Vastavalt sellele, kas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kõneleme kas *reaalsest* või *komplekssest vektorruumist.*

Vektorruumi X fikseeritud alamhulkade E ja F ning elementide $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ puhul kasutame järgmisi tähistusi:

$$x + E := \{x + y \mid y \in E\}\,,\ \ E + F := \{y + z \mid y \in E,\ z \in F\}\,,$$
$$\lambda E := \{\lambda y \mid y \in E\}\,.$$

Vektoralamruum ja hulga lineaarne kate. Alamhulka $X_0 \subset X$, mis rahuldab tingimusi

$$X_0 + X_0 \subset X_0,\ \ \lambda X_0 \subset X_0 \quad (\lambda \in \mathbb{K})\,,$$

nimetatakse *vektoralamruumiks.* Antud alamhulka $E \subset X$ sisaldavat vähimat vektoralamruumi nimetame hulga E *lineaarseks katteks* ja tähistame $\operatorname{span} E$. Seejuures on $\operatorname{span} E$ hulga E elementide kõikvõimalike lineaarsete kombinatsioonide hulk, s.t.

$$\operatorname{span} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \mid x_k \in E,\ \lambda_k \in \mathbb{K}\ \ (k = 1, \ldots, n)\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Üheelemendilise hulga $\{x\}$ puhul $\operatorname{span}\{x\} =: \langle x \rangle\,.$

Lineaarne sõltumatus, vektorruumi baas. Öeldakse, et vektorruumi X alamhulk $E \subset X$ on *lineaarselt sõltumatu*, kui tema iga lõpliku alamhulga $\{x_1, \ldots, x_n\}$ puhul seosest

$\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ järeldub, et $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Niisugust lineaarselt sõltumatut alamhulka E, mille korral span $E = X$, nimetatakse vektorruumi X *baasiks.*

Lineaarne kujutus. Kujutust (ehk operaatorit) A vektorruumist X vektorruumi Z (kirjutame $A\colon X \to Z$) nimetatakse *lineaarseks*, kui

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)\,, \quad A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K})\,.$$

Kui selline kujutus A on pööratav, siis ka pöördkujutus $A^{-1}\colon Z \to X$ on lineaarne. Skalaarsete väärtustega lineaarset kujutust nimetame *lineaarseks funktsionaaliks.*

Bilineaarne funktsionaal. Olgu X ja Y vektorruumid üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$. Funktsionaali $B\colon X \times Y \to \mathbb{K}$, mille korral funktsionaalid

$$B_x\colon Y \to \mathbb{K},\ y \mapsto B(x,y) \quad (x \in X)$$

ning

$$B_y\colon X \to \mathbb{K},\ x \mapsto B(x,y) \quad (y \in Y)$$

on lineaarsed, nimetatakse *bilineaarseks.*

Lõpuks märgime, et me lubame endale kasutatavate terminite osas teatvaid "keelelisi vabadusi", muidugi vaid siis, kui see ei häiri tekstist arusaamist. Näiteks kasutame me sõna "ruum" nii vektorruumi, topoloogilise ruumi, topoloogilise vektorruumi jm. ruumide puhul, kui lause kontekstist on selge, millist ruumi silmas peetakse. Sõna "süsteem" kasutame mõnikord hulga tähistamiseks. Näiteks kõneldakse enamasti nulliümbruste süsteemist, kuigi põhimõtteliselt on tegemist hulgaga.

Tekstis on lugejale jäetud hulgaliselt nn. ***aktiviseerimiselemente***. Need on ülesanded, lihtsamate lausete tõestused või mõned tehnilised detailid tõestustes, mille iseseisev kontrollimine aitab vaadeldavate mõistete ja tulemuste olemust paremini selgitada. Sellised kohad tekstis on märgitud sümboliga ✠.

Sisukord

1 Topoloogilised ruumid **8**
- 1.1 Üldise topoloogia põhimõisted ja -tulemused 8
- 1.2 Suunatud pered topoloogilises ruumis 10
- 1.3 Kompaktsed topoloogilised ruumid 14

2 Topoloogilised vektorruumid **17**
- 2.1 Topoloogilise vektorruumi mõiste 17
- 2.2 Vektorruumide topologiseerimise põhiteoreem 19

3 Tõkestatud ja kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis **24**
- 3.1 Tõkestatud ja täielikult tõkestatud alamhulgad 24
- 3.2 Kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis 26

4 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid **29**
- 4.1 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid 29
- 4.2 Lõplikumõõtmelised topoloogilised vektorruumid 32
- 4.3 Näiteid 34

5 Kumerad hulgad ja poolnormid **38**
- 5.1 Kumerad alamhulgad vektorruumis 38
- 5.2 Poolnormid ja Minkowski funktsionaalid 42

6 Hahn-Banachi teoreem **45**
- 6.1 Hahn-Banachi teoreem reaalse vektorruumi puhul 45
- 6.2 Hahn-Banachi teoreem kompleksse vektorruumi puhul 48
- 6.3 Eraldamisteoreemid 49

7 Lokaalselt kumerad ruumid **52**
- 7.1 Lokaalselt kumera topoloogia kirjeldamine nulliümbruste baasi ja poolnormide abil 52
- 7.2 Koonduvus ja tõkestatus lokaalselt kumeras ruumis 55
- 7.3 Metriseeruvad ja normeeruvad lokaalselt kumerad ruumid 57
- 7.4 Lokaalselt kumera ruumi kaasruum 60
- 7.5 Veel kaks eraldamisteoreemi 61

8 Vektorruumide duaalsed paarid **64**
- 8.1 Duaalne paar 64
- 8.2 Nõrk topoloogia 66
- 8.3 Polaarid 71

9 Polaartopoloogiad **73**
- 9.1 $\mathfrak{S}$-topoloogiad ja võrdpidevad hulgad 73
- 9.2 Mackey topoloogia 76
- 9.3 Mackey teoreem tõkestatud hulkadest 78

10 Tünniruumid ja F-ruumid **81**
10.1 Tugev topoloogia ja tünniruum 81
10.2 F-ruumid. Lahtise kujutuse printsiip 83
10.3 Teoreem kinnisest graaafikust 85

11 Projektiivsed piirid **88**
11.1 Projektiivse piiri topoloogia 88
11.2 Lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutis 91

12 Induktiivsed piirid. Bornoloogilised ruumid **94**
12.1 Induktiivse piiri topoloogia 94
12.2 Bornoloogilised ruumid 96

13 Induktiivse piiri erijuhud: faktorruum, otsesumma, range induktiivne piir **100**
13.1 Faktorruumid 100
13.2 Topoloogilised otsesummad 102
13.3 Ranged induktiivsed piirid 106

14 Topoloogiliste vektorruumide näiteid **109**
14.1 Lokaalselt tõkestatud ruumid L^p, kus $0 < p < 1$ 109
14.2 Pidevate funktsioonide ruumid 110
14.3 Analüütiliste funktsioonide ruum 111
14.4 Diferentseeruvate funktsioonide ruume 112
14.5 Distributsioonid 114
14.6 Jadaruumid 115

1 Topoloogilised ruumid

Selles sissejuhatavas peatükis on meie eesmärgiks tuletada meelde topoloogiliste ruumidega seotud põhilised mõisted ja faktid, mida teame üldise topoloogia ja funktsionaalanalüüsi kursustest. Klassikaline funktsionaalanalüüs, mille põhisisu on normeeritud ruumid ja lineaarsed kujutused neis ning nende vahel, toetub põhiliselt meetriliste ruumide teooriale. Meetrilise ruumi topoloogia on täielikult kirjeldatav selles ruumis koonduvate jadadega. Topoloogilises ruumis vajatakse selleks üldisemat koonduvuse mõistet, mida saab kirjeldada kas filtrite või suunatud perede abil. Meie oma käsitluses kasutame põhiliselt suunatud peresid.

1.1 Üldise topoloogia põhimõisted ja -tulemused

Topoloogiline ruum. Olgu X mingi hulk. Alamhulkade süsteemi τ nimetatakse *topoloogiaks* hulgas X, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:
(**T1**) $\varnothing \in \tau$ ja $X \in \tau$,
(**T2**) kui $G_\gamma \in \tau$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral, siis $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma \in \tau$ mistahes hulga Γ puhul,
(**T3**) kui $G_1, \ldots, G_n \in \tau$, siis $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_\gamma \in \tau$.
Hulka X, mis on varustatud topoloogiaga τ, nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks* (järgnevalt lühidalt *TR*), mida me tähistame (X, τ) või lihtsalt X, kui topoloogia suhtes on kokku lepitud. Süsteemi τ elemente G nimetatakse TR-i X *lahtisteks hulkadeks,* hulga X elemente x aga selle ruumi *punktideks.*

Topoloogiate võrdlemine. Kui hulgas X on defineeritud kaks topoloogiat τ ja τ' ning $\tau \subset \tau'$ (s.t. iga lahtine hulk TR-is (X, τ) on lahtine ka ruumis (X, τ')), siis öeldakse, et topoloogia τ' on *tugevam* topoloogiast τ ehk τ on *nõrgem* kui τ'. Igas hulgas on nõrgim ja tugevaim topoloogia, need on vastavalt $\{\varnothing, X\}$ ja $\{G \mid G \subset X\}$.

TR-i alamruum. Olgu (X, τ) TR ja X_0 hulga X mingi alamhulk. Siis

$$\tau_0 := \{X_0 \cap G \mid G \in \tau\}$$

on topoloogia hulgas X_0. TR-i (X_0, τ_0) nimetatakse ruumi (X, τ) *alamruumiks.*

Hulga sisepunktid. TR-i (X, τ) alamhulga E elementi x nimetatakse selle hulga *sisepunktiks*, kui leidub niisugune $G \in \tau$, et $x \in G \subset E$. Selle definitsiooni kohaselt koosneb lahtine hulk ainult sisepunktidest.

Punkti ümbrused. Iga hulka $U \subset X$, millele element $x \in X$ on sisepunkt, nimetatakse punkti x *ümbruseks*. Niisiis, *hulk $U \subset X$ on punkti $x \in X$ ümbrus parajasti siis, kui leidub selline lahtine hulk $G \subset X$, et $x \in G \subset U$.*

Ümbruste baas. Kui antud punkti $x \in X$ puhul on fikseeritud selline ümbruste süsteem $\mathfrak{B}_x$, et

$$\text{punkti } x \text{ suvalise ümbruse } U \text{ korral leidub } V \in \mathfrak{B}_x \text{ omadusega } V \subset U,$$

siis süsteemi $\mathfrak{B}_x$ nimetatakse punkti x ümbruste *baasiks* (ehk *fundamentaalsüsteemiks).*

Topoloogia saab määrata ka nii, et defineeritakse iga punkti x jaoks ümbruste baas. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1.1. (a) *Kui TR-s (X,τ) iga punkti $x \in X$ jaoks on fikseeritud tema ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$, siis on täidetud järgmised tingimused:*
(**B1**) *kui $V \in \mathfrak{B}_x$, siis $x \in V$,*
(**B2**) *kui $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$, siis leidub $V \in \mathfrak{B}_x$ omadusega $V \subset V_1 \cap V_2$,*
(**B3**) *iga $V \in \mathfrak{B}_x$ jaoks leidub $V' \in \mathfrak{B}_x$ nii, et*

$$1)\ V' \subset V \ \textit{ja}\ 2)\ \forall y \in V'\ \exists W \in \mathfrak{B}_y : W \subset V.$$

(b) *Olgu hulga X iga elemendi x jaoks määratud mittetühi alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}_x$ nii, et oleksid täidetud tingimused* (**B1**) $-$ (**B3**)*. Siis alamhulkade süsteem*

$$\tau := \{G \subset X \mid \forall x \in G\ \exists V \in \mathfrak{B}_x : V \subset G\}$$

on topoloogia hulgas X, mille suhtes $\mathfrak{B}_x$ on punkti x ümbruste baas.

Topoloogiate võrdlemine ümbruste baaside abil. Olgu hulgas X määratud kaks topoloogiat τ ja τ', tähistame suvalise punkti $x \in X$ ümbruste baasid nendes topoloogiates vastavalt $\mathfrak{B}_x$ ja $\mathfrak{B}'_x$. Kehtib seos

$$\tau \subset \tau' \Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall V \in \mathfrak{B}_x\ \exists U \in \mathfrak{B}'_x : U \subset V.$$

Ümbruste baasid alamruumis. TR-i (X,τ) alamruumi X_0 topoloogia τ_0 on määratud ümbruste baasidega

$$\mathfrak{B}^0_x := \{X_0 \cap U \mid U \in \mathfrak{B}_x\} \quad (x \in X_0).$$

Alamhulga puutepunkt. Olgu E TR-i (X,τ) alamhulk. Punkti $x \in X$ nimetatakse hulga E *puutepunktiks*, kui ta iga ümbrus V lõikab hulka E, s.t. kui $E \cap V \neq \emptyset$. Selle definitsiooni puhul juhime tähelepanu järgmisele lihtsalt kontrollitavale, kuid olulisele faktile, mida me allpool tihti kasutame ilma seda kommenteerimata:

väljendi "*punkti x iga ümbrus*" võib asendada väljendiga "*iga $V \in \mathfrak{B}_x$*".

Alamhulga sulund. Hulga E kõigi puutepunktide hulka nimetame tema *sulundiks* ja tähistame $\overline{E}$. Niisiis,

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{B}_x : E \cap V \neq \emptyset.$$

Toome mõned olulisemad ***sulundi omadused*** (tõestada!)✠**:**
1) $E \subset \overline{E}$, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$
2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \overline{E_1} \subset \overline{E_2}$,
3) $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$.

Kinnised hulgad. Hulka $E \subset X$ nimetatakse *kinniseks* TR-s (X,τ) ehk τ-*kinniseks*, kui $E = \overline{E}$. Lihtne kontroll näitab, et E on kinnine parajasti siis, kui tema täiend on lahtine, s.t. kui $X \diagdown E \in \tau$.

Pidev kujutus. Kujutust f TR-st (X,τ) TR-i (Z,τ') nimetatakse pidevaks punktis $x \in X$, kui punkti $f(x) \in Z$ iga ümbruse V korral tema originaal $f^{-1}(V)$ on punkti x ümbrus TR-s (X,τ). Sellega on samaväärne tingimus

$$\forall V \in \mathfrak{B}_{f(x)}\ \exists U \in \mathfrak{B}_x : f(U) \subset V.$$

Kujutus f on pidev (s.t. pidev igas punktis $x \in X$), kui kehtivad järgmised teineteisega samaväärsed tingimused:
(i) $G \in \tau' \Rightarrow f^{-1}(G) \in \tau$ (lahtise hulga originaal on lahtine),
(ii) $F = \overline{F}$ ruumis $Z \Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$ ruumis X (kinnise hulga originaal on kinnine).

TR-de isomorfism. Kui antud TR-de (X, τ) ja (Z, τ') puhul leidub niisugune pööratav ehk bijektiivne kujutus $f\colon (X, \tau) \to (Z, \tau')$, mis on pidev ning mille pöördkujutus $f^{-1}\colon (Z, \tau') \to (X, \tau)$ on samuti pidev, siis nimetame neid TR-e *isomorfseteks* ehk *homöomorfseteks.* Kujutust f nimetame sel juhul TR-de (X, τ) ja (Z, τ') *topoloogiliseks isomorfismiks* ehk *homöomorfismiks.*

TR-de korrutis. Selle artikli lõpus vaatleme topoloogiliste ruumide korrutistopoloogiat, piirdudes seejuures kahe TR-i (X, τ) ja (Z, τ') korrutisega. Defineerime korrutishulgas

$$X \times Z := \{(x, z) \mid x \in X,\ z \in Z\}$$

korrutistopoloogia $\tau_{X\times Z}$ järgmisel viisil. Punkti $w := (x_0, z_0)$ ümbruste baasiks võtame hulga $X \times Z$ alamhukade süsteemi

$$\mathfrak{B}_w := \{U \times V \mid U \in \mathfrak{B}_{x_0},\ V \in \mathfrak{B}_{z_0}\},$$

kus $\mathfrak{B}_{x_0}$ ja $\mathfrak{B}_{z_0}$ on vastavalt punktide x_0 ja z_0 ümbruste baas ruumis (X, τ) ja (Z, τ'). Vahetu kontroll näitab, et sel juhul on täidetud teoreemi 1.1 tingimused (**B1**) - (**B3**), seega on hulgas $X \times Z$ defineeritud topoloogia, mida me nimetame *korrutistopoloogiaks* ja mille suhtes süsteem $\mathfrak{B}_w$ iga $w \in X \times Z$ korral on ümbruste baas.

Analoogiliselt defineeritakse korrutistopoloogia suvalise lõpliku arvu TR-de korral.

Pidev kujutus korrutisruumis. Olgu lisaks TR-dele X ja Z antud veel kolmas TR (H, τ''). Kujutus $f\colon (X \times Z, \tau_{X\times Z}) \to (H, \tau'')$ on definitsiooni kohaselt punktis $w = (x_0, z_0)$ pidev parajasti siis, kui

$$\forall W \in \mathfrak{B}_{f(w)}\ \exists U \in \mathfrak{B}_{x_0},\ V \in \mathfrak{B}_{z_0} : f(U \times V) \subset W.$$

Seejuures on kujutused

$$f_{z_0}\colon (X, \tau) \to (H, \tau''),\ x \mapsto f(x, z_0)$$

ja

$$f_{x_0}\colon (Z, \tau') \to (H, \tau''),\ z \mapsto f(x_0, z)$$

pidevad vastavalt punktis x_0 ja z_0.

1.2 Suunatud pered topoloogilises ruumis

Suunatud pere. Olgu Γ mingi suunatud hulk (suunatud hulga definitsioon on toodud sissejuhatuses). Kujutust suunatud hulgast Γ mingisse hulka X nimetatakse *suunatud pereks* (või lühidalt *pereks*) hulgas X. Lihtsaimad pered on jadad, need tekivad juhul $\Gamma = \mathbb{N}$. Jadade eeskujul tähistame suunatud hulgaga Γ määratud peresid $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ või lühemalt (x_γ).

Definitsioon. Olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ pere hulgas X ning olgu E hulga X mingi alamhulk. Ütleme, et pere (x_γ)
1) *riivab sageli hulka* E, kui iga $\gamma \in \Gamma$ korral leidub $\gamma' \geqslant \gamma$ omadusega $x_{\gamma'} \in E$,
2) on *põhiliselt hulgas* E, kui leidub selline $\gamma_0 \in \Gamma$, et $x_\gamma \in E$ iga $\gamma \geqslant \gamma_0$ korral.

Lemma 1.2. *Olgu* $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *pere hulgas* X. *Leidub hulga* X *alamhulkade hulk* $\mathcal{C}$ *järgmiste omadustega:*
(i) (x_γ) *riivab sageli iga hulka* $A \in \mathcal{C}$,
(ii) *kui* $A, B \in \mathcal{C}$, *siis* $A \cap B \in \mathcal{C}$,
(iii) *iga* $A \subset X$ *puhul kas* $A \in \mathcal{C}$ *või* $X \setminus A \in \mathcal{C}$.

Tõestus. Vaatleme alamhulkade $A \subset X$ hulki $\mathcal{F}$, mille korral on täidetud tingimused (i) ja (ii), olgu Φ kõigi selliste hulkade $\mathcal{F}$ hulk:

$$\Phi := \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ rahuldab tingimusi (i) ja (ii)}\}.$$

Selge, et $\{X\} \in \Phi$, seega $\Phi \neq \varnothing$. Määrame hulgas Φ osalise järjestuse sisalduvuse järgi seosega

$$\mathcal{F}_1 \leqslant \mathcal{F}_2 :\Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$$

ning näitame Zorni lemma abil, et selles osaliselt järjestatud hulgas on maksimaalne element.

Olgu $\{\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \Phi$ täielikult järjestatud alamhulk, tähistame

$$\widehat{\mathcal{F}} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \{A \subset X \mid \exists \lambda \in \Lambda : A \in \mathcal{F}_\lambda\}$$

ja veendume, et $\widehat{\mathcal{F}} \in \Phi$ (iseseisvalt!)✠. Seega on suvaliselt valitud täielikult järjestatud alamhulk $\{\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ hulgas Φ ülalt tõkestatud elemendiga $\widehat{\mathcal{F}}$, Zorni lemma kohaselt on hulgas Φ maksimaalne element, tähistame selle tähega $\mathcal{C}$. Jääb näidata, et $\mathcal{C}$ rahuldab tingimust (iii).

Vaatleme kahte juhtu. ***Esiteks,*** olgu $A \subset X$ selline, et iga $B \in \mathcal{C}$ korral pere (x_γ) riivab sageli hulka $A \cap B$. Olgu

$$\mathcal{F}' := \{C \subset X \mid \exists B \in \mathcal{C} : A \cap B \subset C\},$$

siis (x_γ) riivab sageli iga hulka $C \in \mathcal{F}'$ (selgitada!)✠. Seejuures, kui $C, C' \in \mathcal{F}'$, siis leiduvad $B, B' \in \mathcal{C}$, et $A \cap B \subset C$ ja $A \cap B' \subset C'$, järelikult

$$A \cap (B \cap B') \subset C \cap C'.$$

Seose $B \cap B' \in \mathcal{C}$ tõttu $C \cap C' \in \mathcal{F}'$. Tähendab, $\mathcal{F}' \in \Phi$, ja kuna $A \in \mathcal{F}'$ (põhjendada!)✠, siis $B \in \mathcal{F}'$ iga $B \in \mathcal{C}$ korral ehk $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}'$. Kuid kuna $\mathcal{C}$ on maksimaalne, siis $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}'$, järelikult $A \in \mathcal{C}$.

Teiseks vaatleme alternatiivset juhtu, kus mingi $B_0 \in \mathcal{C}$ korral (x_γ) ei riiva sageli hulka $A \cap B_0$, s.t. (x_γ) on põhiliselt hulgas $X \setminus (A \cap B_0) =: D$. Kuna (x_γ) riivab sageli iga hulka $B \in \mathcal{C}$, siis ka hulka $D \cap B$. Kordame eelmise juhu arutelu, võttes hulga A asemel hulga D, saame, et $D \in \mathcal{C}$. Pidades silmas, et suvalise $B \in \mathcal{C}$ korral $D \cap B \cap B_0 \in \mathcal{C}$ ja

$$\begin{aligned} D \cap B \cap B_0 &= (X \setminus (A \cap B_0)) \cap B \cap B_0 = ((X \setminus A) \cup (X \setminus B_0)) \cap (B \cap B_0) \\ &= ((X \setminus A) \cap B \cap B_0) \cup ((X \setminus B_0) \cap B \cap B_0) \\ &= (X \setminus A) \cap B \cap B_0 \quad (\text{sest } (X \setminus B_0) \cap B \cap B_0 = \varnothing), \end{aligned}$$

saame, et (x_γ) riivab sageli hulka $(X \setminus A) \cap B$ iga $B \in \mathcal{C}$ puhul. Korrates veel korda esimesel juhul esitatud arutelu hulga $X \setminus A$ korral, saame, et $X \setminus A \in \mathcal{C}$. Lemma on tõestatud. ∎

Osapered. Definitsioon. Olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ pere hulgas X ning olgu Δ suunatud hulk. Ütleme, et pere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ on esialgse pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *osapere*, kui on täidetud järgmine tingimus:

$$\forall\gamma\in\Gamma\ \exists\beta\in\Delta\ \forall\beta'\geqslant\beta\ \exists\gamma'\geqslant\gamma : y_{\beta'}=x_{\gamma'}.$$

Märgime, et jada osapere ei pruugi olla osajada: näiteks on $(3,2,4,6,\dots,2n,\dots)$ naturaalarvude jada $(1,2,3,\dots)$ osapere, kuid ei ole osajada.

Lemma 1.3. *Olgu (x_γ) pere hulgas X ja olgu $\mathcal{A}$ selline alamhulkade $A\subset X$ hulk, et*
(i) *(x_γ) riivab sageli iga hulka $A\in\mathcal{A}$,*
(ii) *suvaliste $A,B\in\mathcal{A}$ puhul leidub selline $C\in\mathcal{A}$, et $C\subset A\cap B$.*
Siis leidub perel (x_γ) niisugune osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, mis on põhiliselt hulgas A iga $A\in\mathcal{A}$ korral.

Tõestus. Defineerime hulgas $\mathcal{A}$ osalise järjestuse sisalduvuse järgi nii, et

$$A\leqslant B :\Leftrightarrow B\subset A,$$

tänu eeldusele (ii) on $\mathcal{A}$ suunatud hulk. Tähistame

$$\Delta := \{(\gamma,A)\mid \gamma\in\Gamma,\ A\in\mathcal{A},\ x_\gamma\in A\}$$

ning defineerime hulgas Δ osalise järjestuse

$$(\gamma,A)\leqslant(\gamma',A') :\Leftrightarrow [\gamma\leqslant\gamma',\ A\leqslant A']$$

(kontrollida!)✠. Näitame, et Δ on suunatud hulk. Suvaliste $(\gamma,A),(\gamma',A')\in\Delta$ puhul leiame kõigepealt $A_0\in\mathcal{A}$, et $A_0\subset A\cap A'$ (vrd. tingimus (ii)), ning seejärel (tingimust (i) ja hulga Γ suunatust kasutades) sellise $\gamma_0\in\Gamma$, et $\gamma,\gamma'\leqslant\gamma_0$ ja $x_{\gamma_0}\in A_0$. Siis $(\gamma_0,A_0)\in\Delta$ ning $(\gamma,A),(\gamma',A')\leqslant(\gamma_0,A_0)$, järelikult on Δ suunatud hulk.

Olgu $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ pere, kus iga $\beta:=(\gamma,A)\in\Delta$ korral $y_\beta:=x_\gamma$, siis $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ on pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ osapere. Tõepoolest, suvalise $\gamma\in\Gamma$ puhul valime $A\in\mathcal{A}$ nii, et $x_\gamma\in A$, siis $\beta:=(\gamma,A)\in\Delta$, ja kui $\beta':=(\gamma',A')\in\Delta$ ning $\beta'\geqslant\beta$, siis $\gamma'\geqslant\gamma$ ja $A'\subset A$, seejuures $y_{\beta'}=x_{\gamma'}$.

Osutub, et suvalise $A\in\mathcal{A}$ korral on $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ põhiliselt hulgas A. Nimelt leidub eelduse (i) põhjal selline $\gamma\in\Gamma$, et $x_\gamma\in A$, seega $\beta=(\gamma,A)\in\Delta$. Seejuures iga $\beta'=(\gamma',A')\geqslant\beta$ korral $y_{\beta'}=x_{\gamma'}\in A'\subset A$. Lemma on tõestatud. ■

Ultrapered. Definitsioon. *Ultrapereks* (ehk *universaalseks pereks*) hulgas X nimetatakse sellist peret, mis iga alamhulga $E\subset X$ korral on põhiliselt kas hulgas E või selle täiendis $X\setminus E$.

Lemmade 1.2 ja 1.3 abil tõestame järgmise lause.

Lause 1.4. *Iga pere sisaldab osapere, mis on ultrapere.*

Tõestus. Olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ pere hulgas X, olgu $\mathcal{C}$ alamhulkade $C\subset X$ hulk, mis rahuldab lemma 1.2 tingimusi (i), (ii) ja (iii). Siis rahuldab $\mathcal{C}$ ka lemma 1.3 eeldusi (i) ja (ii), niisiis saame moodustada sellise osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, et iga $C\in\mathcal{C}$ korral $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ on põhiliselt hulgas C või hulgas $X\setminus C$. Kuna suvalise $A\subset X$ puhul kas $A\in\mathcal{C}$ või $X\setminus A\in\mathcal{C}$, siis $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ on põhiliselt kas hulgas A või hulgas $X\setminus A$. Seega on $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ ultrapere. ■

Pere koonduvus TR-s. Definitsioon. Olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ pere TR-s (X,τ). Punkti $x\in X$ nimetatakse pere (x_γ) *piirväärtuseks* (ütleme ka, et pere (x_γ) *koondub punktiks* x), kui punkti x iga ümbruse $U\in\mathfrak{B}_x$ puhul leidub selline indeks $\gamma_0\in\Gamma$, et $x_\gamma\in U$ iga $\gamma\geqslant\gamma_0$ korral. Sel juhul kirjutame $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$ (lühemalt $\lim\limits_{\gamma} x_\gamma = x$) või $x_\gamma\to x$, aga ka $x_\gamma\to x\,(\tau)$, kui on vaja rõhutada, millises topoloogias koonduvus aset leiab.

Lihtne on veenduda, et kui pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ koondub TR-s X mingiks punktiks x, siis samaks punktiks koondub ka iga tema osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ (kontrollida!)✠.

Pere kuhjumispunkt TR-s. Esitatud definitsiooni kohaselt $x_\gamma\to x$ parajasti siis, kui punkti x iga ümbruse U korral pere (x_γ) on põhiliselt hulgas U.

Definitsioon. Kui (x_γ) on pere TR-s X ja $x\in X$ selline punkt, mille iga ümbrust U see pere riivab sageli, siis öeldakse, et x on pere (x_γ) *kuhjumispunkt.*

Lause 1.5. *Punkt x on pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ kuhjumispunkt TR-s X parajasti siis, kui leidub selline osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, et $y_\beta\to x$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et x on pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ kuhjumispunkt. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x mingi ümbruste baas, siis $\mathcal{A}:=\mathfrak{B}_x$ rahuldab lemma 1.3 eeldusi (i) ja (iit) (selgitada!)✠. Lemma väite kohaselt leidub perel $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ selline osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, mis on põhiliselt hulgas U iga $U\in\mathfrak{B}_x$ korral. Seega $y_\beta\to x$.

Piisavus. Olgu $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ selline osapere, mis koondub punktiks x ja olgu $U\in\mathfrak{B}_x$. Peame veenduma, et iga $\gamma\in\Gamma$ puhul leidub $\gamma'\in\Gamma$, et $\gamma'\geqslant\gamma$ ja $x_{\gamma'}\in U$. Osapere definitsiooni kohaselt saame valida niisuguse $\beta(\gamma)\in\Delta$, mis rahuldab tingimust

$$\forall\beta'\geqslant\beta(\gamma)\ \ \exists\gamma'\geqslant\gamma : y_{\beta'} = x_{\gamma'}.$$

Edasi, lähtudes koonduvusest $y_\beta\to x$, saame leida $\beta_1\in\Delta$ omadusega

$$\beta'\geqslant\beta_1\Rightarrow y_{\beta'}\in U.$$

Valides nüüd $\beta'\in\Delta$ nii, et $\beta'\geqslant\beta(\gamma)$ ja $\beta'\geqslant\beta_1$, saamegi soovitud seose $x_{\gamma'} = y_{\beta'}\in U$. ■

Lause 1.6. *Ultrapere koondub parajasti siis, kui tal on kuhjumispunkt.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Eralduvad TR-d ehk Hausdorffi ruumid. Koonduvuse mõistel topoloogilises ruumis on oluline puudus meetriliste ruumidega võrreldes: koonduva pere (või jada) piirväärtus ei ole üldjuhul üheselt määratud. Selles on lihtne veenduda järgmise triviaalse näite varal. Olgu $X=\{a,b,c\}$ kolme-elemendiline hulk topoloogiaga $\tau:=\{X,\{a,b\},\varnothing\}$ (veenduda, et see on topoloogia!)✠. Kuna punktidel a ja b on ühed ja samad ümbrused, siis jadad $(a,a,\dots)$ ja $(b,b,\dots)$ koonduvad mõlemad nii punktiks a kui ka punktiks b.

Et vältida sellist paljude probleemiasetuste puhul vastuvõetamatut olukorda, vaadeldakse enamasti *eralduvaid* topoloogilisi ruume ehk *Hausdorffi ruume.* Nii nimetatakse TR-i X järgmise omadusega:

$$\text{kui } x\neq y,\ x,y\in X,\ \text{siis leiduvad } U\in\mathfrak{B}_x \text{ ja } V\in\mathfrak{B}_y,\ \text{et } U\cap V=\varnothing.$$

Kehtib järgmine lause.

Lause 1.7. *TR X on eralduv parajasti siis, kui igal koonduval perel on selles ruumis vaid üks piirväärtus.*

Tõestus. Iseseisvalt (vt. ülesanne 1.1)✠. ■

Kinniste alamhulkade ja kujutuste pidevuse kirjeldamine koonduvate perede abil. Punkti $x \in X$ ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$ TR-s X on sisalduvuse järgi suunatud hulk. Tõepoolest, kui defineerime

$$V \leqslant V' :\Leftrightarrow V' \subset V,$$

siis $\mathfrak{B}_x$ rahuldab kõiki suunatud hulga definitsiooni tingimusi (kontrollida!)✠. Edasi, kui fikseerime suvaliselt iga $V \in \mathfrak{B}_x$ korral elemendi $x_V \in V$, siis saame suunatud pere $(x_V)_{V \in \mathfrak{B}_x}$. Seejuures $\lim\limits_{V \in \mathfrak{B}_x} x_V = x$: kui $U \in \mathfrak{B}_x$, siis iga $V \geqslant U$ korral kehtib $x_V \in V \subset U$. See tähelepanek võimaldab koonduvate perede abil kirjeldada topoloogilisi seoseid TR-s X samamoodi, nagu seda meetriliste ruumide juhul saab teha koonduvate jadade abil.

Lause 1.8. *Olgu (X, τ) ja (Y, τ') TR-d.*
(a) *Element $x \in X$ on alamhulga $E \subset X$ puutepunkt parajasti siis, kui leiduvad selline suunatud hulk Γ ja hulga E mingi elementide pere $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, mis koondub piirväärtuseks x ruumis X. Lühidalt:*

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow [\exists\, (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} : x_\gamma \in E \text{ ja } x_\gamma \to x\,(\tau)].$$

(b) *Alamhulk $E \subset X$ on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõigi oma koonduvate perede piirväärtused. Lühidalt:*

$$E = \overline{E} \Leftrightarrow [x_\gamma \in E \;\; (\gamma \in \Gamma)\,,\; x_\gamma \to x\,(\tau) \Rightarrow x \in E].$$

(c) *Kujutus $f\colon X \to Y$ on pidev punktis $x \in X$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon*

$$x_\gamma \to x\,(\tau) \Rightarrow f\,(x_\gamma) \to f\,(x)\,(\tau')\,.$$

Ülesanne 1.1. Tõestada lause 1.7.
Ülesanne 1.2. Tõestada lause 1.8(a).
Ülesanne 1.3. Tõestada lause 1.8(b).
Ülesanne 1.4. Tõestada lause 1.8(c).

1.3 Kompaktsed topoloogilised ruumid

Kompaktsed TR-d. Olgu $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ hulga X alamhulkade süsteem. Ütleme, et $\{E_\alpha\}$ on *tsentreeritud süsteem*, kui iga tema lõpliku osasüsteemi ühisosa on mittetühi, s.t.

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_{\alpha_k} \neq \varnothing \text{ suvaliselt valitud } n \in \mathbb{N} \text{ ja } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A \text{ korral.} \tag{1.1}$$

Kui $\bigcup\limits_{\alpha \in A} E_\alpha = X$, siis öeldakse, et $\{E_\alpha\}$ on hulga X *kate.*

TR-i (X,τ) nimetatakse *kompaktseks*, kui iga tema lahtistest hulkadest moodustatud kate sisaldab lõpliku osakatte, s.t. kui kehtib implikatsioon

$$\left[G_\alpha \in \tau \;\; (\alpha \in A)\,, \;\; \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha = X\right] \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \text{ mingite } \alpha_1,\dots,\alpha_n \in A \text{ korral.}$$

Vahetu kontroll näitab, et X on kompaktne parajasti siis, kui tema iga kinniste alamhulkade tsentreeritud süsteemi ühisosa on mittetühi, s.t. kui tingimusest (1.1), kus $E_\alpha = \overline{E_\alpha}$ iga $\alpha \in A$ korral, järeldub, et $\bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha \neq \varnothing$ (veenduda!)✠.

Teoreem 1.9. *TR-i (X,τ) puhul on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *X on kompaktne,*
(b) *igal suunatud perel on TR-s X vähemalt üks kuhjumispunkt,*
(c) *iga suunatud pere sisaldab koonduva osapere,*
(d) *iga ultrapere on koonduv.*

Tõestus. Seos (b) $\Leftrightarrow$ (c) on tõestatud lauses 1.5.

(a) $\Rightarrow$ (b) Eeldame, et X on kompaktne TR, olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ suvaline elementide pere ruumis X. Defineerime iga $\gamma \in \Gamma$ korral hulga $\Delta_\gamma := \{x_{\gamma'} \mid \gamma' \geqslant \gamma\}$, siis $\Delta_{\gamma_1} \subset \Delta_{\gamma_2}$, kui $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$, ja $\Delta_\gamma \neq \varnothing$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Seejuures on $\{\Delta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ tsentreeritud süsteem. Nimelt, kui võtame suvalised $\Delta_{\gamma_1},\dots,\Delta_{\gamma_n}$ ja leiame $\gamma_0 \in \Gamma$ omadusega $\gamma_1,\dots,\gamma_n \leqslant \gamma_0$ (see on võimalik, sest Γ on suunatud hulk), siis $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \Delta_{\gamma_i} \supset \Delta_{\gamma_0} \neq \varnothing$. Muidugi on siis ka süsteem $\{\overline{\Delta_\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ tsentreeritud, kompaktsusest järeldub, et $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \overline{\Delta_\gamma} \neq \varnothing$. Võtame mingi punkti $x \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \overline{\Delta_\gamma}$ ja näitame, et x on pere (x_γ) kuhjumispunkt.

Olgu $U \in \mathfrak{B}_x$ ja $\gamma_0 \in \Gamma$ suvalised. Kuna $x \in \overline{\Delta_{\gamma_0}}$, siis $U \cap \Delta_{\gamma_0} \neq \varnothing$, seega leidub $\gamma \in \Gamma$ omadusega $\gamma \geqslant \gamma_0$ ja $x_\gamma \in U$. Teiste sõnadega, pere (x_γ) riivab sageli punkti x suvalist ümbrust U, s.t. x on selle pere kuhjumispunkt.

(b) $\Rightarrow$ (a) Eeldame, et TR-i X iga elementide pere omab kuhjumispunkti. Olgu $\mathcal{F}$ suvaline kinniste alamhulkade tsentreeritud süsteem, moodustame hulga

$$\Gamma := \left\{ S \subset X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, F_1,\dots,F_n \in \mathcal{F} : S = \bigcap_{i=1}^{n} F_i \right\},$$

siis iga $S \in \Gamma$ korral $\overline{S} = S \neq \varnothing$. Defineerides hulgas Γ seose $S \leqslant S' :\Leftrightarrow S \supset S'$, saame suunatud hulga (kontrollida!)✠. Fikseerime iga $S \in \Gamma$ korral vabalt $x_S \in S$ ning moodustame pere $(x_S)_{S\in\Gamma}$. Eelduse kohaselt on sel perel vähemalt üks kuhjumispunkt $x \in X$. Näitame, et $x \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F$.

Olgu $U \in \mathfrak{B}_x$ ja $S_0 \in \Gamma$ suvalised. Kuna x on pere $(x_S)_{S\in\Gamma}$ kuhjumispunkt, siis leidub $S_1 \in \Gamma$ omadusega $S_1 \geqslant S_0$ ja $x_{S_1} \in U$. Samal ajal $x_{S_1} \in S_1$, mistõttu $x_{S_1} \in U \cap S_0$. Niisiis, $U \cap S_0 \neq \emptyset$ iga $U \in \mathfrak{B}_x$ korral, s.t. $x \in \overline{S_0} = S_0$. Kuna $S_0 \in \Gamma$ oli suvaliselt valitud, siis $x \in \bigcap\limits_{S\in\Gamma} S = \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F$. Seega on suvaliselt valitud kinnistest alamhulkadest tsentreeritud süsteemi $\mathcal{F}$ ühisosa mittetühi hulk, s.t. X on kompaktne.

Implikatsioon (b) $\Rightarrow$ (d) järeldub vahetult lausest 1.6 (kontrollida!)✠, (d) $\Rightarrow$ (c) aga lausest 1.4. Teoreem on tõestatud. ■

Märgime tõestuseta järgmist lihtsat erijuhtu tuntud ***Tihhonovi teoreemist***:
• suvalise lõpliku arvu kompaktsete topoloogiliste ruumide korrutis on kompaktne.

Suhteliselt kompaktsed hulgad. Edaspidi, kõneldes TR-i X alamhulgast X_0, nimetame teda kompaktseks, kui (X_0, τ_0) on kompaktne TR (τ_0 on alamruumi topoloogia). Alamhulka X_0 nimetame *suhteliselt kompaktseks*, kui $\overline{X_0}$ on kompaktne alamhulk.

Esitame mõned lihtsalt kontrollitavad **kompaktsusega seotud omadused:**
• kompaktse topoloogilise ruumi kinnine alamruum on kompaktne,
• eralduva topoloogilise ruumi kompaktne alamruum on kinnine,
• kui f on pidev kujutus TR-st X TR-i Y, siis iga kompaktse alamruumi X_0 puhul on $f(X_0)$ kompaktne alamruum ruumis Y.

2 Topoloogilised vektorruumid

2.1 Topoloogilise vektorruumi mõiste

Vektorruumi tehted. Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Tema tehted on defineeritud kujutustena

$$\begin{aligned} &T\colon X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \ \ \text{(liitmine)}, \\ &S\colon \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \ \ \text{(skalaariga korrutamine)}, \end{aligned}$$

kus $X \times X$ ning $\mathbb{K} \times X$ on vastavad otsekorrutised. Kui vektorruumis X on määratud mingi topoloogia τ, siis korrutisruumis $X \times X$ on defineeritud vastav korrutistopoloogia $\tau_{X\times X}$ (vt. art. 1.1). Edasi, korpuses $\mathbb{K}$ on määratud tema loomulik topoloogia, seega on ka otsekorrutis $\mathbb{K} \times X$ varustatud korrutistopoloogiaga $\tau_{\mathbb{K}\times X}$.

Topoloogiline vektorruum. Definitsioon. *Topoloogiliseks vektorruumiks* ehk lineaarseks topoloogiliseks ruumiks nimetatakse niisugust vektorruumi X, milles on määratud selline topoloogia τ, et vektorruumi tehted

$$T\colon\ (X \times X, \tau_{X\times X}) \to (X, \tau) \ \text{ ja } \ S\colon\ (\mathbb{K} \times X, \tau_{\mathbb{K}\times X}) \to (X, \tau)$$

on pidevad.

Niisiis on topoloogiline vektorruum (***edaspidi lühidalt TVR***) selline hulk, milles on määratud kaks struktuuri: 1) algebraline, s.o. vektorruumi struktuur, ja 2) topoloogia, kusjuures nende struktuuride kooskõla tagatakse nõudega tehete pidevusest. Korrutistopoloogia definitsioonist lähtudes (vt. art. 1.1) kirjeldame kujutuste T ja S pidevust täpsemalt.

Liitmise pidevuseks saame järgmise tarviliku ja piisava tingimuse (kontrollida!)✠:

$$\forall x \in X \ \forall y \in X \ \forall W \in \mathfrak{B}_{x+y} \ \exists U \in \mathfrak{B}_x \ \exists V \in \mathfrak{B}_y : U + V \subset W. \tag{2.1}$$

Skalaariga korrutamise pidevuse tingimuse leidmiseks peame silmas, et TR-s $\mathbb{K}$ moodustavad punkti $\lambda \in \mathbb{K}$ ümbruste baasi hulgad

$$U_\delta := \{\mu \in \mathbb{K} \mid |\mu - \lambda| \leqslant \delta\} \quad (\delta > 0)\,.$$

Seega on skalaariga korrutamine pidev parajasti siis, kui

$$\forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \ \forall W \in \mathfrak{B}_{\lambda x} \ \exists V \in \mathfrak{B}_x \ \exists \delta > 0 : |\mu - \lambda| \leqslant \delta \Rightarrow \mu V \subset W \tag{2.2}$$

(kontrollida!)✠.

Nihe ja homoteetia TVR-s. Järgnevalt vaatleme kahte spetsiifiliste kujutuste klassi, mis edaspidistes aruteludes mängivad tähtsat rolli. Olgu X TVR ning olgu $x_0 \in X$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ fikseeritud elemendid, seejuures eeldame, et $\lambda_0 \neq 0$. Defineerime kujutused

$$\begin{aligned} &T_{x_0}\colon X \to X, \quad x \mapsto x + x_0 \ \ \text{(nihe)}, \\ &S_{\lambda_0}\colon X \to X, \quad x \mapsto \lambda_0 x \ \ \text{(homoteetia)}. \end{aligned}$$

Nende kujutuste pidevus tuleneb otseselt kujutuste T ja S pidevusest. ***Nihke*** T_{x_0} ***pidevuse kontrollimiseks*** vabalt valitud punktis $x \in X$ võtame suvalise $W \in \mathfrak{B}_{x+x_0}$ ja leiame vastavalt tingimusele (2.1) ümbrused $U \in \mathfrak{B}_x$ ja $V \in \mathfrak{B}_{x_0}$ omadusega $U + V \subset W$. Siis $T_{x_0}(U) = U + x_0 \subset U + V \subset W$, seega on kujutus T_{x_0} punktis x pidev. Analoogiliselt tõestatakse seose (2.2) abil homoteetia S_{λ_0} pidevus (vt. ülesanne 2.1)✠.

Mõlemad vaadeldavad kujutused on ***pööratavad***, kusjuures

$$T_{x_0}^{-1} = T_{-x_0} \text{ ja } S_{\lambda_0}^{-1} = S_{1/\lambda_0}.$$

Tõepoolest, iga $x \in X$ puhul

$$\begin{aligned} T_{x_0} \circ T_{-x_0}(x) &= T_{x_0}(x - x_0) = x - x_0 + x_0 = x, \\ T_{-x_0} \circ T_{x_0}(x) &= T_{-x_0}(x + x_0) = x + x_0 - x_0 = x, \end{aligned}$$

niisiis $T_{x_0} \circ T_{-x_0} = T_{-x_0} \circ T_{x_0} = i_X$ (ühikkujutus vektorruumis X). See tähendabki, et T_{-x_0} on kujutuse T_{x_0} pöördkujutus. Samamoodi veendutakse, et $S_{\lambda_0}^{-1} = S_{1/\lambda_0}$ (kontrollida!)✠.

Kuna pöördkujutused $T_{x_0}^{-1}$ ja $S_{\lambda_0}^{-1}$ kui vastavalt nihe ja homoteetia on samuti pidevad, siis on iga lahtise (kinnise) hulga $G \subset X$ puhul kujutishulgad

$$T_{x_0}(G) = x_0 + G = G - (-x_0) = T_{-x_0}^{-1}(G)$$

ja

$$S_{\lambda_0}(G) = \lambda_0 G = \frac{1}{1/\lambda_0} G = S_{1/\lambda_0}^{-1}(G)$$

kui lahtise (kinnise) hulga originaalid pidevate kujutuste $T_{x_0}^{-1}$ ja $S_{\lambda_0}^{-1}$ suhtes lahtised (kinnised). Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 2.1. *Kui G on lahtine (kinnine) alamhulk TVR-s X, siis ka hulgad $x + G$, λG ja $\lambda G + x$ on iga $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ puhul lahtised (kinnised).*

Ülesanne 2.1. Tõestada, et homoteetia S_{λ_0} on pidev.
Ülesanne 2.2. Veenduda, et $S_{\lambda_0}^{-1} = S_{1/\lambda_0}$.

TVR-i nulliümbruste baas. Nagu me eelmises peatükis märkisime (vrd. teoreem 1.1), on üheks topoloogia määramise võimaluseks defineerida iga punkti jaoks tema ümbruste baas. Topoloogilise vektorruumi oluline eelis teiste topoloogiliste ruumide ees on selles, et piisab defineerida vaid nullpunkti ümbruste baas, sellega on määratud ümbruste baas kõigil ülejäänud punktidel. Nullpunkti ümbrusi nimetame edaspidi *nulliümbrusteks.*

Kehtib järgmine lause.

Lause 2.2. *Kui $\mathfrak{B}$ on nulliümbruste baas TVR-s (X, τ), siis moodustavad hulgad $x + U$, kus $U \in \mathfrak{B}$ punkti $x \in X$ ümbruste baasi.*

Tõestus. Kõigepealt märgime, et $x+U$ on punkti x ümbrus iga $U \in \mathfrak{B}$ korral. Tõepoolest, et U on punkti 0 ümbrus, leidub $G \in \tau$ omadusega $0 \in G \subset U$, mistõttu $x \in x + G \subset x + U$. Lause 2.1 kohaselt $x + G \in \tau$, seega $x + U$ on punkti x ümbrus.

Näitame nüüd, et $\mathfrak{B}_x := \{x + U \mid U \in \mathfrak{B}\}$ on punkti x ümbruste baas. Kui V on selle punkti suvaline ümbrus, siis $x \in C \subset V$ mingi $C \in \tau$ puhul. Seejuures järeldub seostest

$0 = -x + x \in -x + C \subset -x + V$ ja $-x + C \in \tau$, et $-x + V$ on nulliümbrus, mistõttu leidub $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U \subset -x + V$ ehk $x + U \subset V$. ■

Lepime siinkohal kokku tähistada (ilma seda iga kord spetsiaalselt mainimata) järgnevas nulliümbruste baasi gooti tähega $\mathfrak{B}$.

Lausetest 2.1 ja 2.2 saame lihtsalt järgmised väited, mis jätame lugejale kontrollida:
- kui V on nulliümbrus TVR-s X, siis ka λV on nulliümbrus iga $\lambda \neq 0$ korral (tõestada!)✠,
- kui $V_1, \ldots, V_n$ on nulliümbrused, siis ka $V_1 \cap \ldots \cap V_n$ on nulliümbrus (tõestada!)✠,
- elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ koondub piirväärtuseks x TVR-s X parajasti siis, kui $x_\alpha - x \to 0$ (tõestada!)✠,
- punkt $x \in X$ on alamhulga E puutepunkt parajasti siis, kui tema kõik ümbrused $x + U$ ($U \in \mathfrak{B}$) lõikavad hulka E (tõestada!)✠,
- lineaarne kujutus A TVR-st X TVR-i Z on pidev parajasti siis, kui ta on pidev nullpunktis (tõestada!)✠.

Nagu iga teise matemaatilise struktuuri puhul kõneldakse ka topoloogiliste vektorruumide puhul nende **isomorfismist**. TVR-e X ja Z nimetatakse *isomorfseteks*, kui leidub selline bijektiivne lineaarne kujutus $T\colon X \to Z$, mis on pidev ja mille pöördkujutus T^{-1} on samuti pidev. Seega on isomorfism pidev ja samal ajal lahtine kujutus, s.t. iga lahtise hulga $G \subset X$ korral on $T(G) \subset Z$ lahtine (veenduda!)✠.

2.2 Vektorruumide topologiseerimise põhiteoreem

Lisaks topoloogiliste vektorruumide sellele eelisele tavaliste topoloogiliste ruumide ees, mida kirjeldab lause 2.2, on veel teine oluline eelis. See väljendub võimaluses komplekteerida nulliümbruste baas hulkadest, mis on vektorruumi vahenditega lihtsalt kirjeldatavad.

Neelavad ja tasakaalus alamhulgad. Definitsioon. Öeldakse, et vektorruumi X mittetühi alamhulk E *neelab hulga* $A \subset X$, kui leidub selline $\delta > 0$, et

$$|\mu| \leqslant \delta \Rightarrow \mu A \subset E.$$

Alamhulka E nimetatakse *neelavaks*, kui ta neelab iga ühe-elemendilise hulga $\{x\}$, kus $x \in X$.

Definitsioon. Öeldakse, et vektorruumi X alamhulk E on *tasakaalus*, kui kas $E = \varnothing$ või $\lambda E \subset E$ iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral, mis rahuldab tingimust $|\lambda| \leqslant 1$.

Märgime mõned definitsioonidest **vahetult järelduvad väited**:
- mittetühi tasakaalus hulk E sisaldab nullelementi ja on sümmeetriline (tõestada!)✠,
- tasakaalus hulkade ühisosa on tasakaalus (tõestada!)✠,
- kui $E_1, \ldots, E_n$ on tasakaalus hulgad, siis ka $E_1 + \ldots + E_n$ on tasakaalus (tõestada!)✠,
- lõpliku arvu neelavate hulkade ühisosa on neelav (tõestada!)✠,
- kui E on tasakaalus hulk, siis αE on tasakaalus iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral (tõestada!)✠,
- kui E on neelav hulk, siis αE on neelav iga $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ korral (tõestada!)✠,
- tasakaalus hulk E on neelav parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral leidub selline $\delta > 0$, et $\delta x \in E$ (tõestada!)✠.

Rõhutame, et nii alamhulga neelavus kui ka tasakaalustatus on *algebralised* mõisted. Nende tähtsus topoloogiliste vektorruumide jaoks selgub järgmisest lausest.

Lause 2.3. (a) *TVR-i X iga nulliümbrus on neelav hulk.*
(b) *TVR-i X iga nulliümbrus sisaldab tasakaalus nulliümbrust.*

Tõestus. Olgu U nulliümbrus TVR-s X ja olgu $x \in X$. Tänu seosele $0x = 0$ ja skalaariga korrutamise pidevusele leiduvad punkti x ümbrus V ja $\delta > 0$, et kehtib implikatsioon

$$|\mu| \leqslant \delta \Rightarrow \mu V \subset U \tag{2.3}$$

(vrd. (2.2)). Väite (a) tõestuseks märgime, et kuna $x \in V$, siis $\mu x \in U$ iga skalaari μ korral, mis rahuldab tingimust $|\mu| \leqslant \delta$, s.t. U on neelav hulk.

Väite (b) kontrollimiseks rakendame seost (2.3) juhul $x = 0$. Sellele vastavalt leiame suvalise nulliümbruse U puhul nulliümbruse V ning moodustame hulga $W := \bigcup\{\mu V \mid |\mu| \leqslant \delta\}$. Seosest (2.3) tuleneb vahetult, et $W \subset U$. Seejuures on W nulliümbrus, kuna ta sisaldab nulliümbrust δV. Jääb veenduda, et W on tasakaalus hulk. Tõepoolest, iga $x \in W$ on esitatav kujul $x = \mu u$, kus $|\mu| \leqslant \delta$ ning $u \in V$, ja kui $|\alpha| \leqslant 1$, siis $|\alpha\mu| \leqslant |\mu| \leqslant \delta$, mistõttu $\alpha x = \alpha\mu u \in W$. ■

Järeldus 2.4. *Igas TVR-s on tasakaalus neelavatest hulkadest koosnev nulliümbruste baas.*

Tõestus. See järeldub vahetult lausest 2.3. ■

Järgnevalt tõestame selle peatüki **põhitulemuse**, mis kirjeldab vektorruumide topologiseerimist.

Teoreem 2.5. *Igas TVR-s X leidub nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ järgmiste omadustega:*
(**NB1**) *suvaliste $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$ korral leidub selline $V \in \mathfrak{B}$, et $V \subset V_1 \cap V_2$,*
(**NB2**) *iga $V \in \mathfrak{B}$ on tasakaalus,*
(**NB3**) *iga $V \in \mathfrak{B}$ on neelav,*
(**NB4**) *iga $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$.*
Vastupidi, kui vektorruumis X on määratud mittetühi alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}$ omadustega (**NB1**) - (**NB4**), *siis X on TVR, milles punkti $x \in X$ ümbruste baasiks on*

$$\mathfrak{B}_x := \{x + V \mid V \in \mathfrak{B}\}.$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X kõigi tasakaalus nulliümbruste süsteem. Järelduse 2.4 põhjal on $\mathfrak{B}$ nulliümbruste baas, samuti on selge, et tingimused (**NB2**) ja (**NB3**) on rahuldatud. Kuna tasakaalus hulkade ühisosa on tasakaalus ja antud punkti kahe ümbruse ühisosa on samuti selle punkti ümbrus, siis kehtib (**NB1**). Tingimus (**NB4**) tuleneb liitmise pidevusest: kuna $0+0 = 0$, siis iga $V \in \mathfrak{B}$ puhul leiduvad $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ omadusega $U_1+U_2 \subset V$ (vrd. (2.1)), ja tingimuse (**NB1**) kohaselt saame valida $U \in \mathfrak{B}$ nii, et $U \subset U_1 \cap U_2$, seega $U + U \subset V$.

Piisavus. Olgu vektorruumis X fikseeritud selline alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}$, mis rahuldab tingimusi (**NB1**) - (**NB4**). Näitame kõigepealt, et X on TR, kus $\mathfrak{B}_x := \{x + V \mid V \in \mathfrak{B}\}$ on punkti $x \in X$ ümbruste baas. Teiste sõnadega, peame veenduma, et $\mathfrak{B}_x$ *rahuldab teoreemi* 1.1 *tingimusi* (**B1**) - (**B3**).

Esiteks, kuna $V \in \mathfrak{B}$ on tasakaalus hulk, siis $0 \in V$ ja seega $x = x + 0 \in x + V$ iga $V \in \mathfrak{B}$ korral. *Teiseks,* kui $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$ on suvalised ning $V \in \mathfrak{B}$ on selline, et $V \subset V_1 \cap V_2$ (vrd. (**NB1**)), siis $x + V \subset x + V_1 \cap V_2 \subset (x + V_1) \cap (x + V_2)$.

Kolmandaks peame näitama, et iga $x \in X$ ja $W \in \mathfrak{B}_x$ puhul leidub selline $W' \in \mathfrak{B}_x$, et $W' \subset W$ ja suvalise $y \in W'$ jaoks leidub $Q \in \mathfrak{B}_y$ omadusega $Q \subset W$. Olgu $x \in X$ suvaline ja $W := x + V \in \mathfrak{B}_x$, kus $V \in \mathfrak{B}$. Vastavalt tingimusele (**NB4**) valime $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$ ja võtame $W' = x + U$. Siis $W' = x + 0 + U \subset x + U + U \subset x + V$, s.t. $W' \subset W$. Kui $y \in x + U$, siis $Q := y + U \subset x + U + U \subset x + V = W$.

Niisiis on vektorruum X TR, näitame, et *vektorruumi tehted on pidevad.*

Liitmise pidevus tuleneb vahetult tingimusest (**NB4**): suvalise $W := x + y + V \in \mathfrak{B}_{x+y}$ korral, kus $x, y \in X$ ning $V \in \mathfrak{B}$, valime $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$ ja tähistame $U_1 := x + U$ ja $U_2 := y + U$, seejuures $U_1 \in \mathfrak{B}_x$, $U_2 \in \mathfrak{B}_y$ ning $U_1 + U_2 \subset x + y + V = W$. Vastavalt seosele (2.1) tähendab see liitmise pidevust.

Skalaariga korrutamise pidevuse kontrollimiseks tõestame kõigepealt järgmise väite:

$$(^*) \qquad \forall U \in \mathfrak{B}\ \forall \lambda_0 \in \mathbb{K}\ \exists\, U_0 \in \mathfrak{B}\ : \lambda_0 U_0 \subset U.$$

Olgu $U \in \mathfrak{B}$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ suvalised. Peame silmas, et iga $E \subset X$ korral kehtib seos $2E \subset E + E$, seetõttu saame tänu tingimusele (**NB4**) leida $V^{(1)} \in \mathfrak{B}$ omadusega

$$2V^{(1)} \subset V^{(1)} + V^{(1)} \subset U.$$

Edasi leiame $V^{(2)} \in \mathfrak{B}$, et

$$2V^{(2)} \subset V^{(2)} + V^{(2)} \subset V^{(1)}, \text{ siis } 2^2 V^{(2)} \subset 2V^{(1)} \subset U$$

jne. Üldiselt võime iga $n \in \mathbb{N}$ korral valida $V^{(n)} \in \mathfrak{B}$ omadusega

$$2^n V^{(n)} \subset U.$$

Fikseerime $n \in \mathbb{N}$ nii, et $|\lambda_0| \leqslant 2^n$, ja tähistame $U_0 := V^{(n)}$. Hulga U tasakaalustatuse tõttu

$$\lambda_0 U_0 = \frac{\lambda_0}{2^n} 2^n V^{(n)} \subset \frac{\lambda_0}{2^n} U \subset U.$$

Väide $(^*)$ on tõestatud.

Võtame nüüd suvalised $x_0 \in X$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, olgu $W := \lambda_0 x_0 + V$ punkti $\lambda_0 x_0$ ümbrus, kus $V \in \mathfrak{B}$. Meie eesmärgiks on näidata, et leiduvad $\delta > 0$ ja $Q = x_0 + U_0 \in \mathfrak{B}_{x_0}$ omadusega

$$|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta \Rightarrow \lambda Q \subset W.$$

Vastavalt tingimusele (**NB4**) leiame nulliümbruse $U \in \mathfrak{B}$, et $U + U + U \subset V$. Rakendame väidet $(^*)$ ja fikseerime $U_0 \in \mathfrak{B}$ omadusega $\lambda_0 U_0 \subset U$. Seejuures võime eeldada, et

$$U_0 \subset U$$

(vajaduse korral võtame nulliümbruse U_0 asemel $U_1 \in \mathfrak{B}$ omadusega $U_1 \subset U_0 \cap U$, siis $\lambda_0 U_1 \subset \lambda_0 U_0 \subset U$). Edasi, kuna U on neelav hulk, siis saab valida $\delta \in (0, 1]$ nii, et

$$|\mu| \leqslant \delta \Rightarrow \mu x_0 \in U. \tag{2.4}$$

Olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ suvaline arv omadusega $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$ ja olgu x element punkti x_0 ümbrusest $x_0 + U_0$. Kuna $x - x_0 \in U_0 \subset U$ ja $|\lambda - \lambda_0| \leqslant 1$, siis hulga U tasakaalustatuse tõttu

$$(\lambda - \lambda_0)\,(x - x_0) \in (\lambda - \lambda_0)\,U \subset U.$$

Tänu eeldusele $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta$ kehtib (vrd. (2.4)) $(\lambda-\lambda_0)\,x_0\in U$ ja seose $x-x_0\in U_0$ tõttu

$$\lambda_0\,(x-x_0)\in\lambda_0 U_0\subset U.$$

Kokkuvõttes,

$$\begin{aligned}\lambda x-\lambda_0 x_0&=(\lambda-\lambda_0)\,(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)\,x_0+\lambda_0\,(x-x_0)\\&\subset U+U+U\subset V.\end{aligned}$$

Niisiis,

$$\forall W:=\lambda_0 x_0+V\in\mathfrak{B}_{\lambda_0 x_0}\;\exists Q:=x_0+U_0\;\exists\delta>0:|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta\Rightarrow\lambda Q\subset W,$$

seega on skalaariga korrutamine TVR-s X pidev iga $x_0\in X$ ja $\lambda_0\in\mathbb{K}$ korral (vrd. (2.2)). Teoreem on tõestatud. ■

Nulliümbruste baasi moodustamiseks on veel teisigi võimalusi. Ilmne on, et selle saab alati moodustada lahtistest alamhulkadest (põhjendada!)✠. Teisalt kehtib järgmine väide.

Lause 2.6. *Igas TVR-s on kinnistest taskaalus nulliümbrustest koosnev baas.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas omadustega (**NB1**) - (**NB4**). Tähistame $\mathfrak{B}_1:=\left\{\overline{V}\mid V\in\mathfrak{B}\right\}$. Allpool ülesandes 2.3 sõnastatud väite kohaselt on süsteemi $\mathfrak{B}_1$ elemendid kinnised tasakaalus hulgad, jääb üle veenduda, et ta on nulliümbruste baas. Kahtlemata on $\overline{V}$ iga $V\in\mathfrak{B}$ korral nulliümbrus. Valime suvalise nulliümbruse $W\subset X$ puhul sellise $V\in\mathfrak{B}$, et $V\subset W$. Tingimuse (**NB4**) põhjal saab leida $U\in\mathfrak{B}$ omadusega $U+U\subset V$. Näitame, et $\overline{U}\subset W$. Olgu $x\in\overline{U}$, siis $U\cap(x+U)\neq\varnothing$, mistõttu leidub $z\in U\cap(x+U)$. Seega $z=x+u,\ \ u\in U$ ja $z\in U$, järelikult $x=z-u\in U-U=U+U\subset V\subset W$. Niisiis, iga nulliümbruse W jaoks saab leida sellise $\overline{U}\in\mathfrak{B}_1$, et $\overline{U}\subset W$, s.t. $\mathfrak{B}_1$ on nulliümbruste baas TVR-s X. ■

Ülesanne 2.3. Tõestada, et tasakaalus hulga sulund TVR-s on tasakaalus hulk.
Ülesanne 2.4. Tõestada, et vektoralamruumi sulund TVR-s on vektoralamruum.

Nagu näitab järgmine lause, saab nulliümbruste baasi abil lihtsalt kirjeldada **topoloogilise vektorruumi eralduvust.**

Lause 2.7. *TVR-i X puhul on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *X on eralduv,*
(b) *iga nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ korral kehtib seos*

$$\bigcap\{V\mid V\in\mathfrak{B}\}=\{0\}\,; \tag{2.5}$$

(c) *leidub nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ omadusega* (2.5).

Tõestus. (a) $\Rightarrow$ (b) Kui X on eralduv ja $x\in X\diagdown\{0\}$, siis suvalise nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ korral leiduvad sellised $U,W\in\mathfrak{B}$, et $U\bigcap(x+W)=\varnothing$. Tähendab, $x\notin U$, mistõttu $x\notin\bigcap\{V\mid V\in\mathfrak{B}\}$. Seega kehtib seos (2.5).
(b) $\Rightarrow$ (c) on ilmne.

(c) $\Rightarrow$ (a) Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas omadusega (2.5), teoreemi 2.5 kohaselt võime eeldada, et $\mathfrak{B}$ rahuldab tingimusi (**NB1**) - (**NB4**). Kui $x, y \in X$ ning $x \neq y$, siis $x - y \notin \cap\{V \mid V \in \mathfrak{B}\}$, seega leidub $W \in \mathfrak{B}$, et $x - y \notin W$. Rakendame tingimust (**NB4**) ja leiame $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset W$. Osutub, et $(x + U) \cap (y + U) = \varnothing$: kui leiduks $z \in (x + U) \cap (y + U)$, siis $x - y = (z - y) - (z - x) \in U - U = U + U \subset W$, mis oleks vastuolus nulliümbruse W valikuga. ■

Me piirdume siin vaid ühe lihtsa näitega topoloogiliste vektorruumide kohta. Keerulisemaid näiteid vaatleme järgnevates peatükkides.

Näide 2.1. Lihtne on veenduda, et iga normeeritud ruum $(X, \|\ \|)$ on TVR. Olgu B selle ruumi ühikkera, s.t. $B := \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Vahetu kontroll näitab, et alamhulkade süsteem

$$\mathfrak{B} := \left\{ \frac{1}{n} B \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

rahuldab tingimusi (**NB1**) - (**NB4**). Teoreemi 2.5 kohaselt on X TVR.

3 Tõkestatud ja kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis

3.1 Tõkestatud ja täielikult tõkestatud alamhulgad

Tõkestatud hulgad TVR-s. Meenutame, et normeeritud ruumis $(X, \|\ \|)$ nimetatakse tõkestatuks alamhulka, milles norm on tõkestatud. Teiste sõnadega, alamhulk $E \subset X$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub mingi arv $M > 0$, et $E \subset MB$ (ehk $\frac{1}{M}E \subset B$), kus B on ühikkera. Niisiis on tõkestatud parajasti need alamhulgad, mis on *neelatavad ühikkera poolt* (vrd. art. 2.2). Lähtudes sellest ja pidades silmas, et hulgad λB, kus $\lambda > 0$, moodustavad nulliümbruste baasi normeeritud ruumis X (vrd. näide 2.1), defineerime järgnevalt tõkestatud hulgad topoloogilises vektorruumis.

Definitsioon. TVR-i X alamhulka E nimetatakse *tõkestatuks*, kui ta on neelatav iga nulliümbruse poolt ruumis X.

Lihtne on veenduda, et alamhulk $E \subset X$ on TVR-s X parajasti siis tõkestatud, kui ta on neelatav *nulliümbruste baasi iga elemendi* poolt, s.t. kui

$$\forall U \in \mathfrak{B}\ \exists\ \delta > 0 : |\mu| \leqslant \delta \Rightarrow \mu E \subset U \tag{3.1}$$

(kontrollida!)✠. Kui baas $\mathfrak{B}$ koosneb tasakaalus nulliümbrustest (teoreemi 2.5 põhjal selline baas leidub), siis võib tingimuse (3.1) asendada lihtsama tingimusega

$$\forall U \in \mathfrak{B}\ \exists\ \mu > 0 : \mu E \subset U \tag{3.2}$$

(põhjendada!)✠.

Täielikult tõkestatud hulgad. Definitsioon. TVR-i X alamhulka E nimetatakse *täielikult tõkestatuks* ehk *prekompaktseks*, kui iga nulliümbruse U korral leidub selline ***lõplik*** alamhulk $E_0 \subset X$, et $E \subset E_0 + U$.

Nii nagu tõkestatud hulkade defineerimisel, võime ka selles definitsioonis piirduda *nulliümbrustega baasist*. Niisiis, alamhulk E on täielikult tõkestatud TVR-s X parajasti siis, kui

$$\forall U \in \mathfrak{B}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X : E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)\,.$$

Tähelepanuväärne on, et täieliku tõkestatuse definitsioonis võime vajaduse korral eeldada, et $E_0 \subset E$. Kontrollime seda väidet.

Olgu $V \in \mathfrak{B}$ suvaline ja $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$. Kui $E \subset X$ on täielikult tõkestatud, siis leidub definitsiooni kohaselt selline $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, et $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (x_k + U)$. Seejuures võime eeldada, et $(x_k + U) \cap E \neq \varnothing$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral, olgu $z_k \in (x_k + U) \cap E$. Kuna $z_k \in x_k + U$, siis $x_k - z_k \in U$ ning

$$z_k + V \supset z_k + U + U \supset z_k + x_k - z_k + U = x_k + U\ \ (k = 1, \ldots, n)\,,$$

mistõttu $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (z_k + V)$, kus $E_0 := \{z_1, \ldots, z_n\} \subset E$.

Veendume, et *iga täielikult tõkestatud hulk* $E \subset X$ *on tõkestatud.* Olgu $V \in \mathfrak{B}$, valime vastavalt tingimusele (**NB4**) nulliümbruse $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$. Fikseerime lõpliku alamhulga $E_0 \subset X$ omadusega $E \subset E_0 + U$. Kuna E_0 on tõkestatud, siis saame valida $\delta > 0$ nii, et $\delta \leqslant 1$ ja $\delta E_0 \subset U$. Seega

$$\delta E \subset \delta E_0 + \delta U \subset U + U \subset V,$$

tähendab, E on tõkestatud.

Me formuleerime järgnevalt rea definitsioonidest **vahetult tulenevaid fakte:**
• iga lõplik alamhulk on täielikult tõkestatud (ja seega tõkestatud) (tõestada!)$\maltese$,
• (täielikult) tõkestatud alamhulga alamhulk on (täielikult) tõkestatud (tõestada!)$\maltese$,
• lõpliku arvu (täielikult) tõkestatud alamhulkade ühend on (täielikult) tõkestatud (tõestada!)$\maltese$,
• kui E on (täielikult) tõkestatud alamhulk, siis ka αE on iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral (täielikult) tõkestatud (tõestada!)$\maltese$,
• (täielikult) tõkestatud alamhulkade $E_1, \ldots, E_n$ summa $E_1 + \ldots + E_n$ on (täielikult) tõkestatud (tõestada!)$\maltese$.

Lisaks ülaltoodutele tõestame me veel **kaks tähtsat omadust.**

Lause 3.1. *Tõkestatud (täielikult tõkestatud) alamhulga $E \subset X$ sulund $\overline{E}$ on TVR-s X tõkestatud (täielikult tõkestatud).*

Tõestus. Tõestuseks kasutame sisalduvust $\lambda\overline{E} \subset \overline{\lambda E}$, mida on kerge vahetult kontrollida (vt. ülesanne 3.1)$\maltese$. Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest tasakaalus hulkadest (vrd. lause 2.6). Kui E on tõkestatud, siis iga $U \in \mathfrak{B}$ jaoks leidub $\mu > 0$ omadusega $\mu E \subset U$. Siit saamegi, et $\mu\overline{E} \subset \overline{\mu E} \subset \overline{U} = U$, s.t. $\overline{E}$ on tõkestatud.

Kui E on täielikult tõkestatud ning $x_1, \ldots, x_n \in X$ on sellised, et $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (x_k + U)$, siis, pidades silmas, et hulgad $x_k + U$ ja ka nende ühend $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (x_k + U)$ on kinnised (selgitada!)$\maltese$, saame sisalduvuse

$$\overline{E} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)} = \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)\,,$$

s.t. $\overline{E}$ on täielikult tõkestatud. ■

Lause 3.2. *TVR-i X alamhulk E on tõkestatud parajasti siis, kui iga selle hulga elementide jada (x_n) ning suvalise nulliks koonduva arvjada (λ_n) korral $\lambda_n x_n \to 0$ ruumis X.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $E \subset X$ tõkestatud alamhulk ja $\mathfrak{B}$ tasakaalus nulliümbrustest koosnev baas TVR-s X. Fikseeritud $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub siis $\lambda > 0$ omadusega $\lambda E \subset V$. Nulliks koonduva arvjada (λ_n) jaoks leiame $N \in \mathbb{N}$ nii, et $|\lambda_n| \leqslant \lambda$ iga $n > N$ puhul. Tänu nulliümbruse V tasakaalustatusele saame suvalise elementide jada (x_n) korral hulgast E seose

$$\lambda_n x_n \in \lambda_n E = \frac{\lambda_n}{\lambda} \lambda E \subset \frac{\lambda_n}{\lambda} V \subset V,$$

kui $n > N$. Niisiis, $\lambda_n x_n \to 0$.

Piisavus. Eeldame, et alamhulk E rahuldab tingimust

$$[x_n \in E \ \ (n \in \mathbb{N}), \lambda_n \to 0] \Rightarrow \lambda_n x_n \to 0,$$

ja oletame vastuväiteliselt, et E ei ole tõkestatud. Siis leidub selline (tasakaalus) nulliümbrus U, et $(\lambda E) \diagdown U \neq \varnothing$ iga $\lambda > 0$ korral, muuhulgas kehtib $E \diagdown (nU) \neq \varnothing$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Valime $z_n \in E \diagdown (nU)$ ja paneme tähele, et jada $\left(\frac{1}{n} z_n\right)$ ei koondu nulliks TVR-s X (kontrollida!)✠, kuigi $\frac{1}{n} \to 0$. Saime vastuolu eeldusega. ■

Ülesanne 3.1. Tõestada, et sisalduvus $\lambda \overline{E} \subset \overline{\lambda E}$ kehtib TVR-s X iga alamhulga E ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral.

3.2 Kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis

Meenutame, et topoloogilise ruumi alamhulk on kompaktne parajasti siis, kui iga selle hulga elementidest moodustatud pere sisaldab osapere, mis koondub selle hulga punktiks. Viimane tingimus on samaväärne kõigi selle hulga ultraperede koonduvusega (vt. lause 1.9).

Oma kogemustest meetriliste ruumide teoorias teame, et kompaktsus on tihedalt seotud täielikkuse mõistega. Seejuures ei ole täielikkus üldjuhul topoloogia abil kirjeldatav, tema defineerimiseks vajatakse nn. ühtlaste ruumide struktuuri, mis meetrilises ruumis on loomulikul viisil olemas. Saab veenduda, et ka igas topoloogilises vektorruumis on olemas loomulik nihke suhtes invariantne ühtlane struktuur. See võimaldab defineerida täielikud alamhulgad topoloogilises vektorruumis põhimõtteliselt samal viisil, kui meetrilises ruumis.

Definitsioon. TVR-i X elementide peret $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ nimetatakse *Cauchy pereks*, kui iga nulliümbruse U korral leidub selline $\alpha_0 \in \Gamma$, et

$$\alpha, \alpha' \geqslant \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha - x_{\alpha'} \in U.$$

Alamhulka $E \subset X$ nimetatakse *täielikuks*, kui tema elementide iga Cauchy pere koondub selle hulga mingiks elemendiks.

Siinkohal huvitab meid eeskätt täielikkuse seos kompaktsusega. Alustame järgmise lihtsalt tõestatava väitega.

Lause 3.3. *Kompaktne alamhulk E TVR-s X on täielikult tõkestatud.*

Tõestus. Eeldame, et $E \subset X$ on kompaktne, olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X selline nulliümbruste baas, mis koosneb lahtistest hulkadest. Fikseerime suvalise $V \in \mathfrak{B}$ ja moodustame alamhulkade süsteemi $\{x + V\}_{x \in E}$, see on hulga E lahtine kate. Vastavalt kompaktsuse definitsioonile leidub lõplik osakate $\{x_1 + V, \ x_2 + V, ..., \ x_n + V\}$. Seega

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V),$$

mis tähendabki, et E on täielikult tõkestatud. ■

Lause 3.4. *Kompaktne alamhulk E TVR-s X on täielik.*

Tõestus. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ Cauchy pere kompaktses alamhulgas E ja olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X nulliümbruste baas omadustega (**NB1**) - (**NB4**). Võtame suvalise $V\in\mathfrak{B}$ ja niisuguse $U\in\mathfrak{B}$, et $U+U\subset V$. Vastavalt Cauchy pere definitsioonile leidub $\alpha_0\in\Gamma$, et $x_\alpha-x_{\alpha'}\in U$, kui $\alpha,\alpha'\geqslant\alpha_0$. Hulga E kompaktsusest järeldub, et (x_α) sisaldab koonduva osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, olgu $x\in E$ selle osapere piirväärtus. Seega saab fikseerida $\beta_0\in\Delta$ omadusega

$$\beta\geqslant\beta_0\Rightarrow y_\beta-x\in U.$$

Osapere definitsioonist lähtudes võime leida $\beta_1\in\Delta$ nii, et

$$\forall\beta'\geqslant\beta_1\ \exists\ \alpha'\in\Gamma:\ \alpha'\geqslant\alpha_0,\ y_{\beta'}=x_{\alpha'}.$$

Võtame seejuures $\beta'\geqslant\beta_0,\beta_1$, siis $x_\alpha-x=x_\alpha-x_{\alpha'}+y_{\beta'}-x\in U+U\subset V$, tähendab, $x_\alpha\to x$. ■

Me leidsime kaks tarvilikku tingimust – täielikkus ja täielik tõkestatus – almhulga kompaktsuseks TVR-s. Järgnevas on meie eesmärgiks tõestada, et nimetatud tingimused on kompaktsuseks ka piisavad. Selleks vajame me kahte järgnevat lemmat.

Lemma 3.5. *Olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ultrapere mingis hulgas X. Kui $X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}X_k$, siis leidub selline $k_0\in\{1,\dots,n\}$, et (x_γ) on põhiliselt hulgas X_{k_0}.*

Tõestus. Vastuväiteline oletus

$$\exists\gamma_0\in\Gamma:\gamma\geqslant\gamma_0\Rightarrow x_\gamma\in\bigcap_{k=1}^{n}(X\diagdown X_k)$$

on vastuolus tõsiasjaga

$$\bigcap_{k=1}^{n}(X\diagdown X_k)=X\diagdown\bigcup_{k=1}^{n}X_k=\varnothing$$

(selgitada!)✠. ■

Lemma 3.6. *TVR-i X alamhulk E on täielikult tõkestatud parajasti siis, kui iga nulliümbruse $U\in\mathfrak{B}$ korral saab valida sellised $n\in\mathbb{N}$ ja alamhulgad $S_1,\dots,S_n\subset E$, et*

$$S_k-S_k\subset U\ \ (k=1,\dots,n)\ \ \textit{ja}\ E=\bigcup_{k=1}^{n}S_k. \tag{3.3}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et E on täielikult tõkestatud. Olgu $U\in\mathfrak{B}$, leiame $V\in\mathfrak{B}$ omadusega $V-V\subset U$. Vastavalt täieliku tõkestatuse definitsioonile valime sellise lõpliku alamhulga $\{x_1,\dots,x_n\}\subset E$, et $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(x_k+V)$, siis

$$(x_k+V)-(x_k+V)=V-V\subset U.$$

Seega, kui $S_k:=(x_k+V)\cap E$ iga $k=1,\dots,n$ korral, siis tingimused (3.3) on täidetud.

Piisavus. Olgu $U \in \mathfrak{B}$ fikseeritud, eelduse kohaselt leiduvad $S_1, \ldots, S_n \subset E$ omadustega (3.3), olgu $S_k \neq \varnothing$, kui $k = 1, \ldots, n$. Võtame suvaliselt $x_k \in S_k$, siis $S_k - x_k \subset S_k - S_k \subset U$ ehk $S_k \subset x_k + U$, mistõttu

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)\,,$$

s.t. E on täielikult tõkestatud. ■

Järgnevalt tõestame selle artikli põhitulemuse.

Teoreem 3.7. *Alamhulk E TVR-s X on kompaktne parajasti siis, kui ta on täielikult tõkestatud ja täielik.*

Tõestus. *Tarvilikkus* tuleneb lausetest 3.3 ja 3.4.

Piisavus. Olgu E täielik täielikult tõkestatud alamhulk TVR-s X, näitame (vrd. lause 1.9), et suvaliselt valitud ultrapere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ hulgas E on selles hulgas koonduv. Olgu U suvaline nulliümbrus ruumis X, lemma 3.6 kohaselt saame leida alamhulgad $S_1, \ldots, S_n$, et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k = E$ ning $S_k - S_k \subset U$. Valime vastavalt lemmale 3.5 arvu $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et (x_γ) on põhiliselt hulgas S_{k_0}, s.t.

$$\exists \gamma_0 \in \Gamma : \gamma \geqslant \gamma_0 \Rightarrow x_\gamma \in S_{k_0},$$

siis

$$\gamma, \gamma' \geqslant \gamma_0 \Rightarrow x_\gamma - x_{\gamma'} \in S_{k_0} - S_{k_0} \subset U.$$

Niisiis on (x_γ) Cauchy pere, seega vastavalt eeldusele koonduv hulgas E. ■

4 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid

Olgu Z meetriline ruum meetrikaga d. Alamhulga $E \subset Z$ sisepunktiks nimetatakse sellist punkti $x \in E$, mille jaoks leidub ümbrus $B(x,r) := \{z \in Z \mid d(x,z) < r\}$ omadusega $B(x,r) \subset E$. Kui alamhulk E koosneb ainult oma sisepunktidest, siis nimetatakse teda lahtiseks. Kõigi niiviisi defineeritud lahtiste hulkade süsteem τ_d on topoloogia hulgas Z, s.t. ta rahuldab topoloogia aksioome (**T1**) – (**T3**) (vt. art. 1.1). Seda topoloogiat nimetatakse meetrika d poolt määratud *meetriliseks topoloogiaks.*

Öeldakse, et topoloogilise ruumi X topoloogia τ on *metriseeruv*, kui hulgas X saab defineerida niisuguse meetrika d, et τ langeb kokku meetrika d poolt määratud meetrilise topoloogiaga. Sel juhul kerad $B(x, 1/n)$, kus $n \in \mathbb{N}$, moodustavad punkti x ümbruste baasi. Niisiis, *kui TR X on metriseeruv, siis igal punktil on olemas loenduv ümbruste baas.*

4.1 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid

TVR-i (X, τ) nimetame **metriseeruvaks**, kui tema topoloogia τ on metriseeruv. Eelpoolöeldu põhjal saab sellises TVR-s fikseerida loenduva nulliümbruste baasi. Me näitame järgnevalt, et
1) *topoloogiat τ määrava meetrika saab defineerida teatava üldistatud normi abil*, mida nimetatakse pseudonormiks, ja
2) *loenduva nulliümbruste baasi olemasolu eralduvas TVR-s garanteerib tema metriseeruvuse.*

Pseudonormid. Definitsioon. Olgu X vektorruum. Funktsiooni $|\ | : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ nimetatakse *pseudonormiks*, kui ta rahuldab tingimusi
(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$,
(ii) $|\lambda x| \leqslant |x|$, kui $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leqslant 1$,
(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Paneme tähele, et iga norm on pseudonorm (selgitada!)✠. Tähtsaim vahetu järeldus definitsioonist on, et seosega $d(x,y) := |x - y|$ on vektorruumis X määratud meetrika (kontrollida!)✠, kusjuures see on invariantne nihke suhtes:

$$d(x+z, y+z) = |(x+z) - (y+z)| = |x - y| = d(x,y).$$

Sellega defineeritud topoloogiat nimetame *pseudonormi $|\ |$ poolt määratud topoloogiaks.*

Lause 4.1. *Kui eralduvas TVR-s (X, τ) on loenduv nulliümbruste baas, siis saab tema topoloogia määrata pseudonormiga.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nulliümbruste baas TVR-s (X, τ). Vastavalt teoreemile 2.5 võime eeldada, et hulgad V_n on tasakaalus ja

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.1}$$

(põhjendada!)✠. Pseudonormi defineerimiseks tähistame iga ***lõpliku*** mittetühja alamhulga $J \subset \mathbb{N}$ korral

$$q_J := \sum_{k \in J} 2^{-k} \text{ ning } V_J := \sum_{k \in J} V_k.$$

Paneme tähele, et $0 < q_J < 1$ ja

$$q_J < 2^{-r} \Rightarrow r < \min\{l \mid l \in J\} \Rightarrow V_J \subset V_r. \tag{4.2}$$

Esimese implikatsiooni kehtivus on ilmne. Teise tõestamiseks eeldame, et J koosneb naturaalarvudest $k_1 < k_2 < ... < k_n$, ning võtame suvalise $r \in \mathbb{N}$ omadusega $r < k_1$. Tänu seosele (4.1)

$$\begin{aligned} V_r &\supset V_{r+1} + V_{r+1} \supset V_{k_1} + V_{k_1} \supset V_{k_1} + V_{k_1+1} + V_{k_1+1} \\ &\supset V_{k_1} + V_{k_2} + V_{k_2} \supset V_{k_1} + V_{k_2} + V_{k_2+1} + V_{k_2+1} \\ &\supset V_{k_1} + V_{k_2} + V_{k_3} + V_{k_3} \supset \ldots \supset \sum_{i=1}^{n} V_{k_i} = V_J. \end{aligned}$$

Defineerime nüüd ruumis X pseudonormi $|\ |$ järgmiselt. Olgu $|x| := 1$, kui $x \notin V_J$ kõigi lõplike alamhulkade $J \subset \mathbb{N}$ korral, vastupidisel juhul olgu

$$|x| := \inf\{q_J \mid x \in V_J\}. \tag{4.3}$$

Näitame, et funktsioon $|\ |$ rahuldab tõepoolest pseudonormi definitsiooni tingimusi (i) – (iii).

Tingimuse (i) põhjendamiseks paneme tähele, et ühelt poolt kehtib ilmselt $|0| = 0$ (selgitada!)✠, teisalt, kui $|x| = 0$, siis $x \in V_n$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral (vrd. (4.2)) ja tänu ruumi X eralduvusele on sel juhul $x = 0$ (vrd. lause 2.7). Tingimuse (ii) puhul on selge, et kui $|x| = 1$, siis $|\lambda x| \leqslant |x|$ iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral. Olgu $|x| < 1$. Kuna V_J kui lõpliku arvu tasakaalus hulkade V_k $(k \in J)$ summa on tasakaalus (kontrollida!)✠, siis eeldusel $|\lambda| \leqslant 1$ saame soovitud võrratuse

$$|\lambda x| = \inf\{q_J \mid \lambda x \in V_J\} \leqslant \inf\{q_J \mid x \in V_J\} = |x|.$$

Tingimuse (iii) kontrollimiseks võtame $x, y \in X$. Kui $|x| + |y| \geqslant 1$, siis on tingimus (iii) täidetud. Kui $|x| + |y| < 1$, siis valime $\varepsilon > 0$ selliselt, et $|x| + |y| + 2\varepsilon < 1$, ja seejärel (seosest (4.3) ning infiimumi definitsioonist lähtudes) lõplikud alamhulgad $J \subset \mathbb{N}$ ning $I \subset \mathbb{N}$ nii, et
1) $x \in V_J$ ja $q_J < |x| + \varepsilon$ ning
2) $y \in V_I$ ja $q_I < |y| + \varepsilon$.
Edasi leiame (üheselt määratud) lõpliku alamhulga $K \subset \mathbb{N}$ omadusega $q_K = q_J + q_I$ (veenduda hulga K olemasolus!)✠, sel juhul $V_J + V_I \subset V_K$ (selgitada!)✠. Seega $x + y \in V_K$, mistõttu $|x + y| \leqslant q_K = q_J + q_I < |x| + |y| + 2\varepsilon$. Kuna ε võib olla ükskõik kui väike positiivne arv, saamegi tingimuse $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Lõpuks jääb veel veenduda, et pseudonorm $|\ |$ määrab vektorruumis X esialgse topoloogia τ. Olgu d pseudonormiga $|\ |$ määratud meetrika ja olgu τ' selle meetrikaga (s.o. pseudonormiga $|\ |$) määratud topoloogia. Näitame, et $\tau = \tau'$, s.t. ühikkujutused

$$i\colon\ (X, \tau) \to (X, \tau') \quad \text{ja} \quad i^{-1}\colon\ (X, \tau') \to (X, \tau) \quad \text{on pidevad.}$$

Teatavasti moodustavad topoloogia τ' nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}'$ hulgad

$$B_\varepsilon := \{x \in X \mid |x| < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0),$$

veendume, et

$$B_{2^{-k}} \subset V_k \subset B_{2^{-(k-1)}} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{4.4}$$

Esimese sisalduvuse põhjendamiseks valemis märgime, et kui $x \in B_{2^{-k}}$, siis leidub selline $J \subset \mathbb{N}$, et $x \in V_J$ ja $q_J < 2^{-k}$, millest seoste (4.2) põhjal järeldub $x \in V_k$. Teine sisalduvus on ilmne: kui $x \in V_k$, siis funktsiooni $|\ |$ definitsioonist tuleneb $|x| \leqslant 2^{-k}$.

Olgu $B_\varepsilon \in \mathfrak{B}'$, võtame $k \in \mathbb{N}$ nii suure, et $2^{-(k-1)} < \varepsilon$, siis seostest (4.4) järeldub $V_k \subset B_\varepsilon$. Seega on $i\colon (X,\tau) \to (X,\tau')$ pidev kujutus. Olgu nüüd, vastupidi, fikseeritud mingi $V_n \in \mathfrak{B}$. Kui $\varepsilon < 2^{-n}$, siis $B_\varepsilon \subset V_n$, niisiis on ka kujutus $i^{-1}\colon (X,\tau') \to (X,\tau)$ pidev. Lause on tõestatud. ■

Teoreem 4.2. *Eralduva TVR-i (X,τ) korral on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *ruumis (X,τ) on loenduv nulliümbruste baas,*
(b) *topoloogia τ saab määrata pseudonormiga,*
(c) *topoloogia τ saab määrata nihete suhtes invariantse meetrikaga,*
(d) *topoloogia τ on metriseeruv.*

Tõestus. Implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (b) tuleneb vahetult lausest 4.1, ülejäänud implikatsioonide (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) kehtivus on selge. ■

Meetriliste ruumide teooria kõige tähelepanuväärsemad tulemused (Baire'i teoreem, Banachi püsipunktiprintsiip jt.) on seotud ***täielike*** meetriliste ruumidega. Eelmises peatükis toodud definitsiooni kohaselt on topoloogiline vektorruum täielik, kui iga tema elementidest moodustatud Cauchy pere on selles ruumis koonduv.

On selge, et Cauchy jadad (kui Cauchy perede eriliigi) saame defineerida igas TVR-s (X,τ): elementide jada (x_n) on Cauchy jada parajasti siis, kui iga nulliümbruse $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n - x_m \in V$ kõikide $m,n \geqslant N$ korral. Kui X on seejuures metriseeruv ning tema topoloogia on määratud nihke suhtes invariantse meetrikaga d, siis võime nulliümbruste baasiks $\mathfrak{B}$ võtta alamhulkade süsteemi

$$B_\delta := \{x \in X \mid d(x,0) < \delta\} \qquad (\delta > 0)\,.$$

Seetõttu (tänu seosele $d(x_n,x_m) = d(x_n - x_m, 0)$) on jada (x_n) Cauchy jada topoloogias τ parajasti siis, kui ta on meetrika d suhtes Cauchy jada, s.t. kui $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$ (kontrollida!)✠. Seega kehtib järgmine väide.

Lause 4.3. *Olgu (X,τ) eralduv TVR ja olgu d_1 ja d_2 nihke suhtes invariantsed meetrikad vektorruumis X, mis mõlemad määravad topoloogia τ. Neil meetrikatel on ühed ja samad Cauchy jadad ning meetrika d_1 on täielik parajasti siis, kui meetrika d_2 on täielik.*

Metriseeruva TVR-i täielikkuse kirjeldamiseks tõestame järgmise lause.

Lause 4.4. *Metriseeruv TVR X on täielik parajasti siis, kui tema topoloogia saab määrata täieliku nihke suhtes invariantse meetrikaga. Teisisõnu, metriseeruv TVR on täielik parajasti siis, kui iga tema Cauchy jada on selles ruumis koonduv.*

Tõestus. *Tarvilikkus* tuleneb sellest, et iga jada, mis on Cauchy jada vaadeldava meetrika mõttes, on Cauchy jada ka TVR-s X.

Piisavus. Olgu (X,τ) selline metriseeruv TVR, milles iga Cauchy jada on koonduv. Olgu $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ τ-nulliümbruste baas omadusega $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ suvaline Cauchy pere ruumis X, meie eesmärk on näidata, et (x_α) on koonduv ruumis X.

Vastavalt Cauchy pere definitsioonile saab iga $V_n \in \mathfrak{B}$ korral leida sellise $\alpha'_n \in \Gamma$, et kui $\alpha, \beta \geqslant \alpha'_n$, siis $x_\alpha - x_\beta \in V_n$. Moodustame indeksite jada (α_n) nii, et

$$\alpha_n \geqslant \alpha'_n \text{ ja } \alpha_n \geqslant \alpha_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})\,, \tag{4.5}$$

ning paneme tähele, et (x_{α_n}) on Cauchy jada: suvalise $V_m \in \mathfrak{B}$ korral valime $k, l \geqslant m$, siis $\alpha_k, \alpha_l \geqslant \alpha_m \geqslant \alpha'_m$, mistõttu $x_{\alpha_k} - x_{\alpha_l} \in V_m$. Et eelduse kohaselt on iga Cauchy jada koonduv, siis eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_n} =: x$. Näitame, et ka pere (x_α) koondub piirväärtuseks x.

Olgu $V_m \in \mathfrak{B}$. Kuna $x_{\alpha_n} \to x$, siis saab valida $n_0 \geqslant m+1$ nii, et $x_{n_0} - x \in V_{m+1}$. Võtame $\alpha \geqslant \alpha_{n_0}$, siis $\alpha \geqslant \alpha_{n_0} \geqslant \alpha_{m+1} \geqslant \alpha'_{m+1}$ (vrd. (4.5)), seega $x_\alpha - x_{\alpha_{n_0}} \in V_{m+1}$. Kokkuvõttes, kui $\alpha \geqslant \alpha_{n_0}$, siis

$$x_\alpha - x = \bigl(x_\alpha - x_{\alpha_{n_0}}\bigr) + \bigl(x_{\alpha_{n_0}} - x\bigr) \in V_{m+1} + V_{m+1} \subset V_m,$$

s.t. $x_\alpha \to x$. ■

Definitsioon. TVR-i X nimetatakse
1) *lokaalselt tõkestatuks,* kui tal leidub *tõkestatud* nulliümbrus, ja
2) *lokaalselt kompaktseks,* kui tal leidub *kompaktne* nulliümbrus.

Lokaalselt tõkestatud ruumide tüüpiliseks näiteks on normeeritud ruum, kuid peale nende leidub ka teisi (vt. art. 7.3, näide 7.2). Siinkohal märgime järgmist olulist fakti.

Lause 4.5. *Iga lokaalselt tõkestatud eralduv TVR on metriseeruv.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ Kasutada ülesannet 4.1. ■

Ülesanne 4.1. Näidata, et kui B on tõkestatud nulliümbrus TVR-s X, siis hulgad $r_n B$, kus $r_1 > r_2 > \ldots > r_n \ldots$ ja $r_n \to 0$, moodustavad ruumis X nulliümbruste baasi.

4.2 Lõplikumõõtmelised topoloogilised vektorruumid

Lõplikumõõtmeline vektorruum. Lokaalselt kompaktsed eralduvad topoloogilised vektorruumid osutuvad, nagu me peagi veendume, lõplikumõõtmelisteks. Meenutame (vt. sissejuhatus), et vektorruumi X nimetatakse n-mõõtmeliseks (kirjutame $\dim X = n$), kui tal leidub n elemendist koosnev baas, s.o. selline lineaarselt sõltumatu alamhulk $\{e_1, \ldots, e_n\}$, et iga element $x \in X$ on (üheselt) esitatav kujul $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, kus $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Kui vektorruumi X puhul see tingimus on mingi $n \in \mathbb{N}$ korral täidetud, siis öeldakse, et X on lõplikumõõtmeline ja märgitakse $\dim X < \infty$.

Eralduvad n-mõõtmelised TVR-d on omavahel isomorfsed. Teatavasti on lõplikumõõtmelises vektorruumis kõik normid ekvivalentsed. Järgmise lause kohaselt võib sedasama väita ka selliste eralduvate topoloogiate kohta, mis muudavad lõplikumõõtmelise vektorruumi topoloogiliseks vektorruumiks. Me tähistame sümboliga m_n kõigi n-mõõtmeliste vektorite $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ normeeritud ruumi, kus norm on defineeritud seosega $\|\xi\| := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|$. Olgu C selle normeeritud ruumi lahtine ühikkera, s.t. $C := \Bigl\{\xi \in m_n \mid \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| < 1\Bigr\}$.

Lause 4.6. *Olgu X suvaline n-mõõtmeline vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Kui τ on selline topoloogia, et (X,τ) on eralduv TVR, siis (X,τ) on isomorfne TVR-ga m_n, mis on defineeritud üle sama korpuse $\mathbb{K}$.*

Tõestus. Olgu $\{e_1, ..., e_n\}$ vektorruumi X baas. Näitame, et kujutus

$$T\colon m_n \to X, \quad \xi \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

korraldab TVR-de m_n ja X vahel isomorfismi. Ilmselt on T lineaarne ja bijektiivne (põhjendada!)✠. Liitmise ja skalaariga korrutamise pidevusest TVR-s X tuleneb kujutuse T pidevus: kui $\xi^{(\alpha)} \to 0_{m_n}$ (s.t. vektorite pere $\left(\xi^{(\alpha)}\right)_{\alpha\in\Gamma}$ koondub nullelemendiks 0_{m_n} ruumis m_n), siis iga $i \in \{1,\ldots,n\}$ korral $\xi_i^{(\alpha)} \to 0$, mistõttu $\xi_i^{(\alpha)} e_i \to 0e_i = 0_X$ ja seega

$$T\left(\xi^{(\alpha)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(\alpha)} e_i \to 0_X.$$

Pöördkujutuse T^{-1} pidevuse kontrollimiseks näitame, et leidub selline τ-nulliümbrus U, mille T^{-1} teisendab ruumi m_n ühikkerasse C, s.t. $U \subset T(C) = \{x \in X \mid \|T^{-1}(x)\| < 1\}$. Kuna T on pidev ja $\left\{\xi \in m_n \mid \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| = 1\right\}$ kui tõkestatud kinnine alamhulk (kontrollida!)✠ lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis m_n on kompaktne, siis $S := \{x \in X \mid \|T^{-1}(x)\| = 1\}$ on kompaktne ning seega kinnine ruumis (X,τ). Nullelement hulka S ei kuulu, seetõttu saab valida tasakaalus lahtise nulliümbruse U omadusega $U \cap S = \varnothing$. Osutub, et $U \subset T(C)$. Tõepoolest, kui oletada, et leidub mingi $x \in U \diagdown T(C)$, siis $\|T^{-1}(x)\| \geqslant 1$ ja $\frac{x}{\|T^{-1}(x)\|} \in S \cap U$ (põhjendada!)✠, mis on vastuolus nulliümbruse U valikuga. ■

Järeldus 4.7. *Eralduvas TVR-s (X,τ) on iga lõplikumõõtmeline vektoralamruum $Y \subset X$ kinnine.*

Tõestus. Olgu x alamruumi Y puutepunkt TVR-s X, moodustame $Y_0 := \operatorname{span}(Y \cup \{x\})$. Kuna $\dim Y_0 < \infty$, siis lause 4.6 põhjal on TVR $(Y_0, \tau|_{Y_0})$ isomorfne TVR-ga m_n mingi $n \in \mathbb{N}$ korral: leidub selline bijektiivne lineaarne kujutus $T\colon m_n \to (Y_0, \tau|_{Y_0})$, mis on pidev ja mille pöördkujutus on pidev. Tähistame $\xi := T^{-1}(x)$ ning $L := T^{-1}(Y)$, siis $m_n = \operatorname{span}(L \cup \{\xi\})$. Kui $\xi \in L$, siis $m_n = L$, vastasel juhul $m_n = L \oplus \langle\xi\rangle$, kuid igal juhul on L kinnine vektoralamruum normeeritud ruumis m_n. Kuna T on topoloogiline isomorfism, siis $Y = T(L)$ on kinnine TVR-s Y_0. Väite tõestuseks jääb näidata, et x on alamruumi Y puutepunkt ka TVR-s $(Y_0, \tau|_{Y_0})$, sel juhul $Y = Y_0$, s.t. $x \in Y$, mistõttu Y on kinnine TVR-s X.

Olgu U punkti x ümbrus TVR-s Y_0, siis leidub $V \subset X$, mis on punkti x ümbrus TVR-s X ja rahuldab tingimust $U = V \cap Y_0$ (selgitada!)✠, seejuures

$$U \cap Y = (V \cap Y_0) \cap Y = V \cap (Y_0 \cap Y) = V \cap Y.$$

Seega, kuna $x \in \overline{Y}$ ruumis X, siis $U \cap Y = V \cap Y \neq \varnothing$, järelikult $x \in \overline{Y}$ ka ruumis Y_0. ■

Lokaalselt kompaktne eralduv TVR on lõplikumõõtmeline. Funktsionaalanalüüsi kursusest teame, et *lõplikumõõtmelises* normeeritud ruumis on iga kinnine tõkestatud alamhulk (muuhulgas ka kinnine ühikkera) kompaktne. Seega on selline ruum lokaalselt kompaktne. Järgmine lause ütleb, et lokaalne kompaktsus on omane ainult lõplikumõõtmelistele topoloogilistele vektorruumidele.

Lause 4.8. *Iga lokaalselt kompaktne eralduv TVR X on lõplikumõõtmeline.*

Tõestus. Olgu V kompaktne nulliümbrus TVR-s X, üldisust kitsendamata võime eeldada, et V on tasakaalus (põhjendada!)✠. Kuna V on tõkestatud hulk, siis $\mathfrak{B} := \{2^{-n}V \mid n \in \mathbb{N}\}$ on nulliümbruste baas (vrd. ülesanne 4.1). Et V on täielikult tõkestatud (vrd. teoreem 3.7), siis saab valida sellised $x_1, \dots, x_m \in V$, et $V \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(x_i + \frac{1}{2}V\right) = \{x_1, \dots, x_m\} + \frac{1}{2}V$. Moodustame lõplikumõõtmelise vektoralamruumi $Y := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$ ja näitame, et $V \subset Y$, millest hulga V neelavuse tõttu tuleneb $X = Y$ (selgitada!)✠ ning järelikult ka $\dim X < \infty$.

Järelduse 4.7 kohaselt on Y kinnine alamruum TVR-s X, kusjuures $V \subset Y + \frac{1}{2}V$. Pidades silmas, et $\lambda Y = Y$ iga $\lambda \neq 0$ korral, saame seose $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$, seega

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Nii jätkates saame sisalduvuse

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + 2^{-n}V\right) =: Z.$$

Paneme tähele, et $Z \subset \overline{Y}$. Tõepoolest, kui $x \in Z$ ja $W := 2^{-n}V \in \mathfrak{B}$, siis $x \in Y + W$, mistõttu $x = y + w$, kus $y \in Y$ ja $w \in W$. Kuna $x - w \in (x + W) \cap Y$, siis punkti x iga ümbrus lõikab hulka Y, tähendab, $x \in \overline{Y}$. Niisiis, $V \subset Z \subset \overline{Y} = Y$. Lause on tõestatud. ■

4.3 Näiteid

Selle peatüki lõpetame kolme olulise näitega topoloogilistest vektorruumidest.

Näide 4.1. Olgu $C(\mathbb{C})$ kõigi komplekstasandil $\mathbb{C}$ pidevate funktsioonide hulk, s.t.

$$C(\mathbb{C}) := \{x = x(t) \mid x\colon \mathbb{C} \to \mathbb{K} \text{ on pidev}\}.$$

Ilmselt on $C(\mathbb{C})$ vektorruum, milles liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud punktiviisi: suvaliste $x, y \in C(\mathbb{C})$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ puhul $(x + y)(t) := x(t) + y(t)$ ja $(\lambda x)(t) := \lambda x(t)$. Tähistame

$$V_{n,i} := \{x \in C(\mathbb{C}) \mid |x(t)| \leqslant 1/i, \text{ kui } |t| \leqslant n\}$$

ja näitame, et alamhulkade süsteem $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ rahuldab tingimusi (**NB1**) – (**NB4**). Nende kontrollimiseks paneme kõigepealt tähele, et (kontrollida!)✠

$$n \leqslant m \Rightarrow V_{m,i} \subset V_{n,i} \quad (i \in \mathbb{N}) \quad \text{ja} \quad i \leqslant j \Rightarrow V_{n,j} \subset V_{n,i} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(**NB1**): Hulkade $V_{k,j}$ ja $V_{l,r}$ korral tähistame $n := \max\{k, l\}$ ning $i := \max\{j, r\}$, siis $V_{n,i} \subset V_{k,j} \cap V_{l,r}$.

(**NB2**): Kui $|\lambda| \leqslant 1$, siis iga $x \in V_{n,i}$ korral

$$|(\lambda x)(t)| = |\lambda|\,|x(t)| \leqslant |x(t)| \leqslant 1/i \quad (|t| \leqslant n),$$

s.t. $\lambda x \in V_{n,i}$. Tähendab, $V_{n,i}$ on tasakaalus hulk.

(**NB3**): Olgu $x \in C(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, tähistame $M := \max\{|x(t)| \mid |t| \leqslant n\}$ ja $\delta := \frac{1}{Mi}$ fikseeritud $V_{n,i} \in \mathfrak{B}$ korral. Siis

$$|(\delta x)(t)| = \frac{1}{Mi}\,|x(t)| \leqslant \frac{1}{i} \quad (|t| \leqslant n),$$

s.t. $\delta x \in V_{n,i}$. Seega on $V_{n,i}$ neelav hulk.
(**NB4**): Olgu $V_{n,i} \in \mathfrak{B}$ ja $U := V_{n,2i}$, siis $U + U \subset V_{n,i}$. Tõepoolest, kui $x, y \in U$, siis

$$|(x+y)(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = \frac{1}{i} \quad (|t| \leqslant n),$$

s.t. $x + y \in V_{n,i}$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $C(\mathbb{C})$ on TVR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}$. Kuna $\mathfrak{B}$ on loenduv süsteem ja $\bigcap \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\} = \{0\}$, siis $C(\mathbb{C})$ on metriseeruv. Vahetu kontroll näitab, et TVR $C(\mathbb{C})$ on täielik, s.t. iga tema Cauchy jada on koonduv.

Näide 4.2. Olgu $S[a,b]$ kõigi lõigus $[a,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike reaalsete väärtustega funktsioonide hulk. Kui peaaegu kõikjal lõplikud funktsioonid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ on mõõtuvad lõigus $[a,b]$, siis ka $x + y$ ja λx, kus $\lambda \in \mathbb{R}$, on peaaegu kõikjal lõplikud ja mõõtuvad. Teiste sõnadega, $S[a,b]$ on vektorruum. Lepime kokku, et me samastame selle ruumi punktidena funktsioonid, mis langevad kokku peaaegu kõikjal:

$$x = y :\Leftrightarrow \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid x(t) \neq y(t)\} = 0.$$

Tähistame

$$V_{n,i} := \{x \in S[a,b] \mid \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > 1/n\} < 1/i\} \quad (n, i \in \mathbb{N}),$$

siis (kontrollida!)✠

$$n \leqslant m \Rightarrow V_{m,i} \subset V_{n,i} \quad (i \in \mathbb{N}) \quad \text{ja} \quad i \leqslant j \Rightarrow V_{n,j} \subset V_{n,i} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Näitame, et süsteem $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ rahuldab tingimusi (**NB1**) – (**NB4**).
(**NB1**): Kui $V_{k,j}, V_{l,r} \in \mathfrak{B}$ ja $n := \max\{k, l\}$ ning $i := \max\{j, r\}$, siis $V_{n,i} \subset V_{k,j} \cap V_{l,r}$.
(**NB2**): Kui $|\lambda| \leqslant 1$, siis iga $x \in V_{n,i}$ korral

$$\{t \in [a,b] \mid |\lambda x(t)| > 1/n\} \subset \{t \in [a,b] \mid |x(t)| > 1/n\},$$

mistõttu

$$\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |\lambda x(t)| > 1/n\} \leqslant \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > 1/n\} < 1/i.$$

Tähendab, $\lambda x \in V_{n,i}$ ja seega $V_{n,i}$ on tasakaalus hulk.
(**NB3**): Olgu $x \in S[a,b] \setminus \{0\}$ ja $V_{n,i} \in \mathfrak{B}$ fikseeritud. Kuna $x = x(t)$ on peaaegu kõikjal lõplik funktsioon, siis leidub selline $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n_0\} < \frac{1}{i}$. Võtame $\delta := \frac{1}{nn_0}$, siis

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |\delta x(t)| > 1/n\} &= \operatorname{mes}\left\{t \in [a,b] \mid \frac{1}{nn_0}|x(t)| > 1/n\right\} \\ &= \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n_0\} < \frac{1}{i},\end{aligned}$$

järelikult $\delta x \in V_{n,i}$. Niisiis on hulk $V_{n,i}$ neelav.
(**NB4**): Tähistame hulga $V_{n,i}$ korral $U := V_{2n,2i}$. Osutub, et $U + U \subset V_{n,i}$. Tõepoolest, lähtudes suvaliste $x, y \in U$ korral seostest

$$\{t \in [a,b] \mid |x(t) + y(t)| > 1/n\} \subset \left\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > \frac{1}{2n}\right\} \cup \left\{t \in [a,b] \mid |y(t)| > \frac{1}{2n}\right\}$$

(paneme tähele, et kui $|x(t)| \leqslant \frac{1}{2n}$ ja $|y(t)| \leqslant \frac{1}{2n}$, siis $|x(t)+y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant 1/n$), saame mõõdu aditiivsuse tõttu

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)+y(t)| > 1/n\} \\
&\leqslant \operatorname{mes}\left\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > \frac{1}{2n}\right\} + \operatorname{mes}\left\{t \in [a,b] \mid |y(t)| > \frac{1}{2n}\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

ehk $x + y \in V_{n,i}$.

Kuna $\bigcap \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ (selgitada!)✠, siis kokkuvõttes oleme tõestanud, et $S[a,b]$ on metriseeruv TVR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}$. Lihtne on veenduda, et elementide jada (x_m) koondub nulliks TVR-s $S[a,b]$ parajasti siis, kui

$$\forall n, i \in \mathbb{N} \;\; \exists N \in \mathbb{N} : m \geqslant N \Rightarrow \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x_m(t)| > 1/n\} < \frac{1}{i}.$$

Viimane tingimus tähendab funktsioonide jada (x_m) koonduvust nulliks *mõõdu järgi*. Niisiis, *TVR-i $S[a,b]$ topoloogiline koonduvus langeb kokku funktsionaaljada mõõdu järgi koonduvusega lõigus $[a,b]$*.

Märgime, et ruumis $S[a,b]$ defineeritud topoloogia τ saab esitada teisel kujul. Defineerime selles vektorruumis veel topoloogia τ_0 pseudonormiga $|\;|$, kus

$$|x| := \int_a^b \frac{|x(t)|}{|x(t)|+1} dt \quad (x \in S[a,b]).$$

Kui (x_n) on elementide jada vektorruumis $S[a,b]$, siis, nagu näitab vahetu kontroll,

$$x_n \to 0 \text{ TVR-s } (S[a,b], \tau_0) \Leftrightarrow x_n(t) \to 0 \text{ mõõdu järgi } \Leftrightarrow x_n \to 0 \text{ TVR-s } (S[a,b], \tau).$$

Seetõttu on pidevad nii ühikkujutus $i\colon\ (S[a,b], \tau) \to (S[a,b], \tau_0)$ kui ka tema pöördkujutus $i^{-1}\colon\ (S[a,b], \tau_0) \to (S[a,b], \tau)$, mis tähendab, et TVR-d $(S[a,b], \tau)$ ja $(S[a,b], \tau_0)$ on isomorfsed ehk $\tau = \tau_0$. Osutub, et TVR $(S[a,b], \tau)$ (ja seega ka $(S[a,b], \tau_0)$) on täielik.

Näide 4.3. Olgu ω kõigi arvjadade $x = (x_k)$ hulk, s.t.

$$\omega = \{x = (x_k) \mid x_k \in \mathbb{K} \;\; (k \in \mathbb{N})\}.$$

Hulk ω on vektorruum, kui defineerida vektorruumi tehted selles hulgas koordinaaditi:

$$x + y := (x_k + y_k), \quad \lambda x := (\lambda x_k) \quad (x, y \in \omega, \; \lambda \in \mathbb{K}).$$

Tähistame

$$V_{n,i} := \left\{x \in \omega \mid |x_k| \leqslant \frac{1}{i} \quad (k = 1, ..., n)\right\}, \tag{4.6}$$

siis

$$m \leqslant n \Rightarrow V_{n,i} \subset V_{m,i} \quad (i \in \mathbb{N}) \quad \text{ja} \quad i \leqslant j \Rightarrow V_{n,j} \subset V_{n,i} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(veenduda!)✠. Vahetu kontroll näitab (vrd. ülesanne 4.2), et $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ on nulliümbruste baas mingis topoloogias τ_ω, kusjuures (ω, τ_ω) on meetriline TVR.

Ülesanne 4.2. Kontrollida, et seosega (4.6) määratud $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ rahuldab tingimusi (**NB1**) – (**NB4**).

Ülesanne 4.3. Tõestada, et TVR-s (ω, τ_ω) on koonduvus samaväärne koonduvusega koordinaatide järgi, s.t.

$$x^{(n)} \to 0 \text{ ruumis } (\omega, \tau_\omega) \Leftrightarrow x_k^{(n)} \to 0 \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Ülesanne 4.4. Tõestada, et TVR (ω, τ_ω) on täielik.

5 Kumerad hulgad ja poolnormid

5.1 Kumerad alamhulgad vektorruumis

Kumera hulga mõiste on algebraline ega sõltu topoloogiast. Sellest hoolimata mängivad kumerad hulgad topoloogiliste vektorruumide teoorias erakordselt tähtsat rolli.

Definitsioon. Vektorruumi X mittetühja alamhulka E nimetatakse *kumeraks*, kui iga elementide paari $x, y \in E$ puhul kõik elemendid $\lambda x + (1-\lambda)\, y$, kus $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, kuuluvad hulka E. Lisaks loeme ka tühja alamhulga kumeraks.

Tasakaalus kumerat hulka nimetatakse *absoluutselt kumeraks*.

Seega on alamhulk $E \subset X$ kumer parajasti siis, kui $\lambda E + (1-\lambda)\, E \subset E$ iga $\lambda \in [0,1]$ korral. Geomeetriliselt tähendab hulga E kumerus seda, et koos iga oma kahe punktiga x ja y sisaldab E ka neid punkte ühendava sirglõigu $\{\lambda x + (1-\lambda)\, y \mid \lambda \in [0,1]\}$ vektorruumis X.

Lause 5.1. *Vektorruumi X alamhulk E on absoluutselt kumer parajasti siis, kui $\lambda x + \mu y \in E$ iga elementide paari $x, y \in E$ ja arvude paari $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ korral, mis rahuldavad tingimust $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu E tasakaalus kumer hulk. Võtame punktid $x, y \in E$ ning arvud $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ omadusega $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$. Ilmselt $\lambda x + \mu y \in E$, kui üks arvudest λ ja μ on null (selgitada!)✠. Eeldame, et mõlemad arvud on nullist erinevad, sel juhul $\frac{\lambda}{|\lambda|}x,\ \frac{\mu}{|\mu|}y \in E$. Peale selle

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1,$$

millest hulga E kumeruse tõttu saame seose

$$\frac{1}{|\lambda| + |\mu|}\,(\lambda x + \mu y) = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}\,\frac{\lambda}{|\lambda|}x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\,\frac{\mu}{|\mu|}y \in E.$$

Kasutades veel kord asjaolu, et hulk E on tasakaalus, jõuame tänu võrratusele $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$ seoseni $\lambda x + \mu y \in (|\lambda| + |\mu|)\, E \subset E$.

Piisavus tuleneb vahetult vastavatest definitsioonidest (kontrollida!)✠. ■

Järgmised vaadeldavate mõistetega seotud omadused **järelduvad vahetult definitsioonidest:**

- kui vektorruumi X alamhulgad E_α on kumerad (absoluutselt kumerad), siis ka $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha$ on kumer (absoluutselt kumer) hulk suvalise indeksite hulga Γ puhul; kui alamhulgad E_1 ja E_2 on kumerad (absoluutselt kumerad), siis ka hulgad $E_1 + E_2$ ning δE_1 on kumerad (absoluutselt kumerad) suvalise $\delta \in \mathbb{K}$ korral (tõestada!)✠,
- kui $E \subset X$ on (absoluutselt) kumer ja $T : X \to Z$ lineaarne kujutus vektorruumist X vektorruumi Z, siis ka $T\,(E) \subset Z$ on (absoluutselt) kumer (tõestada!)✠.

Alamhulga (absoluutselt) kumer kate. Vektorruumi antud alamhulga puhul otsime vastust küsimusele, kuidas sellele (minimaalse hulga) elementide juurdelisamise teel konstrueerida kumer hulk. Niisuguse nn. kumera (vastavalt absoluutselt kumera) katte kirjeldamisel on lähtekohaks järgmine lemma.

Lemma 5.2. *Olgu E vektorruumi X alamhulk.*
(a) *Kui E on kumer ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, siis $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in E$ suvaliste punktide $x_1, \ldots, x_n \in E$ korral.*
(b) *Kui E on absoluutselt kumer ning $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on sellised skalaarid, et $|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leqslant 1$, siis $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in E$ suvaliste punktide $x_1, \ldots, x_n \in E$ korral.*

Tõestus. Esitame siinkohal väite (a) tõestuse, väide (b) tõestatakse analoogiliselt, mõlemal juhul kasutatakse matemaatilise induktsiooni meetodit. Juhul $n = 2$ väide ilmselt kehtib, sel juhul taandub ta kumera hulga definitsioonile. Oletame, et väide on õige, kui $n = m - 1$, ja näitame, et siis kehtib ta ka juhul $n = m$.

Olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$ ning $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, tähistame $\lambda := \lambda_1 + \ldots + \lambda_{m-1}$. Kui $\lambda = 0$, siis suvaliste $x_1, \ldots, x_m \in E$ puhul $\lambda_m = 1$ ning $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = \lambda_m x_m = x_m \in E$. Kui $\lambda \neq 0$, siis seose $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ tõttu

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in E$$

ning tänu hulga E kumerusele ja võrdusele $\lambda + \lambda_m = 1$ saame, et

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \lambda_m x_m \in E.$$

Seega on väide (a) tõestatud. ■

Definitsioon. Vektorruumi X mittetühja hulga E *kumeraks katteks* nimetatakse hulka

$$\operatorname{conv} E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1,\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Hulka

$$\operatorname{absconv} E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \ |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leqslant 1,\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

nimetatakse hulga E *absoluutselt kumeraks katteks.*

Ülesanne 5.1. Veenduda, et $E \subset \operatorname{conv} E \subset \operatorname{absconv} E \subset \operatorname{span} E$.

Märgime, et $\operatorname{conv} E$ on kumer ning $\operatorname{absconv} E$ on absoluutselt kumer hulk. Et veenduda näiteks hulga $\operatorname{conv} E$ kumeruses, võtame tema suvalised punktid $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ ja $y = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_m y_m$, kus

$$0 \leqslant \lambda_i, \mu_k \leqslant 1, \quad x_i, y_k \in E \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_k = 1.$$

Kui λ ja μ on mittenegatiivsed reaalarvud omadusega $\lambda + \mu = 1$, siis

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i x_i + \sum_{k=1}^{m} \mu \mu_k y_k,$$

kusjuures $\lambda\lambda_i \geqslant 0$, $\mu\mu_k \geqslant 0$ ja $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i + \sum\limits_{k=1}^{m} \mu\mu_k = \lambda + \mu = 1$. Niisiis, $\lambda x + \mu y \in \operatorname{conv} E$, mis tähendabki, et conv$E$ on kumer hulk.

Pole raske tõestada, et conv$E$ on ***vähim*** kumer hulk, mis sisaldab hulka E. Tõepoolest, kui F on kumer ja $E \subset F$, siis iga $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in \operatorname{conv}E$ puhul, kus

$$0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \quad x_i \in E \ \subset F \quad (i = 1, \ldots, n)\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

kehtib lemma 5.2(a) põhjal soovitud seos $x \in F$. Samamoodi veendutakse, et absconv$E$ on ***vähim*** absoluutselt kumer hulk, mis sisaldab hulka E.

Ülesanne 5.2. Näidata, et kui E on tasakaalus hulk vektorruumis X, siis ka conv$E$ on tasakaalus ja absconv$E$ = conv$E$.

Kumera hulga sulund on kumer. Siiani vaatlesime kumeraid ja absoluutselt kumeraid hulki suvalises vektorruumis. Näitame järgnevalt, et topoloogilises vektorruumis kanduvad alamhulga kumerus ja absoluutne kumerus üle ka tema sulundile.

Lause 5.3. *Kui E on TVR-i X kumer alamhulk, siis ka tema sulund $\overline{E}$ on kumer.*

Tõestus. Võtame $x, y \in \overline{E}$ ning $\lambda, \mu \in [0, 1]$, et $\lambda + \mu = 1$, ja tähistame $z := \lambda x + \mu y$. Liitmise pidevuse tõttu saab punkti z iga ümbruse V_z jaoks leida punktide λx ja μy ümbrused $V_{\lambda x} = \lambda x + U$ ja $V_{\mu y} = \mu y + V$ nii, et $V_{\lambda x} + V_{\mu y} \subset V_z$ ning U ja V on tasakaalus nulliümbrused TVR-s X. Eelduse kohaselt

$$(x + U) \cap E \neq \varnothing, \quad (y + V) \cap E \neq \varnothing,$$

seega leiduvad hulgas E punktid x' ja y', et $x' \in x + U$ ning $y' \in y + V$. Kuna E on kumer, siis $\lambda x' + \mu y' \in E$, teisalt (peame silmas, et $\lambda U \subset U$ ja $\mu V \subset V$)

$$\lambda x' + \mu y' \in (\lambda x + \lambda U) + (\mu y + \mu V) \subset (\lambda x + U) + (\mu y + V) \subset V_z.$$

Niisiis, $\lambda x' + \mu y' \in V_z \cap E \neq \varnothing$, mis ütlebki, et $z \in \overline{E}$. Seega on $\overline{E}$ kumer hulk. ■

Järeldus 5.4. *Absoluutselt kumera hulga sulund on absoluutselt kumer.*

Tõestus. Kui E on absoluutselt kumer hulk, siis $\overline{E}$ on kumer ja tasakaalus (vrd. ülesanne 2.3), seega absoluutselt kumer. ■

Olgu $E_1, \ldots, E_n$ absoluutselt kumerad hulgad vektorruumis X. Näitame, et

$$\operatorname{absconv} \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1,\, x_i \in E_i \right\}. \tag{5.1}$$

Tähistame parempoolse hulga seoses (5.1) tähega E, lihtne on näha, et $E \subset \operatorname{absconv} \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ (selgitada!)✠. Olgu $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$ hulga $\operatorname{absconv} \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ suvaline element, seega $\sum\limits_{k=1}^{m} |\lambda_k| \leqslant 1$ ja

$x_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, seejuures eeldame, et $x_k \neq 0$ ja $\lambda_k \neq 0$. Siis

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i x_j^i,$$

kus $x_j^i \in E_i$ ja λ_j^i on elemendi x_j^i kordaja summas $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$. Tähistame $\alpha_i := \sum\limits_{j=1}^{k_i} \left|\lambda_j^i\right|$ ning $z_i := \sum\limits_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_j^i}{\alpha_i} x_j^i$ (peame silmas, et $\alpha_i \neq 0$ iga $i = 1, \ldots, n$ puhul (selgitada!)✠), siis

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \left|\lambda_j^i\right| = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \leqslant 1$$

ja $z_i \in E_i$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral (kontrollida!)✠, seetõttu

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_j^i}{\alpha_i} x_j^i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \in E.$$

Valem (5.1) on tõestatud.

Lause 5.5. *Kui $E_1, \ldots, E_n$ on kompaktsed absoluutselt kumerad alamhulgad TVR-s X, siis on ka* absconv$\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ *kompaktne hulk.*

Tõestus. Vaatleme kõigi n-mõõtmeliste vektorite $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ Banachi ruumi ℓ_n^1, kus norm on defineeritud seosega $\|\lambda\| := \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, tema ühikkera

$$B := \left\{ \lambda \in \ell_n^1 \mid \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

on kompaktne alamhulk. Moodustame korrutisruumi $Z := \ell_n^1 \times X \times \ldots \times X$, milles TVR X esineb komponendina n korda. Kuna alamhulk $B \times E_1 \times \ldots \times E_n$ on Tihhonovi teoreemi (vt. art. 1.3) põhjal kompaktne korrutisruumis Z ning kujutus

$$\Phi\colon Z \to X, \quad ((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,\ x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

on pidev (kontrollida!)✠, siis kujutis $\Phi\,(B \times E_1 \times \ldots \times E_n)$ on kompaktne ruumis X. Tänu seosele (5.1) kehtib võrdus

$$\Phi\,(B \times E_1 \times \ldots \times E_n) = \operatorname{absconv} \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

(selgitada!)✠, seetõttu ongi absconv$\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ TVR-s X kompaktne hulk. ■

5.2 Poolnormid ja Minkowski funktsionaalid

Sublineaarne funktsionaal ja poolnorm. Kumerate hulkade analüütiliseks kirjeldamiseks kasutatakse spetsiaalseid reaalsete väärtustega funktsionaale.

Definitsioon. Olgu X vektorruum. Funktsionaali $p\colon X \to \mathbb{R}$ omadustega
1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ iga $x \in X$ ja $\lambda \geqslant 0$ korral,
2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ iga $x, y \in X$ korral
nimetatakse *sublineaarseks.* Kui funktsionaal p rahuldab tingimusi 2) ja
1') $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ iga $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral,
siis nimetatakse teda *poolnormiks.*

Ülesanne 5.3. Näidata, et
a) suvalise sublineaarse funktsionaali p puhul $p(0) = 0$ ja

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \max\{p(x-y), p(y-x)\} \quad (x, y \in X), \tag{5.2}$$

b) poolnormi p korral on $p(x) \geqslant 0$ iga $x \in X$ puhul ning

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y) \quad (x, y \in X),$$

c) kui p on poolnorm, siis $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ on vektoralamruum vektorruumis X.

Ülesanne 5.4. Näidata, et kui p on poolnorm, siis tema ühikkerad $\{x \in X \mid p(x) < 1\}$ ja $\{x \in X \mid p(x) \leqslant 1\}$ vektorruumis X on absoluutselt kumerad ja neelavad.

Hulga Minkowski funktsionaal. Definitsioon. Olgu U neelav alamhulk vektorruumis X. Funktsionaali

$$p_U\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\{\mu > 0 \mid x \in \mu U\}$$

nimetatakse hulga U *Minkowski funktsionaaliks.*

Ülesanne 5.5. Näidata, et $p_U(0) = 0$ ja $0 \leqslant p_U(x) < \infty$ iga $x \in X$ korral.

Minkowski funktsionaali kõige olulisemad ja tähelepanuväärsemad omadused formuleerime järgmises lauses.

Lause 5.6. *Olgu U vektorruumi X neelav alamhulk.*
(a) *Iga $x \in X$ ja $\lambda \geqslant 0$ korral $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$.*
(b) *Kui U on tasakaalus, siis $p_U(\lambda x) = |\lambda|\, p_U(x)$ iga $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral.*
(c) *Kui U on kumer, siis*

$$p_U(x+y) \leqslant p_U(x) + p_U(y) \quad (x, y \in X) \tag{5.3}$$

ning

$$\{x \in X \mid p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \in X \mid p_U(x) \leqslant 1\}. \tag{5.4}$$

Tõestus. (a) Kui $\lambda = 0$, siis $0 = p_U(0x) = 0 p_U(x)$. Juhul $\lambda > 0$ saame, et

$$p_U(\lambda x) = \inf\{\mu > 0 \mid \lambda x \in \mu U\} = \inf\left\{\mu > 0 \mid x \in \frac{\mu}{\lambda} U\right\}$$

$$= \lambda \inf \left\{ \frac{\mu}{\lambda} > 0 \mid x \in \frac{\mu}{\lambda} U \right\} = \lambda p_U(x) .$$

(b) Selge, et väide kehtib juhul $\lambda = 0$. Tasakaalus hulga U ja suvalise nullist erineva arvu λ korral kehtib seos $\lambda U = |\lambda| U$, seetõttu

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \inf \left\{ \mu > 0 \mid x \in \frac{\mu}{\lambda} U \right\} = \inf \left\{ \mu > 0 \mid x \in \frac{\mu}{|\lambda|} U \right\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{ \frac{\mu}{|\lambda|} > 0 \mid x \in \frac{\mu}{|\lambda|} U \right\} = |\lambda| p_U(x) \quad (x \in X) . \end{aligned}$$

(c) Eeldame, et U on kumer hulk. Kontrollime kõigepealt sisalduvusi (5.4). Kui $p_U(x) < 1$, siis saame leida $\mu \in (0,1)$ omadusega $x \in \mu U$ ehk $\frac{1}{\mu} x \in U$. Hulga U kumeruse tõttu $x = \mu \frac{1}{\mu} x + (1 - \mu) 0 \in U$ (peame silmas, et kuna U on neelav hulk, siis $0 \in U$), niisiis kehtib esimene sisalduvustest (5.4). Teise tõestuseks märgime, et kui $x \in U = 1U$, siis $p_U(x) \leqslant 1$.

Seose (5.3) tõestuseks fikseerime elemendid $x, y \in X$ ja arvu $\varepsilon > 0$ ning valime $\lambda > 0$ ning $\mu > 0$ nii, et

$$p_U(x) < \lambda < p_U(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad p_U(y) < \mu < p_U(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kuna $p_U(x) < \lambda$, siis $x \in \lambda U$ (selgitada!)✠ ehk $\frac{1}{\lambda} x \in U$, samuti $\frac{1}{\mu} y \in U$. Seejuures tänu hulga U kumerusele

$$\frac{1}{\lambda + \mu} (x + y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{y}{\mu} \in U.$$

Niisiis, $x + y \in (\lambda + \mu) U$, järelikult $p_U(x + y) \leqslant \lambda + \mu \leqslant p_U(x) + p_U(y) + \varepsilon$ iga $\varepsilon > 0$ korral, millest tulenebki (5.3). ∎

Lauses 5.6 toodud omadustest (a) – (c) tuleneb järgmine väide.

Järeldus 5.7. *Neelava kumera alamhulga $U \subset X$ Minkowski funktsionaal p_U on positiivne sublineaarne funktsionaal, kusjuures kehtivad sisalduvused* (5.4). *Kui U on sealjuures tasakaalus, siis p_U on poolnorm.*

Lause 5.8. *Olgu $p \colon X \to \mathbb{R}$ poolnorm ja $U := \{x \in X \mid p(x) \leqslant 1\}$. Siis hulga U Minkowski funktsionaal on p, s.t. $p_U = p$.*

Tõestus. Iseseisvalt.✠ ∎

Topoloogilises vektorruumis iseloomustab kumera neelava alamhulga **Minkowski funktsionaali pidevus** selle hulga topoloogilisi omadusi. Nende seoste täpsemaks kirjeldamiseks vajame järgmist lemmat.

Lemma 5.9. *Olgu X TVR. Kui sublineaarne funktsionaal $p \colon X \to \mathbb{R}$ on pidev punktis* 0, *siis on ta pidev ruumis X.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Funktsionaali p pidevuse tõttu punktis 0 leidub niisugune tasakaalus nulliümbrus V, et $|p(v)| \leqslant \varepsilon$ iga $v \in V$ puhul. Suvalise $x \in X$ puhul on $W := x + V$ tema ümbrus ning $x - z$ ja $z - x$ kuuluvad nulliümbrusse V iga $z \in W$ korral. Seega $|p(x) - p(z)| \leqslant \max\{p(x-z), p(z-x)\} \leqslant \varepsilon$ (vrd. (5.2)), mis tähendabki funktsionaali p pidevust punktis x. ■

Lemma 5.9 abil tõestame selle artikli **põhitulemuse.**

Teoreem 5.10. *TVR-i X neelav kumer alamhulk U on nulliümbrus parajasti siis, kui Minkowski funktsionaal p_U on pidev. Kui U on lahtine, siis kehtib seos $U = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}$, kui U on kinnine, siis $U = \{x \in X \mid p_U(x) \leqslant 1\}$.*

Tõestus. Eeldame, et U on kumer nulliümbrus TVR-s X, ning näitame, et p_U on pidev punktis 0, lemma 5.9 põhjal on ta sel juhul pidev kogu ruumis X. Tähistame suvalise $\varepsilon > 0$ korral $V := \varepsilon U$. Kuna V on nulliümbrus ja $p_U(x) = p_U(\varepsilon u) = \varepsilon p_U(u) \leqslant \varepsilon$, kus $x = \varepsilon u \in V$ ja $u \in U$ (vrd. (5.4)), siis p_U on pidev punktis 0.

Vastupidi, kui eeldada, et kumera neelava alamhulga U Minkowski funktsionaal p_U on pidev, siis ruumis $\mathbb{R}$ lahtise hulga $(-1,1)$ originaal $p_U^{-1}((-1,1))$ on lahtine. Seejuures (vrd. (5.4))

$$0 \in p_U^{-1}((-1,1)) = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\} \subset U,$$

niisiis on U nulliümbrus.

Kui eeldada, et U on lahtine, siis iga $x \in U$ on tema sisepunkt, mistõttu leidub nulliümbrus V omadusega $x + V \subset U$. Kuna V on neelav, siis saame valida $\delta > 0$ selliselt, et $\delta x \in V$, seega $(1+\delta)x = x + \delta x \in x + V \subset U$. Niisiis,

$$p_U(x) \leqslant \frac{1}{1+\delta} < 1 \text{ iga } x \in U \text{ puhul,}$$

s.t. $U \subset \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}$. Lause 5.6(c) põhjal järeldub siit, et vaadeldavad hulgad langevad kokku.

Kui U on kinnine ja $p_U(x) \leqslant 1$, siis iga $\mu \in (0,1)$ korral $p_U(\mu x) = \mu p_U(x) \leqslant \mu < 1$, s.t. $\mu x \in \{z \in X \mid p_U(z) < 1\} \subset U$. Moodustame pere $(\mu x)_{\mu \in (0,1)}$ ja paneme tähele, et $\mu x \to 1x = x$ tänu skalaariga korrutamise pidevusele TVR-s X. Kuna $\mu x \in U$ $(\mu \in (0,1))$, siis $x \in \overline{U} = U$. Me tõestasime sisalduvuse $\{x \in X \mid p_U(x) \leqslant 1\} \subset U$, kust lause 5.6(c) põhjal tuleneb nende hulkade võrdus. ■

6 Hahn-Banachi teoreem

6.1 Hahn-Banachi teoreem reaalse vektorruumi puhul

Kõigepealt lepime kokku kahe olulise tähistuse osas, mis puudutavad lineaarseid funktsionaale topoloogilises vektorruumis.

TVR-i kaasruum. Vektorruumi X *algebraliseks kaasruumiks* nimetatakse kõigi lineaarsete funktsionaalide $f\colon X \to \mathbb{K}$ hulka, seda tähistame edaspidi sümboliga X^*. Lihtne on veenduda, et X^* on vektorruum, kui funktsionaalide liitmine ja skalaariga korrutamine defineerida punktiviisi, s.t.

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad (\lambda f_1)(x) := \lambda f_1(x) \quad (f_1, f_2 \in X^*,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

(kontrollida!)✠.

Lineaarsete funktsionaalide pidevuse kontrollimiseks on kasulik järgmine lause.

Lause 6.1. *Lineaarne funktsionaal f TVR-s X on pidev parajasti siis, kui ruumis X leidub selline nulliümbrus V, milles f on tõkestatud, s.t.*

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ iga } x \in V \text{ korral.}$$

Tõestus. Olgu f lineaarne funktsionaal TVR-s X. Kui f on pidev punktis 0, siis pidevuse definitsiooni kohaselt leidub iga $\varepsilon > 0$ puhul selline nulliümbrus V, et $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ iga $x \in V$ korral. Seega on f nulliümbruses V tõkestatud.

Vastupidi, kui mingi nulliümbruse V jaoks leidub niisugune $M > 0$, et $|f(x)| \leqslant M$ iga $x \in V$ korral, siis tähistame fikseeritud $\varepsilon > 0$ puhul $U := \frac{\varepsilon}{M} V$ ning paneme tähele, et U on nulliümbrus TVR-s X. Iga $x = \frac{\varepsilon}{M} v \in V$ korral, kus $v \in V$, kehtib võrratus

$$|f(x)| = \frac{\varepsilon}{M} |f(v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Tähendab, f on pidev punktis 0, kuid siis on ta pidev kogu ruumis X (vrd. art. 2.1). ■

Kui X on TVR, siis kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $f\colon X \to \mathbb{K}$ hulka tähistame X' ning nimetame TVR-i X *topoloogiliseks kaasruumiks,* tavaliselt lihtsalt *kaasruumiks.* Selge, et $X' \subset X^*$, vahetu kontroll näitab, et X' on vektorruumi X^* vektoralamruum (veenduda!)✠.

Funktsionaali ahend ja jätk. Kui X_0 on vektorruumi X vektoralamruum ja $f_0 \in X_0^*$ (s.t. f_0 on lineaarne funktsionaal vektoralamruumis X_0), siis funktsionaali $f \in X^*$ omadusega

$$\forall x \in X_0 : f(x) = f_0(x)$$

nimetatakse funktsionaali f_0 *jätkuks* (vektorruumi X). Funktsionaali f_0 nimetatakse sel juhul funktsionaali f *ahendiks* alamruumis X_0, seda asjaolu märgime $f_0 = f|_{X_0}$.

Käesoleva ***peatüki eesmärgiks*** on tõestada Hahn-Banachi teoreem, millel topoloogiliste vektorruumide teoorias on võtmeroll. Seejuures vaatleme eraldi juhte $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teoreem 6.2 (***Hahn-Banachi teoreem juhul*** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**).** *Olgu X reaalne vektorruum ja X_0 tema vektoralamruum. Olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublineaarne funktsionaal. Kui funktsionaal $f_0 \in X_0^*$ rahuldab tingimust*

$$f_0(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X_0),$$

siis leidub selline $f \in X^*$, et

$$f(x) = f_0(x) \quad (x \in X_0) \quad \textit{ja} \quad f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Tõestuse *idee* on järgmine. Me vaatleme kõigi selliste järjestatud paaride (L, g) hulka $\mathcal{M}$, kus 1) $L \subset X$ on hulka X_0 sisaldav vektoralamruum ja 2) $g\colon L \to \mathbb{R}$ on funktsionaali f_0 niisugune jätk, mis rahuldab tingimust $g(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in L$ korral. Selles hulgas defineerime (loomulikul viisil) järjestuse ja veendume Zorni lemma abil, et ta sisaldab järjestuse suhtes maksimaalse elemendi (Y, h). Osutub, et $Y = X$ ja h ongi otsitav jätk f.

Niisiis, olgu $\mathcal{M}$ kõigi selliste järjestatud paaride (L, g) hulk, kus $L \subset X$ on hulka X_0 sisaldav vektoralamruum ja $g\colon L \to \mathbb{R}$ on selline lineaarne funktsionaal, et $g|_{X_0} = f_0$ ja $g(x) \leqslant p(x)$, kui $x \in L$. Kuna $(X_0, f_0) \in \mathcal{M}$, siis $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Defineerime hulgas $\mathcal{M}$ järjestuse seosega

$$(L, g) \geqslant (M, r) :\Leftrightarrow [L \supset M \text{ ja } g|_M = r]$$

(kontrollida järjestusaksioomide täidetust!)✠. Selle järjestuse suhtes leidub hulgas $\mathcal{M}$ maksimaalne element. Et selles veenduda, näitame, et iga täielikult järjestatud alamhulk $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ on ülalt tõkestatud.

Tähistame $L_0 := \bigcup\{L \mid (L, g) \in \mathcal{M}_0\}$ ja paneme tähele, et L_0 on vektoralamruum. Tõepoolest, kui $x, y \in L_0$, siis leiduvad paarid $(L, g), (M, r) \in \mathcal{M}_0$ omadusega $x \in L$, $y \in M$. Kuna paarid (L, g) ja (M, r) on järjestuse mõttes võrreldavad, siis on vektoralamruumid L ja M võrreldavad sisalduvuse mõttes. Olgu $M \subset L$, siis $x, y \in L$, mistõttu $x + y$, $\lambda x \in L \subset L_0$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ puhul. Seega on L_0 vektoralamruum. Edasi, kui $x \in L_0$, siis $x \in L$, kus (L, g) on hulga $\mathcal{M}_0$ mingi element. Defineerime funktsionaali

$$g_0\colon L_0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)$$

ja märgime, et $g_0(x)$ ei sõltu paari $(L, g) \in \mathcal{M}_0$ valikust: kui ka $(M, r) \in \mathcal{M}_0$ on selline, et $x \in M$, siis paaride (L, g) ja (M, r) võrreldavuse tõttu kehtib $g(x) = r(x)$. Funktsionaal g_0 on lineaarne, ta on funktsionaali f_0 jätk ja $g_0(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in L_0$ puhul. Seega on (L_0, g_0) hulga $\mathcal{M}_0$ ülemine tõke. Zorni lemma põhjal leidub hulgas $\mathcal{M}$ maksimaalne element (Y, h). Teoreemi tõestuse lõpuleviimiseks on vaja näidata, et $Y = X$, sel juhul h on otsitav jätk funktsionaalile f_0.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in X \diagdown Y$, ja moodustame hulga

$$Y_1 := \{x = \lambda x_0 + y \mid \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y\}.$$

See on vektorruumi X vektoralamruum, kusjuures iga $x \in Y_1$ korral on tema komponendid λ ja y üheselt määratud. Tõepoolest, kui $x = \lambda x_0 + yx = \lambda' x_0 + y'$, siis $(\lambda - \lambda') x_0 + (y - y') = 0$ ja eeldusel $\lambda \neq \lambda'$ saaksime $x_0 = (\lambda - \lambda')^{-1}(y - y') \in Y$. Näitame, et $Y_1 = Y$, see tähendabki seost $Y = X$.

Olgu $y', y'' \in Y$, siis

$$h(y') + h(y'') = h(y' + y'') \leqslant p(y' + y'') \leqslant p(x_0 + y') + p(y'' - x_0)$$

ehk
$$h(y'') - p(y'' - x_0) \leqslant -h(y') + p(x_0 + y').$$
Seega kehtib võrratus
$$A := \sup_{y'' \in Y} (h(y'') - p(y'' - x_0)) \leqslant \inf_{y' \in Y} (-h(y') + p(x_0 + y')) =: B.$$
Võtame suvalise $t_0 \in [A, B]$ ja defineerime alamruumis Y_1 funktsionaali h_1 seosega
$$h_1(x) := \lambda t_0 + h(y) \qquad (x = \lambda x_0 + y \in Y_1).$$
Paneme tähele, et $h_1 \in Y_1^*$: kui $x_1 = \lambda_1 x_0 + y_1$ ja $x_2 = \lambda_2 x_0 + y_2$ on hulgast Y_1, siis
$$x_1 + x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) x_0 + (y_1 + y_2), \; \mu x_1 = (\mu\lambda_1) x_0 + (\mu y_1),$$
mistõttu
$$\begin{aligned} h_1(x_1 + x_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2) t_0 + h(y_1 + y_2) \\ &= \lambda_1 t_0 + h(y_1) + \lambda_2 t_0 + h(y_2) = h_1(x_1) + h_2(x_2), \\ h_1(\mu x_1) &= \mu\lambda_1 t_0 + h(\mu y_1) = \mu(\lambda_1 t_0 + h(y_1)) = \mu h_1(x_1). \end{aligned}$$
Ilmselt $h_1|_Y = h$, näitame, et $h_1(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in Y_1$ puhul. Selleks vaatleme eraldi kolme juhtu:
1) $\lambda = 0$, s.t. $x \in Y$, siis $h_1(x) = h(x) \leqslant p(x)$;
2) $\lambda > 0$, siis
$$\begin{aligned} h_1(x) &= \lambda t_0 + h(y) \leqslant \lambda B + h(y) \leqslant \lambda \left(-h\left(\frac{y}{\lambda}\right) + p\left(x_0 + \frac{y}{\lambda}\right)\right) + h(y) \\ &= \lambda\left(-\frac{1}{\lambda} h(y) + \frac{1}{\lambda} p(\lambda x_0 + y)\right) + h(y) = p(\lambda x_0 + y) = p(x); \end{aligned}$$
3) $\lambda < 0$, siis
$$\begin{aligned} h_1(x) &= \lambda t_0 + h(y) \leqslant \lambda A + h(y) \\ &\leqslant \lambda\left(h\left(-\frac{y}{\lambda}\right) - p\left(-x_0 - \frac{y}{\lambda}\right)\right) + h(y) \quad [\text{tähistame } \mu := -\lambda] \\ &= -\mu\left(h\left(\frac{y}{\mu}\right) - p\left(-x_0 + \frac{y}{\mu}\right)\right) + h(y) \\ &= -\mu\left(\frac{1}{\mu} h(y) - \frac{1}{\mu} p(-\mu x_0 + y)\right) + h(y) \\ &= p(\lambda x_0 + y) = p(x). \end{aligned}$$
Niisiis, $(Y_1, h_1) \in \mathcal{M}$. Kui oletada, et leidub $x_0 \in Y_1 \diagdown Y$, siis $(Y_1, h_1) \gneqq (Y, h)$, mis oleks vastuolus elemendi (Y, h) maksimaalsusega. Järelikult $Y = X$ ning teoreem on tõestatud. ∎

Järeldus 6.3. *Olgu X reaalne vektorruum. Iga sublineaarse funktsionaali $p \colon X \to \mathbb{R}$ puhul leidub selline funktsionaal $f \in X^*$, et $f(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in X$ korral.*

Tõestus. Tõestuseks võtame $X_0 := \{0\}$ ja rakendame Hahn-Banachi teoreemi. ∎

6.2 Hahn-Banachi teoreem komplekse vektorruumi puhul

Kui X on vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$, siis mõistame me skalaariga korrutamise all selles ruumis kompleksarvudega korrutamist. Jättes liitmise ruumis X samaks, kuid rakendades skalaaridega korrutamisel ainult reaalarve, saame reaalse vektorruumi, mille me tähistame $X_{\mathbb{R}}$. Hulkadena (ja Abeli rühmadena) langevad X ning $X_{\mathbb{R}}$ kokku, vektorruumidena on nad erinevad. Näiteks suvalise $x \in X \diagdown \{0\}$ korral on $\mathrm{i}x$ mõlema vektorruumi element, kuid ruumis $X_{\mathbb{R}}$ ei ole ta elemendi x kordne. Selliselt konstrueeritud reaalset vektorruumi vajame me järgneva teoreemi tõestamisel.

Teoreem 6.4 (***Hahn-Banachi teoreem juhul*** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)**.** *Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ja olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ mingi poolnorm. Olgu $X_0 \subset X$ vektoralamruum ning $f_0 \in X_0^*$ omadusega*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in X_0).$$

Siis leidub selline $f \in X^*$, et

$$f(x) = f_0(x) \quad (x \in X_0) \text{ ja } |f(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Vaatleme algul juhtu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Kuna $f_0(x) \leqslant |f_0(x)| \leqslant p(x)$, kui $x \in X_0$, siis teoreemi 6.2 põhjal saame leida $f \in X^*$, mis on funktsionaali f_0 jätk ning rahuldab tingimust $f(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in X$ korral. Paneme tähele, et $f(x) = -f(-x) \geqslant -p(-x) = -p(x)$ ehk $-p(x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$, seega $|f(x)| \leqslant p(x)$ iga $x \in X$ puhul.

Olgu nüüd X *kompleksne* vektorruum. Tähistame $\varphi_0(x) := \operatorname{Re} f_0(x)$, siis

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \operatorname{Re} f_0(x) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x) - \mathrm{i} \operatorname{Re}(\mathrm{i} f_0(x)) \\ &= \operatorname{Re} f_0(x) - \mathrm{i} \operatorname{Re}(f_0(\mathrm{i}x)) = \varphi_0(x) - \mathrm{i}\varphi_0(\mathrm{i}x) \quad (x \in X_0). \end{aligned}$$

Eelduse kohaselt

$$|\varphi_0(x)| = |\operatorname{Re} f_0(x)| \leqslant |f_0(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in X_0).$$

Väite esimese osa põhjal saame funktsionaalile $\varphi_0 : X_{0\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ leida jätku $\varphi : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ omadusega $|\varphi(x)| \leqslant p(x)$, kui $x \in X$. Moodustame lineaarse funktsionaali

$$f : X \to \mathbb{C}, \ \ x \mapsto \varphi(x) - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x)$$

ja märgime, et $f(x) = f_0(x)$ iga $x \in X_0$ korral.

Jääb veenduda, et $|f(x)| \leqslant p(x)$ kõikide $x \in X$ puhul. Kuna $\left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} \mid f(x) \neq 0 \right\}$ sisaldub hulgas $\left\{ e^{\mathrm{i}t} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, mis on ühikringjoon komplekstasandil $\mathbb{C}$, siis saab iga fikseeritud $x \in X$ korral leida niisuguse $t \in \mathbb{R}$, et $e^{\mathrm{i}t} f(x) = |f(x)|$ (juhul $f(x) = 0$ võib t olla suvaline). Seega $f\left(e^{\mathrm{i}t}x\right) = e^{\mathrm{i}t} f(x) \in \mathbb{R}$ ning järelikult

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{\mathrm{i}t} f(x) = f\left(e^{\mathrm{i}t}x\right) = \varphi\left(e^{\mathrm{i}t}x\right) \leqslant p\left(e^{\mathrm{i}t}x\right) \\ &= \left|e^{\mathrm{i}t}\right| p(x) = p(x) \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud. ∎

6.3 Eraldamisteoreemid

Hüpertasand ja poolruumid TVR-s. Olgu X reaalne vektorruum ning $f \in X^* \setminus \{0\}$. Tähistame reaalarvu α puhul

$$[f = \alpha] := \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}, \quad [f \leqslant \alpha] := \{x \in X \mid f(x) \leqslant \alpha\},$$

samal põhimõttel defineerime ka hulgad $[f \geqslant \alpha]$, $[f < \alpha]$, $[f > \alpha]$. Hulka $H := [f = \alpha]$ nimetatakse (funktsionaaliga f ja skalaariga α määratud) *hüpertasandiks.* Kuna $f \neq 0$, siis $H_0 := [f = 0] \neq X$, seose

$$H = z + H_0, \text{ kus } z \in H,$$

tõttu saame, et $H \neq X$ (veenduda!)✠.

Iga hüpertasand määrab nn. *poolruumid* $[f \leqslant \alpha]$ ja $[f \geqslant \alpha]$ ning *ranged poolruumid* $[f < \alpha]$ ja $[f > \alpha]$. Öeldakse, et hüpertasand $[f = \alpha]$ *eraldab alamhulgad* A ja B vektorruumis X, kui kehtib kas võrratus $A \subset [f \leqslant \alpha]$ ja $B \subset [f \geqslant \alpha]$ või $B \subset [f \leqslant \alpha]$ ja $A \subset [f \geqslant \alpha]$. Kui selles definitsioonis on poolruumid võimalik asendada rangete poolruumidega, siis öeldakse, et hüpertasand *eraldab hulgad A ja B rangelt.*

Edaspidi ütleme ka, et *funktsionaal* $f \in X^* \setminus \{0\}$ *eraldab (rangelt) hulgad* A ja B, mõeldes seejuures, et hüpertasand $[f = \alpha]$ mingi $\alpha \in \mathbb{R}$ korral eraldab (rangelt) A ja B.

Topoloogilises vektorruumis on probleem püstitatud teravamalt: *millistel tingimustel saab mittelõikuvaid alamhulki eraldada* ***pidevate*** *lineaarsete funktsionaalidega?* Nagu näitab järgmine lause, tähendab see alamhulkade eraldamist ***kinniste*** hüpertasanditega.

Lause 6.5. *Reaalses TVR-s X on hüpertasand $H = [f = \alpha]$ kas kinnine või tihe, s.t. kas $\overline{H} = H$ või $\overline{H} = X$. Seejuures on H kinnine parajasti siis, kui f on pidev.*

Tõestus. Pideva funktsionaali f korral on H kinnine, s.t. $H = \overline{H}$ (kontrollida!)✠.

Näitame, et kui $f \in X^* \setminus X'$, siis $\overline{H_0} = X$, seega suvalise $z \in H$ korral

$$\overline{H} = \overline{z + H_0} = z + \overline{H_0} = z + X = X$$

(selgitada!)✠. Kuna f ei ole pidev punktis 0, siis saame valida sellise pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ ja $\varepsilon > 0$, et $x_\alpha \to 0$, kuid $|f(x_\alpha)| > \varepsilon$ iga $\alpha \in \Gamma$ korral (selgitada!)✠. Olgu $x \in X$ suvaline, võtame $w_\alpha := x - \frac{f(x)}{f(x_\alpha)} x_\alpha$, siis $w_\alpha \in H_0$ ja $w_\alpha \to x$ ruumis X (kontrollida!)✠. See tähendabki, et $\overline{H_0} = X$. ■

Hahn-Banachi teoreemi tegelik tähendus topoloogiliste vektorruumide teoorias ilmneb **eraldamisteoreemides**. Arvukatest eraldamisteoreemidest tõestame siinkohal teoreemi 6.7, mis ilmekalt demonstreerib Hahn-Banachi teoreemi rolli seda tüüpi teoreemide tõestustes. Lause tõestamiseks vajame järgmist lemmat.

Lemma 6.6. *Kui G on TVR-i X lahtine alamhulk, siis iga $f \in X^* \setminus \{0\}$ korral on kujutishulk $f(G)$ lahtine ruumis $\mathbb{K}$.*

Tõestus. Olgu $\alpha \in f(G)$ suvaline punkt, näitame, et ta on sisepunkt. Selleks leiame sellise $\lambda > 0$, et punkti α ümbrus

$$\{\alpha + \mu \mid |\mu| \leqslant \lambda\}$$

sisaldub hulgas $f(G)$.

Olgu $x \in G$ omadusega $f(x) = \alpha$. Kuna

$$0 = x - x \in G - x \text{ ja } G - x \text{ on lahtine hulk}$$

(põhjendada!)✠, siis $G - x$ on nulliümbrus TVR-s X. Edasi, kuna $f \neq 0$, siis saab valida $x_0 \in X$ omadusega $f(x_0) = 1$. Nulliümbrus $G - x$ neelab punkti x_0 :

$$\exists \lambda > 0 : |\mu| \leqslant \lambda \Rightarrow \mu x_0 \in G - x.$$

Seega, kui $|\mu| \leqslant \lambda$, siis $\mu = f(\mu x_0) \in f(G - x) = f(G) - f(x)$ ehk $\alpha + \mu = f(x) + \mu \in f(G)$, mis tähendabki, et $\{\alpha + \mu \mid |\mu| \leqslant \lambda\} \subset f(G)$. ■

Teoreem 6.7. *Olgu E ja G TVR-i X kumerad alamhulgad. Eeldame, et $E \cap G = \varnothing$ ning G on lahtine. Siis leiduvad sellised $f \in X'$ ja reaalarv t, et*

$$\operatorname{Re} f(z) < t \leqslant \operatorname{Re} f(y) \quad \textit{iga } z \in G \quad \textit{ja } y \in E \textit{ korral.}$$

Tõestus. Märgime kõigepealt, et piisab, kui tõestame väite juhul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nimelt võib juhul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ iga $f \in X^*$ esitada kujul

$$f(x) = \varphi(x) - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x) \quad (x \in X),$$

kus $\varphi(x) \in \mathbb{R}$, ning f on pidev parajasti siis, kui φ on pidev. Käesoleva väite tõestamiseks tulebki meil tegelikult kontrollida $\varphi = \operatorname{Re} f$ olemasolu.

Valime vabalt punktid $z_0 \in G$ ja $y_0 \in E$ ning tähistame $x_0 := y_0 - z_0$ ja $C := G - E + x_0$. Siis

1) C on kumer,
2) C on lahtine, sest $C = \bigcup \{G - u + x_0 \mid u \in E\}$ ja G on lahtine,
3) $x_0 \notin C$, sest vastasel korral $0 \in G - E$, mis on võimalik vaid siis, kui $G \cap E \neq \varnothing$,
4) $0 = -x_0 + x_0 \in G - E + x_0$.

Seega on C lahtine kumer nulliümbrus TVR-s X, järelduse 5.7 ja teoreemi 5.10 põhjal on tema Minkowski funktsionaal $p := p_C$ pidev positiivne sublineaarne funktsionaal, seejuures $p(x_0) \geqslant 1$ (vrd. 3)). Moodustame vektoralamruumi $X_0 := \{x = \lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ja defineerime selles lineaarse funktsionaali

$$f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R},\ \lambda x_0 \mapsto \lambda.$$

Osutub, et $f_0(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in X_0$ puhul. Tõepoolest, juhul $\lambda \geqslant 0$ on

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda \leqslant \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0),$$

juhul $\lambda < 0$ saame, et $f_0(\lambda x_0) = \lambda < p(\lambda x_0)$. Rakendades nüüd Hahn-Banachi teoreemi 6.2, jätkame funktsionaali f_0 lineaarselt kogu ruumi X nii, et jätk $f \in X^*$ rahuldaks tingimust $f(x) \leqslant p(x)$ iga $x \in X$ korral. Seejuures $f \in X'$. Et selles veenduda, paneme tähele, et $V := C \cap (-C)$ on nulliümbrus TVR-s X. Kuna $f(x) \leqslant p(x) < 1$, kui $x \in C$, siis $f(x) > -1$, kui $x \in (-C)$, seega $|f(x)| < 1$ iga $x \in V$ korral, lausest 6.1 saame funktsionaali f pidevuse.

Olgu nüüd $z \in G$ ja $y \in E$ suvalised elemendid, siis

$$f(z) - f(y) + 1 = f(z - y + x_0) \leqslant p(z - y + x_0) < 1,$$

sest $z - y + x_0 \in C$. Niisiis, $f(z) < f(y)$ suvaliste $z \in G$ ja $y \in E$ puhul. Kuna G on lahtine TVR-s X, siis on kujutishulk $f(G)$ lahtine reaalarvude ruumis $\mathbb{R}$ (vrd. lemma 6.6). Seepärast

$$f(z) < t \leqslant f(y) \qquad (z \in G,\ y \in E),$$

kus $t := \sup\{f(z) \mid z \in G\}$. Teoreem on tõestatud. ■

Järeldus 6.8. *Kui TVR-s X on olemas mittetriviaalseid lahtisi kumeraid alamhulki, siis leidub selles ruumis määratud mittetriviaalseid pidevaid lineaarseid funktsionaale, s.o. funktsionaale $f \in X' \setminus \{0\}$.*

Tõestus. Isesisvalt!✠ ■

7 Lokaalselt kumerad ruumid

7.1 Lokaalselt kumera topoloogia kirjeldamine nulliümbruste baasi ja poolnormide abil

Vaatamata oma elegantsusele, jätab topoloogiliste vektorruumide teooria paljus soovida, sisuka teooria loomiseks on topoloogilise vektorruumi mõiste liiga üldine. Tulles korraks tagasi eraldamisteoreemi 6.7 juurde, märgime, et selle näiliselt üldine iseloom on mõneti petlik, sest üldjuhul ei pruugi topoloogilises vektorruumis mittetriviaalseid kumeraid lahtisi alamhulki olla. Nende olemasoluks on vaja, et selles ruumis oleks mittetriviaalseid kumeraid nulliümbrusi. Järelduse 6.8 kohaselt on kumera nulliümbruse olemasolu tihedalt seotud mittetriviaalsete pidevate lineaarsete funktsionaalide olemasoluga vaadeldavas ruumis. Allpool näeme (vrd. näide 7.3), et leidub selliseid TVR-e X, mille puhul $X' = \{0\}$.

Nendest märkustest lähtudes, vaatleme järgnevalt lokaalselt kumeraid ruume, nendele on pühendatud kogu ülejäänud osa käesolevast loengukursusest.

Lokaalselt kumer ruum. Definitsioon. TVR-i X nimetatakse *lokaalselt kumeraks ruumiks* (edaspidi lühidalt LKR), kui tal leidub kumeratest alamhulkadest koosnev nulliümbruste baas.

Olgu X LKR ja U suvaline nulliümbrus selles ruumis. Vastavalt lausele 2.6 leidub selline (tasakaalus) *kinnine* nulliümbrus U_1, et $U_1 \subset U$. Edasi valime *kumera* nulliümbruse V omadusega $V \subset U_1$ ja rakendades veel kord lauset 2.6, leiame *tasakaalus* nulliümbruse U_2, mis sisaldub hulgas V. Tähistame $W := \overline{\mathrm{conv} U_2}$, see on *kinnine absoluutselt kumer* nulliümbrus (põhjendada!✠, vrd. ülesanne 5.2 ja järeldus 5.4), kusjuures

$$W \subset \overline{V} \subset \overline{U_1} = U_1 \subset U.$$

Niisiis sisaldab lokaalselt kumeras ruumis iga nulliümbrus kinnist absoluutselt kumerat nulliümbrust. Seega oleme tõestanud järgmise olulise väite.

Lause 7.1. *Igas LKR-s leidub selline nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest.*

Lokaalselt kumera topoloogia defineerimine nulliümbruste (pre)baasi abil. Olgu $\mathfrak{B}_0$ neelavate absoluutselt kumerate alamhulkade mittetühi süsteem vektorruumis X, tähistame

$$\mathfrak{B} := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \mid \varepsilon > 0, \quad V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{B}_0, \ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{7.1}$$

Süsteemi $\mathfrak{B}$ elemendid, s.o. süsteemi $\mathfrak{B}_0$ elementide kõikvõimalike lõplike ühisosade kordsed positiivsete kordajatega, on samuti absoluutselt kumerad alamhulgad. Vahetu kontroll näitab, et $\mathfrak{B}$ rahuldab teoreemi 2.5 tingimusi (**NB1**) – (**NB4**) (vt. ülesanne 7.1). Seega on $\mathfrak{B}$ mingi lokaalselt kumera topoloogia τ nulliümbruste baas vektoruumis X, süsteemi $\mathfrak{B}_0$ nimetatakse topoloogia τ nulliümbruste *prebaasiks* ehk *eelbaasiks*. Pidades silmas lauset 2.7, on lihtne veenduda, et LKR (X, τ) on eralduv parajasti siis, kui

$$\bigcap \{\lambda V \mid \lambda > 0, \quad V \in \mathfrak{B}_0\} = \{0\}. \tag{7.2}$$

Tõepoolest, tingimusest (7.2) tuleneb topoloogia τ eralduvus tänu seosele

$$\bigcap \{W \mid W \in \mathfrak{B}\} \subset \bigcap \{\lambda V \mid \lambda > 0, \quad V \in \mathfrak{B}_0\},$$

teisalt, kui (X, τ) on eralduv, siis lause 2.7 kohaselt saab suvalise $x \in X \setminus \{0\}$ korral valida $\varepsilon > 0$ ja $V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{B}_0$ nii, et $x \notin \varepsilon \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$. Siit järeldub tingimus (7.2).

Niisiis kehtib järgmine lause.

Lause 7.2. *Iga absoluutselt kumerate neelavate alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}_0$ vektorruumis X määrab selles lokaalselt kumera topoloogia, mis on eralduv parajasti siis, kui $\mathfrak{B}_0$ rahuldab tingimust* (7.2).

Ülesanne 7.1. Veenduda, et eelpool defineeritud süsteem $\mathfrak{B}$ rahuldab teoreemi 2.5 tingimusi (**NB1**) – (**NB4**).

Lisame siinkohal olulise **märkuse**. Paneme tähele, et kui almhulkade süsteem $\mathfrak{B}_0$ on lokaalselt kumera topoloogia τ prebaas vektorruumis X (s.t. seosega (7.1) määratud süsteem $\mathfrak{B}$ on τ-nulliümbruste baas), siis süsteemi $\mathfrak{B}$ iga alamsüsteem $\mathfrak{C}_0$, mis sisaldab süsteemi $\mathfrak{B}_0$, on samuti topoloogia τ prebaas, s.t.

$$\mathfrak{C} := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \mid \varepsilon > 0, \quad V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{C}_0, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

on τ-nulliümbruste baas. On selge, et $\mathfrak{C}$ on mingi lokaalselt kumera topoloogia τ' nulliümbruste baas. Lihtne on näha, et $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, seega $\tau \subset \tau'$. Vastupidise sisalduvuse tõestamiseks võtame suvalise $W \in \mathfrak{C}$ ja leiame $V \in \mathfrak{B}$ omadusega $V \subset W$. Paneme tähele, et kuna $\mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{B}$, siis W on esitatav kujul

$$W = \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{k_i} \varepsilon_i V_k^{(i)}, \text{ kus } \ \varepsilon > 0, \ \varepsilon_i > 0 \ \text{ ja } \ V_k^{(i)} \in \mathfrak{B}_0.$$

Tänu hulkade $V_k^{(i)}$ tasakaalustatusele saame sisalduvuse

$$V := \varepsilon' \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{k_i} V_k^{(i)} \subset W,$$

kus $\varepsilon' := \varepsilon \min \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Seejuures $V \in \mathfrak{B}$.

Lokaalselt kumera topoloogia defineerimine poolnormide abil. Lokaalselt kumera ruumi üks tähelepanuväärsemaid omadusi on see, et tema topoloogiat saab kirjeldada ka analüütiliselt, nimelt poolnormide abil.

Lause 7.3. (a) *Iga poolnormide süsteem $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ vektorruumis X määrab selles ruumis lokaalselt kumera topoloogia τ nulliümbruste baasiga*

$$\mathfrak{B} := \{W_{\varepsilon, \gamma_1, \ldots, \gamma_n} \mid \varepsilon > 0, \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}\}, \tag{7.3}$$

kus

$$W_{\varepsilon,\gamma_1,\ldots,\gamma_n} := \left\{ x \in X \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_{\gamma_i}(x) \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Seejuures on poolnormid p_γ pidevad topoloogias τ. Topoloogia τ on eralduv parajasti siis, kui poolnormide süsteem $\{p_\gamma\}$ eraldab punktid vektorruumis X, s.t. kui ta rahuldab tingimust

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \ \exists \gamma \in \Gamma : \ p_\gamma(x) \neq 0. \tag{7.4}$$

(b) *Iga lokaalselt kumera topoloogia saab määrata mingi poolnormide süsteemiga $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.*

Tõestus. (a) Olgu vektorruumis X määratud poolnormide süsteem $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ning olgu alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}$ defineeritud seosega (7.3). Tähistame iga poolnormi p_γ puhul tema kinnise ühikkera sümboliga V_γ, s.t.

$$V_\gamma := \{x \in X \mid p_\gamma(x) \leqslant 1\}.$$

Kuna V_γ on absoluutselt kumer neelav alamhulk (vrd. ülesanne 5.4), siis $\mathfrak{B}_0 := \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ määrab vektorruumis X sellise lokaalselt kumera topoloogia, mille nulliümbruste baasi moodustavad alamhulgad

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i} = W_{\varepsilon,\gamma_1,\ldots,\gamma_n} \quad (\varepsilon > 0, \quad \gamma_1,\ldots,\gamma_n \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}) \tag{7.5}$$

(vrd. lause 7.2). Seejuures rahuldab prebaas $\mathfrak{B}_0$ LKR-i (X,τ) eralduvuseks tarvilikku ja piisavat tingimust (7.2) parajasti siis, kui poolnormide süsteem $\{p_\gamma\}$ rahuldab tingimust (7.4):

$$\begin{aligned}(7.2) &\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus \{0\} \ \exists \gamma \in \Gamma \ \ \exists \lambda > 0 : \quad x \notin \lambda V_\gamma \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus \{0\} \ \exists \gamma \in \Gamma \ \ \exists \lambda > 0 : \quad p_\gamma(x) > \lambda \quad \Leftrightarrow \quad (7.4).\end{aligned}$$

Poolnormide p_γ pidevus järeldub teoreemist 5.10, sest p_γ on hulga V_γ Minkowski funktsionaal:

$$\begin{aligned}p_{V_\gamma}(x) &= \inf\{\mu > 0 \mid x \in \mu V_\gamma\} = \inf\{\mu > 0 \mid p_\gamma(x) \leqslant \mu\} \\ &= p_\gamma(x) \quad (x \in X).\end{aligned}$$

(b) Olgu (X,τ) LKR ja olgu $\mathfrak{B}$ selle ruumi nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest alamhulkadest. Moodustame hulkade $V \in \mathfrak{B}$ Minkowski funktsionaalid p_V, need on pidevad poolnormid, kusjuures $V = \{x \in X \mid p_V(x) \leqslant 1\}$ (vrd. teoreem 5.10). Väite (a) kohaselt määrab see poolnormide süsteem $\{p_V\}_{V\in\mathfrak{B}}$ vektorruumis X lokaalselt kumera topoloogia τ_1 nulliümbruste baasiga

$$\mathfrak{B}_1 := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \mid \varepsilon > 0, \quad V_1,\ldots,V_n \in \mathfrak{B}, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Kuna $\mathfrak{B}$ on topoloogia τ_1 prebaas, siis määravad $\mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{B}_1$ ühe ja sama topoloogia, s.t. $\tau_1 = \tau$. Teoreem on tõestatud. ■

Lepime kokku kasutada edaspidi väljendeid *lokaalselt kumer topoloogia on määratud (pre)baasiga* $\mathfrak{B}$ ja *lokaalselt kumer topoloogia on määratud poolnormide süsteemiga* $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ just selles tähenduses, nagu on kasutatud lausetes 7.2 ja 7.3.

Olgu $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ja $\{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ kaks poolnormide süsteemi vektorruumis X. Paneme tähele, et kui $\{p_\gamma\}\subset\{q_\delta\}$, siis nende poolt määratud vastavad lokaalselt kumerad topoloogiad τ ja τ' rahuldavad seost $\tau\subset\tau'$. Et selles veenduda, fikseerime suvalise τ-nulliümbruse W ning näitame, et ta on ka τ'-nulliümbrus. Kuna hulgad (7.5) moodustavad topoloogias τ nulliümbruste baasi, siis leiduvad sellised $\varepsilon>0$ ja $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\Gamma$, et $W_{\varepsilon,\gamma_1,\dots,\gamma_n}=\varepsilon\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}\subset W$. Eelduse kohaselt $p_{\gamma_1},\dots,p_{\gamma_n}\in\{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, seetõttu on hulgad $V_{\gamma_1},\dots,V_{\gamma_n}$ ka τ'-nulliümbrused. Järelikult on $W_{\varepsilon,\gamma_1,\dots,\gamma_n}$ ja seega ka hulk W τ'-nulliümbrus.

Lause 7.4. *Olgu (X,τ) LKR ja olgu $\mathcal{P}$ kõigi pidevate poolnormide $p\colon X\to\mathbb{R}$ süsteem. Siis süsteemi $\mathcal{P}$ poolt määratud lokaalselt kumer topoloogia langeb kokku esialgse topoloogiaga τ.*

Tõestus. Olgu τ_0 poolnormide süsteemiga $\mathcal{P}$ määratud lokaalselt kumer topoloogia, fikseerime mingi poolnormide süsteemi $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, mis määrab lähtetopoloogia τ (vrd. lause 7.3(b)). Kuna kõik poolnormid p_γ on lause 7.3(a) põhjal τ-pidevad, siis $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\subset\mathcal{P}$ ja eelneva märkuse kohaselt $\tau\subset\tau_0$. Vastupidise sisalduvuse kontrollimiseks paneme kõigepealt tähele, et $p^{-1}((-1,1))$ on iga $p\in\mathcal{P}$ puhul lahtine hulk LKR-s (X,τ) ja

$$0\in p^{-1}((-1,1))\subset V_p:=\{x\in X\mid p(x)\leqslant 1\},$$

järelikult on V_p τ-nulliümbrus iga $p\in\mathcal{P}$ korral. Seega on ka kõik hulgad

$$\varepsilon\bigcap_{i=1}^{n}V_{p_i}\,(\varepsilon>0,\ p_1,...,p_n\in\mathcal{P},\ n\in\mathbb{N}),$$

mis moodustavad topoloogias τ_0 nulliümbruste baasi, τ-nulliümbrused. See tähendabki sisalduvust $\tau_0\subset\tau$. ■

7.2 Koonduvus ja tõkestatus lokaalselt kumeras ruumis

Lokaalselt kumerat topoloogiat kirjeldavate poolnormide abil on lihtne uurida perede (s.h. jadade) koonduvust ning alamhulkade tõkestatust selles topoloogias.

Lause 7.5. *Olgu LKR-i (X,τ) topoloogia määratud poolnormide süsteemiga $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.*
(a) *Elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ koondub punktiks x ruumis X parajasti siis, kui*

$$\lim_{\alpha\in A}p_\gamma(x_\alpha-x)=0 \text{ iga } \gamma\in\Gamma \text{ korral.} \tag{7.6}$$

(b) *Alamhulk $E\subset X$ on tõkestatud ruumis X parajasti siis, kui iga poolnorm p_γ on selles hulgas tõkestatud, s.t. kui*

$$\sup_{x\in E}p_\gamma(x)<\infty \quad \text{iga } \gamma\in\Gamma \text{ korral.} \tag{7.7}$$

Tõestus. (a) *Tarvilikkus.* Kuna poolnormid p_γ on τ-pidevad, siis eeldusest $x_\alpha-x\to 0$ järeldub, et $p_\gamma(x_\alpha-x)\to 0$ kõikide $\gamma\in\Gamma$ korral.

Piisavus. Eeldame, et tingimus (7.6) on täidetud. Moodustame nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ nii nagu lauses 7.3(a). Olgu $V = \left\{x \in X \mid \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\gamma_i}(x) \leqslant \varepsilon\right\}$, kus $\varepsilon > 0$ ja $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, baasi $\mathfrak{B}$ mingi element. Iga $i = 1, \ldots, n$ puhul saame leida sellise indeksi $\alpha_i \in A$, et

$$\alpha \geqslant \alpha_i \Rightarrow p_{\gamma_i}(x_\alpha - x) \leqslant \varepsilon.$$

Kui $\alpha_0 \geqslant \alpha_i$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, siis

$$\alpha \geqslant \alpha_0 \Rightarrow \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\gamma_i}(x_\alpha - x) \leqslant \varepsilon,$$

s.t. $x_\alpha - x \in V$, kui $\alpha \geqslant \alpha_0$. Niisiis, $x_\alpha \to x$ LKR-s X.

(*b*) *Tarvilikkus.* Olgu $E \subset X$ tõkestatud alamhulk. Tähistame suvalise $\gamma \in \Gamma$ korral

$$V_\gamma := \{x \in X \mid p_\gamma(x) \leqslant 1\},$$

see on nulliümbrus tänu poolnormi p_γ pidevusele (selgitada!)✠. Kuna E on tõkestatud, siis saab leida niisuguse $\lambda > 0$, et $\lambda E \subset V_\gamma$, s.t.

$$p_\gamma(x) \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad (x \in E).$$

Seega kehtib (7.7).

Piisavus. Eeldame, et tingimus (7.7) on täidetud. Olgu W suvaline τ-nulliümbrus, siis leiduvad sellised $\varepsilon > 0$ ja $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, et $W_{\varepsilon,\gamma_1,\ldots,\gamma_n} = \varepsilon \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{\gamma_i} \subset W$. Kuna poolnormid $p_{\gamma_1}, \ldots, p_{\gamma_1}$ rahuldavad tingimust (7.7), siis leiduvad positiivsed arvud $M_1, \ldots, M_n$ omadusega

$$p_{\gamma_i}(x) \leqslant M_i \quad (i = 1, \ldots, n,\ x \in E),$$

seega

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\gamma_i}(x) \leqslant M := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} M_i \quad (x \in E).$$

Olgu $\lambda := \frac{\varepsilon}{M}$, siis iga $z := \lambda x \in \lambda E$ korral

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\gamma_i}(z) = \lambda \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\gamma_i}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \ (x \in E),$$

s.t. $\lambda E \subset W_{\varepsilon,\gamma_1,\ldots,\gamma_n} \subset W$. Näeme, et E on tõkestatud. ■

Lause 7.6. (a) *Kui E on tõkestatud alamhulk LKR-s X, siis ka tema absoluutselt kumer kate* abs conv$E$ *on tõkestatud.*
(b) *Kui E on täielikult tõkestatud alamhulk LKR-s X, siis ka tema absoluutselt kumer kate* absconv$E$ *on täielikult tõkestatud.*

Tõestus. (a) Olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X nulliümbruste baas lahtistest absoluutselt kumeratest hulkadest. Kui $E \subset X$ on tõkestatud, siis suvalise fikseeritud $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub $\lambda > 0$, et $E \subset \lambda V$. Seega absconv$E \subset$ absconv$\lambda V = \lambda V$, s.t. absconv$E$ on tõkestatud.

(b) Olgu $E \subset X$ täielikult tõkestatud, olgu $V \in \mathfrak{B}$. Valime $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U+U \subset V$ ning $x_1, \ldots, x_n \in E$ nii, et $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (x_i + U)$. Moodustame

$$H := \operatorname{absconv}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

ja näitame kõigepealt, et H on kompaktne alamhulk LKR-s X. Selleks vaatleme normeeritud ruumi ℓ_n^1, s.o. vektorruumi $\mathbb{K}^n$ normiga $\|\lambda\| := \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, kus $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Defineerime lineaarse kujutuse

$$\Phi\colon \ell_n^1 \to X, \ \ \lambda \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

See kujutus on pidev punktis 0: kui $\left(\lambda^{(\alpha)}\right)$ on selline elementide $\lambda^{(\alpha)} := \left(\lambda_1^{(\alpha)}, \ldots, \lambda_n^{(\alpha)}\right)$ pere normeeritud ruumis ℓ_n^1, mis koondub punktiks 0, siis arvpere $\left(\lambda_k^{(\alpha)}\right)$ koondub arvuks 0 iga $k = 1, \ldots, n$ korral, mistõttu

$$\Phi\left(\lambda^{(\alpha)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(\alpha)} x_k \to 0 \text{ LKR-s } X.$$

Edasi paneme tähele, et $H = \Phi(B)$, kus $B := \{\lambda \in \ell_n^1 \mid \|\lambda\| \leqslant 1\}$ on lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi ℓ_n^1 kinnine ühikkera, seega kompaktne hulk. Järelikult H kui kompaktse hulga pidev kujutis on tõepoolest kompaktne hulk ruumis X.

Moodustame hulga H lahtise katte $\bigcup\{z + U \mid z \in H\}$, see sisaldab kompaktsuse tõttu lõpliku osakatte $\bigcup\{z_l + U \mid l = 1, \ldots, r\}$. Seega

$$\begin{aligned}\operatorname{absconv} E \subset \operatorname{absconv} \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U) &\subset \operatorname{absconv}\{x_1, \ldots, x_n\} + \operatorname{absconv} U \\ = H + U \subset \bigcup_{l=1}^{r} z_l + U + U &\subset \bigcup_{l=1}^{r} z_l + V.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes, iga nulliümbruse V puhul leidub lõplik alamhulk $\{z_1, \ldots, z_r\} \subset \operatorname{absconv} E$, et $\operatorname{absconv} E \subset \bigcup\limits_{l=1}^{r} z_l + V$. See tähendabki, et $\operatorname{absconv} E$ on täielikult tõkestatud. ■

7.3 Metriseeruvad ja normeeruvad lokaalselt kumerad ruumid

Teoreemi 4.2 järgi on TVR X metriseeruv parajasti siis, kui ta on eralduv ja tal on loenduv nulliümbruste baas. Lihtne on kontrollida, et igas metriseeruvas LKR-s X on selline loenduv nulliümbruste baas $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mis koosneb (kinnistest) absoluutselt kumeratest hulkadest (selgitada!)✠. Kuna poolnormide süsteem $\{p_{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, kus p_{V_n} on hulga V_n Minkowski funktsionaal, määrab ruumi X topoloogia (vrd. lause 7.3(b) tõestus), siis võime väita, et iga metriseeruva lokaalselt kumera topoloogia saab määrata loenduva poolnormide süsteemiga.

Olgu nüüd (X, τ) selline eralduv LKR, mille topoloogia on määratud mingi loenduva poolnormide süsteemiga $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tähistame

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad (x, y \in X), \tag{7.8}$$

see on ***nihke suhtes invariantne meetrika*** vektorruumis X (kontrollida!)✠. Ta määrab metriseeruva topoloogia τ_1, kusjuures mingi elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ puhul

$$\lim_{\alpha\in A} d(x_\alpha, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha\in A} p_n(x_\alpha) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{7.9}$$

(kontrollida!)✠. Teisi sõnu, $x_\alpha \to 0$ topoloogias τ_1 parajasti siis, kui $x_\alpha \to 0$ topoloogias τ. Seega nii ühikoperaator $i\colon (X,\tau) \to (X,\tau_1)$ kui ka tema pöördoperaator i^{-1} on pidevad punktis 0, s.t. $\tau = \tau_1$.

Me oleme tõestanud järgmise olulise lause.

Lause 7.7. *Eralduv lokaalselt kumer ruum on metriseeruv parajasti siis, kui tema topoloogia saab määrata loenduva (või lõpliku) poolnormide süsteemiga.*

Näide 7.1. Vaatleme veel kord peatükis 4 toodud näites 4.1 käsitletud TVR-i $C(\mathbb{C})$. Kuna alamhulgad

$$V_{n,i} := \left\{ x = x(t) \mid |x(t)| \leqslant \frac{1}{i}, \text{ kui } |t| \leqslant n \right\} \quad (n, j \in \mathbb{N}),$$

mis moodustavad loenduva nulliümbruste baasi, on absoluutselt kumerad, siis on tegemist metriseeruva lokaalselt kumera ruumiga.

Normeeruvad LKR-d. Lihtne on näha (kontrollida!)✠, et kui eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on määratud ***lõpliku*** poolnormide süsteemiga $\{p_1, \ldots, p_m\}$, siis funktsionaal

$$p\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant m} p_i(x)$$

on norm ning (X, p) on normeeritud ruum. Sel juhul ütleme, et TVR (X, τ) on *normeeruv*. Kerkib küsimus, kuidas topoloogiliste vektorruumide hulgas normeeruvaid ruume ära tunda. Vastuse annab järgmine lause.

Lause 7.8 (***Kolmogorovi teoreem***)**.** *Eralduv TVR (X, τ) on normeeruv parajasti siis, kui tal on tõkestatud kumeraid nulliümbrusi.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Normeeritud ruumi ühikkera on tõkestatud kumer nulliümbrus (vrd. ülesanne 5.4).

Piisavus. Olgu V tõkestatud kumer nulliümbrus eralduvas TVR-s X. Lause 2.3(b) kohaselt sisaldab V tasakaalus nulliümbrust V_1. Tähistame $U := \overline{\operatorname{conv} V_1}$, see on kinnine absoluutselt kumer nulliümbrus, seejuures tõkestatud (põhjendada!)✠. Hulga U Minkowski funktsionaal p_U on järelduse 5.7 põhjal poolnorm. Näitame, et p_U on norm, selleks on vaja kontrollida implikatsiooni

$$p_U(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \tag{7.10}$$

Kõigepealt märgime, et kuna U on tõkestatud hulk, siis iga nulliümbruse W korral saab valida arvu $\varepsilon > 0$ omadusega $\varepsilon U \subset W$. Seega on $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$ τ-nulliümbruste baas, mistõttu (vrd. lause 2.7) $\bigcap \{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\} = \{0\}$. Niisiis, kui $x \neq 0$, siis leidub niisugune $\varepsilon > 0$, et $x \notin \varepsilon U$, s.t. $p_U(x) \neq 0$. Seega on implikatsioon (7.10) õige. Tähendab, (X, p_U) on normeeritud ruum ühikkeraga U (vrd. teoreem 5.10) ja kuna $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$ on τ-nulliümbruste baas, siis normi poolt määratud topoloogia langeb esialgse topoloogiaga kokku. ■

Järeldus 7.9. *Eralduv lokaalselt kumer ruum on normeeruv parajasti siis, kui tal on tõkestatud nulliümbrus.*

Siinkohal on vajalik juhtida tähelepanu **erinevusele normeeritud ruumi ja lokaalselt tõkestatud ruumi vahel** (vrd. pt. 4). Loomulikult on iga normeeritud ruum lokaalselt tõkestatud, täpsemalt öeldes, lokaalselt tõkestatud ruum on normeeritud ruum parajasti siis, kui ta on lokaalselt kumer. Seda, et eksisteerib lokaalselt tõkestatud ruume, mis ei ole lokaalselt kumerad, näitab järgmine näide.

Näide 7.2. Vaatleme vektorruumi ℓ^p, mille elementideks on arvjadad $x = (x_k)$ omadusega

$$|x| := \sum_k |x_k|^p < \infty,$$

olgu seejuures $0 < p < 1$. Reaalarvude $a, b \geqslant 0$ puhul kehtib võrratus $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$, millest saame seose

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| .$$

See tähendab, et ℓ^p on vektorruum, milles sosega $\xi \mapsto |\xi|$ määratud funktsionaal on pseudonorm (veenduda!)✠, seega on ℓ^p metriseeruv TVR meetrikaga

$$d(x, y) := |x - y| = \sum_k |x_k - y_k|^p \quad (x, y \in \ell^p).$$

Saab näidata, et meetriline ruum ℓ^p on täielik. Meie jaoks on olulisem see fakt, et ℓ^p ***ei ole lokaalselt kumer***. Vaatleme elemente $e^i := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, mille i-s koordinaat on 1 ja $i \in \mathbb{N}$. Kuna $d(e^i, 0) = 1$ iga i korral, siis hulk $\{e^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ on ruumis ℓ^p tõkestatud, kuid tema kumer kate $\operatorname{conv}\{e^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ei ole tõkestatud. Nimelt on kumerate kombinatsioonide $x^{(n)} := \frac{1}{n}(e^1 + ... + e^n)$ jada ruumis ℓ^p tõkestamata, kuna

$$\left|x^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^p = \frac{n}{n^p} = n^{1-p} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Lause 7.6(a) järgi ei ole ℓ^p LKR.

Märgime, et ruumid ℓ^p on juhul $0 < p < 1$ tähelepanuväärsed eeskätt kui metriseeruvad TVR-d, mis ei ole lokaalselt kumerad. Hoopis olulisemad ja huvitavamad on ruumid ℓ^p, kui $1 \leqslant p < \infty$, sel juhul saame tuntud ja põhjalikult uuritud Banachi ruumid.

7.4 Lokaalselt kumera ruumi kaasruum

Eralduvate lokaalselt kumerate ruumide üks tähtsamaid eeliseid ülejäänud topoloogiliste vektorruumide ees on see, et neil on ”palju” pidevaid lineaarseid funktsionaale. Vektorruumi X algebralise kaasruumi X^* alamruumi Y elementide rohkuse mõõduks on see, milliseid eraldamisteoreeme see alamruum rahuldab.

Definitsioon. Öeldakse, et vektoralamruum $Y \subset X^*$ *eraldab punktid vektorruumis* X, kui suvaliste $x, y \in X$ korral, kus $x \neq y$, leidub funktsionaal $f \in Y$ omadusega $f(x) \neq f(y)$.

Ilmselt on see tingimus samaväärne nõudega

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists f \in Y : \quad f(x) \neq 0.$$

Lause 7.10. *Vektorruumi X algebraline kaasruum X^* eraldab punktid vektorruumis X.*

Tõestus. Fikseerime vektorruumis X mingi algebralise baasi E. Siis iga elemendi $x \in X$ korral leiduvad $n \in \mathbb{N}$, elemendid $a_1, \ldots, a_n$ hulgast E ja skalaarid $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nii, et

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, \tag{7.11}$$

kusjuures see esitus on ühene. Olgu $x_0 \in X \setminus \{0\}$ fikseeritud, siis baasis E leidub mingi element a, mis kuulub elemendi x_0 esitusse (7.11) ja talle vastav kordaja on nullist erinev. Niisiis, elemendi x_0 esituses (7.11) leidub selline $k_0 \in \{1, ..., n\}$, et $a = a_{k_0}$ ja $\lambda_{k_0} \neq 0$. Defineerime nüüd funktsionaali $f \colon X \to \mathbb{K}$ järgmiselt: suvalise $x \in X$ puhul on $f(x)$ baasielemendi a kordaja elemendi x esituses (7.11), kui a kuulub sellesse esitusse, kui ta ei kuulu, siis $f(x) := 0$. Saab näidata, et f on lineaarne, s.t. $f \in X^*$ (kontrollida!)✠. Seejuures $f(x_0) = \lambda_{k_0} \neq 0$. ■

See, ***kas topoloogilise vektorruumi topoloogiline kaasruum eraldab punktid***, osutub põhimõttelise tähtsusega küsimuseks vaadeldavas teoorias. Meie eesmärk on näidata, et eralduva lokaalselt kumera ruumi korral on vastus sellele küsimusele positiivne. Lisaks sellele tõestame veel kaks meile edaspidi vajalikku eraldamisteoreemi.

Alustame järgmise olulise faktiga.

Lause 7.11. *Lineaarne funktsionaal f LKR-s X on pidev parajasti siis, kui leidub selline pidev poolnorm $p : X \to \mathbb{R}$, et $|f(x)| \leqslant p(x)$ iga $x \in X$ korral.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Selle väite abil on lihtne Hahn-Banachi teoreemist saada järgmine lause, mida võiks nimetada ***funktsionaali pideva jätkamise printsiibiks*** lokaalselt kumerates ruumides.

Lause 7.12. *Olgu X_0 LKR-i X vektoralamruum. Iga $f_0 \in (X_0)'$ korral leidub $f \in X'$ omadusega*

$$f(x) = f_0(x) \quad (x \in X_0).$$

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosnev baas ruumis X, sel juhul $\mathfrak{B}_0 := \{U \cap X_0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$ on alamruumi X_0 nulliümbruste baas. Kuna $f_0 \in (X_0)'$, siis lause 6.1 kohaselt leidub niisugune $V \in \mathfrak{B}$, et $|f_0(x)| \leqslant 1$ kõikide $x \in V \cap X_0$ puhul. Moodustame hulga V Minkowski funktsionaali p_V, see on pidev poolnorm (vrd. teoreem 5.10). Edasi, iga $x \in X_0$ jaoks saab leida positiivse arvu α omadusega $x \in \alpha V$, seega $|f_0(x)| = |f_0(\alpha v)| = \alpha |f_0(v)| \leqslant \alpha$, kus $x = \alpha v$ ja $v \in V \cap X_0$. Saame võrratuse

$$|f_0(x)| \leqslant \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha V\} = p_V(x) \quad (x \in X_0).$$

Tõestuse lõpuleviimiseks rakendame teoreemi 6.4 ning jätkame funktsionaali f_0 kogu ruumi X nii, et saadud jätk $f \in X^*$ rahuldaks võrratust $|f(x)| \leqslant p_V(x)$ iga $x \in X$ korral. Kuna p_V on pidev poolnorm, siis lause 7.11 põhjal $f \in X'$. ■

Tõestatud lause võimaldab anda vastuse eespool püstitatud küsimusele pidevate lineaarsete funktsionaalide rohkuse kohta lokaalselt kumeras ruumis.

Teoreem 7.13. *Eralduva LKR-i X kaasruum X' eraldab punktid ruumis X.*

Tõestus. Võtame suvalise punkti $x_0 \in X \setminus \{0\}$ ning pideva poolnormi $p : X \to \mathbb{R}$ omadusega $p(x_0) \neq 0$ (vrd. lause 7.3). Meie eesmärk on leida niisugune $f \in X'$, mille korral $f(x_0) \neq 0$. Moodustame alamruumi $X_0 := \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ ning defineerime funktsionaali

$$f_0 : X_0 \to \mathbb{K}, \quad \lambda x_0 \mapsto \lambda p(x_0).$$

Ilmselt on f_0 lineaarne, lause 7.11 kohaselt on ta ka pidev, sest

$$|f_0(\lambda x_0)| = |\lambda| p(x_0) = p(\lambda x_0) \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Rakendades lauset 7.12, leiame funktsionaali f_0 jätku $f \in X'$, siis $f(x_0) = p(x_0) \neq 0$. ■

Ülesanne 7.2. Tõestada, et kui vektorruumis X on defineeritud kaks topoloogiat τ_1 ja τ_2 ning $\tau_1 \subset \tau_2$, siis $(X, \tau_1)' \subset (X, \tau_2)'$.

7.5 Veel kaks eraldamisteoreemi

Me tuletame teoreemist 6.7 veel kaks eraldamisteoreemi. Järgmine lause on siduvaks lüliks nende ja teoreemi 6.7 vahel.

Lause 7.14. *Kui E on LKR-i X kumer alamhulk ja $x_0 \in X \setminus \overline{E}$, siis leidub selline funktsionaal $f \in X'$, et $f(x_0) \notin \overline{f(E)}$.*

Tõestus. Kuna x_0 ei kuulu alamhulga E sulundisse, siis saame valida lahtise kumera nulliümbruse U omadusega $(x_0 + U) \cap E = \varnothing$ (põhjendada!)✠. Rakendame kumeratele hulkadele $G := x_0 + U$ ja E teoreemi 6.7 ning leiame funktsionaali $f \in X'$, mis rahuldab tingimust $f(x_0 + U) \cap f(E) = \varnothing$. Ilmselt on $f(x_0 + U)$ lahtine hulk ruumis $\mathbb{K}$ (vt. järeldus 6.8), seetõttu saab punktile $f(x_0)$ leida ümbruse $B \subset f(x_0 + U)$. Niisiis, $B \cap f(E) = \varnothing$, järelikult $f(x_0) \notin \overline{f(E)}$. ■

Teoreem 7.15. *Olgu X LKR.*
(a) *Kui $E \subset X$ on absoluutselt kumer ja $x_0 \in X \diagdown \overline{E}$, siis leidub funktsionaal $f \in X'$ omadusega*

$$|f(x)| \leqslant 1 \ \ (x \in E), \qquad f(x_0) > 1.$$

(b) *Olgu X_0 ruumi X vektoralamruum. Element $x_0 \in X$ on alamruumi X_0 puutepunkt parajasti siis, kui $f(x_0) = 0$ iga niisuguse funktsionaali $f \in X'$ korral, mis rahuldab tingimust $f|_{X_0} = 0$.*

Tõestus. (a) Antud eeldustel saab lause 7.14 kohaselt leida sellise funktsionaali $g \in X'$, mille puhul $g(x_0) \notin \overline{g(E)}$. Seejuures on $g(E)$ ning järelikult ka $\overline{g(E)}$ absoluutselt kumer alamhulk vektorruumis $\mathbb{K}$. Tähendab, $\overline{g(E)}$ on kas kinnine ring komplekstasandil (juhul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) või reaaltelje lõik (juhul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) keskpunktiga 0 (kontrollida!)✠. Kuna $g(x_0) \notin \overline{g(E)}$, siis võime eeldada, et $g(x_0) > \sup\limits_{x \in E} |g(x)| =: \alpha$. Defineerime

$$f := \begin{cases} \frac{|g(x_0)|}{\alpha g(x_0)} g, & \text{kui } \alpha \neq 0, \\ \frac{2}{g(x_0)} g, & \text{kui } \alpha = 0, \end{cases}$$

siis suvalise $x \in E$ puhul $|f(x)| = \frac{|g(x)|}{\alpha} \leqslant 1$, kui $\alpha \neq 0$, ning $|f(x)| = 0$, kui $\alpha = 0$. Samal ajal $f(x_0) > 1$. Niisiis on funktsionaalil f kõik nõutud omadused.

(b) *Tarvilikkus.* Olgu $x_0 \in \overline{X_0}$, siis leidub alamruumi X_0 elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$, mis koondub punktiks x_0 LKR-s X. Kui $f \in X'$ on nullfunktsionaal vektoralamruumis X_0, siis $f(x_0) = \lim\limits_{\alpha \in \Gamma} f(x_\alpha) = 0$.

Piisavus. Oletame, et $x_0 \notin \overline{X_0}$ ja rakendame lauset 7.14. Selle kohaselt leidub $f \in X'$ omadusega $f(x_0) \notin \overline{f(X_0)}$, järelikult $\overline{f(X_0)} = \{0\}$, millest tuleneb, et $f|_{X_0} = 0$. Samal ajal $f(x_0) \neq 0$. ■

Järeldus 7.16. *LKR-i X vektoralamruum X_0 on tihe ruumis X parajasti siis, kui $f|_{X_0} \neq 0$ iga $f \in X' \diagdown \{0\}$ korral. Teisisõnu, $\overline{X_0} = X$ parajasti siis, kui*

$$f|_{X_0} = 0 \Rightarrow f = 0$$

iga $f \in X'$ korral.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Näide 7.3. Vaatleme veel kord näites 4.2 käsitletud kõigi lõigus $[a, b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide TVR-i $S[a, b]$. Me veendusime, et selle ruumi topoloogiline koonduvus langeb kokku funktsionaaljada mõõdu järgi koonduvusega lõigus $[a, b]$. Funktsiooniteooriast teame, et $S[a, b]$ on lihtsate funktsioonide hulga sulund mõõdu järgi koonduvuse mõttes, kus lihtsate funktsioonide all mõistame lõigu $[a, b]$ intervallide karakteristlike funktsioonide lineaarseid kombinatsioone. Olgu $f \in S[a, b]'$, eeldame, et $f \neq 0$. Märgime tähega H lõigu $[a, b]$ kõigi intervallide karakteristlike funktsioonide hulga. Kuna $\operatorname{span} H$ on tihe TVR-is $S[a, b]$, siis $f|_H \neq 0$. Seetõttu saame iga $n \in \mathbb{N}$ puhul valida intervalli $\Delta_n \subset [a, b]$ nii, et $\operatorname{mes} \Delta_n < \frac{1}{n}$ ja tema karakteristlik funktsioon χ_{Δ_n} rahuldab tingimust

$f(\chi_{\Delta_n}) =: \delta_n \neq 0$. Tähistame $x_n := \frac{1}{\delta_n}\chi_{\Delta_n}$ ja paneme tähele, et $x_n \to 0$ mõõdu järgi, s.t. $x_n \to 0$ TVR-s $S[a,b]$. Funktsionaali f pidevuse tõttu $f(x_n) \to 0$, samal ajal

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{\delta_n}\chi_{\Delta_n}\right) = \frac{1}{\delta_n} f(\chi_{\Delta_n}) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Saadud vastuolu annab tunnistust sellest, et ***TVR-is*** $S[a,b]$ ***ei leidu ühtegi mittetriviaalset pidevat lineaarset funktsionaali***, s.t. $S[a,b]' = \{0\}$.

Näide 7.3 ütleb meile muuhulgas, et teoreem 7.13 ei ole ülekantav kõigile topoloogilistele vektorruumidele. Leidub metriseeruvaid (seega eralduvaid) topoloogilisi vektorruume, millel ainukeseks pidevaks lineaarseks funktsionaaliks on nullfunktsionaal. Selline situatsioon (ka mitte-eralduvate) lokaalselt kumerate ruumide puhul ei ole võimalik (vrd. järeldus 6.8).

8 Vektorruumide duaalsed paarid

8.1 Duaalne paar

Järgmised kaks peatükki on pühendatud topoloogiliste vektorruumide duaalsuseteooriale. Selle teooria lähteidee - uurida topoloogilist vektorruumi tema kaasruumi abil - on pärit klassikalisest funktsionaalanalüüsist, kuid siin vaadeldavas kontekstis saab see idee oluliselt üldisema käsitluse.

Vektorruumide duaalne paar. Olgu (X,τ) eralduv LKR. Nagu me eelmises peatükis veendusime, on tema kaasruumis X' piisavalt palju elemente, eraldamaks punktid ruumis X. Duaalsuseteooria üks tüüpilisemaid ja fundamentaalsemaid ülesandeid on kirjeldada lokaalselt kumeraid topoloogiaid τ' vektorruumis X, millele vastav kaasruum $(X,\tau')'$ on X'.

Selle probleemi ning temaga seotud küsimuste uurimiseks vajaliku tehnilise aparatuuri ehitamist alustame duaalse paari mõiste sissetoomisest.

Definitsioon. Olgu X ja Y vektorruumid üle ühe ja sama skalaaride korpuse $\mathbb{K}$. Öeldakse, et vektorruumid X ja Y moodustavad *duaalse paari* $\langle X, Y\rangle$, kui eksisteerib selline bilineaarne funktsionaal (vt. sissejuhatus)

$$B\colon X\times Y\to\mathbb{K},\quad (x,f)\mapsto B(x,f)=:\langle x,f\rangle,$$

mis eraldab punktid nii ruumis X kui ka ruumis Y, s.t.

$$\forall x\in X\diagdown\{0\}\quad \exists f\in Y:\quad \langle x,f\rangle\neq 0 \tag{8.1}$$

ja

$$\forall f\in Y\diagdown\{0\}\quad \exists x\in X:\quad \langle x,f\rangle\neq 0. \tag{8.2}$$

Sel juhul öeldakse ka, et bilineaarne funktsionaal B *korraldab duaalsuse* $\langle X,Y\rangle$.

Bilineaarse funktsionaali sümmeetriaomadustest tuleneb duaalse paari sümmeetria: kui B korraldab duaalsuse $\langle X,Y\rangle$, siis korraldab ta ka duaalsuse $\langle Y,X\rangle$.

Näide 8.1. Olgu $\ell^\infty := \left\{x=(x_k)\mid \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|x_k|<\infty\right\}$ (kõigi tõkestatud jadade vektorruum) ja $\ell^1 := \left\{y=(y_k)\mid \sum\limits_{k=1}^{\infty}|y_k|<\infty\right\}$ (kõigi absoluutselt koonduvate ridade vektorruum). Bilineaarne funktsionaal

$$B\colon \ell^\infty\times\ell^1\to\mathbb{K},\quad (x,y)\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k$$

korraldab duaalsuse $\langle\ell^\infty,\ell^1\rangle$. Tõepoolest, rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_ky_k$ koondub (absoluutselt) kõikide $x\in\ell^\infty$ ja $y\in\ell^1$ korral (kontrollida!)✠, seejuures on lineaarsed funktsionaalid

$$B_x\colon \ell^1\to\mathbb{K},\quad y\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k \quad\text{ja}\quad B_y\colon \ell^\infty\to\mathbb{K},\quad x\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k$$

nullfunktsionaalid vaid sel juhul, kui elemendid x ja y on nullelemendid vastavalt ruumis ℓ^∞ ja ℓ^1 (veenduda!)✠.

Näide 8.2. Olgu L^2 kõigi lõigus $[a,b]$ Lebesgue'i mõttes integreeruva ruuduga reaalsete väärtustega funktsioonide $x = x(t)$ vektorruum, s.t.

$$L^2 = \left\{ x = x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Seejuures samastame vektorruumi punktidena need funktsioonid, mis selles lõigus langevad kokku peaegu kõikjal. Ruum L^2 on Hilberti ruum skalaarkorrutisega

$$B\colon L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \int_a^b x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t,$$

mis on bilineaarne funktsionaal. Kuna iga $x \in L^2 \setminus \{0\}$ korral $B(x,x) = \int_a^b |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \neq 0$, siis B korraldab duaalsuse $\langle L^2, L^2 \rangle$.

Näide 8.3. Näitame, et iga vektorruum X ja tema algebraline kaasruum X^* moodustavad duaalse paari $\langle X, X^* \rangle$. Selleks defineerime bilineaarse funktsionaali

$$B\colon X \times X^* \to \mathbb{K}, \ (x,f) \mapsto f(x)$$

(kontrollida!)✠ ja veendume, et ta eraldab punktid nii ruumis X kui ka kaasruumis X^*. Tingimuse (8.2) kontroll on lihtne: kui $f \in X^*$ on selline funktsionaal, et $f(x) = 0$ iga $x \in X$ puhul, siis $f = 0$ vektorruumis X^*. Tingimus (8.1) tuleneb lausest 7.10.

Näite 8.3 põhjal on selge, et iga vektorruum X ja tema algebralise kaasruumi X^* iga selline vektoralamruum Y, mis eraldab punktid ruumis X, moodustavad duaalse paari. Sel juhul bilineaarne funktsionaal

$$B\colon X \times Y \to \mathbb{K}, \ (x,f) \mapsto f(x) \tag{8.3}$$

korraldab duaalsuse $\langle X, Y \rangle$. Tõepoolest, iga $x \in X \setminus \{0\}$ korral leidub $f \in Y$ omadusega $\langle x, f \rangle = f(x) \neq 0$, teisalt on iga $f \in Y \setminus \{0\}$ puhul olemas punkt $x \in X$, et $f(x) \neq 0$.

Tegelikult kehtib ka vastupidine väide: iga duaalse paari $\langle X, Y \rangle$ korral saab vektorruumi Y samastada ruumi X algebralise kaasruumi mingi vektoralamruumiga ja vastupidi, vektorruumi X saab samastada ruumi Y algebralise kaasruumi vektoralamruumiga. Veendume selles.

Olgu $\langle X, Y \rangle$ suvaline duaalne paar bilineaarse funktsionaaliga B. Tähistame iga $f \in Y$ korral

$$G_f(x) := \langle x, f \ \rangle \quad (x \in X),$$

siis G_f on lineaarne funktsionaal (veenduda)✠, s.t. $G_f \in X^*$. Defineerime kujutuse

$$\pi\colon Y \to X^*, \quad f \mapsto G_f,$$

lihtne kontroll näitab, et π on lineaarne (veenduda)✠. Veelgi enam, ta on ka üks-ühene: kui $f, g \in Y$ ja $f \neq g$, siis saab valida $x_0 \in X$ omadusega $\langle x_{0,}, f \rangle \neq \langle x_0, g \rangle$, mistõttu $\pi(f) \neq \pi(g)$. Kujutust π nimetatakse vektorruumi Y *kanooniliseks sisestuseks* vektorruumi X^*, ta korraldab üks-ühese vastavuse vektorruumide Y ja $\widehat{Y} := \pi(Y) \subset X^*$ vahel, säilitades seejuures vektorruumi tehted (kontrollida!)✠. Seega on Y ja $\widehat{Y}$ vektorruumidena samastatavad ja selles tähenduses kehtib sisalduvus $Y \subset X^*$, kusjuures Y eraldab punktid vektorruumis X (kontrollida!)✠.

Kokkuvõtteks: me võime alati duaalse paari $\langle X, Y \rangle$ üht komponenti, vektorruumi Y vaadelda teise ruumi X algebralise kaasruumi X^* vektoralamruumina, mis eraldab punktid ruumis X. Täpselt samamoodi on X interpreteeritav ruumi Y^* vektoralamruumina, mis eraldab punktid ruumis Y.

Edaspidi lähtume me just sellisest duaalse paari interpretatsioonist. Niisiis, ***duaalse paari moodustavad vektorruumid*** X ***ja*** Y, ***kus*** $Y \subset X^*$ ***ja ta eraldab punktid ruumis*** X. Bilineaarne funktsionaal (8.3) on sel juhul automaatselt määratud.

Ülesanne 8.1. Tähistame

$$\omega := \{x = (x_k) \mid x_k \in \mathbb{K} \ \ (k \in \mathbb{N})\}$$

(kõigi arvjadade vektorruum, vt. näide 4.3) ja

$$\varphi := \{u \in \omega \mid \exists k_u \in \mathbb{N}\colon u_k = 0, \text{ kui } k > k_u \ \}$$

(kõigi lõplike jadade ruum). Defineerime bilineaarse funktsionaali B seosega

$$B\colon \omega \times \varphi \to \mathbb{K}, \ (x, u) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k.$$

Veenduda, et bilineaarne funktsionaal B korraldab duaalsuse $\langle \omega, \varphi \rangle$.

8.2 Nõrk topoloogia

Antud duaalsusega kooskõlas olev topoloogia. Vastavalt definitsioonile on duaalne paar (ehk duaalsus) puhtalgebraline mõiste, kuid ta mängib topoloogiliste vektorruumide teoorias olulist rolli. Märgime (see on oluline!), et kuna teoreemi 7.15 kohaselt eraldab eralduva LKR-i X topoloogiline kaasruum X' punktid ruumis X, siis $\langle X, X' \rangle$ on duaalne paar.

Definitsioon. Olgu $\langle X, Y \rangle$ duaalne paar ja olgu vektorruumis X defineeritud lokaalselt kumer topoloogia τ. Kui $(X, \tau)' = Y$, siis öeldakse, et topoloogia τ on duaalsusega $\langle X, Y \rangle$ *kooskõlas.*

Meie eesmärgiks selles ja järgnevas kahes peatükis on *kirjeldada antud duaalsusega kooskõlas olevaid lokaalselt kumeraid topoloogiaid* ning uurida nende omadusi. Muuhulgas näitame, et sellised topoloogiad on alati olemas ning nende hulgas on nii nõrgim kui ka tugevaim.

On lihtne veenduda, et kui f on lineaarne funktsionaal vektorruumis X, siis seosega

$$p_f(x) := |\langle x, f \rangle| = |f(x)| \quad (x \in X) \tag{8.4}$$

määratud funktsionaal $p_f\colon X \to \mathbb{R}$ on poolnorm (kontrollida!)✠.

Definitsioon. Olgu $\langle X, Y \rangle$ duaalne paar. Poolnormide süsteemiga $\{p_f\}_{f \in Y}$ määratud lokaalselt kumerat topoloogiat vektorruumis X nimetatakse (duaalse paariga $\langle X, Y \rangle$ määratud) *nõrgaks topoloogiaks* ja tähistatakse $\sigma(X, Y)$.

Esitame siinkohal nõrga topoloogia mõned **lihtsamad omadused**, mis tulenevad vahetult definitsioonist.

1^0. *Nõrk topoloogia* $\sigma(X,Y)$ *on eralduv:* kuna Y eraldab punktid ruumis X, siis iga $x \in X \setminus \{0\}$ jaoks saab leida funktsionaali $f \in Y$ omadusega $p_f(x) = |f(x)| \neq 0$, väide järeldub lausest 7.3(a).

2^0. *Topoloogia* $\sigma(X,Y)$ *nulliümbruste baasi* moodustavad alamhulgad

$$W_{\varepsilon,f_1,\ldots,f_n} = \left\{x \in X \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i(x)| \leqslant \varepsilon\right\} \quad (\varepsilon > 0,\ f_1,\ldots,f_n \in Y,\ n \in \mathbb{N}),$$

ka see tuleneb lausest 7.3(a). Tegelikult saab seda baasi kirjeldada lihtsamalt: kuna Y on vektorruum, siis $W_{\varepsilon,f_1,\ldots,f_n} = W_{1,g_1,\ldots,g_n} =: W_{g_1,\ldots,g_n}$, kus $g_i := \frac{1}{\varepsilon} f_i \in Y$ iga $i = 1,\ldots,n$ korral, seetõttu moodustavad sellesama baasi nulliümbrused

$$W_{f_1,\ldots,f_n} = \left\{x \in X \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i(x)| \leqslant 1\right\} \quad (f_1,\ldots,f_n \in Y,\ n \in \mathbb{N}).$$

3^0. *Koonduvus topoloogias* $\sigma(X,Y)$ *on funktsionaalanalüüsi kursusest tuntud nõrk koonduvus* (vrd. lause 7.5(a):

$$\begin{aligned} x_\alpha \to x\ \ (\sigma(X,Y)) &\Leftrightarrow \forall f \in Y : p_f(x_\alpha - x) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in Y : |f(x_\alpha - x)| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in Y : f(x_\alpha) \to f(x). \end{aligned}$$

Analoogiliselt kirjeldatakse *tõkestatust nõrga topoloogia suhtes:* alamhulk $E \subset X$ on tõkestatud LKR-s $(X, \sigma(X,Y))$ parajasti siis, kui (vrd. lause 7.5(b)

$$\forall f \in Y : \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty.$$

4^0. *Vektorruumis* Y *on nõrk topoloogia* $\sigma(Y,X)$ määratud sellise poolnormide süsteemiga $\{p_x\}_{x\in X}$, kus

$$p_x(f) := |\langle x, f\rangle| = |f(x)| \quad (f \in Y).$$

Nulliümbruste baasiks on alamhulkade

$$W_{x_1,\ldots,x_n} := \left\{f \in Y \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f(x_i)| \leqslant 1\right\} \quad (x_1,\ldots,x_n \in X,\ n \in \mathbb{N})$$

süsteem. Pere $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ koondub punktiks $f \in Y$ LKR-s $(Y, \sigma(Y,X))$ parajasti siis, kui

$$\forall x \in X : f_\alpha(x) \to f(x),$$

alamhulk $D \subset Y$ on $\sigma(Y,X)$-tõkestatud parajasti siis, kui

$$\forall x \in X : \sup\{|f(x)| \mid f \in D\} < \infty.$$

Ülesanne 8.2. Kirjeldada jada $\left(x^{(n)}\right)$ koonduvust LKR-s $\left(\ell^\infty, \sigma\left(\ell^\infty, \ell^1\right)\right)$ (vt. näide 8.1). Kas jada $\left(x^{(n)}\right)$ on koonduv, kui

$$x^{(1)} := (1,0,0,\ldots)\,,\ x^{(2)} := (1,1,0,0,\ldots)\,,\ldots,\ x^{(n)} := (1,1,\ldots,1,0,0,\ldots)\,,\ldots?$$

Ülesanne 8.3. Kas ülesandes 8.2 toodud jada $\left(x^{(n)}\right)$ on koonduv LKR-s $\left(\ell^1, \sigma\left(\ell^1, \ell^\infty\right)\right)$?

Ülesanne 8.4. Näidata, et $x^{(n)} \to x$ topoloogias $\sigma(\omega, \varphi)$ parajasti siis, kui $x_k^{(n)} \to x_k$ protsessis $n \to \infty$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral (vrd. ülesanne 8.1).

Nõrk täielik tõkestatus. Teatavasti on topoloogilises vektorruumis iga täielikult tõkestatud hulk tõkestatud (vt. art. 4.1), vastupidine väide on üldjuhul vale (piisab vaadelda suvalist lõpmatumõõtmelist normeeritud ruumi (selgitada!)✠). Me näitame järgnevalt, et nõrgas topoloogias langevad need kaks mõistet kokku.

Lause 8.1. *Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar. Iga tõkestatud alamhulk E LKR-s $(X, \sigma(X,Y))$ on täielikult tõkestatud.*

Tõestus. Olgu $E \subset X$ nõrgas topoloogias $\sigma(X,Y)$ tõkestatud alamhulk. Võtame $\sigma(X,Y)$-nulliümbruste baasist suvalise nulliümbruse (vrd. 2^0)

$$U = \left\{x \in X \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i(x)| \leqslant 1\right\},$$

kus $f_1, \ldots, f_n \in Y$. Meie eesmärk on leida punktid $x_1, \ldots, x_r \in X$ omadusega $E \subset \bigcup_{i=1}^r (x_i + U)$. Defineerime lineaarse kujutuse

$$T\colon X \to m_n, \quad x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

ja tähistame tähega B kinnise ühikkera kõigi n-mõõtmeliste vektorite $z = (z_1, \ldots, z_n)$ normeeritud ruumis m_n, s.t.

$$B = \left\{z = (z_1, \ldots, z_n) \mid \|z\| := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i| \leqslant 1\right\}$$

(vrd. art. 4.2 algus). Selge, et $U = T^{-1}(B)$. Võtame suvalise $z \in T(X)$ ning leiame $x \in X$, mille korral $T(x) = z$, siis $x + U = T^{-1}(z + B)$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} y \in T^{-1}(z+B) &\Leftrightarrow y - x \in T^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow y \in x + U. \end{aligned}$$

Tähistame $A := T(E)$. Kuna E on $\sigma(X,Y)$-tõkestatud, siis saab valida $\lambda > 0$ omadusega $\lambda E \subset U$, mistõttu $\lambda A = T(\lambda E) \subset T(U) \subset B$. Niisiis on A tõkestatud alamhulk lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis m_n ning seega suhteliselt kompaktne (selgitada!)✠, järelikult ka täielikult tõkestatud (selgitada!)✠. Valime vektorid $z^{(1)}, \ldots, z^{(r)} \in A$ nii, et $A \subset \bigcup_{i=1}^r \left(z^{(i)} + B\right)$, ja neile vastavad punktid $x_1, \ldots, x_r \in E$ omadusega $T(x_i) = z^{(i)}$. Siis

$$E \subset T^{-1}(A) \subset T^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^r \left(z^{(i)} + B\right)\right) = \bigcup_{i=1}^r T^{-1}\left(z^{(i)} + B\right) = \bigcup_{i=1}^r (x_i + U),$$

millega lause on tõestatud. ■

Nõrga topoloogia omaduste täpsemaks kirjeldamiseks vajame järgmist lemmat.

Lemma 8.2. *Olgu $f, f_1, \dots, f_n$ lineaarsed funktsionaalid, mis on määratud vektorruumis X. Selleks, et kehtiks seos $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, on tarvilik ja piisav tingimus*

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0. \tag{8.5}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Kui mingi $x \in X$ puhul $f_i(x) = 0$ kõikide $i = 1, \dots, n$ korral, siis $f(x) = 0$, s.t. kehtib implikatsioon (8.5).

Piisavuse tõestamiseks kasutame induktsioonimeetodit. Olgu kõigepealt $n = 1$, eeldame, et tingimus (8.5) on täidetud, s.t.

$$f_1(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0. \tag{8.6}$$

Kui $f_1 = 0$, siis ka $f = 0$, tähendab, $f = f_1$. Kui $f_1 \neq 0$, siis leidub selline $z \in X$, et $f_1(z) = 1$. Iga $x \in X$ puhul $f_1(x - f_1(x)z) = 0$, mistõttu eelduse (8.6) kohaselt $f(x - f_1(x)z) = 0$ ehk $f = \lambda f_1$, kus $\lambda := f(z)$. Seega väide kehtib juhul $n = 1$.

Eeldame nüüd, et väide kehtib juhul $n - 1$, s.t. implikatsioonist

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

järeldub, et $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$. Näitame, et väide kehtib siis ka juhul n s.t. tingimusest (8.5) tuleneb $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Ilmselt on see nii, kui mingi $f_i = 0$ (selgitada!)✠, seetõttu vaatleme juhtu kus $f_n \neq 0$. Leiame $z \in X$, et $f_n(z) = 1$, ja moodustame funktsionaalid

$$g := f - f(z) f_n, \ g_i := f_i - f_i(z) f_n \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

siis $g_i \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ kõikide $i = 1, \dots, n-1$ puhul. Kontrollime implikatsiooni

$$g_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0,$$

kui see on õige, siis induktsiooni eelduse kohaselt $g \in \operatorname{span}\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ ja järelikult

$$f = g + f(z) f_n \in \operatorname{span}\{g_1, \dots, g_{n-1}, f_n\} \subset \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}.$$

Niisiis, olgu $x \in X$ selline element, et $g_i(x) = 0$ iga $i = 1, \dots, n-1$ korral. Tähistame $y := x - f_n(x) z$, siis

$$\begin{aligned} f_i(y) &= f_i(x) - f_n(x) f_i(z) = g_i(x) = 0 \ \ (i = 1, \dots, n-1), \\ f_n(y) &= f_n(x) - f_n(x) f_n(z) = f_n(x) - f_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Tingimuse (8.5) kohaselt $f(y) = 0$, seetõttu saamegi, et $g(x) = 0$ iga sellise elemendi x puhul, mil $g_i(x) = 0$, kui $i = 1, \dots, n-1$. Lemma on tõestatud. ■

Teoreem 8.3. *Topoloogia $\sigma(X, Y)$ on kooskõlas duaalsusega $\langle X, Y \rangle$, s.t. $(X, \sigma(X, Y))' = Y$.*

Tõestus. Lihtne on näha, et $Y \subset (X, \sigma(X, Y))'$. Tõepoolest, kui $f \in Y$, siis seosega (8.4) määratud poolnorm p_f on pidev topoloogias $\sigma(X, Y)$ (vrd. lause 7.3(a)), millest lause 7.11 põhjal järeldub ka funktsionaali f pidevus nõrgas topoloogias $\sigma(X, Y)$.

Vastupidise sisalduvuse $(X, \sigma(X, Y))' \subset Y$ tõestamiseks olgu $f \in (X, \sigma(X, Y))'$. Tähistame $V := \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\} = f^{-1}(D)$, kus $D := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ on ühikkera Banachi ruumis $\mathbb{K}$. Kuna f on pidev, siis V on $\sigma(X, Y)$-nulliümbrus (selgitada!)✠, seega peab leiduma nulliümbruste baasis ümbrus $W := W_{f_1,\ldots,f_n}$ (vrd. märkus 2^0) omadusega $W \subset V$. Näitame, et funktsionaalid $f, f_1, \ldots, f_n$ rahuldavad implikatsiooni (8.5), siis lemma 8.2 põhjal $f \in \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\} \subset Y$ ja me saame, et $(X, \sigma(X,Y))' \subset Y$.

Olgu $f_i(x) = 0$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, siis $f_i(\alpha x) = \alpha f_i(x) = 0$ kõikide $\alpha > 0$ ja $i = 1, \ldots, n$ puhul. Seega

$$\alpha x \in W \subset V \text{ kõikide } \alpha > 0 \text{ korral,}$$

mistõttu

$$\alpha |f(x)| = |f(\alpha x)| \leqslant 1 \text{ iga } \alpha > 0 \text{ puhul.}$$

See on võimalik vaid juhul $f(x) = 0$. ■

Teoreem 8.4. *Nõrk topoloogia $\sigma(X,Y)$ on nõrgim duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas olevatest lokaalselt kumeratest topoloogiatest.*

Tõestus. Olgu τ selline lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, et $(X,\tau)' = Y$. Fikseerime $W := \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ topoloogia $\sigma(X,Y)$ nulliümbruste baasist, kus $V_i := f_i^{-1}(D)$ mingite $f_1, \ldots, f_n \in Y$ korral, ja $D := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Siis $f_1, \ldots, f_n$ on τ-pidevad funktsionaalid, mistõttu $V_1, \ldots, V_n$ ning järelikult ka W on τ-nulliümbrused. Tähendab, $\sigma(X,Y) \subset \tau$. ■

Järeldus 8.5. *Kui (X,τ) on eralduv LKR ja $X' := (X,\tau)'$, siis topoloogia τ on kooskõlas duaalsusega $\langle X, X'\rangle$ ja $\tau \supset \sigma(X, X')$.*

Nõrga topoloogiaga seoses teeme veel ühe olulise märkuse.

5^0. Olgu (X,τ) eralduv LKR, mille topoloogia τ on määratud poolnormide süsteemiga $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Vektoralamruumis $X_0 \subset X$ indutseeritud topoloogia määratakse samade poolnormidega, täpsemalt öeldes, nende ahendite süsteemiga $\{p_\gamma|_{X_0}\}_{\gamma\in\Gamma}$. Olgu $X' := (X,\tau)'$ ja $(X_0)' := (X_0, \tau|_{X_0})'$, paneme tähele, et

$$(X_0)' = \{f|_{X_0} \mid f \in X'\}.$$

Tõepoolest, ühelt poolt on sisalduvus $\{f|_{X_0} \mid f \in X'\} \subset (X_0)'$ ilmne, teisalt saab iga pideva lineaarse funktsionaali $g\colon X_0 \to \mathbb{K}$ pidevalt jätkata kogu ruumi X (vrd. lause 7.12), seega leidub $f \in X'$ omadusega $f|_{X_0} = g$. Niisiis,

$$g \in (X_0)' \Leftrightarrow \exists f \in X' : g = f|_{X_0}. \tag{8.7}$$

Vaatleme vektoralamruumis X_0 kahte nõrka topoloogiat $\sigma\left(X_0, (X_0)'\right)$ ja $\sigma(X,X')|_{X_0}$. Esimene on määratud poolnormide süsteemiga $\{p_g\}_{g\in(X_0)'}$ ja teine süsteemiga $\left\{p_{f|_{X_0}}\right\}_{f\in X'}$. Pidades silmas võrdust (8.7), on selge, et need kaks süsteemi määravad ühe ja sama topoloogia, s.t.

$$\sigma\left(X_0, (X_0)'\right) = \sigma(X,X')|_{X_0}. \tag{8.8}$$

8.3 Polaarid

Selle artikli eesmärk on duaalsuseteooria tehnilise aparatuuri täiustamine. Me alustame selle teooria olulise tulemusega, mis kirjeldab **kumerate alamhulkade sulundeid** antud duaalsusega kooskõlas olevates topoloogiates. Teoreemi tõestamisel kasutame järgmist lihtsalt kontrollitavat fakti.

Ülesanne 8.5. Tõestada, et kui hulgas X on antud topoloogiad τ_1 ja τ_2 ning $\tau_1 \subset \tau_2$, siis alamhulga $E \subset X$ puhul $\overline{E}^{\tau_2} \subset \overline{E}^{\tau_1}$.

Lause 8.6. *Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar. Kumera alamhulga $E \subset X$ sulund on sama hulk kõigis selle duaalsusega kooskõlas olevates lokaalselt kumerates topoloogiates.*

Tõestus. Olgu τ lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X omadusega $(X, \tau)' = Y$. Väite tõestuseks piisab veenduda, et $\overline{E}^{\tau} = \overline{E}^{\sigma(X,Y)}$ (põhjendada!)✠. Kuna $\sigma(X, Y) \subset \tau$ (vrd. teoreem 8.4), siis $\overline{E}^{\tau} \subset \overline{E}^{\sigma(X,Y)}$ (vrd. ülesanne 8.5). Vastupidise sisalduvuse näitamiseks võtame suvalise $z \in X \diagdown \overline{E}^{\tau}$ ning leiame vastavalt lausele 7.14 funktsionaali $f \in X' = Y$ omadusega $f(z) \notin \overline{f(E)}$, kus sulund on võetud LKR-s $\mathbb{K}$. Seega $2\delta := \inf_{x\in E} |f(z) - f(x)| > 0$ (põhjendada!)✠ ehk $|f(z) - f(x)| \geqslant 2\delta > 0$ iga $x \in E$ korral. Kuna f on $\sigma(X, Y)$-pidev funktsionaal, siis

$$U := \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant \delta\}$$

on $\sigma(X, Y)$-nulliümbrus ja $z + U$ on punkti z ümbrus nõrgas topoloogias $\sigma(X, Y)$. Seejuures $(z + U) \cap E = \varnothing$: kui $x \in z + U$, siis $x - z \in U$, mistõttu $|f(z) - f(x)| = |f(x - z)| \leqslant \delta$ ja seega $x \notin E$. Tähendab, $z \notin \overline{E}^{\sigma(X,Y)}$. ■

Teoreem 8.7. *Kõigil antud duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas olevatel lokaalselt kumeratel topoloogiatel on ruumis X ühed ja samad kinnised kumerad hulgad.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Polaarid. Definitsioon. Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar ja $E \subset X$. Alamhulka

$$E^0 := \{f \in Y \mid \forall x \in E : \ |f(x)| \leqslant 1\}$$

vektorruumis Y nimetatakse hulga E *polaariks* duaalsuse $\langle X, Y\rangle$ suhtes.

Analoogiliselt defineeritakse hulga $G \subset Y$ polaar G^0 vektorruumis X:

$$G^0 := \{x \in X \mid \forall f \in G : \ |f(x)| \leqslant 1\}.$$

Polaari mõiste osutub tõhusaks instrumendiks duaalsuseteoorias. Märgime järgmisi polaariga seotud omadusi.

Ülesanne 8.6. Näidata, et $E \subset F \Rightarrow F^0 \subset E^0$.
Ülesanne 8.7. Näidata, et $(\lambda E)^0 = \frac{1}{\lambda} E^0$ $(\lambda \in \mathbb{K} \diagdown \{0\})$.
Ülesanne 8.8. Näidata, et $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha\right)^0 = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha^0$.
Ülesanne 8.9. Tõestada, et E^0 on $\sigma(Y, X)$-kinnine absoluutselt kumer hulk.
Ülesanne 8.10. Vektoralamruumi $X_0 \subset X$ korral

$$(X_0)^0 = (X_0)^{\perp} := \{f \in Y \mid \forall x \in X_0 : \ f(x) = 0\}.$$

Lause 8.8. *Olgu* $\mathfrak{B}$ *nulliümbruste baas LKR-s* (X,τ). *Ruumi* X *kaasruum* X' *langeb kokku ühendiga* $\bigcup\{U^0 \mid U\in\mathfrak{B}\}$, *kus polaarid on võetud* ***duaalsuse*** $\langle X,X^*\rangle$ ***suhtes****.*

Tõestus. Väide järeldub tõsiasjast, et lineaarne funktsionaal $f\colon X\to\mathbb{K}$ on pidev parajasti siis, kui leidub nulliümbrus $U\in\mathfrak{B}$ omadusega $|f(x)|\leqslant 1$ iga $x\in U$ korral. ■

Bipolaarid. Polaari moodustamise operatsiooni võib rakendada järjest rohkem kui üks kord. Olgu $\langle X,Y\rangle$ ja $\langle Y,Z\rangle$ duaalsed paarid, kus $X\subset Z\subset Y^*$. Hulka $E^{00}:=(E^0)^0$, kus esimene polaar on võetud duaalsuse $\langle X,Y\rangle$ ja teine $\langle Y,Z\rangle$ suhtes, nimetatakse hulga E *bipolaariks* (vaadeldavate duaalsuste suhtes).

Ülesanne 8.11. Näidata, et $E\subset E^{00}$.

Lause 8.9 (***teoreem bipolaarist***)**.** *Olgu* $\langle X,Y\rangle$ *ja* $\langle Y,Z\rangle$ *duaalsed paarid, kus* $X\subset Z\subset Y^*$. *Hulga* $E\subset X$ *bipolaar* E^{00} *vektorruumis* Z *langeb kokku ruumis* Z *võetud* $\sigma(Z,Y)$*-kinnise absoluutselt kumera kattega, s.t.*

$$E^{00}=\overline{\operatorname{absconv}E}^{\sigma(Z,Y)}.$$

Tõestus. Tähistame $C:=\overline{\operatorname{absconv}E}^{\sigma(Z,Y)}$, seejuures vaatleme hulka E vektorruumi Z alamhulgana. Ilmselt on C $\sigma(Z,Y)$-kinnine absoluutselt kumer hulk (vrd. lause 5.3). Seosest $E\subset E^{00}$ ja ülesandest 8.9 saame sisalduvuse $E^{00}\supset C$ (kontrollida!)✠. Vastupidise sisalduvuse tõestamiseks võtame suvalise $G\in Z\diagdown C$ ning näitame, et $G\notin E^{00}$. Vastavalt teoreemile 7.15(a) leiame elemendi $\varphi\in(Z,\sigma(Z,Y))'$, mis rahuldab tingimust

$$|\varphi(F)|\leqslant 1\ \ (F\in\operatorname{absconv}E),\quad |\varphi(\,G)|>1.$$

Kuna $\varphi\in Y$ ja $F,G\in Z\subset Y^*$, võime sama tingimuse kirjutada kujul

$$\exists f\in Y:|F(f)|\leqslant 1\ \ (F\in\operatorname{absconv}E),\quad |G(f)|>1.$$

Kui pidada silmas, et $E\subset\operatorname{absconv}E\subset X$, saame $|f(x)|\leqslant 1$ iga $x\in E$ korral, mis tähendab, et $f\in E^0$. Seosest $|G(f)|>1$ järeldub seega $G\notin E^{00}$. Niisiis, $E^{00}\subset C$ ja kokkuvõttes $E^{00}=C$. ■

Enamasti kasutame me teoreemi bipolaarist juhul $Z=X$. Kui X on eralduv LKR, siis alamhulga $E\subset X$ bipolaari E^{00} all mõistame me duaalsuste $\langle X,X'\rangle$ ja $\langle X',X\rangle$ suhtes võetud bipolaari, s.t.

$$E^{00}=\{x\in X\mid \text{kui } f\in X' \text{ ja iga } z\in E \text{ korral } |f(z)|\leqslant 1,\ \text{siis } |f(x)|\leqslant 1\}.$$

Järeldus 8.10. *Eralduva LKR-i* (X,τ) *alamhulga* E *bipolaar* E^{00} *on hulga* E *absoluutselt kumera katte sulund LKR-s* X, *s.t.* $E^{00}=\overline{\operatorname{absconv}E}^{\tau}$.

Järeldus 8.11. *Kui* E *on eralduva LKR-i* X *alamhulk, siis* $E^{000}:=(E^{00})^0=E^0$.

9 Polaartopoloogiad

9.1 $\mathfrak{S}$-topoloogiad ja võrdpidevad hulgad

Polaaride abil on antud duaalse paari $\langle X, Y\rangle$ korral mugav defineerida lokaalselt kumeraid topoloogiaid nii ruumis X kui ka ruumis Y. ***Idee*** on järgmine. Me fikseerime vektorruumis Y mingi selliste alamhulkade S süsteemi $\mathfrak{S}$, et nende polaarid S^0 oleksid vektorruumis X neelavad hulgad. Kuna polaarid on alati absoluutselt kumerad, siis sel juhul on süsteem $\{S^0 \mid S \in \mathfrak{S}\}$ mingi lokaalselt kumera topoloogia nulliümbruste prebaas (vrd. art. 7.1). Seejuures huvitavad meid eeskätt kaks küsimust. Esiteks, *kuidas valida süsteem $\mathfrak{S}$ nii, et saadud topoloogia oleks eralduv*, ja teiseks, *millistel eeldustel on see topoloogia duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas?*

Kõigepealt kirjeldame hulki $S \subset Y$, mille **polaar $S^0 \subset X$ on neelav alamhulk.**

Lause 9.1. *Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar. Alamhulga $B \subset Y$ polaar B^0 on neelav hulk vektorruumis X parajasti siis, kui B on $\sigma(Y, X)$-tõkestatud.*

Tõestus. Paneme tähele, et suvaliste $x \in X$ ja $\lambda > 0$ korral

$$\lambda x \in B^0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in B : |f(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda} =: M.$$

Teiste sõnadega, polaar B^0 neelab elemendi $x \in X$ parajasti siis, kui

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ iga } f \in B \text{ korral},$$

s.t. kui seosega $p_x(f) = |f(x)|$ vektorruumis Y määratud poolnorm p_x (vrd. art. 8.2, märkus 4^0) on hulgas B tõkestatud. Järelikult neelab B^0 iga elemendi $x \in X$ (s.t. B^0 on neelav) parajasti siis, kui kõik poolnormid p_x, kus $x \in X$, on hulgas B tõkestatud, s.t. kui B on $\sigma(Y, X)$-tõkestatud. ∎

Lausel 9.1 põhineb talle eelnenud märkuses esitatud topoloogiate konstrueerimise idee. Selle järgi määratud lokaalselt kumerad topoloogiad on lihtsalt kirjeldatavad nii geomeetriliselt (s.t. nulliümbruste baasi abil) kui ka analüütiliselt (s.o. poolnormide keeles).

Polaartopoloogiad. Olgu $\mathfrak{S}$ vektorruumi Y mingi $\sigma(Y, X)$-tõkestatud alamhulkade süsteem, tähistame $\mathfrak{B}_0 := \{S^0 \mid S \in \mathfrak{S}\}$. Tegemist on neelavate absoluutselt kumerate alamhulkade süsteemiga vektorruumis X, mistõttu süsteem

$$\mathfrak{B} := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (S_i)^0 \mid \varepsilon > 0,\ S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

on teatava lokaalselt kumera topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nulliümbruste baas vektorruumis X (vrd. art. 7.1). Topoloogiat $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nimetatakse *süsteemiga $\mathfrak{S}$ määratud polaartopoloogiaks* ehk *ühtlase koonduvuse topoloogiaks süsteemi $\mathfrak{S}$ alamhulkades.* Üldiselt nimetame selliselt konstrueeritud topoloogiaid *polaartopoloogiateks* ehk *$\mathfrak{S}$-topoloogiateks.*

Esitame mõned **tähelepanekud seoses baasiga $\mathfrak{B}$**. ***Esiteks***, on selge, et tänu seosele $S^0 = S^{000}$ topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ ei muutu, kui asendame esialgses etteantud süsteemis $\mathfrak{S}$ hulgad S nende bipolaaridega $S^{00} = \overline{\text{absconv} S}^{\sigma(Y,X)}$. Seega *võime alati eeldada, et hulgad $S \in \mathfrak{S}$ on absoluutselt kumerad ja $\sigma(Y,X)$-kinnised.*

Teiseks, topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ ei muutu, kui $\mathfrak{S}$ asendada süsteemiga $\widehat{\mathfrak{S}} := \{\alpha S \mid \alpha > 0,\ S \in \mathfrak{S}\}$, sest $\mathfrak{B}_0 \subset \{\alpha S^0 \mid \alpha > 0,\ S \in \mathfrak{S}\} \subset \mathfrak{B}$ (vt. lausele 7.2 järgnev märkus). Analoogiliselt võime süsteemi $\mathfrak{S}$ asendada lõplike ühendite süsteemiga $\{S_1 \cup \ldots \cup S_n \mid S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S},\ n \in \mathbb{N}\}$.

Niisiis *võime vajaduse korral eeldada, et süsteem $\mathfrak{S}$ rahuldab tingimusi*

(PT$_1$) $S_1, S_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow \exists\, S \in \mathfrak{S} : S_1 \cup S_2 \subset S$,

(PT$_2$) $S \in \mathfrak{S},\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda S \in \mathfrak{S}$.

Veendume, et eeldustel **(PT$_1$)** ja **(PT$_2$)** on topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nulliümbruste prebaas $\mathfrak{B}_0$ tegelikult nulliümbruste baas. Võtame suvalise $U = \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (S_i)^0 \in \mathfrak{B}$ ja näitame, et leidub $S \in \mathfrak{S}$ omadusega $S^0 \subset U$. Polaaride omaduste kohaselt kehtib seos

$$U = \left(\frac{1}{\varepsilon} \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right)^0 .$$

Tingimuse **(PT$_1$)** põhjal saame leida $S' \in \mathfrak{S}$ omadusega $S' \supset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Olgu $S := \frac{1}{\varepsilon} S'$, siis $S \in \mathfrak{S}$ (vrd. **(PT$_2$)**) ja

$$S^0 = \varepsilon S'^0 \subset \varepsilon \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \right)^0 = \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (S_i)^0 = U.$$

Püstitame nüüd küsimuse **polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ eralduvusest.** Selleks on tarvilik ja piisav tingimus (vt. lause 7.2)

$$\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists S \in \mathfrak{S}\ \ \exists \lambda > 0 : \quad x \notin \lambda S^0,$$

mille võib esitada mitmel erineval kujul:

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \setminus \{0\}\, \exists S \in \mathfrak{S}\ \exists \lambda > 0\ \exists f \in S : \quad |f(x)| > \lambda \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus \{0\}\, \exists f \in \cup \{S \mid S \in \mathfrak{S}\} : f(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow H_0 := \cup \{S \mid S \in \mathfrak{S}\} \text{ eraldab punktid vektorruumis } X. \end{aligned}$$

Näitame, et viimane tingimus on samaväärne nõudega

(PT$_3$) $\overline{\text{span} \bigcup \{S \mid S \in \mathfrak{S}\}}^{\sigma(Y,X)} = Y$.

Tõepoolest, teoreemi 7.15(b) põhjal (veenduda!)✠

$$\begin{aligned} \overline{\text{span} H_0}^{\sigma(Y,X)} \neq Y &\Leftrightarrow \exists f_0 \in Y \setminus \overline{\text{span} H_0} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : F_x(f) = 0 \ \ (f \in \text{span} H_0)\, ,\ F_x(f_0) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X \setminus \{0\} \quad \forall f \in \text{span} H_0 : \ F_x(f) = 0 \ \ [\text{siin } F_x(f) := f(x)] \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X \setminus \{0\} \quad \forall f \in H_0 : \ f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow H_0 \text{ ei eralda punkte ruumis } X. \end{aligned}$$

Niisiis, *tingimus* **(PT$_3$)** *on tarvilik ja piisav polaartopoloogia $T_{\mathfrak{S}}$ eralduvuseks.*

$\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ **kirjeldamine poolnormide abil.** Lause 7.3(b) põhjal on topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ määratud poolnormide süsteemiga $\{p_{S^0}\}_{S\in\mathfrak{S}}$, kus p_{S^0} on hulga S^0 Minkowski funktsionaal. Seejuures

$$\begin{aligned} p_{S^0}(x) &= \inf\left\{\mu > 0 \mid x \in \mu S^0\right\} = \inf\left\{\mu > 0 \mid \forall f \in S : |f(x)| \leqslant \mu\right\} \\ &= \inf\left\{\mu > 0 \mid \frac{1}{\mu}\sup_{f\in S}|f(x)| \leqslant 1\right\} \\ &= \sup_{f\in S}|f(x)| \quad (x \in X), \end{aligned}$$

seega on $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ määratud poolnormide süsteemiga $\left\{p^{(S)}\right\}_{S\in\mathfrak{S}}$, kus

$$p^{(S)}(x) := \sup_{f\in S}|f(x)| \quad (x \in X).$$

Siit selgub ka, *miks topoloogiat $T_{\mathfrak{S}}$ nimetatakse ühtlase koonduvuse topoloogiaks*:

$$\begin{aligned} x_\alpha \to x \ (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}) &\Leftrightarrow \forall S \in \mathfrak{S} : p^{(S)}(x_\alpha - x) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall S \in \mathfrak{S} : \sup_{f\in S}|f(x_\alpha) - f(x)| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall S \in \mathfrak{S} : f(x_\alpha) \to f(x) \ \text{ ühtlaselt hulgas } S. \end{aligned}$$

Tugev topoloogia. Rõhutame veel kord asjaolu, et hulkade $S \in \mathfrak{S}$ $\sigma(Y,X)$-tõkestatus on vajalik eeldus, sest vastasel juhul ei oleks S^0 neelav hulk. Niisiis, tugevaim duaalse paariga $\langle X, Y\rangle$ määratud polaartopoloogia vektorruumis X on määratud kõigi $\sigma(Y,X)$-tõkestatud alamhulkade süsteemiga $\mathfrak{S}_b$ vektorruumis Y. Loomulikult rahuldab süsteem $\mathfrak{S}_b$ tingimusi $\mathbf{(PT_1)}$ – $\mathbf{(PT_3)}$. Vastavat polaartopoloogiat $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_b}$ vektorruumis X nimetatakse *tugevaks topoloogiaks* ja tähistatakse $\beta(X,Y)$. Tänu seosele $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_1} \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_2}$ (põhjendada!)✠ on $\beta(X,Y)$ tõepoolest tugevam kõikidest polaartopoloogiatest, mida on võimalik duaalse paariga $\langle X, Y\rangle$ määrata.

Paneme tähele, et **nõrk topoloogia on polaartopoloogia**, nimelt $\sigma(X,Y) = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\sigma}$, kus $\mathfrak{S}_\sigma$ on kõigi ühe-elemendiliste alamhulkade süsteem $\{\{f\} \mid f \in Y\}$. Arutelust, mis eelnes tingimuste $\mathbf{(PT_1)}$ ja $\mathbf{(PT_2)}$ formuleerimisele, järeldub, et sellesama topoloogia saame siis, kui $\mathfrak{S}_\sigma$ on kõigi lõplike alamhulkade $S \subset Y$ süsteem, sel juhul on ka nõuded $\mathbf{(PT_1)}$ ja $\mathbf{(PT_2)}$ rahuldatud.

Lause 9.2. *Iga eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on polaartopoloogia. Täpsemalt, $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}^0}$, kus $\mathfrak{S}^0 := \{U^0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$ ja $\mathfrak{B}$ on τ-nulliümbruste baas.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ eralduva LKR-i (X,τ) nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest (vrd. lause 7.1). Sel juhul $U = U^{00}$ (vt. järeldus 8.11), ning $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}^0}$, kus $\mathfrak{S}^0 := \{U^0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$ ja polaarid võetakse duaalsuse $\langle X, X'\rangle$ suhtes. ■

Võrdpidevad hulgad. Definitsioon. Olgu (X,τ) TVR. Alamhulka $S \subset X'$ nimetatakse *võrdpidevaks* (täpsemalt *τ-võrdpidevaks*), kui on täidetud tingimus

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists U \in \mathfrak{B} : \ |f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (x \in U, \ f \in S).$$

Järgmine lause annab polaaride abil võrdpidevuse mõistele lihtsa kirjelduse.

Lause 9.3. *Eralduva LKR-i X puhul on alamhulk $S \subset X'$ võrdpidev parajasti siis, kui ta sisaldub mingi τ-nulliümbruse U polaaris U^0, mis on võetud duaalsuse $\langle X, X' \rangle$ suhtes.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Ülesanne 9.1. Tõestada, et kui S on τ-võrdpidev hulk, siis αS on τ-võrdpidev iga $\alpha > 0$ korral.

Ülesanne 9.2. Tõestada, et kui S_1 ja S_2 on τ-võrdpidevad hulgad, siis ka $S_1 \cup S_2$ on τ-võrdpidev.

Lausetest 9.2 ja 9.3 tuleneb järgmine teoreem.

Teoreem 9.4. *Iga eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on ühtlase koonduvuse topoloogia kõigis τ-võrdpidevates alamhulkades.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest. Tähistame sümboliga $\mathfrak{S}_\tau$ kõigi τ-võrdpidevate alamhulkade süsteemi, olgu $\mathfrak{S}^0 := \{U^0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$. Teatavasti $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}^0}$ (vrd. lause 9.2), lause 9.3 põhjal $\mathfrak{S}^0 \subset \mathfrak{S}_\tau$ (iga nulliümbruse polaar kaasruumis on võrdpidev), seetõttu $\tau \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\tau}$.

Teiselt poolt, kui $S \in \mathfrak{S}_\tau$, siis leidub $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $S \subset U^0$ (vrd lause 9.3). Seega

$$\forall S \in \mathfrak{S}_\tau \; \exists U \in \mathfrak{B} : S^0 \supset U^{00} = U,$$

tähendab, $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\tau} \subset \tau$. Kokkuvõttes saame, et $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\tau} = \tau$. ■

Võrdpidevate hulkadega tuleb meil tegemist ka edaspidi, seetõttu märgime mõned nende **olulisemad omadused**, mille tõestused jäävad lugejale harjutusülesanneteks. Me eeldame, et (X, τ) on eralduv LKR. Siis

- iga lõplik alamhulk $S \subset X'$ on võrdpidev✠,
- võrdpideva hulga $S \subset X'$ alamhulk on võrdpidev✠,
- kui $S \subset X'$ on võrdpidev, siis ka S^{00} on võrdpidev✠,
- kui $S \subset X'$ on võrdpidev, siis ka $\overline{S}^{\sigma(X',X)}$ ja absconv S on võrdpidevad✠,
- iga võrdpidev alamhulk $S \subset X'$ on $\sigma(X', X)$-tõkestatud✠.

9.2 Mackey topoloogia

Nagu eelmises peatükis öeldud, on duaalsuseteooria üheks eesmärgiks kirjeldada neid lokaalselt kumeraid topoloogiaid, mis on antud duaalsusega kooskõlas. Me oleme varustanud end sobiva uurimisaparatuuriga polaaride ja polaartopoloogiate näol ning oleme nüüd valmis seda ülesannet lahendama. Seejuures vajame me kahte järgmist ettevalmistavat lauset.

Lause 9.5. *Iga vektorruumi X korral on tema algebraline kaasruum X^* nõrgas topoloogias $\sigma(X^*, X)$ täielik LKR.*

Tõestus. Olgu $(f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ suvaline $\sigma(X^*, X)$-Cauchy pere ruumis X^*, s.t. (vrd. art. 3.2)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in X \; \exists \alpha_0 \in \Gamma : \alpha, \alpha' \geqslant \alpha_0 \Rightarrow |f_\alpha(x) - f_{\alpha'}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Seega on arvpere $(f_\alpha(x))$ iga fikseeritud $x \in X$ korral Cauchy pere ning seega koonduv, olgu $f(x) := \lim\limits_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha(x)$. On selge, et f on lineaarne, s.t. $f \in X^*$, ja $f_\alpha \to f \; (\sigma(X^*, X))$. ■

Lause 9.6 (***Alaoglu teoreem***)**.** *Eralduva LKR-i* (X,τ) *iga nulliümbruse* U *polaar* U^0*, mis on moodustatud duaalsuse* $\langle X,X'\rangle$ *suhtes, on* $\sigma(X',X)$*-kompaktne alamhulk ruumis* X'*. Seejuures* $U^0=U^{\oplus}$*, kus* $^{\oplus}$ *tähistab polaari duaalsuse* $\langle X,X^*\rangle$ *suhtes.*

Tõestus. Selge, et $U^0=U^{\oplus}\cap X'$. Ühelt poolt on $U^{\oplus}$ kui kinnine alamhulk ***täielikus*** LKR-s $(X^*,\sigma(X^*,X))$ selles ruumis täielik. Teisalt, kuna $U^{\oplus\oplus}$ sisaldab neelava hulga U, siis lause 9.1 põhjal on $U^{\oplus}$ tõkestatud LKR-s $(X^*,\sigma(X^*,X))$, lause 8.1 kohaselt on $U^{\oplus}$ täielikult tõkestatud. Seega tuleneb teoreemist 3.7 hulga $U^{\oplus}$ $\sigma(X^*,X)$-kompaktsus. Näitame, et tegelikult $U^0=U^{\oplus}$. Sisalduvuse $U^{\oplus}\subset U^0$ kontrollimiseks märgime, et kui $f\in U^{\oplus}$, siis f on tõkestatud τ-nulliümbruses U, lause 6.1 põhjal on ta τ-pidev, s.t. $f\in X'$. Me näitasime, et $U^{\oplus}\subset X'$, järelikult $U^0=U^{\oplus}$. Kuna $\sigma(X^*,X)\mid_{X'}=\sigma(X',X)$, siis U^0 on topoloogias $\sigma(X',X)$ kompaktne. Lause on tõestatud. ∎

Mackey topoloogia. Olgu $\langle X,Y\rangle$ suvaline duaalne paar. Paneme tähele, et alamhulkade süsteemiga

$$\mathfrak{S}_0:=\{S\subset Y\mid S \text{ on } \sigma(Y,X)\text{-kompaktne ja absoluutselt kumer}\}$$

määratud polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$ on tugevam kui nõrk topoloogia $\sigma(X,Y)$. Tõepoolest, kuna $\sigma(X,Y)=\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\sigma}$, kus $\mathfrak{S}_\sigma:=\{S^{00}\mid S\subset Y \text{ on lõplik hulk}\}$ ja S^{00} on Alaoglu teoreemi kohaselt $\sigma(Y,X)$-kompaktne, siis $\mathfrak{S}_\sigma\subset\mathfrak{S}_0$, mistõttu $\sigma(X,Y)\subset\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$. Siit tuleneb muuhulgas, et $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$ on eralduv topoloogia (selgitada!)✠.

Näitame, et $\mathfrak{S}_0$ rahuldab nõudeid $\mathbf{(PT_1)}$ ja $\mathbf{(PT_2)}$, siis $\mathfrak{B}_0:=\{S^0\mid S\in\mathfrak{S}_0\}$ on nulliümbruste baas topoloogias $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$. Tingimuse $\mathbf{(PT_1)}$ kontrollimiseks olgu $S_1,S_2\in\mathfrak{S}_0$, moodustame hulga $S:=\operatorname{absconv}(S_1\cup S_2)$, lause 5.5 kohaselt on S $\sigma(Y,X)$-kompaktne. Kuna S on ka absoluutselt kumer, siis $S\in\mathfrak{S}_0$, seejuures $S\supset S_1\cup S_2$, seega on tingimus $\mathbf{(PT_1)}$ süsteemi $\mathfrak{S}_0$ puhul täidetud. Tingimus $\mathbf{(PT_2)}$ on täidetud, sest λS on iga $S\in\mathfrak{S}_0$ ja $\lambda>0$ korral absoluutselt kumer $\sigma(Y,X)$-kompaktne hulk.

Lisaks märgime, et $S=S^{00}$ iga $S\in\mathfrak{S}_0$ korral (põhjendada!)✠.

Definitsioon. Polaartopoloogiat $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$ nimetatakse (duaalse paariga $\langle X,Y\rangle$ määratud) *Mackey topoloogiaks* vektorruumis X ja tähistatakse $\tau(X,Y)$.

Mackey topoloogia tähtsus selgub järgnevast lausest, mis on duaalsuseteooria üks olulisemaid väiteid.

Teoreem 9.7 (***Mackey-Arensi teoreem***)**.** *Eralduv lokaalselt kumer topoloogia* τ *vektorruumis* X *on antud duaalsusega* $\langle X,Y\rangle$ *kooskõlas parajasti siis, kui* $\sigma(X,Y)\subset\tau\subset\tau(X,Y)$*. Seejuures leidub süsteemi* $\mathfrak{S}_0$ *selline alamsüsteem* $\mathfrak{S}$*, et* $\tau=\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$*.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $(X,\tau)'=Y$. Ühelt poolt $\sigma(X,Y)\subset\tau$ teoreemi 8.4 põhjal, teisalt langeb τ kokku polaartopoloogiaga $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}:=\{U^0\mid U\in\mathfrak{B}\}$ ja $\mathfrak{B}$ on τ-nulliümbruste baas (vrd. lause 9.2). Märgime, et hulgad $U^0\in\mathfrak{S}$ on Alaoglu teoreemi kohaselt $\sigma(Y,X)$-kompaktsed. Seega $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{S}_0$, mis tähendab sisalduvust $\tau\subset\tau(X,Y)$. Ühtlasi tõestasime ka väite teise osa, s.t. me leidsime $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{S}_0$ omadusega $\tau=\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$.

Piisavus. Olgu $\sigma(X,Y)\subset\tau\subset\tau(X,Y)$, siis

$$Y=(X,\sigma(X,Y))'\subset X':=(X,\tau)'\subset(X,\tau(X,Y))'.$$

Näitame, et $H := (X, \tau(X,Y))' = Y$, sel juhul kehtib ka seos $X' = Y$, mida me tahame tõestada.

Paneme tähele, et iga $S \in \mathfrak{S}_0$ on tänu oma $\sigma(Y,X)$-kompaktsusele $\sigma(H,X)$-kinnine. Et selles veenduda, võtame hulga S sellise elementide pere $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, mis on $\sigma(H,X)$-koonduv mingiks punktiks $f \in H$, ja näitame, et $f \in S$. Hulga S nõrga kompaktsuse tõttu leidub osapere $(g_\beta)_{\beta\in\Delta}$ omadusega $g_\beta \to g$ $(\sigma(Y,X))$, kus $g \in S$. Kuna $\sigma(H,X)|_Y = \sigma(Y,X)$ (vrd. (8.8)), siis $g_\beta \to g$ $(\sigma(H,X))$. Koonduva pere iga osapere koondub üheks ja samaks piirväärtuseks, seetõttu $f = g \in S$.

Hulga $S \in \mathfrak{S}_0$ $\sigma(H,X)$-kinnisuse tõttu

$$S^{00} = \overline{\text{absconv}\, S}^{\sigma(H,X)} = \overline{S}^{\sigma(H,X)} = S \subset Y.$$

Lausest 8.8 järeldub, et $H = \cup\{S^{00} \mid S \in \mathfrak{S}\} \subset Y$, s.t. $H = Y$. Teoreem on tõestatud. ■

Mackey-Arensi teoreemist saame vahetute järeldustena järgmised kaks väidet.

Järeldus 9.8. *Mackey topoloogia $\tau(X,Y)$ on tugevaim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mis on duaalsusega $\langle X,Y\rangle$ kooskõlas.*

Järeldus 9.9. *Eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on duaalsusega $\langle X,Y\rangle$ kooskõlas parajasti siis, kui ta on esitatav polaartopoloogiana $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on vektorruumi Y mingi absoluutselt kumerate $\sigma(Y,X)$-kompaktsete alamhulkade süsteem.*

9.3 Mackey teoreem tõkestatud hulkadest

Selle artikli eesmärgiks on tõestada järgmine tähtis väide.

Teoreem 9.10 (***Mackey teoreem***). *Eralduva LKR-i X alamhulk E on tõkestatud parajasti siis, kui ta on nõrgalt (s.t. $\sigma(X,X')$-)tõkestatud.*

Mackey teoreemist tuleneb lihtsalt järgmine oluline fakt (kontrollida!)✠.

Järeldus 9.11. *Antud duaalsusega $\langle X,Y\rangle$ kooskõlas olevatel lokaalselt kumeratel topoloogiatel vektorruumis X on ühed ja samad tõkestatud hulgad.*

Mackey teoreemi tõestuseks vajalikku eeltööd alustame järgmiste **tähelepanekutega**.

(I) Olgu V vektorruumi X absoluutselt kumer alamhulk. *Näitame, et*

$$X_V := \text{span} V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV. \tag{9.1}$$

Õieti on vaja kontrollida vaid sisalduvust $\text{span}V \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nV$, vastupidise sisalduvuse kehtivuses ei ole kahtlust. Niisiis, olgu $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m \in \text{span}V$, kus $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja $x_1, \ldots, x_m \in V$. Sel juhul

$$x = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} x_k = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \, z_k,$$

kusjuures $z_k := \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} x_k \in V$, sest V on tasakaalus hulk. Hulga V kumeruse tõttu

$$x \in r\left(\frac{|\alpha_1|}{r}V + \ldots + \frac{|\alpha_m|}{r}V\right) \subset rV,$$

kus $r := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|$. Kui valida $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $n_0 \geqslant r$, siis

$$x \in rV \subset n_0 V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nV.$$

Seosest (9.1) tuleneb, et *absoluutselt kumer alamhulk V on neelav vektorruumis X parajasti siis, kui* span$V = X$ (põhjendada!)✠.

(II) Kuna X_V on vektorruum, milles tähelepaneku **(I)** kohaselt V on neelav hulk, siis tema Minkowski funktsionaal p_V on poolnorm vektorruumis X_V. Ta määrab mingi lokaalselt kumera topoloogia τ_V, süsteem $\{\varepsilon V \mid \varepsilon > 0\}$ on selle nulliümbruste baas. *LKR (X_V, τ_V) on eralduv parajasti siis, kui p_V on norm* (kontrollida!)✠.

(III) Eeldame lisaks, et X *on algselt eralduv LKR topoloogiaga* τ, *milles V on tõkestatud alamhulk, ja näitame, et siis (X_V, p_V) on normeeritud ruum.* Olgu $\tau_0 := \tau|_{X_V}$. Kui $\mathfrak{B}$ on mingi nulliümbruste baas ruumis (X, τ), siis $\mathfrak{B}_0 := \{U \cap X_V \mid U \in \mathfrak{B}\}$ on τ_0-nulliümbruste baas. Kuna V on τ-tõkestatud, siis iga $U \in \mathfrak{B}$ puhul saab leida $\varepsilon > 0$ omadusega $\varepsilon V \subset U$. See tähendab, et $\tau_0 \subset \tau_V$, millest järeldub topoloogia τ_V eralduvus. Tähelepanekust **(II)** tuleneb, et (X_V, τ_V) on normeeruv.

(IV) Eeldame lõpuks, et V *on* ***kompaktne*** *alamhulk eralduvas LKR-s (X, τ), ja näitame, et sel juhul on (X_V, p_V) Banachi ruum.*

Kuna V on τ-kompaktne alamhulk, siis on ta τ-kinnine, seega ka τ_0-kinnine, mistõttu $V = \{x \in X \mid p_V(x) \leqslant 1\}$ (selgitada!)✠. Niisiis on V normeeritud ruumi (X_V, p_V) kinnine ühikkera. Olgu (x_n) suvaline Cauchy jada normeeritud ruumis (X_V, p_V), tema tõkestatuse tõttu leidub $M > 0$, et $p_V(x_n) \leqslant M$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ puhul. Tähistame $z_n := \frac{1}{M} x_n$, ilmselt on ka (z_n) Cauchy jada normeeritud ruumis (X_V, p_V) (põhjendada!)✠, samal ajal $p_V(z_n) \leqslant 1$, mistõttu $z_n \in V$ (põhjendada!)✠. Olgu $\varepsilon > 0$. Leiame $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n, m \geqslant N \Rightarrow z_n \in z_m + \varepsilon V.$$

Hulga V kompaktsuse tõttu LKR-s (X, τ) saab jadast (z_n) eraldada sellise osapere $\left(z_{n_\gamma}\right)_{\gamma \in \Gamma}$, mis koondub selles ruumis. Olgu $z := \lim\limits_{\gamma \in \Gamma} z_{n_\gamma}$, siis $z \in V$. Kuna $z_m + \varepsilon V$ on kinnine alamhulk LKR-s (X, τ) (selgitada!)✠, siis sellest, et $z_{n_\gamma} \in z_m + \varepsilon V$, kui $n_\gamma, m \geqslant N$, järeldub seos $z \in z_m + \varepsilon V$ iga $m \geqslant N$ korral. Niisiis,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; : m \geqslant N \Rightarrow z_m \in z + \varepsilon V$$

ehk $z_m \to z$, seega $x_m \to x := Mz \in X_V$ normeeritud ruumis (X_V, p_V). Tähendab, (X_V, p_V) on Banachi ruum.

Võtame eelneva arutelu kokku järgmises lauses.

Lause 9.12. *Iga absoluutselt kumer kompaktne alamhulk V eralduvas LKR-s X määrab Banachi ruumi (X_V, p_V), kus X_V on hulga V lineaarne kate ja p_V selle hulga Minkowski funktsionaal vektorruumis X_V. Seejuures on normi p_V poolt määratud topoloogia tugevam kui ruumi X poolt indutseeritud topoloogia.*

Selle lause abil tõestame järgnevalt artikli algul sõnastatud Mackey teoreemi. Seejuures kasutame ühte funktsionaalanalüüsi põhiprintsiipidest, nimelt Banachi ruumide teooriast tuntud *ühtlase tõkestatuse printsiipi.* See väidab, et *kui X ja Z on Banachi ruumid ja $\mathfrak{A}$ on mingi selline pidevate lineaarsete kujutuste $A : X \to Z$ hulk, mis on punktiviisi tõkestatud, s.t.*

$$\textit{iga } x \in X \textit{ korral on hulk } \{A(x) \mid A \in \mathfrak{A}\} \textit{ ruumis } Z \textit{ tõkestatud,}$$

siis $\sup\{\|A\| \mid A \in \mathfrak{A}\} < \infty$.

Teoreemi 9.10 tõestus. Seose $\sigma(X, X') \subset \tau$ tõttu on iga τ-tõkestatud alamhulk vektorruumis X ka $\sigma(X, X')$-tõkestatud. Näitame, et kehtib vastupidine väide. Olgu $E \subset X$ topoloogias $\sigma(X, X')$ tõkestatud, s.t.

$$\forall f \in X' \; \exists M_f > 0 : |f(x)| \leqslant M_f \quad (x \in E). \tag{9.2}$$

Olgu $\mathfrak{B}$ kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest koosnev τ-nulliümbruste baas ja olgu $U \in \mathfrak{B}$ fikseeritud nulliümbrus. Alaoglu teoreemi põhjal on $V := U^0$ kompaktne absoluutselt kumer alamhulk LKR-s $(X', \sigma(X', X))$. Tähistame $H := \operatorname{span} V = (X')_V$, normiga p_V on H lause 9.12 kohaselt Banachi ruum.

Edasi märgime, et iga fikseeritud $x \in X$ puhul on $\sigma(X', X)$-pideva lineaarse funktsionaali

$$F_x \colon X' \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x)$$

ahend $\varphi_x := F_x|_H$ pidev topoloogias $\sigma(H, X) = \sigma(X', X)|_H$. Kuna normi poolt määratud topoloogia on tugevam kui $\sigma(H, X)$, siis $\varphi_x \in H' := (H, p_V)'$. Tingimusest (9.2) tuleneb, et funktsionaalide hulk $\{\varphi_x\}_{x \in E}$ on Banachi ruumis H punktiviisi tõkestatud, eespool tsiteeritud ühtlase tõkestatuse printsiibi kohaselt on $\{\varphi_x\}_{x \in E}$ ühtlaselt, s.o. normi järgi tõkestatud. Seega leidub selline $M > 0$, et

$$\sup_{f \in V} |f(x)| = \sup_{f \in V} |\varphi_x(f)| \leqslant M \quad (x \in E)$$

ehk

$$\frac{1}{M} |f(x)| \leqslant 1 \quad (f \in V, \; x \in E),$$

s.t. $\frac{1}{M} E \subset V^0 = U^{00} = U$. Niisiis, iga $U \in \mathfrak{B}$ korral leidub selline $M > 0$, et $E \subset MU$, tähendab E on tõkestatud topoloogias τ. Teoreem on tõestatud.

Mackey teoreemi üheks rakenduseks on järgmine tähelepanuväärne lause.

Lause 9.13. *Metriseeruv lokaalselt kumer topoloogia on Mackey topoloogia. Täpsemalt, kui LKR (X, τ) on metriseeruv, siis $\tau = \tau(X, X')$.*

Tõestus. Olgu (X, τ) metriseeruv LKR. Kuna $\sigma(X, X') \subset \tau \subset \tau(X, X')$ (vt. teoreem 9.7), siis on vaja tõestada vaid sisalduvus $\tau \supset \tau(X, X')$. Moodustame absoluutselt kumeratest τ-nulliümbrustest baasi $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omadusega $V_{n+1} \subset V_n$. Olgu V absoluutselt kumer $\tau(X, X')$-nulliümbrus, näitame, et $V_n \subset V$ sobivalt valitud n puhul.

Oletame vastuväiteliselt, et $V_n \not\subset V$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis $V_n \not\subset nV$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest vastasel juhul saaksime seose $V \supset \frac{1}{n} V_n \supset V_m$ mingi sobivalt võetud m puhul. Valime punktid $x_n \in V_n \setminus nV$, siis $x_n \to 0$ (τ), järelikult on jada (x_n) τ-tõkestatud. Mackey teoreemi kohaselt on (x_n) tõkestatud topoloogias $\tau(X, X')$. Seega leidub $\delta > 0$ omadusega $\delta\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset V$ ehk $x_n \in \delta^{-1} V$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Viimane tingimus on ilmselt vastuolus jada (x_n) valikuga: kui $n > \delta^{-1}$, siis $x_n \in \delta^{-1} V \subset nV$. Niisiis leidub tõepoolest iga $\tau(X, X')$-nulliümbruse V jaoks $V_n \in \mathfrak{B}$ omadusega $V_n \subset V$, mis lõppkokkuvõttes tähendab, et $\tau = \tau(X, X')$. ■

10 Tünniruumid ja F-ruumid

10.1 Tugev topoloogia ja tünniruum

Veel tugevast topoloogiast. Nagu me eespool märkisime, on antud duaalse paari $\langle X, Y\rangle$ puhul lihtne leida tugevaimat polaartopoloogiat vektorruumis X. See on ühtlase koonduvuse topoloogia kõigis $\sigma(Y,X)$-tõkestatud alamhulkades, teatavasti nimetatakse seda tugevaks topoloogiaks ja tähistatakse $\beta(X,Y)$ (vt. art. 9.1). Arusaadavalt kehtivad seosed

$$\sigma(X,Y) \subset \tau(X,Y) \subset \beta(X,Y).$$

Antud eralduva LKR-i (X,τ) puhul huvitab meid selles kontekstis, millistel tingimustel langeb τ kokku tugeva topoloogiaga $\beta(X,X')$.

Nagu eespool, tähistame sümboliga $\mathfrak{S}_b$ kõigi $\sigma(Y,X)$-tõkestatud alamhulkade $S \subset Y$ süsteemi. Tugeva topoloogia nulliümbruste baasiks on

$$\mathfrak{B} := \left\{S^0 \mid S \in \mathfrak{S}_b\right\}$$

(põhjendada!)✠. Hulgad S^0 on $\sigma(X,Y)$-kinnised, absoluutselt kumerad ja neelavad (selgitada!)✠. Seejuures kuulub iga nimetatud kolme omadusega alamhulk $U \subset X$ süsteemi $\mathfrak{B}$ (veenduda!)✠. Niisiis: *tugeva topoloogia $\beta(X,Y)$ saab määrata nulliümbruste baasiga, mis koosneb kõikidest $\sigma(X,Y)$-kinnistest absoluutselt kumeratest neelavatest alamhulkadest vektorruumis X.* Sellised hulgad mängivad lokaalselt kumerates ruumides äärmiselt olulist rolli.

Tünniruum. **Definitsioon.** Kinnist absoluutselt kumerat neelavat alamhulka U LKR-s X nimetatakse *tünniks*. LKR-i X, milles iga tünn on nulliümbrus, nimetatakse *tünniruumiks*.

Lihtne on veenduda, et
• alamhulk U eralduvas LKR-s X on tünn parajasti siis, kui ta on neelav ning $U^{00} = U$, kus bipolaar on moodustatud duaalsuse $\langle X, X'\rangle$ suhtes (kontrollida!)✠,
• alamhulk U eralduvas LKR-s X on tünn parajasti siis, kui leidub selline $\sigma(X',X)$-tõkestatud hulk $S \subset X'$, et $U = S^0$ (põhjendada!)✠,
• kõigil antud duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas olevatel lokaalselt kumeratel topoloogiatel vektorruumis X on ühed ja samad tünnid (põhjendada!)✠ ja
• igas lokaalselt kumeras ruumis leidub tünnidest koosnev nulliümbruste baas (selgitada!✠; vrd. lause 7.1).

Lause 10.1. *Eralduva LKR-i (X,τ) korral on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *(X,τ) on tünniruum,*
(b) *iga $\sigma(X',X)$-tõkestatud alamhulk $S \subset X'$ on τ-võrdpidev,*
(c) $\tau = \beta(X,X')$,
(d) $\tau = \tau(X,X') = \beta(X,X')$,
(e) *kehtib seos $\tau = \tau(X,X')$ ja $\beta(X,X')$ on duaalsusega $\langle X, X'\rangle$ kooskõlas.*

Tõestus. (a) ⇒ (b) Kui X on tünniruum ja alamhulk $S \subset X'$ on $\sigma(X',X)$-tõkestatud, siis S^0 on tünn LKR-s X. Seega on S^0 τ-nulliümbrus, lause 9.3 kohaselt on S τ-võrdpidev.

(b) ⇒ (c) Kuna $\tau \subset \tau(X,X') \subset \beta(X,X')$ (selgitada!)✠, siis piisab veenduda, et eeldusel (b) kehtib sisalduvus $\beta(X,X') \subset \tau$. Olgu U suvaline $\beta(X,X')$-nulliümbrus, leiame $S \in \mathfrak{S}_b$, mille puhul $S^0 \subset U$ (selgitada!)✠. Alamhulk S on $\sigma(X', X)$-tõkestatud, eelduse (b) järgi on ta τ-võrdpidev, järelikult on S^0 τ-nulliümbrus. Tähendab, iga $\beta(X, X')$-nulliümbruse U jaoks leidub τ-nulliümbrus V omadusega $V \subset U$, seega $\beta(X, X') \subset \tau$.

Implikatsioonide (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (c) kehtivus on ilmne, kui pidada silmas Mackey-Arensi teoreemi 9.7. Kuna iga tünn LKR-s (X, τ) on $\beta(X, X')$-nulliümbrus (vrd. enne definitsiooni toodud kommentaar), siis (c) $\Rightarrow$ (a). Lause on tõestatud. ■

Võrdpidevad hulgad pidevate lineaarsete kujutuste ruumis. Lause 10.1 implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (b) on õige ka üldisemas kontekstis, kui pidevate lineaarsete funktsionaalide asemel vaadelda samade omadustega üldisemaid pidevaid lineaarseid kujutusi. Olgu X ja Z TVR-d. Meenutame, et sümboliga $L(X, Z)$ tähistame kõigi pidevate lineaarsete kujutuste $A\colon X \to Z$ vektorruumi. Lineaarne kujutus $A\colon X \to Z$ on pidev parajasti siis, kui

$$\forall V \in \mathfrak{B}_Z \ \exists U \in \mathfrak{B}_X : A(U) \subset V,$$

kus $\mathfrak{B}_X$ ja $\mathfrak{B}_Z$ on nulliümbruste baas vastavalt ruumis X ja Z. Alamhulka $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ nimetatakse *võrdpidevaks*, kui

$$\forall V \in \mathfrak{B}_Z \ \exists U \in \mathfrak{B}_X : A(U) \subset V \text{ iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Lihtne on näha, et erijuhul $Z = \mathbb{K}$ saame võrdpidevuse mõiste selles tähenduses, nagu me ta defineerisime artiklis 9.1.

Ülesanne 10.1. Veenduda, et iga võrdpidev hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on punktiviisi tõkestatud, s.t. hulk $\{A(x) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ on tõkestatud ruumis Z iga $x \in X$ korral.

Teoreem 10.2 (***ühtlase tõkestatuse printsiip***). *Olgu (X, τ) tünniruum ja olgu (Z, τ') mingi LKR. Iga punktiviisi tõkestatud hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on võrdpidev.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ punktiviisi tõkestatud alamhulk. Moodustame ruumis Z kinnistest absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosneva baasi $\mathfrak{B}_Z$. Võtame $V \in \mathfrak{B}_Z$ ning tähistame

$$U := \bigcap \left\{A^{-1}(V) \mid A \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Piisab veenduda, et U on tünn LKR-s X, sel juhul on ta τ-nulliümbrus ning kuna

$$A(U) \subset A\left(A^{-1}(V)\right) \subset V \text{ iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral,}$$

siis oleme tõestanud, et $\mathfrak{A}$ on võrdpidev.

Ilmselt on hulk U absoluutselt kumer ning τ-kinnine (põhjendada!)✠. Kui $x \in X$, siis $\{A(x) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ on τ'-tõkestatud, mistõttu leidub $\lambda > 0$ omadusega

$$\forall A \in \mathfrak{A}: \ A(x) \in \lambda V,$$

s.t. $x \in \lambda U$. Niisiis on U ka neelav ning seega tünn. ■

Teoreem 10.3 (***piiroperaatori pidevusest***). *Olgu A_n iga $n \in \mathbb{N}$ korral pidev lineaarne kujutus tünniruumist (X, τ) LKR-i (Z, τ'). Kui iga $x \in X$ korral eksisteerib ruumis Z piirväärtus $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$, siis $A \in L(X, Z)$.*

Tõestus. Kujutuse $A\colon X \to Z$ lineaarsuses ei ole kahtlust. Kuna kujutuste jada (A_n) on punktiviisi koonduv, siis on ta ka punktiviisi tõkestatud ning teoreemi 10.2 järgi võrdpidev. Olgu V kinnine nulliümbrus LKR-s Z, võrdpidevuse tõttu leidub $U \in \mathfrak{B}_X$, et $A_n(U) \subset V$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ puhul. Siis iga $x \in U$ korral seostest $A_n(x) \to A(x)$ ja $A_n(x) \in V$ järeldub $A(x) \in \overline{V} = V$. Kokkuvõttes

$$\forall V \in \mathfrak{B}_Z \; \exists U \in \mathfrak{B}_X : A(U) \subset V,$$

s.t. $A \in L(X, Z)$. ∎

10.2 F-ruumid. Lahtise kujutuse printsiip

Teatavasti (vrd. lause 7.7) on eralduv LKR (X, τ) metriseeruv parajasti siis, kui topoloogia τ saab määrata loenduva või lõpliku poolnormide süsteemiga $\{p_n\}$, sel juhul on seosega

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \quad (x, y \in X)$$

vektorruumis X defineeritud meetrika, mis määrab topoloogia τ. Seetõttu võib nulliümbruste baasiks LKR-s võtta süsteemi $\left\{\frac{1}{n}B \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, kus

$$B := \{x \in X \mid d(0, x) \leqslant 1\}. \tag{10.1}$$

F-ruum. Definitsioon. Täielikku metriseeruvat lokaalselt kumerat ruumi nimetatakse *F-ruumiks* ehk *Frechet' ruumiks.*

F-ruumide omaduste uurimist alustame järgmise lemmaga.

Lemma 10.4. *Olgu X ja Z F-ruumid ning olgu $A\colon X \to Z$ lineaarne sürjektiivne kujutus. Iga tünni $U \subset X$ korral leidub ruumis Z nulliümbrus V omadusega $V \subset \overline{A(U)}$.*

Tõestus. Kuna U on absoluutselt kumer neelav alamhulk ruumis X, siis (vrd. (9.1))

$$\operatorname{span} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU = X,$$

mistõttu

$$Z = A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nU\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(U) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{A(U)} \subset Z,$$

s.t.

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{A(U)}.$$

Kasutame meetriliste ruumide teooriast tuntud ***Baire'i teoreemi*:** kuna täielik meetriline ruum Z on esitatud oma kinniste alamhulkade $n\overline{A(U)}$ loenduva ühendina, siis mingi $m \in \mathbb{N}$ puhul on hulgal $m\overline{A(U)}$ sisepunkt. Siis on ka hulgal $\overline{A(U)}$ olemas sisepunkt y_0. Valime absoluutselt kumera nulliümbruse V LKR-s Z omadusega $y_0 + V \subset \overline{A(U)}$. Pidades silmas seoseid $V = -V$ ja $\overline{A(U)} = -\overline{A(U)}$, saame, et $-y_0 + V = -y_0 - V \subset -\overline{A(U)} = \overline{A(U)}$, mistõttu iga $y \in V$ korral

$$y = \frac{y + y_0}{2} + \frac{y - y_0}{2} \in \frac{1}{2}\overline{A(U)} + \frac{1}{2}\overline{A(U)} \subset \overline{A(U)}.$$

Niisiis, $V \subset \overline{A(U)}$. ∎

Tõestatud lemmast tuleneb vahetult järgmine fakt.

Lause 10.5. *Iga F-ruum X on tünniruum.*

Tõestus. Võtame lemmas 10.4 $Z := X$ ja $A := i \colon X \to X$ (ühikkujutus). Siis iga tünn $U \subset X$ sisaldab nulliümbrust V, järelikult on ka U ise nulliümbrus. ∎

Lemma 10.4 abil tõestame F-ruumide jaoks ***lahtise kujutuse printsiibi***, ühe funktsionaalanalüüsi põhiprintsiipidest.

Teoreem 10.6. *Pidev lineaarne sürjektiivne kujutus A F-ruumist (X, τ) F-ruumi (Z, τ') on lahtine, s.t. ta teisendab iga τ-lahtise alamhulga $G \subset X\tau'$-lahtiseks hulgaks $A(G)$.*

Tõestus. I. Näitame, et

$$\forall U \in \mathfrak{B}_X \; \exists V \in \mathfrak{B}_Z : V \subset \overline{A(U)}\,, \tag{10.2}$$

kus $\mathfrak{B}_X$ ja $\mathfrak{B}_Z$ on vastavalt ruumi X ja Z nulliümbruste baas absoluutselt kumeratest hulkadest, seejuures eeldame, et $\mathfrak{B}_Z := \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on omadusega $V_{n+1} \subset V_n$ (vrd. (4.1)).

Olgu $U \in \mathfrak{B}_X$. Leiame sellise tünni W, et $W \subset B = \{x \in X \mid d(0, x) \leqslant 1\}$. Kuna kinnised kerad εB, kus $\varepsilon > 0$ moodustavad τ-nulliümbruste baasi (vrd. (10.1)), siis saab leida sellise $\varepsilon > 0$, et $\varepsilon B \subset U$. Tähistame $\varepsilon_k := \frac{\varepsilon}{2^k}$ ning moodustame nulliümbrused $B_k := \varepsilon_k W \subset \varepsilon_k B$ iga $k \in \mathbb{N}$ puhul. Rakendame lemmat 10.4: kuna B_k on tünn (selgitada!)✠, siis leidub $n_k \in \mathbb{N}$ omadusega $V_{n_k} \subset \overline{A(B_k)}$, seejuures valime $n_k > n_{k-1}$. Tähistame $V := V_{n_1}$ ja näitame, et $V \subset A(U)$, s.t.

$$\forall y \in V \; \exists x \in U : y = A(x)\,.$$

Olgu $y \in V \subset \overline{A(B_1)}$, siis

$$(y + V_{n_2}) \cap A(B_1) \neq \varnothing,$$

järelikult leidub $y_1 \in A(B_1)$ omadusega

$$y - y_1 \in V_{n_2} \subset \overline{A(B_2)}.$$

Viimasest seosest järeldub sellise elemendi $y_2 \in A(B_2)$ olemasolu, mis rahuldab tingimust

$$y - y_1 - y_2 \in V_{n_3} \subset \overline{A(B_3)}$$

jne. Nii jätkates saame elementide jada (y_m) omadustega

$$y_m \in A(B_m)\,, \quad y - \sum_{k=1}^{m} y_k \in V_{n_{m+1}} \quad (m \in \mathbb{N})\,.$$

Kuna $V_{n_{m+1}} \subset V_{n_m}$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} y_k = y$ (põhjendada!)✠, s.t. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k = y$.

Fikseerime nüüd iga $k \in \mathbb{N}$ korral $x_k \in B_k$ nii, et $y_k = A(x_k)$, seejuures

$$\sum_k d(x_k, 0) \leqslant \sum_k \varepsilon_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon,$$

millest tuleneb rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ koonduvus F-ruumis X. Tõepoolest,

$$d\left(\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{l} x_k, 0\right) = d\left(\sum_{k=l+1}^{m} x_k, 0\right) \leqslant \sum_{k=l+1}^{\infty} d(x_k, 0) \to 0 \ \ (m \geqslant l,\ l \to \infty),$$

niisiis on $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy jada F-ruumis X ja seega koonduv, olgu $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$. Paneme tähele, et

$$d(x, 0) = d\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k, 0\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} d(x_k, 0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \varepsilon,$$

seega $x \in \varepsilon B \subset U$. Seejuures

$$A(x) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A(x_k) = y.$$

II. Veendume, et A on lahtine kujutus. Olgu $G \subset X$ τ-lahtine alamhulk ja y suvaline element kujutishulgas $A(G)$. Võtame $x \in G$, mille korral $A(x) = y$. Kuna x on hulga G sisepunkt, siis saab leida nulliümbruse $U \in \mathfrak{B}_X$ omadusega $x + U \subset G$, järelikult

$$A(G) \supset A(x + U) = A(x) + A(U) = y + A(U).$$

Rakendame tõestuse esimeses osas tõestatud väidet (10.2) ning leiame $V \in \mathfrak{B}_Z$ omadusega $V \subset A(U)$, sel juhul $y + V \subset y + A(U) \subset A(G)$. Tähendab, y on hulga $A(G)$ sisepunkt, mis ütleb, et $A(G)$ on lahtine hulk.

Teoreem on tõestatud. ■

10.3 Teoreem kinnisest graaafikust

Lahtise kujutuse printsiibi abil on lihtne tõestada järgmist teoreemi.

Teoreem 10.7 (***teoreem pöördkujutuse pidevusest***). *Olgu X ja Z F-ruumid. Kui kujutus $A \in L(X, Z)$ on pööratav, siis $A^{-1} \in L(Z, X)$.*

Tõestus. Teatavasti on pööratava lineaarse kujutuse pöördkujutus lineaarne, seega on meil vaja kontrollida vaid kujutuse $A^{-1}\colon Z \to X$ pidevust. Olgu $G \subset X$ lahtine hulk. Kuna $A\colon X \to Z$ on pidev sürjektiivne kujutus, siis saame rakendada lahtise kujutuse printsiipi, mille kohaselt $(A^{-1})^{-1}(G) = A(G)$ on lahtine hulk ruumis Z. Tähendab, kujutuse A^{-1} suhtes on lahtiste hulkade originaalid lahtised, mis tähendabki selle kujutuse pidevust. ■

Meenutame, et vektorruumide X ja Z otsekorrutis

$$X \times Z := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Z\}$$

on vektorruum koordinaaditi defineeritud tehetega:

$$(x,y) + (x',y') := (x+x', y+y')\,, \quad \lambda\,(x,y) := (\lambda x, \lambda y) \quad (\lambda \in \mathbb{K})\,.$$

Olgu järgnevas (X,τ) ja (Z,τ') F-ruumid, mille topoloogia τ ja τ' on määratud vastavalt poolnormide süsteemiga $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Defineerime funktsionaalid

$$r_{nm}\colon X \times Z \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto p_n(x) + q_m(y) \quad (n,m \in \mathbb{N})\,,$$

vahetu kontroll näitab, et need on poolnormid, kusjuures

$$r_{nm}((x,y)) = 0\ \ (n,m \in \mathbb{N}) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = 0_{X\times Z}$$

(kontrollida!)✠. Seega määrab poolnormide süsteem $\{r_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ vektorruumis $X \times Z$ ***metriseeruva*** lokaalselt kumera topoloogia. Paneme tähele, et (vrd. lause 7.5(a))

$$\begin{aligned}(x_k,y_k) \to (x,y)\ \ (k\to\infty) &\Leftrightarrow (x_k - x, y_k - y) \to 0\ \ (k \to \infty)\\ &\Leftrightarrow r_{nm}((x_k - x, y_k - y)) \to 0\ \ (n,m \in \mathbb{N},\ k \to \infty)\\ &\Leftrightarrow p_n(x_k - x) \to 0,\quad q_m(y_k - y) \to 0\ \ (n,m \in \mathbb{N},\ k\to\infty)\\ &\Leftrightarrow x_k \to x\ \ (\tau)\,,\quad y_k \to y\ \ (\tau') \quad (k \to \infty)\,.\end{aligned}$$

Niisiis tähendab koonduvus LKR-s $X \times Z$ koonduvust koordinaatide järgi. Täpselt samuti veendutakse, et $((x_k,y_k))$ on Cauchy jada ruumis $X \times Z$ parajasti siis, kui (x_k) ja (y_k) on Cauchy jada vastavalt ruumis X ja Z. Kuna mõlemad need ruumid on täielikud, siis leiduvad $x \in X$ ja $y \in Z$, et $x_k \to x$ (τ) ning $y_k \to y$ (τ'), järelikult $(x_k,y_k) \to (x,y)$ ruumis $X \times Z$. Me tõestasime, et $X \times Z$ on täielik.

Kokkuvõttes võime öelda, et *F-ruumide X ja Z otsekorrutis $X \times Z$ on F-ruum.*

Vaatleme projektsioone

$$T_X\colon X \times Z \to X, \quad (x,y) \mapsto x \text{ ja } T_Z\colon X \times Z \to Z, \quad (x,y) \mapsto y.$$

Selge, et T_X ja T_Z on lineaarsed kujutused, ilmselt on nad ka pidevad (kontrollida!)✠, niisiis, $T_X \in L(X \times Z, X)\,, T_Z \in L(X \times Z, Z)$.

Kujutuse graafik. Olgu $A\colon X \to Z$ lineaarne kujutus. Korrutisruumi $X \times Z$ alamhulka

$$\mathrm{gr}A := \{(x, A(x)) \mid x \in X\}$$

nimetatakse kujutuse A *graafikuks*. Lihtne on veenduda (kontrollida!)✠, et lineaarse kujutuse graafik on vektoralamruum vektorruumis $X \times Z$.

Definitsioon. Kui $\mathrm{gr}\ A = \overline{\mathrm{gr}A}$ F-ruumis $X \times Z$, siis öeldakse, et A on *kinnine kujutus.*

Ülesanne 10.2. Veenduda, et iga pidev lineaarne kujutus on kinnine.

Teoreem 10.8 (***teoreem kinnisest graafikust***)**.** *Lineaarne kinnine kujutus A F-ruumist X F-ruumi Z on pidev.*

Tõestus. Kuna gr$A$ on F-ruumi $X \times Z$ kinnine alamruum, siis on ta samuti F-ruum. Vaatleme projektsioonide T_X ja T_Z ahendeid $\widehat{T}_X := T_X\,|_{\mathrm{gr}A}$ ja $\widehat{T}_Z := T_Z\,|_{\mathrm{gr}A}$ ning paneme tähele, et $\widehat{T}_X$ on pööratav kujutus: iga $x \in X$ korral on originaal $(x, A(x))$ üheselt määratud. Seejuures on pöördkujutus $\left(\widehat{T}_X\right)^{-1} : X \to X \times Z$ teoreemi 10.7 põhjal pidev ja lineaarne ning

$$A(x) = \widehat{T}_Z\left((x, A(x))\right) = \widehat{T}_Z\left(\left(\widehat{T}_X\right)^{-1}(x)\right) = \widehat{T}_Z \circ \left(\widehat{T}_X\right)^{-1}(x) \quad (x \in X)\,,$$

s.t. $A = \widehat{T}_Z \circ \left(\widehat{T}_X\right)^{-1}$. Kuna mõlemad komponendid $\widehat{T}_Z$ ja $\left(\widehat{T}_X\right)^{-1}$ on pidevad, siis on ka $\widehat{T}_Z \circ \left(\widehat{T}_X\right)^{-1}$ pidev. Tähendab, $A \in L(X, Z)$. Teoreem on tõestatud. ■

Lineaarse kujutuse $A\colon X \to Z$, kus (X, τ) ja (Z, τ') on LKR-d, graafik on kinnine parajasti siis, kui kehtib järgmine implikatsioon (kontrollida!)✠:

$$[x_\gamma \to x\ \ (\tau)\ \text{ ja } A(x_\gamma) \to y\ \ (\tau')] \Rightarrow y = A(x)\,.$$

Niisiis võib öelda, et graafiku kinnisus ei garanteeri koonduva pere kujutiste pere koonduvust, kuid ta välistab võimaluse, et see koonduks "valeks" piirväärtuseks. Seega on graafiku kinnisus lineaarse kujutuse puhul oluliselt nõrgem tingimus kui selle kujutuse pidevus. Krestomaatiline näide kinnise graafikuga tõkestamata (s.o. mittepidevast) lineaarsest kujutusest normeeritud ruumide korral on diferentseerimisoperaator

$$D\colon X \to C[a, b]\,,\ x \mapsto x',$$

kus X on kõigi lõigus $[a, b]$ pidevalt diferentseeruvate funktsioonide $x = x(t)$ alamruum Banachi ruumis $C[a, b]$.

11 Projektiivsed piirid

Käesolevas ja järgnevas kahes peatükis käsitleme me meetodeid, mis võimaldavad antud lokaalselt kumerate ruumide baasil konstrueerida uusi. Põhimõtteliselt jagunevad need meetodid kahte (teatavas mõttes duaalsesse) klassi. Vastavalt neile nimetatakse konstrueeritud topoloogiat *induktiivseks* või *projektiivseks.*

11.1 Projektiivse piiri topoloogia

LKR-de projektiivne piir. Me ***eeldame selles artiklis***, et X on vektorruum ja (X_γ, τ_γ) on LKR-d (üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$) ning $v_\gamma \colon X \to X_\gamma$ on lineaarsed kujutused iga $\gamma \in \Gamma$ korral.

Definitsioon. Nõrgimat lokaalselt kumerat topoloogiat τ_{proj} vektorruumis X, mille suhtes kõik kujutused v_γ on pidevad, nimetatakse (LKR-de X_γ ja kujutustega v_γ määratud) *projektiivse piiri topoloogiaks.* LKR-i $(X, \tau_{\mathrm{proj}})$ nimetame sel juhul LKR-de (X_γ, τ_γ) *projektiivseks piiriks* (kujutuste v_γ suhtes).

Veendume, et *selline topoloogia on olemas ja üheselt määratud.* Olgu iga fikseeritud $\gamma \in \Gamma$ korral $\mathfrak{B}_\gamma$ absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosnev baas LKR-s X_γ. Üldisust kitsendamata eeldame, et
1) kui $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}_\gamma$, siis $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{B}_\gamma$, ja
2) kui $U \in \mathfrak{B}_\gamma$ ja $\lambda > 0$, siis $\lambda U \in \mathfrak{B}_\gamma$,
niisiis sisaldab $\mathfrak{B}_\gamma$ oma elementide lõplike ühisosade kordsed. Vaatleme vektorruumis X alamhulki

$$V := \bigcap_{\gamma \in H} v_\gamma^{-1}(U_\gamma), \tag{11.1}$$

kus $U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ ning $H \neq \varnothing$ on hulga Γ suvaline ***lõplik*** alamhulk. Vahetu kontroll näitab, et hulgad (11.1) on absoluutselt kumerad ja neelavad (veenduda!)✠ ning moodustavad seetõttu nulliümbruste prebaasi $\mathfrak{B}$ mingi lokaalselt kumera topoloogia τ jaoks vektorruumis X. Kuna aga süsteem $\mathfrak{B}$ sisaldab kõigi oma elementide lõplikud ühisosad ja kordsed (selgitada!)✠, siis on ta topoloogia τ nulliümbruste baas (vrd. art. 7.1). Kujutus $v_\gamma \colon (X, \tau) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ on pidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral, sest hulk $v_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ on iga $U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ puhul τ-nulliümbrus. Kui τ_1 on suvaline selline lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kujutused v_γ on pidevad, siis peavad kõik hulgad $v_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, aga siis ka iga hulk $V \in \mathfrak{B}$ olema τ_1-nulliümbrused. See tähendab, et $\tau \subset \tau_1$, järelikult $\tau = \tau_{\mathrm{proj}}$.

Eelneva arutelu kohaselt on τ_{proj} nõrgim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kõik hulgad $v_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, kus $U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ ja $\gamma \in \Gamma$, on nulliümbrused.

Lepime kokku, et projektiivse piiri topoloogia omaduste järgneval uurimisel kasutame (seda spetsiaalselt märkimata) eelnevas arutluses sissetoodud tähistusi.

Vastuse küsimusele **projektiivse piiri eralduvusest** annab järgmine lause.

Lause 11.1. *Eralduvate LKR-de (X_γ, τ_γ), kus $\gamma \in \Gamma$, projektiivne piir $(X, \tau_{\mathrm{proj}})$ on eralduv LKR parajasti siis, kui kujutused v_γ rahuldavad tingimust*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

Tõestus. Kuna (X_γ, τ_γ) on eralduv LKR, siis lause 2.7 põhjal $\bigcap_{U\in\mathfrak{B}_\gamma} U = \{0\}$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Seetõttu

$$\bigcap_{V\in\mathfrak{B}} V = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \bigcap_{U\in\mathfrak{B}_\gamma} v_\gamma^{-1}(U) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma^{-1}\left(\bigcap_{U\in\mathfrak{B}_\gamma} U\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}).$$

ning väide järeldub vahetult lausest 2.7. ■

Järgnevalt kirjeldame projektiivsel piiril määratud **lineaarsete kujutuste pidevust.**

Lause 11.2. *Olgu Z mingi LKR ja $(X, \tau_{\mathrm{proj}})$ LKR-de (X_γ, τ_γ), kus $\gamma \in \Gamma$, projektiivne piir. Lineaarne kujutus $A\colon Z \to X$ on pidev parajasti siis, kui kujutused $v_\gamma \circ A\colon Z \to X_\gamma$ on pidevad.*

Tõestus. Kui A on pidev, siis ka kujutused $v_\gamma \circ A$ on pidevad kui pidevate kujutuste kompositsioonid. Vastupidi, kui kujutused $v_\gamma \circ A\colon Z \to X_\gamma$ on iga $\gamma \in \Gamma$ korral pidevad, siis hulk $(v_\gamma \circ A)^{-1}(U_\gamma)$ on iga $U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ ja $\gamma \in \Gamma$ korral nulliümbrus ruumis Z. Tähendab, iga $V \in \mathfrak{B}$ korral, mis on esitatud kujul (11.1), on hulk

$$A^{-1}(V) = A^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in H} v_\gamma^{-1}(U_\gamma)\right) = \bigcap_{\gamma\in H} (v_\gamma \circ A)^{-1}(U_\gamma)$$

ruumi Z nulliümbrus (peame silmas, et H on lõplik hulk). Seega on A pidev kujutus. ■

Lause 11.3. *Alamhulk $E \subset X$ on τ_{proj}-tõkestatud parajasti siis, kui hulk $v_\gamma(E)$ on tõkestatud LKR-s X_γ iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Kõige olulisemat projektiivse piiri topoloogia erijuhtu – korrutistopoloogiat – käsitleme üksikasjalikumalt järgmises artiklis. Siinkohal vaatleme viit lihtsamat juhtu, millest kaks viimast on põhimõttelise tähendusega.

Näide 11.1. Olgu X_0 LKR-i (X, τ) vektoralamruum. Alamruumi topoloogia τ_0 on projektiivse piiri topoloogia, kus seda tekitav LKR-de süsteem $\{X_\gamma\}$ koosneb ühest elemendist, nimelt LKR-st X, ja vastavaks lineaarseks kujutuseks on sisestus $i\colon X_0 \to X$, $x \mapsto x$. Sel juhul koosneb projektiivse piiri nulliümbruste baas hulkadest

$$V := i^{-1}(U) = U \cap X_0 \quad (U \in \mathfrak{B}_X)$$

(siin $\mathfrak{B}_X$ on ruumi X nulliümbruste baas), mis tõepoolest moodustavad alamruumi topoloogia τ_0 nulliümbruste baasi.

Näide 11.2. Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar. Nõrk topoloogia $\sigma(X, Y)$ vektorruumis X on LKR-dega $X_f := \mathbb{K}$ ja kujutustega $f\colon X \to \mathbb{K}$, kus $f \in Y$), määratud projektiivse piiri topoloogia. Ühelt poolt $(X, \sigma(X,Y))' = Y$, seega iga $f \in Y$ on $\sigma(X,Y)$-pidev, teisalt on $\sigma(X,Y)$ vektorruumi X nõrgim lokaalselt kumer topoloogia omadusega $(X, \sigma(X,Y))' = Y$.

Näide 11.3. Olgu iga $\gamma \in \Gamma$ korral vektorruumis X määratud lokaalselt kumer topoloogia τ_γ. Defineerime selles ruumis projektiivse piiri topoloogia τ_{proj} LKR-de (X, τ_γ) ja lineaarsete kujutuste $v_\gamma := i$ suhtes, kus $i\colon X \to X$ on ühikkujutus. Lihtne on näha, et $\mathfrak{B} := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathfrak{B}_\gamma$ on topoloogia τ_{proj} nulliümbruste prebaas, kus $\mathfrak{B}_\gamma$ on τ_γ-nulliümbruste baas ruumis X (veenduda!)✠.

Näide 11.4. Olgu LKR-i X topoloogia τ määratud poolnormide süsteemiga $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Siis hulgad

$$V := \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i} \quad (\varepsilon > 0, \quad \gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}),$$

kus $V_\gamma := \{x \in X \mid p_\gamma(x) \leqslant 1\}$, moodustavad τ-nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$. Paneme tähele, et τ on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kõik poolnormid p_γ on pidevad. Tõepoolest, kui τ_1 on mingi niisugune topoloogia, siis V_γ on τ_1-nulliümbrus iga $\gamma \in \Gamma$ korral, mistõttu ka iga $V \in \mathfrak{B}$ on τ_1-nulliümbrus. Tähendab, $\tau \subset \tau_1$.

Edasi, iga fikseeritud $\gamma \in \Gamma$ korral määrab poolnorm p_γ vektorruumis X lokaalselt kumera topoloogia τ_γ. Seejuures poolnormi p_γ pidevus mingi lokaalselt kumera topoloogia τ' suhtes on samaväärne ühikkujutuse $i\colon (X,\tau') \to (X,\tau_\gamma)$ pidevusega (kontrollida!)✠. Seetõttu on lähtetopoloogia τ LKR-de (X,τ_γ) projektiivse piiri topoloogia ühikkujutuse i suhtes. Niisiis, ***iga LKR on esitatav poolnormeeritud ruumide projektiivse piirina***.

Näide 11.5. Olgu (X,τ) eralduv LKR, topoloogia τ on määratud kõigi τ-pidevate poolnormide süsteemiga $\mathcal{P}$. Moodustame iga $p \in \mathcal{P}$ korral faktorruumi $X_p := X/p^{-1}(\{0\})$, selle elementideks on ekvivalentsusseose $x \sim y :\Leftrightarrow p(x-y) = 0$ järgi moodustatud ekvivalentsiklassid $\mathbf{x} = x + p^{-1}(\{0\})$. Lihtne on näha, et kui $x \sim y$, siis $p(x) = p(y)$ (kontrollida!)✠. Defineerime igas vektorruumis X_p normi

$$\|\mathbf{x}\|_p := \inf_{z\in\mathbf{x}} p(z) = p(x) \quad (\mathbf{x} \in X_p)$$

ja ruumis X kanoonilised kujutused

$$k_p : X \to X_p, \ x \mapsto \mathbf{x} = x + p^{-1}(\{0\}) \quad (p \in \mathcal{P}),$$

siis $\|k_p(x)\|_p = p(x)$ iga $x \in X$ korral, seejuures $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} k_p^{-1}(\{0\}) = \{0\} = p^{-1}(\{0\})$.

Meie eesmärk on näidata, et topoloogia τ langeb kokku normeeritud ruumide X_p ja kanooniliste kujutuste k_p suhtes moodustatud projektiivse topoloogiaga τ_{proj}. Selleks paneme tähele, et
1) τ on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kõik poolnormid $p \in \mathcal{P}$ on pidevad (vrd. näide 11.4), ja
2) kujutus

$$k_p : (X,\tau') \to \left(X_p, \| \ \|_p\right) \tag{11.2}$$

on pidev lokaalselt kumera topoloogia τ' korral parajasti siis, kui poolnorm p on τ'-pidev (kontrollida!)✠.
Niisiis, ***iga eralduv lokaalselt kumer ruum on esitatav normeeritud ruumide projektiivse piirina***.

11.2 Lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutis

Olgu Γ mingi indeksite hulk ja olgu X_γ iga $\gamma \in \Gamma$ korral vektorruum üle ühe ja sama skalaaride korpuse $\mathbb{K}$. Moodustame **otsekorrutise**

$$X := \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma := \{x = (x_\gamma) \mid \forall\gamma \in \Gamma : x_\gamma \in X_\gamma\}.$$

Definitsiooni järgi on otsekorrutise elementideks (mitte tingimata suunatud) pered $x = (x_\gamma)$, mille elemente x_γ me tavaliste vektorite ja jadade eeskujul nimetame *koordinaatideks.* Kujutusi

$$\pi_\gamma : \prod_{\nu\in\Gamma} X_\nu \to X_\gamma, \quad (x_\nu) \mapsto x_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$$

nimetatakse *projektsioonideks.* Hulk $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ on vektorruum, kui defineerida

$$(x_\gamma) + (y_\gamma) := (x_\gamma + y_\gamma)\,, \text{ ja } \lambda\,(x_\gamma) := (\lambda x_\gamma) \quad (\lambda \in \mathbb{K})\,,$$

seejuures on projektsioonid π_γ lineaarsed (kontrollida!)✠. Kuna vektorruumi $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ nullelemendiks on pere, mille γ-s koordinaat on ruumi X_γ nullelement, siis kehtib seos

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \pi_\gamma^{-1}\left(0_{X_\gamma}\right) = \{0_X\}\,. \tag{11.3}$$

Defineerime iga $\gamma \in \Gamma$ puhul kujutused

$$j_\gamma : X_\gamma \to X,\ \ x_\gamma \mapsto (z_\nu)_{\nu\in\Gamma}\,, \text{ kus } z_\nu = x_\gamma, \text{ kui } \nu = \gamma, \text{ ja } z_\nu = 0, \text{ kui } \nu \neq \gamma,$$

ning kontrollime nende järgmisi omadusi.

Ülesanne 11.1. Näidata, et kujutus j_γ on lineaarne ja üks-ühene.

Ülesanne 11.2. Veenduda, et $\pi_\gamma \circ j_\gamma = i_{X_\gamma}$ (ühikkujutus) ja $\pi_\nu \circ j_\gamma = 0$, kui $\nu \neq \gamma$.

Ülesanne 11.3. Veenduda, et $\pi_\gamma \big|_{j_\gamma(X_\gamma)} = j_\gamma^{-1}$.

Korrutistopoloogia. Eeldame järgnevas, et (X_γ, τ_γ) on LKR-d ja defineerime otsekorrutises X projektiivse piiri topoloogia projektsioonide $\pi_\gamma : X \to X_\gamma$ suhtes. Seda topoloogiat nimetatakse *korrutistopoloogiaks,* tähistame teda tähega τ_Π. Olgu $\mathfrak{B}_\gamma$ LKR-i X_γ nulliümbruste baas, eeldame, et ta sisaldab kõik oma elementide positiivsed kordsed ja lõplikud ühisosad. Siis

$$\mathfrak{B} := \left\{\bigcap_{\gamma\in H} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \mid U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma,\ H \subset \Gamma \text{ on lõplik alamhulk}\right\}$$

on τ_Π-nulliümbruste baas (kontrollida!)✠.

Korrutistopoloogia olemuse paremaks mõistmiseks on kasulik järgmine fakt, mis tuleneb vahetult projektsioonide π_γ pidevusest.

Lause 11.4. *Otsekorrutise X elementide suunatud pere $(x^\alpha)_{\alpha\in A}$ koondub elemendiks x korrutistopoloogias τ_Π parajasti siis, kui $\lim\limits_{\alpha\in A} \pi_\gamma(x^\alpha) = \pi_\gamma(x)$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Lause 11.5. *Suunatud pere* $(x^\alpha)_{\alpha\in A}$ *on Cauchy pere otsekorrutises* (X, τ_Π) *parajasti siis, kui* $(\pi_\gamma(x^\alpha))_{\alpha\in A}$ *on Cauchy pere ruumis* (X_γ, τ_γ) *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Otsekorrutise üldiste omaduste uurimist alustame järgmise kahe väitega, mis tulenevad vahetult lausetest 11.2 ja 11.3.

Lause 11.6. *Olgu Z LKR. Lineaarne kujutus* $A\colon Z \to (X, \tau_\Pi)$ *on pidev parajasti siis, kui kujutus* $\pi_\gamma \circ A\colon Z \to X_\gamma$ *on pidev iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. Isesisvalt (vrd. lause 11.2)✠. ■

Lause 11.7. *Alamhulk* $E \subset X$ *on* τ_Π*-tõkestatud parajasti siis, kui tema projektsioon* $\pi_\gamma(E)$ *on tõkestatud LKR-s* X_γ *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. Isesisvalt (vrd. lause 11.3)✠. ■

Lause 11.8. *LKR* (X, τ_Π) *on eralduv parajasti siis, kui kõik LKR-d* X_γ *on eralduvad.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui oletada, et LKR X_{γ_0} ei ole eralduv mingi $\gamma_0 \in \Gamma$ korral, siis leidub $a \in X_{\gamma_0} \setminus \{0\}$, mis kuulub ühisossa $\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{B}_{\gamma_0}} U$. Kuid sel juhul kuulub element $j_{\gamma_0}(a)$, mis on nullist erinev vektorruumis X, kõikidesse nulliümbrustesse $V \in \mathfrak{B}$ ruumis X (põhjendada!)✠. Tähendab, (X, τ_Π) ei ole eralduv.

Piisavus tuleneb vahetult lausest 11.1 (vrd. seos (11.3)). ■

Lause 11.9. *Otsekorrutise* (X, τ_Π) *kinnine alamhulk E on täielik parajasti siis, kui tema projektsioon* $\pi_\gamma(E)$ *on täielik LKR-s* X_γ *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $E \subset X$ on τ_Π-täielik, olgu $(a^\alpha)_{\alpha\in A}$, kus $a^\alpha \in \pi_{\gamma_0}(E)$ iga $\alpha \in A$ korral, Cauchy pere LKR-s X_{γ_0}. Vaatleme peret $(j_{\gamma_0}(a^\alpha))_{\alpha\in A}$ ruumis X. Kuna $\pi_{\gamma_0}(j_{\gamma_0}(a^\alpha)) = a^\alpha$ ja $\pi_\gamma(j_{\gamma_0}(a^\alpha)) = 0$, kui $\gamma \neq \gamma_0$, siis $(j_{\gamma_0}(a^\alpha))$ on Cauchy pere hulgas E (vrd. lause 11.5). Seega $(j_{\gamma_0}(a^\alpha))$ koondub ruumis X mingiks punktiks $z \in E$, tänu projektsiooni π_{γ_0} pidevusele $a^\alpha \to \pi_{\gamma_0}(z) \in \pi_{\gamma_0}(E)$. Tähendab, $\pi_{\gamma_0}(E)$ on täielik hulk.

Piisavus. Olgu E selline kinnine alamhulk ruumis (X, τ_Π), et tema projektsioon $\pi_\gamma(E)$ on täielik hulk ruumis (X_γ, τ_γ) iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Suvalise Cauchy pere $(z^\alpha)_{\alpha\in A}$ puhul hulgas E on $(\pi_\gamma(z^\alpha))_{\alpha\in A}$ Cauchy pere hulgas $\pi_\gamma(E)$. Seega leiduvad punktid $z_\gamma \in \pi_\gamma(E)$, et $\pi_\gamma(z^\alpha) \to z_\gamma$ ruumis X_γ, seejuures $z^\alpha \to z = (z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}(\tau_\Pi)$. Kuna E on kinnine hulk, siis $z \in E$.

Lause on tõestatud. ■

Järeldus 11.10. *Täielike lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutis on täielik lokaalselt kumer ruum.*

Lause 11.11. *LKR-de* (X_γ, τ_γ), *kus* $\gamma \in \Gamma$, *projektiivne piir* $(X_0, \tau_{\text{proj}})$ *lineaarsete kujutuste* $v_\gamma\colon X_0 \to X_\gamma$ *suhtes, mis rahuldavad tingimust*

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\}\,,$$

on topoloogiliselt ja algebraliselt isomorfne nende ruumide otsekorrutise (X, τ_Π) *mingi alamruumiga.*

Tõestus. Defineerime lineaarse kujutuse

$$T\colon X_0 \to \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, \quad x \mapsto (v_\gamma(x)),$$

siis $v_\gamma = \pi_\gamma \circ T$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Kuna kujutused v_γ on pidevad, siis $T \in L(X_0, X)$ (vrd. lause 11.2). Seejuures $T^{-1}(\{0\}) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, s.t. $T : X_0 \to T(X_0)$ on üks-ühene kujutus. Saame seose $v_\gamma \circ T^{-1} = \pi_\gamma$, millest järeldub, et $T^{-1} \in L(T(X_0), X_0)$ (vrd. lause 11.2). Kokkuvõttes oleme näidanud, et projektiivne piir X_0 ning otsekorrutise X alamruum $T(X_0)$ on algebraliselt ja topoloogiliselt isomorfsed. ■

Pidades silmas näidet 11.5, saame lausest 11.11 järgmise järelduse.

Järeldus 11.12. *Iga eralduv lokaalselt kumer ruum on topoloogiliselt ja algebraliselt isomorfne normeeritud ruumide otsekorrutise alamruumiga.*

Selle artikli lõpuks märgime veel eelpool defineeritud kujutuste j_γ olulist rolli lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutise puhul.

Lause 11.13. *Olgu X LKR-de X_γ, kus $\gamma \in \Gamma$, otsekorrutis, mis on varustatud korrutistopoloogiaga τ_Π. Siis kujutus j_γ korraldab iga $\gamma \in \Gamma$ puhul LKR-i X_γ ja LKR-i (X, τ_Π) alamruumi $j_\gamma(X_\gamma)$ vahel topoloogilise ja algebralise isomorfismi. Kui kõik LKR-d X_γ on eralduvad, siis $j_\gamma(X_\gamma)$ on kinnine alamruum ruumis (X, τ_Π).*

Tõestus. Ülesande 11.2 kohaselt $\pi_v \circ j_\gamma \in L(X_\gamma, X_v)$, lause 11.2 põhjal $j_\gamma \in L(X_\gamma, X)$. Ülesandest 11.3 saame, et $j_\gamma^{-1} \in L(j_\gamma(X_\gamma), X_\gamma)$. Seega on j_γ topoloogiline ja algebraline isomorfism. Lõpuks, kui LKR-d X_γ on eralduvad, siis $\pi_v^{-1}(\{0\})$ on kinnine hulk ruumis X (põhjendada!)✠, mistõttu ka hulk $j_\gamma(X_\gamma) = \bigcap\limits_{v\in\Gamma, v\neq\gamma} \pi_v^{-1}(\{0\})$ on kinnine. ■

Lause 11.13 lubab meil samastada LKR-dena X_γ ja $j_\gamma(X_\gamma)$. Seega võime edaspidi vaadelda LKR-e X_γ otsekorrutise (X, τ_Π) alamruumidena, millel on parajasti üks ühine punkt 0. Kui ruumid X_γ on eralduvad, siis on nad kinnised alamruumid ruumis X. Märgime veel, et kui $\Delta \subset \Gamma$, siis $\prod\limits_{\gamma\in\Delta} X_\gamma$ on ruumi (X, τ_Π) alamruum, seejuures kinnine, kui kõik ruumid X_γ on eralduvad.

12 Induktiivsed piirid. Bornoloogilised ruumid

12.1 Induktiivse piiri topoloogia

LKR-de induktiivne piir. Me ***eeldame*** selles peatükis, et X on vektorruum ja (X_γ, τ_γ) on iga $\gamma \in \Gamma$ korral LKR üle sama korpuse $\mathbb{K}$ ning $u_\gamma \colon X_\gamma \to X$ on lineaarsed kujutused omadusega

$$X = \operatorname{span} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma \left(X_\gamma\right).$$

Definitsioon. Tugevaimat lokaalselt kumerat topoloogiat τ_{ind} vektorruumis X, mille suhtes kõik kujutused u_γ on pidevad, nimetatakse (LKR-de X_γ ja kujutustega u_γ määratud) *induktiivse piiri topoloogiaks.* LKR-i (X, τ_{ind}) nimetame sel juhul LKR-de (X_γ, τ_γ) *induktiivseks piiriks* (kujutuste u_γ suhtes).

Ülesanne 12.1. Tõestada, et ülaltoodud eeldustel induktiivse piiri topoloogia τ_{ind} vektorruumis X eksisteerib.

Induktiivse piiri topoloogia uurimisel on põhiküsimus, millised ruumide X_γ omadused on pärandatavad, s.o. kanduvad üle ruumi (X, τ_{ind}). Mainime kohe kahte omadust, mille puhul vastus on negatiivne, need on eralduvus ja metriseeruvus. Näiteks F-ruumide induktiivne piir ei ole üldjuhul F-ruum. Märgime asjaolu, et üldjuhul puudub sellise poolnormide süsteemi efektiivne kirjeldus, mis määrab induktiivse piiri topoloogia. Sellest hoolimata mängivad induktiivsed piirid väga olulist rolli nii teoorias kui ka paljudes rakendustes.

Me alustame **induktiivsete piiride lähemat uurimist** topoloogia τ_{ind} täpsema kirjeldusega.

Lause 12.1. *Absoluutselt kumer neelav alamhulk $U \subset X$ on τ_{ind}-nulliümbrus parajasti siis, kui $u_\gamma^{-1}(U)$ on nulliümbrus ruumis (X_γ, τ_γ) iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui U on τ_{ind}-nulliümbrus, siis $u_\gamma^{-1}(U)$ on τ_γ-nulliümbrus kujutuse u_γ pidevuse tõttu.

Piisavus. Olgu τ_U poolnormiga p_U (hulga U Minkowski funktsionaal) määratud lokaalselt kumer topoloogia VR-s X, sel juhul $\{\lambda U \mid \lambda > 0\}$ on τ_U-nulliümbruste baas. Kui $u_\gamma^{-1}(U)$ on nulliümbrus ruumis (X_γ, τ_γ), siis kujutus $u_\gamma \colon (X_\gamma, \tau_\gamma) \to (X, \tau_U)$ on pidev. Seega $\tau_U \subset \tau_{\text{ind}}$, s.t. U on τ_{ind}-nulliümbrus. ■

Lause 12.2. *Kui $\mathfrak{B}_\gamma$ on LKR-i X_γ absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosnev baas iga $\gamma \in \Gamma$ puhul, siis*

$$\mathfrak{B} := \left\{ \operatorname{absconv} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma \left(V_\gamma\right) \mid V_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma \right\}$$

on nulliümbruste baas LKR-s (X, τ_{ind}).

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et iga hulk

$$U := \operatorname{absconv} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma \left(V_\gamma\right) \in \mathfrak{B} \tag{12.1}$$

on τ_{ind}-nulliümbrus. See tuleneb lausest 12.1, sest

$$V_\delta \subset u_\delta^{-1}(u_\delta(V_\delta)) \subset u_\delta^{-1}\left(\operatorname{absconv}\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(V_\gamma)\right) = u_\delta^{-1}(U)$$

iga $\delta \in \Gamma$ ja iga sellise $V_\delta \in \mathfrak{B}_\delta$ korral, mis on hulga U esituses (12.1).

Näitame, et $\mathfrak{B}$ on τ_{ind}-nulliümbruste baas. Olgu $U \subset X$ suvaline absoluutselt kumer τ_{ind}-nulliümbrus. Iga $\gamma \in \Gamma$ korral on $u_\gamma^{-1}(U)$ siis τ_γ-nulliümbrus, seega saab valida $V_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ omadusega $V_\gamma \subset u_\gamma^{-1}(U)$, kust $u_\gamma(V_\gamma) \subset U$. Seetõttu $U \supset V := \operatorname{absconv}\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(V_\gamma)$ ning $V \in \mathfrak{B}$. Tähendab, $\mathfrak{B}$ on τ_{ind}-nulliümbruste baas. ■

Lause 12.1 lubab meil tõestada järgmise väite.

Lause 12.3. *Tünniruumide induktiivne piir on tünniruum.*

Tõestus. Olgu (X, τ_{ind}) LKR-de (X_γ, τ_γ) induktiivne piir kujutuste $u_\gamma\colon X_\gamma \to X$ suhtes, kus $\gamma \in \Gamma$. Kui U on tünn LKR-s (X, τ_{ind}), siis $u_\gamma^{-1}(U)$ on tünn ruumis X_γ (kontrollida!)✠ ning seega τ_γ-nulliümbrus. Lause 12.1 põhjal on U τ_{ind}-nulliümbrus. Tähendab, (X, τ_{ind}) on tünniruum. ■

Lause 12.4. *Olgu (Z, τ) mingi LKR ja (X, τ_{ind}) LKR-de (X_γ, τ_γ) induktiivne piir kujutuste $u_\gamma\colon X_\gamma \to X$ suhtes, kus $\gamma \in \Gamma$. Lineaarne kujutus $A\colon X \to Z$ on pidev parajasti siis, kui kujutus $A \circ u_\gamma\colon X_\gamma \to Z$ on iga $\gamma \in \Gamma$ korral pidev. Lineaarsete kujutuste hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on võrdpidev parajasti siis, kui $\{A \circ u_\gamma \mid A \in \mathfrak{A}\} \subset L(X_\gamma, Z)$ on võrdpidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Tõestus. Selge, et kui A on pidev, siis ka kompositsioon $A \circ u_\gamma$ on pidev. Kui eeldada kujutuste $A \circ u_\gamma$ pidevust iga $\gamma \in \Gamma$ korral, siis seosest

$$u_\gamma^{-1}\left(A^{-1}(V)\right) = (A \circ u_\gamma)^{-1}(V) \tag{12.2}$$

tuleneb, et $A^{-1}(V)$ on τ_{ind}-nulliümbrus iga absoluutselt kumera τ-nulliümbruse V puhul. See tähendabki kujutuse $A : (X, \tau_{\text{ind}}) \to (Z, \tau)$ pidevust.

Hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on võrdpidev parajasti siis, kui $\bigcap\{A^{-1}(V) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ on nulliümbrus ruumis (X, τ_{ind}) (selgitada!)✠. Seose (12.2) ja lause 12.1 tõttu on see samaväärne tingimusega, et alamhulk $\left\{(A \circ u_\gamma)^{-1}(V) \mid A \in \mathfrak{A}\right\}$ on τ_γ-nulliümbrus, s.t. $\{A \circ u_\gamma \mid A \in \mathfrak{A}\}$ on τ_γ-võrdpidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral. ■

Viimane lause annab meile võimaluse kirjeldada **induktiivse piiri topoloogiat polaartopoloogiana.** Selleks on mugav kasutada kaaskujutuse mõistet. Olgu $\langle X, X'\rangle$ ja $\langle Z, Z'\rangle$ duaalsed paarid. Lineaarse kujutuse $A\colon X \to Z$ *kaaskujutuseks* nimetatakse kujutust

$$A'\colon Z' \to X^*, \ \ g \mapsto g \circ A,$$

teiste sõnadega,

$$A'(g)(x) = g(A(x)) \ \text{ ehk } \ \langle x, A'(g)\rangle = \langle A(x), g\rangle \ \ (x \in X, \ g \in Z').$$

Ilmselt on $A'\colon Z' \to X^*$ lineaarne kujutus. Vahetu kontroll näitab, et $A'(Z') \subset X'$ parajasti siis, kui A on nõrgalt pidev, s.t. $A\colon (X, \sigma(X, X')) \to (Z, \sigma(Z, Z'))$ on pidev (veendudа!)✠.

Kui (X,τ) ja (Z,τ') on eralduvad LKR-d ja $A \in L(X,Z)$, siis A on nõrgalt pidev: suvalise $g \in Z'$ korral $g \circ A \in X'$, s.t. $A'(Z') \subset X'$. Seega on igal kujutusel $A \in L(X,Z)$ kaaskujutus A'.

Alamhulk $S \subset (X,\tau_{\text{ind}})'$ on τ_{ind}-võrdpidev parajasti siis, kui $u'_\gamma(S) = \{f \circ u_\gamma \mid f \in S\}$ on τ_γ-võrdpidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Teisalt, iga eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis Z on polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on kõigi τ-võrdpidevate alamhulkade $S \subset (Z,\tau)'$ süsteem (vrd. teoreem 9.4). Siit tuleneb järgmine lause.

Lause 12.5. *Kui LKR-d (X_γ,τ_γ) ja (X,τ_{ind}) on eralduvad, siis τ_{ind} on polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on kõigi selliste hulkade $S \subset (X,\tau_{ind})'$ süsteem, mille puhul $u'_\gamma(S) \subset X'_\gamma$ on τ_γ-võrdpidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Induktiivse piiri ja projektiivse piiri mõistete duaalsus selgub järgmisest lausest.

Lause 12.6. *Eeldame, et LKR-d (X_γ,τ_γ) ja (X,τ_{ind}) on eralduvad. Olgu igas kaasruumis $X'_\gamma := (X_\gamma,\tau_\gamma)'$ määratud polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\gamma}$, kus $\mathfrak{S}_\gamma$ on mingi $\sigma\left(X_\gamma, X'_\gamma\right)$-tõkestatud alamhulkade süsteem. Kui*

$$\mathfrak{S} := \left\{\bigcup_{k=1}^{n} u_{\gamma_k}(S_{\gamma_k}) \mid S_{\gamma_k} \in \mathfrak{S}_{\gamma_k},\ k = 1,\dots,n;\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

siis $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ on vektorruumis $X' = (X,\tau_{\text{ind}})'$ LKR-de $\left(X'_\gamma, \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\gamma}\right)$ projektiivne piir kaaskujutuste u'_γ suhtes.

Tõestus. Kuna $u_\gamma \in L(X_\gamma, X)$, siis $u'_\gamma \colon X' \to X'_\gamma$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Defineerime kaasruumis X' projektiivse piiri topoloogia τ_{proj} LKR-de $\left(X'_\gamma, \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\gamma}\right)$ ja kujutuste u'_γ suhtes. See on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia, mille suhtes kujutused u'_γ on pidevad ehk milles $\left(u'_\gamma\right)^{-1}\left((S_\gamma)^0\right)$ on nulliümbrused. Kuna $\left(u'_\gamma\right)^{-1}\left((S_\gamma)^0\right) = (u_\gamma(S_\gamma))^0$ (kontrollida!)✠, siis $\tau_{\text{proj}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ (põhjendada!)✠. ■

12.2 Bornoloogilised ruumid

Tõkestatud kujutused. Olgu (X,τ) ja (Z,τ') LKR-d ning $A\colon X \to Z$ lineaarne kujutus. Kui A on pidev, siis on ta tõkestatud, s.t. ta teisendab iga τ-tõkestatud hulga $E \subset X$ τ'-tõkestatud hulgaks $A(E)$ ruumis Z. Tõepoolest, kui V on mingi absoluutselt kumer nulliümbrus ruumis Z, siis kujutuse A pidevuse tõttu leidub selline nulliümbrus U ruumis X, et $U \subset A^{-1}(V)$, ning tänu hulga E tõkestatusele $\lambda E \subset U \subset A^{-1}(V)$ mingi $\lambda > 0$ korral. Siit tuleneb, et $\lambda A(E) = A(\lambda E) \subset V$, seega $A(E)$ on tõkestatud.

Kui X ja Z on normeeritud ruumid, siis kehtib teatavasti ka vastupidine väide: iga tõkestatud lineaarne kujutus on pidev. Need faktid on lähtekohaks järgmisele probleemiasetusele: kirjeldada selliseid LKR-e X, mille puhul iga tõkestatud lineaarne kujutus $A\colon X \to Z$ on pidev suvalise LKR-i Z korral.

Bornoloogiline ruum. Definitsioon. LKR-i (X,τ) nimetatakse *bornoloogiliseks ruumiks,* kui iga selline absoluutselt kumer alamhulk $U \subset X$, mis neelab kõik τ-tõkestatud hulgad, on τ-nulliümbrus.

Meenutame (vrd. art. 2.2), et väljendiga "U neelab hulga A" tähistame me (eeldusel, et U on tasakaalus) väidet "leidub selline $\lambda > 0$, et $\lambda A \subset U$". Märgime veel, et kuna iga lõplik alamhulk on tõkestatud, siis definitsioonis toodud omadusega hulk U on kindlasti neelav. Samal ajal ei pruugi U olla tünn, sest me ei eelda tema kinnisust.

Järgmine lause näitab, et bornoloogiliste ruumide klass sisaldab parajasti kõik soovitud omadusega lokaalselt kumerad ruumid.

Lause 12.7. *LKR-i (X, τ) puhul on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *(X, τ) on bornoloogiline ruum,*
(b) *iga tõkestatud lineaarne kujutus $A\colon X \to Z$ on iga LKR-i (Z, τ') korral pidev.*

Tõestus. (a) $\Rightarrow$ (b) Eeldame, et A on tõkestatud lineaarne kujutus bornoloogilisest ruumist X LKR-i Z. Olgu V absoluutselt kumer nulliümbrus ruumis Z. Näitame, et $A^{-1}(V)$ on τ-nulliümbrus, siis A on pidev. Olgu E tõkestatud alamhulk ruumis X. Kuna A on tõkestatud kujutus, siis $A(E)$ on ruumis Z tõkestatud ning seega $A(E) \subset \lambda V$ mingi $\lambda > 0$ korral, millest tuleneb sisalduvus $E \subset \lambda A^{-1}(V)$. Näeme, et absoluutselt kumer alamhulk $A^{-1}(V)$ neelab iga τ-tõkestatud alamhulga, olles seetõttu nulliümbrus bornoloogilises ruumis X. Niisiis on A pidev kujutus.

(b) $\Rightarrow$ (a) Olgu $U \subset X$ selline absoluutselt kumer alamhulk, mis neelab iga tõkestatud hulga ruumis X. Sel juhul on ta neelav ning tema Minkowski funktsionaal p_U on poolnorm vektorruumis X (vrd. järeldus 5.7). Vaatleme selles ruumis lisaks esialgsele topoloogiale τ veel poolnormiga p_U määratud lokaalselt kumerat topoloogiat τ_U, mille nulliümbruste baasiks on süsteem $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$. Paneme tähele, et iga τ-tõkestatud hulk $B \subset X$ on τ_U-tõkestatud (kontrollida!)✠, see tähendab ühikkujutuse $i\colon (X, \tau) \to (X, \tau_U)$ tõkestatust ja seega eelduse (b) kohaselt ka pidevust, mistõttu U on τ-nulliümbrus. ∎

Märgime bornoloogilise ruumi üht olulist omadust: *kui (X, τ) on eralduv bornoloogiline ruum, siis τ on Mackey topoloogia $\tau(X, X')$*, kus $X' := (X, \tau)'$. Selle väite kontrollimiseks paneme tähele, et ühikkujutus $i\colon (X, \tau) \to (X, \tau(X, X'))$ on tõkestatud, sest topoloogiatel τ ja $\tau(X, X')$ on Mackey teoreemi järelduse 9.11 kohaselt ühed ja samad tõkestatud hulgad. Lause 12.7 põhjal on i pidev kujutus, seetõttu $\tau \supset \tau(X, X')$. Kuna $\tau(X, X')$ on tugevaim neist lokaalselt kumeratest topoloogiatest, mis on duaalsusega $\langle X, X'\rangle$ kooskõlas (vrd. järeldus 9.8), siis kehtib ka vastupidine sisalduvus, ning kokkuvõttes seos $\tau = \tau(X, X')$.

Teatavasti (vt. lause 9.13) jääb siin tõestatud väide õigeks, kui selles asendada sõna *bornoloogiline* sõnaga *metriseeruv*. Nende **kahe mõiste vahekorda** selgitab järgmine lause.

Lause 12.8. *Iga metriseeruv lokaalselt kumer ruum on bornoloogiline.*

Tõestus. Olgu (X, τ) metriseeruv LKR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B} := \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mis rahuldab tingimust $U_{n+1} \subset U_n$. Oletame vastuväiteliselt, et X ei ole bornoloogiline. Siis leidub selline absoluutselt kumer hulk $U \subset X$, mis neelab kõik tõkestatud alamhulgad, kuid ei ole nulliümbrus, järelikult $U_n \not\subset U$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, mistõttu

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in U_n \setminus nU$$

(kontrollida!)✠. Kuna $x_n \to 0$ (põhjendada!)✠, siis hulk $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud, niisiis leidub $\lambda > 0$, et $\lambda x_n \in U$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul. Kui $n \geqslant \frac{1}{\lambda}$, siis $\frac{1}{n} x_n \in U$ ehk $x_n \in nU$, mis on vastuolus elementide x_n valikuga. Saadud vastuolu ütleb, et X on bornoloogiline ruum. ∎

Induktiivsete piiride kontekstis on oluline järgmine fakt.

Lause 12.9. *Bornoloogiliste ruumide induktiivne piir on bornoloogiline ruum.*

Tõestus. Olgu (X, τ_{ind}) bornoloogiliste ruumide (X_γ, τ_γ), kus $\gamma \in \Gamma$, induktiivne piir kujutuste $u_\gamma \colon X_\gamma \to X$ suhtes ja olgu AX $\to Z$ tõkestatud lineaarne kujutus, kus (Z, τ') on LKR. Kui E on tõkestatud hulk ruumis X_γ, siis tänu kujutuse u_γ pidevusele ning A tõkestatusele on $(A \circ u_\gamma)(E) = A(u_\gamma(E))$ tõkestatud hulk ruumis Z. Niisiis on $A \circ u_\gamma \colon X_\gamma \to Z$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral tõkestatud kujutus ja seega eelduse kohaselt pidev. Lause 12.4 põhjal on A pidev, mis tähendab ruumi (X, τ_{ind}) bornoloogilisust. ■

Lausetest 12.8 ja 12.9 tuleneb, et *metriseeruvate LKR-de induktiivne piir on bornoloogiline ruum.* Käesoleva artikli **põhitulemus**, mille me järgnevalt esitame, ütleb, et see väide on teatavas mõttes pööratav.

Teoreem 12.10. *Eralduv LKR (X, τ) on bornoloogiline parajasti siis, kui ta on normeeritud ruumide induktiivne piir. Täielik eralduv LKR (X, τ) on bornoloogiline parajasti siis, kui ta on Banachi ruumide induktiivne piir.*

Teoreem 12.10 järeldub vahetult järgmisest üldisemast lausest.

Lause 12.11. *Olgu (X, τ) eralduv LKR. Vektorruumis X on olemas tugevaim lokaalselt kumer topoloogia τ', millel on topoloogiaga τ ühed ja samad tõkestatud hulgad. Seejuures on (X, τ') bornoloogiline ruum ja ta on esitatav vektorruumi X vektoralamruumidest moodustatud normeeritud ruumide induktiivse piirina. Topoloogiad τ ja τ' langevad kokku parajasti siis, kui (X, τ) on bornoloogiline ruum. Kui (X, τ) on täielik LKR, siis (X, τ') on Banachi ruumide induktiivne piir.*

Tõestus. Tähistame tähega $\mathcal{S}$ kõigi kinniste tõkestatud absoluutselt kumerate alamhulkade süsteemi ruumis (X, τ). Suvalise $A \in \mathcal{S}$ korral olgu X_A tema lineaarne kate vektorruumis X, s.o. $X_A := \operatorname{span} A$. Hulga A Minkowski funktsionaal p_A on norm vektorruumis X_A. Me teame (vt. lause 9.12 tõestus), et normi p_A poolt määratud topoloogia τ_A on tugevam, kui indutseeritud topoloogia $\tau|_{X_A}$ alamruumil X_A, seetõttu sisestused

$$u_A \colon (X_A, \tau_A) \to (X, \tau), \quad x \mapsto x \quad (A \in \mathcal{S})$$

on pidevad ning $X = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} X_A = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} u_A(X_A)$. Olgu τ' induktiivse piiri topoloogia vektorruumis X LKR-de (X_A, τ_A) ja kujutuste u_A suhtes, kus $A \in \mathcal{S}$. Seejuures (X, τ') kui metriseeruvate lokaalselt kumerate ruumide induktiivne piir on bornoloogiline ruum. Kuna iga absoluutselt kumera τ-nulliümbruse U korral $u_A^{-1}(U) = U \cap X_A$ on τ_A-nulliümbrus ruumis X_A, siis lause 12.1 põhjal $\tau' \supset \tau$. Kui τ on seejuures bornoloogiline topoloogia, siis ühikkujutus $i \colon (X, \tau) \to (X, \tau')$ on pidev, mistõttu saame $\tau' = \tau$.

Seosest $\tau' \supset \tau$ tuleneb muuhulgas, et iga τ'-tõkestatud alamhulk on τ-tõkestatud. Meie eesmärgiks on veenduda, et neil topoloogiatel on samad tõkestatud hulgad. Kuna LKR-s on alamhulk tõkestatud parajasti siis, kui tema kinnine absoluutselt kumer kate on tõkestatud (selgitada!)✠, siis piisab näidata, et iga $A \in \mathcal{S}$ on τ'-tõkestatud (põhjendada!)✠. Selleks paneme tähele, et $A \in \mathcal{S}$ on τ'-tõkestatud parajasti siis, kui iga absoluutselt kumera τ'-nulliümbruse V korral leidub selline $\lambda > 0$, et $\lambda A \subset V \cap X_A$, mis on samaväärne tingimusega $\tau'|_{X_A} \subset \tau_A$ (selgitada!)✠. See tingimus on täidetud kujutuse u_A pidevuse tõttu (kontrollida!)✠.

Lõpuks näitame, et kui (X,τ) on täielik LKR, siis (X_A,τ_A) on Banachi ruum iga $A\in\mathcal{S}$ puhul. Olgu (x_n) suvaline Cauchy jada normeeritud ruumis X_A, siis on ta τ-Cauchy jada ruumis X, mistõttu ta koondub selles ruumis mingiks punktiks a. Cauchy jada definitsiooni kohaselt

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}: m,n\geqslant N\Rightarrow x_m-x_n\in\varepsilon A.$$

Kuna εA on τ-kinnine hulk, siis $a-x_n\in\varepsilon A$, millest tuleneb, et $a\in x_n+\varepsilon A\subset X_A$ ja $x_n\to a\,(\tau_A)$. Tähendab, (X_A,τ_A) on täielik. ■

Lõpetame selle peatüki kahe märkusega. Esiteks, lause 12.11 tõestuses võime kõigi kinniste tõkestatud absoluutselt kumerate alamhulkade süsteemi $\mathcal{S}$ asendada selle süsteemi suvalise fundamentaalsüsteemiga, s.o. niisuguse alamsüsteemiga $\mathcal{S}_0$, et iga $A\in\mathcal{S}$ jaoks leidub $B\in\mathcal{S}_0$ omadusega $B\supset A$. Siit tuleneb, et kui LKR-s (X,τ) on loenduv tõkestatud alamhulkade fundamentaalsüsteem, siis saab ta esitada loenduva normeeritud ruumide pere induktiivse piirina (vrd. art. 13.3).

Teiseks märgime, et bornoloogilise ruumi ja tünniruumi mõisted ei ole üldjuhul võrreldavad. Saab tuua näiteid bornoloogilistest ruumidest, mis ei ole tünniruumid ja vastupidi. Lausetest 12.3 ja 12.11 aga saame, et ***iga täielik eralduv bornoloogiline ruum on tünniruum*** (kontrollida!)✠.

13 Induktiivse piiri erijuhud: faktorruum, otsesumma, range induktiivne piir

13.1 Faktorruumid

Olgu X vektorruum ning M tema vektoralamruum. Defineerime ruumi X elementide vahel ekvivalentsusseose

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in M$$

ja tähistame X/M vastavate ekvivalentsiklasside hulga. Selle elemente tähistame tähtedega $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ Lihtne on veenduda, et X/M on vektorruum, kui defineerida

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \{x + y \mid x \in \mathbf{x},\, y \in \mathbf{y}\} \text{ ja } \lambda\mathbf{x} := \{\lambda x \mid x \in \mathbf{x}\} \quad (\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$$

(kontrollida!)✠, juhul $\lambda = 0$ olgu $0\mathbf{x} := M$. Ekvivalentsiklass M osutub vektorruumi X/M nullelemendiks: kuna iga $z \in \mathbf{x}+M$ korral $z = x+u$, kus $x \in \mathbf{x}$ ja $u \in M$, siis $z-x = u \in M$, s.t. $z \sim x$ ehk $\mathbf{x} + M = \mathbf{x}$.

Ekvivalentsiklassid $\mathbf{x} \in X/M$ katavad kogu vektorruumi X ning ei lõiku omavahel. Seetõttu määrab iga $x \in X$ üheselt elemendi $x + M \in X/M$. Defineerime kujutuse

$$k\colon X \to X/M, \quad x \mapsto x + M,$$

see on lineaarne ja sürjektiivne (selgitada!)✠.

Vektorruumi X/M nimetatakse vektorruumi X *faktorruumiks* vektoralamruumi M järgi, kujutust k nimetatakse faktorruumi X/M *kanooniliseks kujutuseks.*

Faktortopoloogia. Olgu (X, τ) LKR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}$, mis koosneb absoluutselt kumeratest hulkadest ja on kinnine lõplike ühisosade ja kordsete moodustamise suhtes. Vaatleme alamhulkade süsteemi

$$\mathfrak{B}' := \{k\,(U) \mid U \in \mathfrak{B}\}$$

vektorruumis X/M, pole raske näha, et see on mingi lokaalselt kumera topoloogia nulliümbruste baas: hulgad $k\,(U)$ on absoluutselt kumerad ja neelavad (kontrollida!)✠, peale selle on $\mathfrak{B}'$ kinnine lõplike ühisosade ja kordsete moodustamise suhtes.

Nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}'$ määratud lokaalselt kumerat topoloogiat τ' vektorruumis X/M nimetatakse *faktortopoloogiaks.* Kuna $U \subset k^{-1}\,(k\,(U))$ iga $U \in \mathfrak{B}$ korral, siis kanooniline kujutus $k\colon\; (X, \tau) \to (X/M, \tau')$ on pidev.

Lause 13.1. *Faktortopoloogia τ' on eralduv parajasti siis, kui M on kinnine vektoralamruum LKR-s (X, τ).*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui $(X/M, \tau')$ on eralduv, siis ühe-elelemendiline hulk $\{0_{X/M}\}$ on τ'-kinnine. Kujutuse k pidevuse tõttu on $M = k^{-1}\,(\{0\})$ kinnine ruumis X.

Piisavus. Olgu alamruum M kinnine ruumis X. Kui $\mathbf{x} \in (X/M) \setminus \{0\}$, siis iga $x \in \mathbf{x}$ korral $x \notin M$. Järelikult leidub $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $(x + U) \cap M = \varnothing$, mistõttu $x \notin M + U$ (vastasel juhul $x = m - u$ mingite $m \in M$ ja $u \in U$ korral ning $x + u \in (x + U) \cap M$), seega

$\mathbf{x} = k(x) \notin k(M+U) = k(U)$. Tähendab, $\bigcap \{k(U) \mid U \in \mathfrak{B}\} = \{0\}$, lause 2.7 kohaselt on topoloogia τ' eralduv. ■

Faktortopoloogia **kirjeldamiseks poolnormide abil** saab kasutada hulkade $k(U) \in \mathfrak{B}'$ Minkowski funktsionaale. Pidades silmas, et

$$\mathbf{x} \in \lambda k(U) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{x} : x \in \lambda U$$

(veenduda!)✠, saame seose

$$p_{k(U)}(\mathbf{x}) = \inf_{x \in \mathbf{x}} \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda U\} = \inf \{p_U(x) \mid x \in \mathbf{x}\}$$

iga $\mathbf{x} \in X/M$ puhul. Kui X on normeeritud ruum, siis

$$\|\mathbf{x}\| := \inf \{\|x\|_X \mid x \in \mathbf{x}\}$$

on norm (eeldusel, et M on kinnine alamruum) vektorrumis X/M.

Käesoleva peatüki kontekstis on oluline see fakt, et faktortopoloogiat võib vaadelda induktiivse piiri topoloogiana: topoloogia τ' on tugevaim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X/M, mille suhtes kujutus $k\colon X \to X/M$ on pidev. Tõepoolest, kui τ_1 on niisugune lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X/M, et $k\colon (X,\tau) \to (X/M,\tau_1)$ on pidev, siis iga $V \in \mathfrak{B}_{\tau_1}$ korral $k^{-1}(V)$ on τ-nulliümbrus, seega leidub selline $U \in \mathfrak{B}_\tau$, et $U \subset k^{-1}(V)$, millest tuleneb $k(U) \subset k(k^{-1}(V)) = V$. Tähendab, iga τ_1-nulliümbrus on τ'-nulliümbrus ehk $\tau_1 \subset \tau'$. (Märgime, et $k(k^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$ iga $\mathbf{z} \in X/M$ korral.)

Kui vektoralamruum M ei ole kinnine ruumis X, siis lause 13.1 kohaselt ei ole LKR $(X/M,\tau')$ eralduv, sõltumata sellest, kas ruum X on eralduv või mitte. Seega oleme saanud kinnituse eelmise peatüki alguses esitatud väitele, et ***eralduvus ei ole induktiivsetele piiridele pärandatav omadus***.

Lausest 12.3 saame faktorruumide järgmise omaduse.

Lause 13.2. *Tünniruumi X faktorruum X/M alamruumi M järgi on tünniruum.*

Lineaarsed kujutused faktorruumis. Olgu $T : X \to Z$ lineaarne kujutus, kus X ja Z on vektorruumid. Eeldame, et $M \subset T^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid T(x) = 0\}$. Siis $T = S \circ k$, kus

$$S : X/M \to Z, \quad \mathbf{x} \mapsto T(x) \quad (x \in \mathbf{x})$$

(peame silmas, et kui $x - x' \in M$, siis $T(x) = T(x')$). Kui X ja Z on sealjuures LKR-d, siis lause 12.4 põhjal on T pidev parajasti siis, kui S on pidev. Erijuhul saame järgmise väite.

Lause 13.3. *Iga lineaarne kujutus T LKR-st X LKR-i Z on esitatav kujul $T = S \circ k$, kus S on üksühene lineaarne kujutus faktorruumist $X/T^{-1}(\{0\})$ ruumi Z ja k on faktorruumi $X/T^{-1}(\{0\})$ kanooniline kujutus. Kujutus T on pidev parajasti siis, kui S on pidev.*

Tõestatud lause abil saame kirjeldada **faktorruumi kaasruumi**. Kehtib järgmine väide.

Lause 13.4. *Faktorruumi X/M topoloogiline kaasruum $(X/M,\tau')'$ on algebraliselt isomorfne alamruumi M annullaatoriga $M^\perp := \{f \in X' \mid \forall x \in M : f(x) = 0\}$ kaasruumis X'.*

Tõestus. Olgu $g \in (X/M, \tau')'$, siis $f := g \circ k \in X'$. Paneme tähele, et iga $x \in M$ puhul $f(x) = g(k(x)) = g\left(0_{X/M}\right) = 0$, s.t. $f \in M^{\perp}$. Defineerime kujutuse

$$F\colon\ (X/M, \tau')' \to M^{\perp},\ \ g \mapsto g \circ k,$$

vahetu kontroll näitab, et F on lineaarne. Sürjektiivsuse kontrollimiseks võtame suvalise $f \in M^{\perp}$ ja moodustame funktsionaali $g\colon X/M \to \mathbb{K}$, kus $g(\mathbf{x}) := f(x)$ iga $x \in \mathbf{x}$ korral. Siis lause 13.3 põhjal $g \in (X/M, \tau')'$, kusjuures $F(g)(x) = g(\mathbf{x}) = f(x)$ kõikide $x \in X$ korral, s.t. $F(g) = f$.

Lõpuks paneme tähele, et F on üks-ühene: kui $g \circ k = 0$, siis $g(\mathbf{x}) = 0$ iga $\mathbf{x} \in X/M$ korral ehk $g = 0$.

Kokkuvõttes korraldab F isomorfimi vektorruumide $(X/M, \tau')'$ ja $M^{\perp}$ vahel. ■

Juhime tähelepanu **vektoralamruumi ja faktorruumi mõistete duaalsusele**. Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar ja olgu M ruumi X selline vektoralamruum, mis eraldab punktid ruumis Y. Moodustame faktorruumi $Y/M^{\perp}$ (siin $M^{\perp} := \{f \in Y \mid \forall x \in M : f(x) = 0\}$) ning defineerime bilineaarse funktsionaali

$$B\colon M \times \left(Y/M^{\perp}\right) \to \mathbb{K},\quad (x, \mathbf{f}) \mapsto \langle x, \mathbf{f}\rangle := f(x)\,, \text{ kus } f \in \mathbf{f}$$

(paneme tähele, et kui $f \in \mathbf{f}$ ning $g \in \mathbf{f}$, siis $f(x) = g(x)$ kõikide $x \in M$ puhul). Lihtne kontroll näitab, et kui $\langle x, \mathbf{f}\rangle = 0$ iga $\mathbf{f} \in Y/M^{\perp}$ korral, siis $x = 0$. Seega on $\left\langle M, Y/M^{\perp}\right\rangle$ duaalne paar.

Lause 13.5. $\sigma\left(M, Y/M^{\perp}\right) = \sigma(M, Y) = \sigma(X, Y)\,|_M\,.$

Tõestus. Olgu $f_1, \ldots, f_n$ ruumi Y elemendid ja olgu $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in Y/M^{\perp}$ neile vastavad ekvivalentsiklassid. Kuna $|\langle x, \mathbf{f}_i\rangle| = |\langle x, f_i\rangle|$ suvaliste $x \in M$ ja $f_i \in \mathbf{f}_i$ puhul, siis nulliümbruste baasid topoloogiates $\sigma(M, Y)$ ja $\sigma\left(M, Y/M^{\perp}\right)$, mis koosnevad vastavalt hulkadest $W_{f_1,\ldots,f_n} = \{x \in M \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\langle x, f_i\rangle| \leqslant 1\}$ ja $W_{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n} = \{x \in M \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\langle x, \mathbf{f}_i\rangle| \leqslant 1\}$, langevad kokku (vrd. art. 8.1). ■

13.2 Topoloogilised otsesummad

Vektorruumide otsesumma. Olgu X_γ, kus $\gamma \in \Gamma$, vektorruumid üle sama korpuse $\mathbb{K}$, moodustame nende otsekorrutise $X := \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ ja selle alamhulga $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, täpsemalt $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma(X_\gamma)$, kus kujutus $j_\gamma\colon X_\gamma \to X$, $x_\gamma \mapsto (z_\nu)_{\nu\in\Gamma}$ on defineeritud seosega

$$z_\nu := \begin{cases} x_\gamma, & \text{kui } \nu = \gamma, \\ 0, & \text{kui } \nu \neq \gamma, \end{cases}$$

(vt. art. 11.2). Hulga $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma(X_\gamma)$ lineaarset katet

$$\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma := \operatorname{span} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma(X_\gamma)$$

nimetatakse vektorruumide X_γ (algebraliseks) *otsesummaks*. Vastavalt sellele definitsioonile moodustavad otsesumma $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ need elemendid otsekorrutisest $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, millel on lõplik arv nullist erinevaid koordinaate. Iga element $x \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ on esitatav kujul

$$x = \sum_{\gamma\in H} j_\gamma \circ \pi_\gamma (x), \text{ kus } \pi_\gamma \colon \prod_{\nu\in\Gamma} X_\nu \to X_\gamma, \quad (x_\nu) \mapsto x_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{13.1}$$

ja $H \subset \Gamma$ on mingi lõplik alamhulk.

Otsesumma topoloogia. Olgu $X := \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ ja $X_0 := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Varustame vektorruumi X korrutistopoloogiaga τ_Π, mille me defineerisime artiklis 11.2. Sealsamas tõestasime ka, et $j_\gamma (X_\gamma)$ kui LKR-i (X, τ_Π) alamruum on isomorfne LKR-ga (X_γ, τ_γ), seega võime öelda (samastades X_γ ja $j_\gamma (X_\gamma)$), et *korrutistopoloogia τ_Π indutseerib alamruumis X_γ selle lähtetopoloogia τ_γ*, s.t. $\tau_\Pi \big|_{X_\gamma} = \tau_\gamma$ iga $\gamma \in \Gamma$ puhul. Osutub, et korrutistopoloogia ei ole üldjuhul tugevaim lokaalselt kumer topoloogia selle omadusega. Tugevaima topoloogia saame siis, kui defineerime vektorruumil X_0 LKR-de X_γ induktiivse piiri topoloogia sisestuste j_γ suhtes, tähistame selle $\tau_\oplus$. LKR-i $(X_0, \tau_\oplus)$ nimetatakse LKR-de (X_γ, τ_γ) *(topoloogiliseks) otsesummaks*, topoloogiat $\tau_\oplus$ *otsesumma topoloogiaks*. Definitsiooni kohaselt $\tau_\oplus \supset \tau_\Pi |_{X_0}$. Seejuures kehtib järgmine väide.

Lause 13.6. *Iga lõpliku alamhulga $H \subset \Gamma$ korral* $\tau_\Pi \Big|_{\bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma} = \tau_\oplus \Big|_{\bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma}$.

Tõestus. Olgu $H \subset \Gamma$ mingi n elemendist koosnev alamhulk ning olgu $U \subset X_0$ suvaline kumer $\tau_\oplus$-nulliümbrus. Kuna $U \cap X_\gamma = j_\gamma^{-1} (U)$ on vastavalt lausele 12.1 τ_γ-nulliümbrus, siis

$$V := \frac{1}{n} \bigcap_{\gamma\in H} \pi_\gamma^{-1} (U \cap X_\gamma)$$

on τ_Π-nulliümbrus ruumis X (vrd. art. 11.1). Iga $x \in V$ ja $\gamma \in H$ korral $\pi_\gamma (x) \in \frac{1}{n} U$, seetõttu $x = \sum_{\gamma\in H} \pi_\gamma (x) \in \frac{1}{n} U + \ldots + \frac{1}{n} U \subset U$ tänu hulga U kumerusele. Niisiis,

$$V \cap \bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma \subset U \cap \bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma,$$

mis ütleb, et $\tau_\Pi \Big|_{\bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma} \supset \tau_\oplus \Big|_{\bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma}$. Kuna üldiselt kehtib vastupidine sisalduvus, siis saamegi, et alamruumis $\bigoplus_{\gamma\in H} X_\gamma$ langevad topoloogiad τ_Π ja $\tau_\oplus$ kokku. ■

Rõhutame, et lõpmatu alamhulga H puhul lause 13.6 ei kehti. Nimelt, kui fikseerida iga $\gamma \in H$ korral τ_γ-nulliümbrused $U_\gamma \neq X_\gamma$, siis $V := \bigcap_{\gamma\in H} \pi_\gamma^{-1} (U_\gamma)$ ei ole τ_Π-nulliümbrus, kuid on $\tau_\oplus$-nulliümbrus, sest iga $x \in V$ puhul

$$j_\gamma^{-1} (x) = \pi_\gamma (x) \in \pi_\gamma \circ \pi_\gamma^{-1} (U_\gamma) = U_\gamma \ \ (\gamma \in H).$$

Topoloogilise otsesumma eralduvus. Nagu me eespool märkisime, ei ole eralduvus induktiivsete piiride puhul üldjuhul pärandatav omadus. Järgmine lause näitab, et otsesummad moodustavad selles suhtes erandi.

Lause 13.7. *Topoloogiline otsesumma* $(X_0, \tau_\oplus)$ *on eralduv parajasti siis, kui iga ruum* X_γ *on eralduv. Sel juhul on alamruumid* X_γ *kinnised otsesummas* $(X_0, \tau_\oplus)$.

Tõestus. Kui $(X_0, \tau_\oplus)$ on eralduv, siis ka X_γ on eralduv iga $\gamma \in \Gamma$ korral, sest $\tau_\oplus$ indutseerib alamruumis X_γ selle lähtetopoloogia τ_γ. Kui eeldada, et kõik ruumid X_γ on eralduvad, siis korrutistopoloogia τ_Π vektorruumis X (vrd. lause 11.8) ja tema ahend $\tau_\Pi|_{X_0}$ on eralduvad. Tänu seosele $\tau_\oplus \supset \tau_\Pi|_{X_0}$ on siis ka $\tau_\oplus$ eralduv topoloogia. Lause 11.13 põhjal on alamruum X_γ kinnine topoloogias τ_Π, ammugi siis tugevamas topoloogias $\tau_\oplus$. ■

Lause 13.8. *Olgu otsesumma* $(X_0, \tau_\oplus)$ *eralduv LKR. Alamhulk* $E \subset X_0$ *on tõkestatud ruumis* X_0 *parajasti siis, kui ta sisaldub ruumide* X_γ *tõkestatud alamhulkade mingis lõplikus otsesummas.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $E \subset X_0$ $\tau_\oplus$-tõkestatud. Kuna $\pi_\gamma : (X_0, \tau_\oplus) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ on pidev kujutus iga $\gamma \in \Gamma$ korral, siis $\pi_\gamma(E)$ on τ_γ-tõkestatud. Näitame, et $\pi_\gamma(E) \neq \{0\}$ ainult lõpliku arvu indeksite γ puhul, siis, pidades silmas, et $E \subset \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \pi_\gamma(E)$, saamegi väite.

Oletame vastuväiteliselt, et $\pi_\gamma(E) \neq \{0\}$ lõpmata paljude indeksite γ korral. Siis saame valida indeksite jada (γ_n) ja elementide jada (x_n) omadusega $x_n \in \pi_{\gamma_n}(E) \setminus \{0\}$. Kuna LKR-d X_γ on eralduvad (vrd. lause 13.7), siis leiduvad absoluutselt kumerad nulliümbrused $U_{\gamma_n} \subset X_{\gamma_n}$ omadusega $x_n \notin nU_{\gamma_n}$. Võtame $U_\gamma := X_\gamma$, kui $\gamma \neq \gamma_n$, ning moodustame $\tau_\oplus$-nulliümbruse $U := \operatorname{absconv} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma(U_\gamma)$. Kuna $\pi_{\gamma_n}(U) \subset U_{\gamma_n}$ (põhjendada!)✠, siis nU ei sisalda hulka E ühegi n korral. See on vastuolus eeldusega hulga E tõkestatusest.

Piisavus. Kui $E \subset E_{\gamma_1} + \ldots + E_{\gamma_n}$, (täpsemalt $E \subset j_{\gamma_1}(E_{\gamma_1}) + \ldots + j_{\gamma_n}(E_{\gamma_n})$), kus E_{γ_k} on tõkestatud alamhulk ruumis X_{γ_k} iga $k = 1, \ldots, n$ korral, siis E on tõkestatud lõplikus otsesummas $\bigoplus_{k=1}^{n} X_{\gamma_k}$ ning seega ka ruumis $(X_0, \tau_\oplus)$. ■

Järeldus 13.9. *Eralduvas topoloogilises otsesummas* $(X_0, \tau_\oplus)$ *on kinnine alamhulk* E *kompaktne parajasti siis, kui ta sisaldub ruumide* X_γ *kompaktsete alamhulkade mingis lõplikus summas.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu E kompaktne alamhulk otsesummas $(X_0, \tau_\oplus)$. Nagu lause 13.8 tõestuses selgus, on E sel juhul lõpliku arvu projektsioonide $\pi_\gamma(E)$ otsesumma kinnine alamhulk, seejuures on $\pi_\gamma(E)$ kompaktsed hulgad.

Piisavus tuleneb sellest, et kompaktsete alamhulkade lõplik summa topoloogilises vektorruumis ja kompaktse hulga kinnine alamhulk on kompaktsed. ■

Otsekorrutise ja otsesumma mõistete duaalsus ilmneb järgmises teoreemis.

Teoreem 13.10. (a) *Topoloogilise otsesumma* $(X_0, \tau_\oplus)$ *kaasruum* $(X_0)'$ *on algebraliselt isomorfne kaasruumide* $(X_\gamma)'$ *otsekorrutisega, s.t.* $(X_0, \tau_\oplus)' = \prod_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma)'$.
(b) *Topoloogilise otsekorrutise* (X, τ_Π) *kaasruum* X' *on algebraliselt isomorfne kaasruumide* $(X_\gamma)'$ *otsesummaga, s.t.* $(X, \tau_\Pi)' = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma)'$.

Tõestus. (a) Lause 12.4 kohaselt on lineaarne funktsionaal $f\colon X_0 \to \mathbb{K}$ pidev parajasti siis, kui tema ahendid $f_\gamma := f\big|_{j_\gamma(X_\gamma)} = f \circ j_\gamma$ on pidevad iga $\gamma \in \Gamma$ puhul. Defineerime kujutuse

$$T\colon\ (X_0)' \to \prod_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma)',\ f \mapsto (f_\gamma),$$

tänu kujutuste j_γ lineaarsusele on see lineaarne. Kui $(g_\gamma) \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma)'$ on fikseeritud, defineerime funktsionaali

$$g\colon X_0 \to \mathbb{K},\ \ x \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma(x_\gamma)$$

(see summa sisaldab lõpliku arvu nullist erinevaid liidetavaid), siis $g \in (X_0)'$ ja $T(g) = (g_\gamma)$, niisiis on T sürjektiivne kujutus. Näitame, et T on üksühene. Olgu $T(f) = 0$. Kui oletada vastuväiteliselt, et $f \neq 0$, siis mingite $\gamma_0 \in \Gamma$ ja $a \in X_{\gamma_0}$ korral $f_{\gamma_0}(a) = f(j_{\gamma_0}(a)) \neq 0$ (selgitada!)✠. See on vastuolus eeldusega $T(f) = 0$. Kokkuvõttes korraldab T isomorfismi vektorruumide $(X_0)'$ ja $\prod_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)'$ vahel.

(b) Kui $f \in X'$, siis

$$f_\gamma := f\,\big|_{j_\gamma(X_\gamma)} = f \circ j_\gamma \in (X_\gamma)' \quad (\gamma \in \Gamma)$$

(selgitada!)✠, seega on määratud lineaarne kujutus

$$T\colon X' \to \prod_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)',\ \ f \mapsto (f_\gamma).$$

Näitame, et $T(X') \subset \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)'$. Olgu $f \in X'$, siis leidub $U \in \mathfrak{B}_X$, milles f on tõkestatud. Seejuures

$$U = \bigcap_{\gamma\in H}(\pi_\gamma)^{-1}(V_\gamma),$$

kus $H \subset \Gamma$ on lõplik ning $V_\gamma \in \mathfrak{B}_{X_\gamma}$. Kuna hulk $(\pi_\gamma)^{-1}(V_\gamma)$ on kujul

$$\left\{(x_\nu)_{\nu\in\Gamma} \mid x_\gamma \in V_\gamma,\, x_\nu \in X_\gamma\ \ (\nu \neq \gamma)\right\},$$

siis leidub vaid lõplik arv indekseid γ, mille korral $f_\gamma \neq 0$ (selgitada!)✠, s.t.

$$T(f) = (f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)'.$$

Lihtne on veenduda, et kujutus $T\colon X' \to \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)'$ on üksühene (kontrollida!)✠, sürjektiivsuse põhjenduseks võtame suvalise $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)'$ ja defineerime $g := \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma \circ \pi_\gamma$, siis $g \in X'$ (selgitada!)✠. Kuna seejuures $g \circ j_\gamma = g_\gamma$ (kontrollida!)✠, siis $T(g) = (g_\gamma)$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et T on isomorfism vektorruumide $(X, \tau_\Pi)'$ ja $\bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma)'$ vahel. ■

Olgu $\langle X_\gamma, Y_\gamma\rangle$, kus $\gamma \in \Gamma$, vektorruumide duaalsed paarid, moodustame otsekorrutise $X := \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ ja otsesumma $Y_0 := \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$. Bilineaarse funktsionaaliga

$$B\colon X \times Y_0 \to \mathbb{K}, \quad (x, f) \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x_\gamma)$$

(peame silmas, et see summa sisaldab lõpliku arvu nullist erinevaid liidetavaid) moodustavad X ja Y_0 duaalse paari (kontrollida!)✠. Kehtib järgmine lause.

Lause 13.11. *Nõrk topoloogia* $\sigma(X, Y_0)$ *on nõrkade topoloogiate* $\sigma(X_\gamma, Y_\gamma)$ *korrutistopoloogia.*

Tõestus. Olgu ξ mingi selline lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille puhul lineaarne funktsionaal

$$f\colon X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(x_\gamma)$$

on pidev iga $(u_\gamma) \in Y_0$ korral. Vaadeldavas summas on lõplik arv nullist erinevaid liidetavaid, seega on f pidev parajasti siis, kui $u_\gamma \circ \pi_\gamma\colon (X, \xi) \to \mathbb{K}$ on pidev iga $u_\gamma \in Y_\gamma$ ja $\gamma \in \Gamma$ korral. Teisisõnu,

$$f \in (X, \xi)' \quad \Leftrightarrow \quad [\pi_\gamma\colon (X, \xi) \to (X_\gamma, \sigma(X_\gamma, Y_\gamma)) \text{ on pidev iga } \gamma \in \Gamma \text{ korral}]\,.$$

Järelikult $\xi = \sigma(X, Y_0)$ parajasti siis, kui ξ on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia, mille suhtes kõik projektsioonid π_γ on pidevad, s.t. ξ on on nõrkade topoloogiate $\sigma(X_\gamma, Y_\gamma)$ korrutistopoloogia. ∎

13.3 Ranged induktiivsed piirid

Olgu X vektorruum ning olgu (X_n) tema vektoralamruumide selline jada, mis rahuldab tingimusi

$$X_n \subsetneqq X_{n+1} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ ja } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Seejuures eeldame veel, et (X_n, τ_n) on LKR ning

$$\tau_n = \tau_{n+1}|_{X_n} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Teiste sõnadega, me eeldame, et (X_n, τ_n) on LKR-i (X_{n+1}, τ_{n+1}) alamruum. Olgu τ_{ind} LKR-de (X_n, τ_n) ja sisestustega $i_n\colon X_n \to X$ määratud induktiivse piiri topoloogia vektorruumis X, s.o. tugevaim lokaalselt kumer topoloogia, mille korral sisestused i_n on pidevad. Sellistel eeldustel nimetatakse LKR-i (X, τ_{ind}) alamruumide (X_n, τ_n) *rangeks induktiivseks piiriks.*

Topoloogia τ_{ind} **omaduste uurimiseks** vajame järgmist lemmat.

Lemma 13.12. *Olgu* X_0 *LKR-i* X *alamruum. Alamruumi* X_0 *iga absoluutselt kumera nulliümbruse* V *jaoks leidub ruumis* X *absoluutselt kumer nulliümbrus* U *omadusega* $V = U \cap X_0$. *Kui* $x_0 \in X \diagdown \overline{X_0}$, *siis saab* U *valida nii, et* $x_0 \notin U$.

Tõestus. Kuna X_0 on LKR-i X alamruum, siis saab leida ruumis X absoluutselt kumera nulliümbruse W omadusega $W \cap X_0 \subset V$. Tähistame $U := \operatorname{absconv}(V \cup W)$, see on nulliümbrus ruumis X ja $V \subset U \cap X_0$. Vastupidise sisalduvuse tõestamiseks fikseerime suvalise $z = \lambda x + \mu y \in U \cap X_0$, kus $x \in V$, $y \in W$ ja $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$. Kui $\mu = 0$, siis $z = \lambda x \in V$ hulga V tasakaalustatuse tõttu. Kui $\mu \neq 0$, saame, et $y = \frac{1}{\mu} z - \frac{\lambda}{\mu} x \in X_0 - X_0 = X_0$, seega $y \in W \cap X_0 \subset V$, järelikult $z \in V$.

Kui $x_0 \in X \diagdown \overline{X_0}$, siis võib nulliümbruse W valida nii, et $(x_0 - W) \cap X_0 = \varnothing$, seega $x_0 \notin U$. Tõepoolest, seosest $x_0 \in U$ tuleneks, et $x_0 = \lambda x + \mu y$, kus $x \in V$, $y \in W$ ning $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$, kuid siis $x_0 - \mu y = \lambda x \in X_0$, mis on võimatu, sest $x_0 - \mu y \in x_0 - W$.

Lemma on tõestatud. ∎

Lause 13.13. *LKR-de (X_n, τ_n) range induktiivse piiri topoloogia τ_{ind} indutseerib igas alamruumis X_n selle esialgse topoloogia τ_n. Teisisõnu, $\tau_{\text{ind}}|_{X_n} = \tau_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul.*

Tõestus. Definitsiooni kohaselt $\tau_{\text{ind}}|_{X_n} \subset \tau_n$, tõestame vastupidise sisalduvuse. Olgu fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral V_n suvaline absoluutselt kumer nulliümbrus ruumis X_n, näitame, et on olemas τ_{ind}-nulliümbrus $U \subset X$ omadusega $U \cap X_n = V_n$.

Kuna $\tau_n = \tau_{n+1}|_{X_n}$, siis lemma 13.12 järgi leidub absoluutselt kumer τ_{n+1}-nulliümbrus $V_{n+1} \subset X_{n+1}$ omadusega $V_{n+1} \cap X_n = V_n$. Edasi leiame absoluutselt kumera τ_{n+2}-nulliümbruse $V_{n+2} \subset X_{n+2}$, et $V_{n+2} \cap X_n \subset V_{n+2} \cap X_{n+1} = V_{n+1}$ jne. Induktsioonimeetodil on võimalik suvalise $r \in \mathbb{N}$ puhul defineerida absoluutselt kumer τ_{n+r}-nulliümbrus $V_{n+r} \subset X_{n+r}$ omadusega $V_{n+r+1} \cap X_{n+r} = V_{n+r}$. Tähistame $U := \bigcup\limits_{r=0}^{\infty} V_{n+r}$, siis U on absoluutselt kumer neelav alamhulk, seejuures $U \cap X_{n+r} = V_{n+r}$, mistõttu $U \cap X_{n+r}$ on τ_{n+r}-nulliümbrus iga $r \geqslant 0$ korral. Seega U on τ_{ind}-nulliümbrus (vrd. lause 12.1). ■

Erinevalt üldistest induktiivsetest piiridest on **eralduvus range induktiivse piiri topoloogia suhtes pärandatav omadus**.

Lause 13.14. *Kui X_n on iga $n \in \mathbb{N}$ korral eralduv LKR, siis (X, τ_{ind}) on eralduv.*

Tõestus. Rakendame lauset 2.7. Olgu $x \in X \setminus \{0\}$, siis $x \in X_n$ mingi n korral ja leidub selline τ_n-nulliümbrus $V_n \subset X_n$, et $x \notin V_n$. Nagu me lause 13.13 tõestuses veendusime, leidub τ_{ind}-nulliümbrus $U \subset X$ omadusega $U \cap X_n = V_n$, seejuures $x \notin U$. ■

Kui E on tõkestatud alamhulk LKR-s X_n mingi n korral, siis $E \subset X$ ja on lause 13.13 põhjal τ_{ind}-tõkestatud. Nagu näitab järgnev lause, on kõik τ_{ind}-tõkestatud hulgad ruumis X just niimoodi kirjeldatavad.

Lause 13.15. *Olgu (X, τ_{ind}) selliste eralduvate LKR-de X_n range induktiivne piir, mille puhul X_n on ruumi X_{n+1} kinnine alamruum iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kui alamhulk $E \subset X$ on τ_{ind}-tõkestatud, siis sisaldub ta ruumis X_n mingi n korral ja on selles ruumis tõkestatud.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et τ_{ind}-tõkestatud alamhulk $E \subset X$ ei sisaldu üheski ruumis X_n. Siis saab leida hulga E elementide jada (y_n) ja indeksite jada (k_n) omadusega $y_n \in X_{k_{n+1}} \setminus X_{k_n}$. Kuna X_{k_n} on eralduv ja seejuures kinnine alamruum LKR-s $X_{k_{n+1}}$, siis vastavalt lemmale 13.12, saame iga $n \in \mathbb{N}$ puhul induktiivselt moodustada absoluutselt kumerate hulkade jada (V_{k_n}), kus V_{k_n} on τ_{k_n}-nulliümbrus, $V_{k_{n+1}} \cap X_{k_n} = V_{k_n}$ ja $y_n \notin nV_{k_{n+1}}$. Tähistame $U := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_{k_n}$, see on τ_{ind}-nulliümbrus (vrd. lause 13.13 tõestus) ja $\frac{1}{n} y_n \notin U$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul (veenduda!)✠, mis on vastuolus eeldusega hulga E τ_{ind}-tõkestatusest. Tähendab, E sisaldub ruumis X_n mingi n korral. Kuna $\tau_{\text{ind}}|_{X_n} = \tau_n$, siis E on τ_n-tõkestatud. ■

Järeldus 13.16. *Kui (X, τ_{ind}) on selliste eralduvate LKR-de X_n range induktiivne piir, mille puhul X_n on ruumi X_{n+1} kinnine alamruum iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis ta ei ole metriseeruv.*

Tõestus. Olgu $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ suvaline niisugune τ_{ind}-nulliümbruste loenduv süsteem ruumis X, mille puhul $U_{n+1} \subset U_n$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral valime elemendi $x_n \in U_n \setminus X_n$, niimoodi saame jada (x_n), lause 13.15 järgi ei ole see τ_{ind}-tõkestatud. Samal ajal on $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ iga hulga U_n poolt neelatav, seega ei ole $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ τ_{ind}-nulliümbruste baas. Niisiis, ruumis (X, τ_{ind}) ei ole loenduvat nulliümbruste baasi, s.t. ta ei ole metriseeruv. ■

Me lõpetame selle artikli näitega funktsiooniruumide rangest induktiivsest piirist. Eelnevalt märgime ilma tõestuseta, et täielike lokaalselt kumerate ruumide range induktiivne piir on alati täielik.

Näide 13.1. Olgu

$$X_n := \{x = x(t) \mid x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ on pidev ja } x(t) = 0 \text{ iga } t \in \mathbb{R} \setminus [-n, n] \text{ korral}\}$$

ning

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| \quad (x \in X_n,\ n \in \mathbb{N}).$$

Normiga $\| \ \|_\infty$ on X_n Banachi ruum. Moodustame kõigi hulgas $\mathbb{R}$ defineeritud komplekssete funktsioonide vektorruumis ühendi $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, see on kõigi kompaktse kandjaga pidevate funktsioonide $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vektorruum. Varustame selle induktiivse piiri topoloogiaga τ_{ind} ja paneme tähele, et tegemist on range induktiivse piiriga, kus X_n on kinnine alamruum ruumis X_{n+1} (kontrollida!)✠. Järelduse 13.16 ja näitele eelnenud märkuse kohaselt on (X, τ_{ind}) täielik mittemetriseeruv LKR. Alamhulk $E \subset X$ on τ_{ind}-tõkestatud parajasti siis, kui ta koosneb niisugustest funktsioonidest, millel on ühine kompaktne kandja ja mis on ühtlaselt tõkestatud hulgas $\mathbb{R}$.

Vaatleme vektorruumis X normiga $\| \ \|_\infty$ määratud topoloogiat τ_∞. Kuna ühikkujutus $i\colon (X_n, \tau_n) \to (X, \tau_\infty)$ on iga $n \in \mathbb{N}$ puhul pidev, siis ka $i\colon (X, \tau_{\text{ind}}) \to (X, \tau_\infty)$ on pidev kujutus, s.t. $\tau_{\text{ind}} \supset \tau_\infty$. Paneme tähele, et τ_∞-tõkestatud alamhulk $\{x \in X \mid \|x\|_\infty \leqslant 1\}$ ei ole τ_{ind}-tõkestatud (põhjendada!)✠, niisiis on τ_{ind} rangelt tugevam topoloogiast τ_∞, kuigi mõlemad indutseerivad alamruumides X_n ühe ja sama topoloogia τ_n.

Märgime, et selles näites vaadeldud LKR-i (X, τ_{ind}) kaasruum mängib olulist rolli mõõduteoorias, tema elemente $\mu \in (X, \tau_{\text{ind}})'$ nimetatakse *Radoni mõõtudeks* hulgas $\mathbb{R}$.

14 Topoloogiliste vektorruumide näiteid

Selles viimases peatükis tutvume mõnede olulisemate topoloogiliste vektorruumidega. See on lühike ja kirjeldav ülevaade, milles on sõnastatud vaid üksikud väited, kusjuures nende tõestused on enamasti vaid markeeritud, s.t. on esitatud vaid tõestuse skeem.

14.1 Lokaalselt tõkestatud ruumid L^p, kus $0 < p < 1$

Teatavasti nimetatakse lokaalselt tõkestatuks selliseid TVR-e, milles on tõkestatud nulliümbrus (vrd. art. 4.1). Kui U on tõkestatud tasakaalus nulliümbrus TVR-s X, siis süsteem $\left\{\frac{1}{n}U \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ on nulliümbruste baas. Kui U on seejuures ka kumer ja kinnine, siis on tegemist normeeritud ruumiga, kus U on ühikkera. Me vaatleme näidet sellistest lokaalselt tõkestatud TVR-dest, mis ei ole normeeruvad, s.t. ei ole lokaalselt kumerad.

Olgu $0 < p < 1$. Tähistame

$$L^p := L^p[0,1] := \left\{x = x(t) \mid x\colon\ [0,1] \to \mathbb{R} \text{ on mõõtuv ja } N(x) := \int_0^1 |x(t)|^p \,\mathrm{d}t < \infty\right\},$$

selle VR-i punktidena samastame funktsioonid, mis langevad kokku peaaegu kõikjal lõigus $[0,1]$. Kuna suvaliste $a, b \geqslant 0$ korral $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$, siis $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$, mistõttu seosega $d(x,y) := N(x-y)$ on määratud nihke suhtes invariantne meetrika vektorruumis L^p. Veelgi enam, see meetriline ruum on täielik, selle fakti tõestuse jätame siinkohal vahele.

Tähistame $B_r := \{x \in L^p \mid N(x) < r\}$, alamhulkade süsteem $\{B_r \mid r > 0\} = \{rB_1 \mid r > 0\}$ on nulliümbruste baas metriseeruvas TVR-s L^p. Paneme tähele, et

$$x \in B_1 \Leftrightarrow \int_0^1 |x(t)|^p \,\mathrm{d}t < 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(r^{\frac{1}{p}} |x(t)|\right)^p \mathrm{d}t < r \Leftrightarrow r^{\frac{1}{p}} x \in B_r \Leftrightarrow x \in \frac{1}{r^{\frac{1}{p}}} B_r,$$

seega

$$B_1 = \frac{1}{r^{\frac{1}{p}}} B_r \text{ iga } r > 0 \text{ korral,}$$

mis ütleb, et B_1 on tõkestatud nulliümbrus TVR-s L^p. Tähendab, L^p on iga $0 < p < 1$ puhul lokaalselt tõkestatud TVR.

Lause 14.1. *Kui $0 < p < 1$, siis TVR-s L^p on lahtisteks kumerateks alamhulkadeks vaid L^p ja $\varnothing$.*

Tõestus. Olgu $V \subset L^p$ suvaline mittetühi lahtine kumer hulk. Võime eeldada, et $0 \in V$ (vajaduse korral nihutame hulka V), s.t. V on nulliümbrus ruumis L^p. Seega $B_r \subset V$ mingi $r > 0$ puhul. Olgu $x \in L^p$ suvaline, leiame $n \in \mathbb{N}$ omadusega $n^{p-1}N(x) < r$. Vastavalt arvule n fikseerime punktid $t_0, \ldots, t_n$ nii, et
1) $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ ja
2) $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(t)|^p \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}N(x)$.
Sellise valiku võimalikkus tuleneb funktsiooni

$$I\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad I(s) := \int_0^s |x(t)|^p \,\mathrm{d}t$$

pidevusest: tegemist on monotoonselt kasvava pideva funktsiooniga, see saavutab kõik väärtused minimaalse väärtuse 0 ja maksimaalse väärtuse $N(x)$ vahel, seega ka väärtused $\frac{i}{n}N(x)$, kus $i = 1, ..., n$. Seetõttu saab arvud $t_0, \ldots, t_n$ (üheselt) määrata.

Tähistame

$$z_i(t) := \begin{cases} nx(t), & \text{kui } t_{i-1} < t \leqslant t_i, \\ 0, & \text{kui } t \notin (t_{i-1}, t_i], \end{cases}$$

ja paneme tähele, et

$$N(z_i) = n^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(t)|^p \, \mathrm{d}t = n^{p-1} N(x) < r,$$

s.t. $z_i \in B_r \subset V$ iga $i = 1, ..., n$ korral. Kuna V on kumer hulk, siis

$$x = \frac{1}{n}(z_1 + \ldots + z_n) \in V.$$

Me näitasime, et $V = L^p$. ■

Lausest 14.1 tuleneb järgmine tähelepanek.

Lause 14.2. *Olgu* $(0 < p < 1)$*. Kui* (Z, τ_Z) *on mingi eralduv LKR, siis* $L(L^p, Z) = \{0\}$*. Erijuhul* $Z = \mathbb{K}$ *saame, et* $(L^p)' = \{0\}$*, s.t. TVR-s* L^p *ei ole määratud ühtki mittetriviaalset pidevat lineaarset funktsionaali.*

Tõestus. Olgu W lahtine kumer nulliümbrus LKR-s Z. Kui $A \in L(L^p, Z)$, siis $A^{-1}(W)$ on kumer lahtine hulk ruumis L^p, mis lause 14.1 kohaselt saab olla kas $\varnothing$ või L^p. Ilmselt ei ole $A^{-1}(W)$ tühi hulk, sest $A(0) = 0 \in W$, järelikult

$$A^{-1}(W) = L^p \text{ iga } \tau_Z\text{-nulliümbruse } W \text{ korral.}$$

Seega

$$\{0\} \subset A(L^p) \subset \bigcap \{W \mid W \in \mathfrak{B}_Z\} = \{0\}$$

(siin $\mathfrak{B}_Z$ on mingi τ_Z-nulliümbruste baas ning viimane võrdus kehtib tänu eeldusele ruumi Z eralduvusest), s.t. $A(x) = 0$ iga $x \in L^p$ korral. ■

14.2 Pidevate funktsioonide ruumid

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mittetühi lahtine hulk. Siis saab leida loenduva arvu kompaktseid mittetühje alamhulki $K_n \subset \Omega$, et

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} K_n \quad \text{ja} \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1},$$

kus $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ on hulga K_{n+1} sisemus, s.t. tema sisepunktide hulk. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}_0$ korral

$$C(K_n) := \{x = x(t) \mid x \colon K_n \to \mathbb{K} \text{ on pidev}\},$$

see on Banachi ruum normiga

$$p_n(x) := \max\{|x(t)| \mid t \in K_n\}.$$

Edasi moodustame vektorruumi

$$C(\Omega) := \{x = x(t) \mid x\colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ on pidev}\}$$

ja paneme tähele, et $C(\Omega) \subset \bigcap \{C(K_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Defineerime vektorruumis $C(\Omega)$ lokaalselt kumera topoloogia poolnormide süsteemiga $\{p_n|_\Omega\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ja märgime, et see eraldab punktid ruumis $C(\Omega)$. Nimelt, kui $x \in C(\Omega)\setminus\{0\}$, siis mingi $t_0 \in \Omega$ korral $x(t_0) \neq 0$ ning $p_n(x) \geqslant |x(t_0)| > 0$, kui $t_0 \in K_n$. Niisiis on $C(\Omega)$ metriseeruv LKR, näitame, et ta on F-ruum.

Olgu (x_k) Cauchy jada ruumis $C(\Omega)$, s.t.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon p_n(x_k - x_l) = \max_{t\in K_n} |x_k(t) - x_l(t)| \to 0 \quad (k, l \to \infty).$$

Kuna (x_k) on Cauchy jada igas Banachi ruumis $C(K_n)$, siis

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists\, z^{(n)} \in C(K_n):\ p_n\left(x_k - z^{(n)}\right) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

s.t. $x_k(t) \to z^{(n)}(t)$ ühtlaselt hulgas K_n. Ühtlasest koonduvusest järeldub punktiviisi koonduvus iga $t \in K_n$ ja $n \in \mathbb{N}_0$ korral, seega punktiviisi koonduvus hulgas Ω, seejuures

$$z^{(n)}(t) = z^{(n+1)}(t) \quad (t \in K_n,\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Nii saame sellise pideva funktsiooni $x\colon \Omega \to \mathbb{K}$, et $x(t) := z^{(n)}(t)$, kui $t \in K_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Kuna $\lim_{k\to\infty} p_n(x_k - x) = 0$ iga $n \in \mathbb{N}_0$ korral, siis $x_k \to x$ LKR-s $C(\Omega)$. Kokkuvõttes on $C(\Omega)$ F-ruum.

14.3 Analüütiliste funktsioonide ruum

Olgu $\Omega \subset \mathbb{C}$ lahtine mittetühi hulk komplekstasandil tähistame

$$H(\Omega) := \{x \in C(\Omega) \mid x\colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ on analüütiline funktsioon}\}.$$

Meenutame, et kompleksmuutuja funktsiooni x nimetame analüütiliseks (ehk holomorfseks) piirkonnas Ω, kui ta on selles piirkonnas diferentseeruv ehk kui ta on selle piirkonna iga punkti ümbruses esitatav astmerea summana. Kompleksmuutuja funktsioonide teooriast teame, et kui analüütiliste funktsioonide jada koondub ühtlaselt kompaktses alamhulgas, siis ka piirväärtuseks olev funktsioon on analüütiline. Sellest faktist järeldub, et $H(\Omega)$ on kinnine alamruum F-ruumis $C(\Omega)$, niisiis on ka $H(\Omega)$ F-ruum.

Topoloogiliste vektorruumide teoorias nimetatakse *Monteli ruumiks* sellist tünniruumi, milles iga kinnine tõkestatud alamhulk on kompaktne. Selle omaduse, mida mõnikord nimetatakse ka Heine-Boreli omaduseks, seostamine Monteli nimega on põhjendatud asjaoluga, et F-ruumis $H(\Omega)$ järeldub nimetatud omadus klassikalisest Monteli teoreemist, mille kohaselt alamhulk $D \subset H(\Omega)$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui iga kinnise alamhulga $F \subset \Omega$ puhul leidub selline $M > 0$, et $|x(t)| \leqslant M$ kõikide $x \in D$ ja $t \in F$ korral.

14.4 Diferentseeruvate funktsioonide ruume

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ lahtine mittetühi hulk, olgu kompaktsed alamhulgad K_n fikseeritud nii nagu artiklis 14.2 ruumi $C(\Omega)$ defineerimisel. Olgu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ vektor, mille koordinaadid saavad väärtusi $0, 1, 2, \ldots$, sellist vektorit nimetatakse *multiindeksiks.* Fikseeritud α korral defineerime *diferentseerimisoperaatori*

$$\mathrm{D}^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)^{\alpha_m},$$

arvu

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$$

nimetatakse selle operaatori *astmeks.* Operaatori D^α rakendamiseks m muutuja funktsioonile $x = x(t) = x(t_1, ..., t_m)$ tuleb muutuja t_k järgi võtta α_k-järku osatuletis. Näiteks, kui $m = 2$, siis indeksi $\alpha = (2, 3)$ korral $\mathrm{D}^\alpha x = \frac{\partial^5 x}{\partial (t_1)^2 \partial (t_2)^3}$. Kui $|\alpha| = 0$, siis $\mathrm{D}^\alpha x = x$.

Tähistame

$$C^\infty(\Omega) := \{x = x(t) \mid x\colon \Omega \to \mathbb{K},\ \mathrm{D}^\alpha x \in C(\Omega) \text{ iga } \alpha \text{ korral}\}$$

ja defineerime selles vektorruumis poolnormid

$$p_N(x) := \max\{|\mathrm{D}^\alpha x(t)| \mid t \in K_N,\ \ |\alpha| \leqslant N\} \quad (N \in \mathbb{N}_0). \tag{14.1}$$

Märgime, et kuna funktsioonid $\mathrm{D}^\alpha x$ on kompaktses hulgas K_N pidevad, siis on nad tõkestatud ning maksimum eelnevas seoses (14.1) tõepoolest eksisteerib. Teiseks paneme tähele, et poolnormide süsteem $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}_0}$ eraldab punktid ruumis $C^\infty(\Omega)$. Nimelt, kui $x \in C^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$, siis $x(t_0) \neq 0$ mingi $t_0 \in \Omega$ korral, ja $p_N(x) \geqslant |x(t_0)| > 0$ niisuguse N puhul, mil $t_0 \in K_N$. Niisiis, poolnormide süsteem $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}_0}$ määrab vektorruumis $C^\infty(\Omega)$

metriseeruva lokaalselt kumera topoloogia. Näitame, et see on täielik.

Olgu (x_k) Cauchy jada ruumis $C^\infty(\Omega)$, siis iga $N \in \mathbb{N}_0$ puhul leidub selline $M_N \in \mathbb{N}$, et

$$k, l \geqslant M_N \Rightarrow p_N(x_k - x_l) < \frac{1}{N},$$

s.t.

$$|\mathrm{D}^\alpha x_k(t) - \mathrm{D}^\alpha x_l(t)| < \frac{1}{N}\ \ (t \in K_N,\ \ |\alpha| \leqslant N).$$

Seega iga fikseeritud α puhul on $(\mathrm{D}^\alpha x_k(t))_{k\in\mathbb{N}_0}$ Cauchy jada ühtlase koonduvuse mõttes kompaktses alamhulgas K_N. Teisisõnu, $(\mathrm{D}^\alpha x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ on Cauchy jada Banachi ruumis $C(K_N)$, järelikult eksisteerib $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{D}^\alpha x_k =: z_\alpha$ ruumis $C(K_N)$ ehk

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}^\alpha x_k(t) = z_\alpha(t) \text{ ühtlaselt hulgas } K_N.$$

Vaatleme erijuhtu $|\alpha| = 0$, siis $x_k(t) \to z_0(t)$. Kuna $\mathrm{D}^\alpha x_k \in C(K_N)$ ja $\mathrm{D}^\alpha x_k(t) \to z_\alpha(t)$ ühtlaselt hulgas K_N, siis saame, et

$$z_0 \in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{D}^\alpha z_0 = z_\alpha \text{ ning } x_k \to z_0 \text{ ruumis } C^\infty(\Omega).$$

Me oleme tõestanud, et $C^\infty(\Omega)$ on F-ruum.

Osutub, et $C^\infty(\Omega)$ on Monteli ruum. Selle väite tõestamiseks vajame me järgmist lemmat.

Lemma 14.3. *Olgu F-ruumi (X,τ) topoloogia määratud poolnormide süsteemiga $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kus $p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\ldots$ iga $x\in X$ korral, ja olgu (r_j) rangelt kasvav naturaalarvude jada. Kui igas hulgas $A\subset X$, mis on poolnormi $p_{r_{j+1}}$ suhtes tõkestatud, leidub poolnormi p_{r_j} suhtes Cauchy jada, siis X on Monteli ruum.*

Tõestus. Olgu $A\subset X$ τ-tõkestatud alamhulk, näitame, et ta on suhteliselt kompaktne. Kuna A on iga poolnormi p_n suhtes tõkestatud, siis leidub temas eelduse kohaselt mingi jada $(x_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$, mis poolnormi p_{r_2} suhtes on Cauchy jada. See jada on p_{r_3}-tõkestatud, seega saab temast eraldada osajada $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, mis p_{r_2} suhtes on Cauchy jada. Nii jätkates saame jadade süsteemi

$$\begin{array}{c}(x_{11},x_{12},x_{13},\ldots)\\(x_{21},x_{22},x_{23},\ldots)\\\ldots\\(x_{n1},x_{n2},x_{n3},\ldots)\\\ldots\end{array},$$

kus $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ on p_{r_n} suhtes Cauchy jada. Moodustame diagonaaljada (x_{nn}), see on Cauchy jada iga poolnormi p_{r_j} suhtes, seega kõikide poolnormide p_n suhtes, niisiis τ-Cauchy jada ja seega koonduv. Kokkuvõttes on A suhteliselt kompaktne hulk. ■

Lause 14.4. *F-ruum $C^\infty(\Omega)$ on Monteli ruum.*

Tõestus. Olgu $A\subset C^\infty(\Omega)$ selline alamhulk, mis on poolnormi p_N suhtes tõkestatud, s.t. leidub selline $M_N>0$, et $p_N(x)\leqslant M_N$ iga $x\in A$ korral. Näitame, et A on poolnormi p_{N-1} suhtes kompaktne. Suvalise α puhul, mis rahuldab tingimust $|\alpha|\leqslant N-1$, on $\mathrm{D}^\alpha x$ hulgas K_{N-1} pidevalt diferentseeruv funktsioon. Siis

$$|\mathrm{D}^\alpha x(t)-\mathrm{D}^\alpha x(t')|\leqslant M_N\|t-t'\|_{\mathbb{R}^m}\quad(t,t'\in K_{N-1}\subset\mathbb{R}^m),$$

siit tuleneb hulga $\{\mathrm{D}^\alpha x\mid x\in A\}$ võrdpidevus hulgas K_{N-1}: iga $\varepsilon>0$ korral valime $\delta:=\frac{\varepsilon}{M_N}$, siis

$$\|t-t'\|_{\mathbb{R}^m}<\delta\Rightarrow|\mathrm{D}^\alpha x(t)-\mathrm{D}^\alpha x(t')|\leqslant M_N\delta=\varepsilon \text{ iga } x\in A \text{ puhul.}$$

Samal ajal on hulk $\{\mathrm{D}^\alpha x\mid x\in A\}$ hulgas K_{N-1} ühtlaselt tõkestatud, seega Arzela-Ascoli teoreemi kohaselt ruumis $C(K_{N-1})$ suhteliselt kompaktne. Igast elementide jadast $(\mathrm{D}^\alpha x_k)$, kus $x_k\in A$ $(k\in\mathbb{N})$, saab eraldada ruumis $C(K_{N-1})$ koonduva osajada, poolnormi p_{N-1} suhtes on see Cauchy jada. Lemma 14.3 kohaselt on $C^\infty(\Omega)$ Monteli ruum. ■

Tähistame antud kompaktse hulga $K\subset\Omega$ puhul

$$\mathcal{D}_K:=\{x\in C^\infty(\Omega)\mid \mathrm{supp}x\subset K\}.$$

Osutub, et tegemist on F-ruumi $C^\infty(\Omega)$ kinnise alamruumiga. Tõepoolest, kui defineerida lineaarsed funktsioonid

$$f_t\colon C^\infty(\Omega)\to\mathbb{K},\ \ x\mapsto x(t)\qquad(t\in\Omega),$$

siis seosest $|x(t)|\leqslant p_N(x)$, mis kehtib iga $t\in K_N$ korral, tuleneb funktsiooni f_t pidevus. Pidevuse tõttu on $f_t^{-1}(\{0\})$ kinnine hulk, seega on ka $\mathcal{D}_K=\bigcap\left\{f_t^{-1}(\{0\})\mid t\in\Omega\setminus K\right\}$ kinnine ruumis $C^\infty(\Omega)$.

14.5 Distributsioonid

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ja $K_n \subset \Omega$ fikseeritud nii nagu eespool. Tähistame

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\Omega) &:= \{x \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} x \text{ on kompaktne hulgas } \Omega\} \\ &= \bigcup \{\mathcal{D}_K \mid K \subset \Omega \text{ on kompaktne}\}\end{aligned}$$

ja defineerime selles vektorruumis poolnormide süsteemi $(q_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ seostega

$$q_N(x) := \max\{|\mathrm{D}^\alpha x(t)| \mid t \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant N\}. \tag{14.2}$$

See süsteem eraldab punktid vektorruumis $\mathcal{D}(\Omega)$ ja määrab metriseeruva lokaalselt kumera topoloogia, mille tähelepanuväärseks omaduseks on, et igas alamruumis $\mathcal{D}_K$ indutseerib ta selle loomuliku F-topoloogia, mida me järgnevas tähistame τ_K. Kontrollime seda.

Iga kompaktse alamhulga $K \subset \Omega$ korral leidub niisugune N_0, et $K \subset K_N$ suvalise $N \geqslant N_0$ puhul, siis $q_N(x) = p_N(x)$ iga $x \in \mathcal{D}_K$ korral (vrd. (14.1)). Kuna $q_N(x) \leqslant q_{N+1}(x)$ ja $p_N(x) \leqslant p_{N+1}(x)$, siis vastava topoloogia määramisks ruumis $\mathcal{D}_K$ piisab poolnormidest $q_{N_0}, q_{N_0+1}, \ldots$ ning vastavalt $p_{N_0}, p_{N_0+1}, \ldots$. Siit on selge, et alamruumis $\mathcal{D}_K$ langeb $\mathcal{D}(\Omega)$ poolt indutseeritud topoloogia kokku tema F-topoloogiaga τ_K.

Poolnormidega (14.2) määratud topoloogias on $\mathcal{D}(\Omega)$ küll metriseeruv, kuid ei ole täielik. Toome lihtsa kontranäite juhul $m = 1$ ja $\Omega = \mathbb{R}$. Võtame sellise funktsiooni $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $\operatorname{supp} x = [0, 1]$ ja $x(t) > 0$, kui $t \in (0, 1)$, ja defineerime

$$z_n(t) := x(t-1) + \frac{1}{2}x(t-2) + \ldots + \frac{1}{n}x(t-n).$$

Jada (z_n) on poolnormide q_N suhtes Cauchy jada (kontrollida!)✠, kuid tema piirfunktsiooni kandja ei ole kompaktne.

Määrame vektorruumis $\mathcal{D}(\Omega)$ uue topoloogia. Olgu Γ kõigi selliste absoluutselt kumerate alamhulkade $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ süsteem, et $W \cap \mathcal{D}_K$ on τ_K-lahtine iga kompaktse alamhulga $K \subset \Omega$ korral. See süsteem on teatava lokaalselt kumera topoloogia τ nulliümbruste (pre)baas (lihtne on kontrollida, et iga $W \in \Gamma$ on neelav). Saab näidata, et selles topoloogias on iga Cauchy jada koonduv. See ja mitmed teised topoloogia τ tähelepanuväärsed omadused tulenevad asjaolust, et ta on alamruumide süsteemiga $\{\mathcal{D}_K\}$ ja sisestuskujutustega $i_K\colon \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$ defineeritud induktiivse piiri topoloogia.

Definitsioon. Pidevaid lineaarseid funktsionaale LKR-s $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ (s.t. kaasruumi $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)'$ elemente) nimetatakse *distributsioonideks* ehk *üldistatud funktsioonideks.*

Distributsioonide teooria on oluliselt avardanud funktsiooni mõistet. Idee ja motiivide paremaks mõistmiseks vaatleme jälle juhtu $m = 1$ ja $\Omega = \mathbb{R}$. Funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ nimetatakse lokaalselt integreeruvaks, kui ta on (Lebesgue'i mõttes) mõõtuv ja $\int_K |f(t)|\ \mathrm{d}t < \infty$ iga kompaktse alamhulga $K \subset \mathbb{R}$ korral. Iga lokaalselt integreeruva funktsiooni f ja $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ korral eksisteerib $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, x(t)\ \mathrm{d}t$, seejuures määrab see integraal funktsiooni f üheselt peaaegu kõikjal. Kui f on pidevalt diferentseeruv funktsioon, siis (tänu ositi integreerimise reeglile) kehtib võrdus

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\, x(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\, x'(t)\ \mathrm{d}t \text{ iga } x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ korral.} \tag{14.3}$$

Veelgi enam, kui $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, siis

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(t)\, x(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\, x^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t \ \ (x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\,. \tag{14.4}$$

Integraalid paremal pool võrdusmärki seostes (14.3) ja (14.4) eksisteerivad ja määravad teatavad lineaarsed funktsionaalid ruumis $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ka sel juhul, kui f ei ole diferentseeruv. Teisisõnu, me võime suvalisele lokaalselt integreeruvale funktsioonile f seada vastavusse ruumis $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ määratud lineaarse funktsionaali $\varphi^{(k)}$, kus $\varphi^{(k)}(x) := (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\, x^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t$ iga $k = 1, 2, \ldots$ puhul. Seda funktsionaali võib interpreteerida funktsiooni f k-ndat järku tuletisena teatavas üldisemas tähenduses. Seejuures funktsioonile f endale (s.o. 0-ndat järku tuletisele) vastab funktsionaal φ, kus $\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, x(t)\ \mathrm{d}t$. Distributsioonideks on eelpool toodud definitsiooni põhjal need funktsionaalid φ, mis on pidevad. Valem (14.3) sisaldab ka ideed, kuidas defineerida distributsioonide diferentseeruvus, ilmselt on mõistlik defineerida distributsiooni φ tuletis seosega $\varphi'(x) := -\varphi(x')$, kus $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

14.6 Jadaruumid

Nagu eespool, tähistame tähega ω kõigi arvjadade $x = (x_k)$ vektorruumi, tähega φ tema alamruumi, mis koosneb kõigist lõplikest jadadest, täpsemalt:

$$x \in \varphi \Leftrightarrow [\exists k_0 \in \mathbb{N}\colon k \geqslant k_0 \Rightarrow x_k = 0]\,.$$

Lihtne on näha, et $\varphi = \operatorname{span}\{e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, kus $e^k := (\delta_{ki})_{i \in \mathbb{N}}$. Eespool (vt. näide 4.3) me veendusime, et (ω, τ_ω) on F-ruum, kui temas topoloogia τ_ω määrata poolnormide süsteemiga $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, kus $r_k(x) := |x_k|$. Me teame ka (vt. ülesanne 8.1), et bilineaarne funktsionaal

$$\langle x, u\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \quad (x \in \omega,\ u \in \varphi)$$

korraldab vektorruumide ω ning φ vahel duaalsuse. Kuna rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ sisaldab antud juhul lõpliku arvu nullist erinevaid liikmeid, siis

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} \to x\ \ (\tau_\omega) \Leftrightarrow x_k^{(\alpha)} \to x_k\ \ (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow \forall u \in \varphi : \sum_k u_{k=1}^{\infty} x_k^{(\alpha)} \to \sum_k u_{k=1}^{\infty} u_k x_k \\ \Leftrightarrow x^{(\alpha)} \to x\ \ (\sigma(\omega, \varphi))\,, \end{aligned}$$

s.t. elementide pere $\left(x^{(\alpha)}\right)$ koondub topoloogias τ_ω parajasti siis, kui ta on $\sigma(\omega, \varphi)$-koonduv. Niisiis, $\tau_\omega = \sigma(\omega, \varphi)$. Pidades silmas lauset 8.1, mille kohaselt nõrgas topoloogias on kõik tõkestatud alamhulgad täielikult tõkestatud, saame tähelepanuväärse fakti: (ω, τ_ω) *on Monteli ruum.*

Jadaruumideks nimetatakse vektorruumi ω vektoralamruume. Jadaruumi E nimetatakse *soliidseks* ehk *normaalseks*, kui $ux := (u_k x_k) \in E$ suvaliste $x \in E$ ja $u \in \ell^{\infty}$ korral (meenutame, et ℓ^{∞} on kõigi tõkestatud arvjadade Banachi ruum). Jadaruumide duaalsete paaride defineerimiseks vaatleme antud jadaruumi $E \subset \omega$ puhul tema *α-kaasruumi*

$$E^{\alpha} := \left\{ u \in \omega \mid \forall x \in E : \ \sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| < \infty \right\}.$$

Selge, et $\varphi \subset E^\alpha$ ja $\langle E, \varphi\rangle$ ning $\langle E, E^\alpha\rangle$ on duaalsed paarid bilineaarse funktsionaaliga $\langle x, u\rangle := \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x_k$. Jadaruumi E omadusega $E = E^{\alpha\alpha} := (E^\alpha)^\alpha$ nimetatakse *perfektseks.* Lihtne on kontrollida, et perfektne jadaruum on soliidne.

Duaalse paariga $\langle E, E^\alpha\rangle$ on seotud nn. soliidne topoloogia. Tähistame iga $u \in E^\alpha$ korral

$$p_{|u|}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| \quad (x \in E),$$

siis $p_{|u|}\colon E \to \mathbb{R}$ on poolnorm ja süsteem $\left\{p_{|u|}\right\}_{u\in E^\alpha}$ eraldab punktid jadaruumis E. Selle süsteemiga määratud lokaalselt kumerat topoloogiat $\nu(E, E^\alpha)$ nimetataksegi *soliidseks topoloogiaks* jadaruumis E. Kuna $p_u(x) := \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| = p_{|u|}(x)$ suvaliste $u \in E^\alpha$ ning $x \in E$ puhul, siis $\sigma(E, E^\alpha) \subset \nu(E, E^\alpha)$ (peame silmas, et süsteem $\{p_u\}_{u\in E^\alpha}$ määrab nõrga topoloogia $\sigma(E, E^\alpha)$). Näitame, et soliidne topoloogia $\nu(E, E^\alpha)$ on duaalsusega $\langle E, E^\alpha\rangle$ kooskõlas, s.t. (vrd. teoreem 9.7) $\sigma(E, E^\alpha) \subset \nu(E, E^\alpha) \subset \tau(E, E^\alpha)$.

Tähistame $\Phi := \{\mathcal{F} \subset \mathbb{N} \mid \mathcal{F}$ on lõplik$\}$ ja moodustame antud $x \in E$ korral summad

$$\sum_{k\in\mathcal{F}} x_k e^k \quad (\mathcal{F} \in \Phi).$$

Need moodustavad suunatud pere $\left(\sum\limits_{k\in\mathcal{F}} x_k e^k\right)_{\mathcal{F}\in\Phi}$, kus hulk Φ on suunatud sisalduvuse järgi. Kuna

$$\lim_{\mathcal{F}\in\Phi} p_{|u|}\left(x - \sum_{k\in\mathcal{F}} x_k e^k\right) = \lim_{\mathcal{F}\in\Phi} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{F}} |u_k x_k| = 0,$$

siis $\lim\limits_{\mathcal{F}\in\Phi} \sum_{k\in\mathcal{F}} x_k e^k = x$ topoloogias $\nu(E, E^\alpha)$. Iga $f \in (E, \nu(E, E^\alpha))'$ korral

$$f(x) = \lim_{\mathcal{F}\in\Phi} \sum_{k\in\mathcal{F}} u_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \quad \left(x \in E,\ u \in E^\beta\right),$$

s.t. $(E, \nu(E, E^\alpha))' \subset E^\alpha$. Vastupidine sisalduvus tuleneb sellest, et $\sigma(E, E^\alpha) \subset \nu(E, E^\alpha)$ ja $(E, \sigma(E, E^\alpha))' = E^\alpha$, kokkuvõttes $(E, \nu(E, E^\alpha))' = E^\alpha$.

Olgu $u = (u_k) \in E^\alpha$ selline jada, et $u_k \neq 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Paneme tähele, et

$$\{u\}^\alpha = \left\{x \in \omega \mid \sum_k |u_k x_k| < \infty\right\} = \left\{\left(\frac{1}{u_k} z_k\right) \mid z \in \ell\right\} =: \frac{1}{u}\ell.$$

Defineerides kujutuse

$$I\colon\ \{u\}^\alpha \to \ell, \quad x \mapsto (u_k x_k),$$

saame bijektsiooni vektorruumide $\{u\}^\alpha$ ja ℓ vahel. Kui varustada $\{u\}^\alpha$ normiga p, kus

$$p(x) := \|(u_k x_k)\|_1 = \sum_k |u_k x_k| \quad (x \in \{u\}^\alpha),$$

siis I on isomeetriline isomorfism.

Kui loobuda nõudest, et $u_k \neq 0$ kõikide $k \in \mathbb{N}$ korral, siis $\{u\}^\alpha$ ei pruugi olla Banachi ruum, kuid ta on F-ruum, mille topoloogia määratakse poolnormide süsteemiga $\{p, r_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Olgu $A = \left(a^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_k^{(n)}\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$ jadade jada (ehk lõpmatu maatriks), mis rahuldab tingimusi
1) $a_k^{(n+1)} \geqslant a_k^{(n)} \geqslant 0 \quad (n, k \in \mathbb{N})$,
2) $\sup\left\{a_k^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\} > 0 \quad (k \in \mathbb{N})$.
Tähistame

$$\lambda(A) := \left\{x \in \omega \mid \forall n \in \mathbb{N} : \sum_k \left|a_k^{(n)} x_k\right| < \infty\right\} = \bigcap \left\{\left\{a^{(n)}\right\}^\alpha \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

ja varustame selle jadaruumi poolnormide süsteemiga $\left\{p^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, kus

$$p^{(n)}(x) := \sum_k a_k^{(n)} |x_k| < \infty \quad (x \in \lambda(A)).$$

Saadud jadaruum $\lambda(A)$ on loenduva arvu F-ruumide $\left\{a^{(n)}\right\}^\alpha$ ühisosaks, seejuures on ruumi $\left\{a^{(n)}\right\}^\alpha$ F-topoloogia määratud poolnormide süsteemiga $\left\{p^{(n)}, r_j \mid j \in \mathbb{N}\right\}$. Tänu eeldusele 2) on poolnormide süsteemid $\left\{p^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja $\left\{p^{(n)}, r_j \mid j, n \in \mathbb{N}\right\}$ jadaruumis $\lambda(A)$ samaväärsed, seega määratakse F-topoloogia poolnormide süsteemiga $\left\{p^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nii defineeritud F-ruumi nimetatakse *Köthe jadaruumiks.*

Lihtne on veenduda, et $\lambda(A)$ on perfektne, s.t. $\lambda(A) = \lambda(A)^{\alpha\alpha}$. Saadud F-topoloogia on soliidne topoloogia. Veelgi enam, saab näidata, et iga perfektne jadaruum, mille soliidne topoloogia, on F-topoloogia on esitatav Köthe jadaruumina.