7. **Filter.** Olgu X hulk.

Def 7.1. Öeldakse, et $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filter* hulgas X, kui

(1) $\varnothing \notin \mathfrak{F}$;
(2) $A, B \in \mathfrak{F} \implies A \cap B \in \mathfrak{F}$;
(3) $A \in \mathfrak{F},\ A \subset B \subset X \implies B \in \mathfrak{F}$.

Öeldakse, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filtri baas* hulgas X, kui

(1) $\varnothing \notin \mathfrak{B}$;
(2) $\forall A, B \in \mathfrak{B} \quad \exists C \in \mathfrak{B} \quad C \subset A \cap B$. – directed downwards

Märkus. Kui $\mathfrak{B}$ on filtri baas hulgas X, siis

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} = \{D \subset X \colon \exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subset D\}$$

on filter hulgas X.

Näide 7.1. 1) Olgu $a \in \mathbb{R}$. Eelmise näite põhjal on hulgas $\mathbb{R}$ filtri baas kõigi vahemike $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ hulk ($\varepsilon > 0$). Ka järgmised hulgad on filtri baasid hulgas $\mathbb{R}$:

(1) $\{(a, a+\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$;
(2) $\{[a, a+\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$;
(3) $\{(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$.

2) Hulk $\{[x, \infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ on filtri baas hulgas $\mathbb{R}$.

3) Hulk $\{\{n, n+1, n+2, \dots\} \colon n \in \mathbb{N}\}$ on filtri baas hulgas $\mathbb{N}$.

4) Olgu $A \subset X$ mittetühi alamhulk. Kõigi hulka A sisaldavate alamhulkade kogum on filter hulgas X.

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Näide 7.2. Kui $x \in X$, siis punkti x kõigi ümbruste hulk $\mathfrak{N}_x$ on filter ja punkti x ümbruste baas on filtri baas.

Def 7.2. Olgu $x \in X$ ja $\mathfrak{F}$ filter hulgas X. Öeldakse, et *filter* $\mathfrak{F}$ *koondub punktiks* x, kui punkti x iga ümbruse U korral $U \in \mathfrak{F}$. Sel juhul kirjutatakse $\mathfrak{F} \to x$.

Olgu $\mathfrak{B}$ filtri baas. Öeldakse, et *filtri baas* $\mathfrak{B}$ *koondub punktiks* x, kui filter $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ koondub punktiks x, s.t. punkti x iga ümbruse U korral leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $B \subset U$. Sel juhul kirjutatakse $\mathfrak{B} \to x$.

Märkus. Kui $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{G}$ on filtrid topoloogilises ruumis (X, τ), $x \in X$, $\mathfrak{F} \to x$ ja $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, siis $\mathfrak{G} \to x$.

Kui on teada punkti x ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$, siis filtri või filtri baasi koondumiseks piisab vaadelda juhtu, kus $U \in \mathfrak{B}_x$.

Näide 7.3. Punkti $x \in X$ kõigi ümbruste filter $\mathfrak{N}_x$ koondub punktiks x ning punkti x ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$ kui filtri baas koondub punktiks x.

Lause 7.1. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $x \in X$ ja $A \subset X$. Siis $x \in \operatorname{Cl} A$ parajasti siis, kui leidub filtri baas hulgas A, mis koondub punktiks x.

Tõestus. $(\Rightarrow)$ Olgu $x \in \operatorname{Cl} A$. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas. Võtame $\mathfrak{B} = \{A \cap B \colon B \in \mathfrak{B}_x\}$. Ilmselt on $\mathfrak{B}$ filtri baas, kusjuures $\mathfrak{B} \to x$.

$(\Leftarrow)$ Olgu U punkti x suvaline ümbrus. Eelduse kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $B \subset U$. Kuna $\varnothing \neq B \subset A$, siis järelikult $A \cap U \neq \varnothing$. □

Lause 7.2. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f \colon X \to Y$. Olgu $x \in X$. Kujutus f on pidev punktis x parajasti siis, kui hulgas X iga punktiks x koonduva filtri baasi $\mathfrak{B}$ korral filtri baas $f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \colon B \in \mathfrak{B}\}$ koondub punktiks $f(x)$.

Tõestus. $(\Rightarrow)$ Olgu $\mathfrak{B}$ filtri baas hulgas X. Eeldame, et $\mathfrak{B} \to x$. Olgu V punkti $f(x)$ ümbrus. Kui f on pidev punktis x, siis leidub punkti x ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$. Eelduse kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $B \subset U$, seega $f(B) \subset V$. Järelikult $f(\mathfrak{B}) \to f(x)$.

$(\Leftarrow)$ Kui $\mathfrak{B}_x$ on punkti x ümbruste baas, siis $f(\mathfrak{B}_x) \to f(x)$, sest $\mathfrak{B}_x \to x$. Seega punkti $f(x)$ iga ümbruse V korral leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $f(B) \subset V$. Järelikult on f pidev punktis x. □

Ülesanne 7.1. Tõestada, et kui $\mathfrak{B}$ on filtri baas hulgas X, siis

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} = \{A \subset X \colon \exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subset A\}$$

on filter hulgas X.

Ülesanne 7.2. Olgu X ja Y hulgad ning $f \colon X \to Y$. Tõestada, et kui $\mathfrak{B}$ on filtri baas hulgas X, siis $\mathfrak{C} = \{f(B) \colon B \in \mathfrak{B}\}$ on filtri baas hulgas Y.

Ülesanne 7.3. Olgu $\mathfrak{B} = \{(n, \infty) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Tõestada, et filtri baas $\mathfrak{B}$ ei koondu hulgas $\mathbb{R}$.

Ülesanne 7.4. Kirjutada välja Sierpinski ruumi kõik filtrid ja nende piirväärtused.

Filtrite ja perede vahekord. Mis tahes filter $\mathfrak{F}$ hulgas X on suunatud hulk (tagurpidi sisalduvuse suhtes).

Lause 7.3. Olgu $\mathfrak{F}$ filter hulgas X ja $x \in X$. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{F} \to x$;
(2) iga pere $f \colon \mathfrak{F} \to X$, $f(A) = x_A \in A$, korral $x_A \to x$.

Tõestus. $(\Rightarrow)$ Olgu U punkti x ümbrus. Eelduse kohaselt $U \in \mathfrak{F}$. Kui $A \in \mathfrak{F}$ ja $U \preceq A$ (s.t. $A \subset U$), siis $x_A \in A \subset U$.

($\Leftarrow$) Oletame, et $\mathfrak{F} \not\to x$. Mistõttu leidub punkti x selline ümbrus U, et $U \notin \mathfrak{F}$. Valime iga $A \in \mathfrak{F}$ korral $x_A \in A \setminus U$. Ilmselt $x_A \not\to x$, mis on vastuolu. $\square$

Lause 7.4. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ pere hulgas X ja $x \in X$. Samaväärsed on:

(1) $x_\alpha \to x$;

(2) filter $\mathfrak{F} = \{A \subset X \colon \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \quad \alpha_0 \preceq \alpha \implies x_\alpha \in A\}$ koondub punktiks x.

eventuality filter of (x_α)

Tõestus. Tingimus $x_\alpha \to x$ on samaväärne sellega, et punkti x iga ümbrus $U \in \mathfrak{F}$ ehk $\mathfrak{F} \to x$. $\square$

$x_n \to x$

$\forall U \in \mathcal{U}_x$ $\exists N_0$ $\forall n \geq N_0$ $x_n \in U$

$\forall U \in \mathcal{U}_x$ $\exists \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $x_\alpha \in U$

$\forall U \in \mathcal{U}_x$ $\exists$ tail $\in$ Tail$(x_\alpha$

tail $\subset U$

$\forall U \in \mathcal{U}_x$ $U \in \mathfrak{F}$

$\Downarrow$

$\mathcal{U}_x \subset \mathfrak{F}$

$$\boxed{\mathfrak{F} \to x \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{U}_x \subset \mathfrak{F}}$$